



HAL
open science

La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est libre

Pascal Boyer

► **To cite this version:**

| Pascal Boyer. La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est libre. 2014. hal-01492074v2

HAL Id: hal-01492074

<https://hal.science/hal-01492074v2>

Preprint submitted on 31 Aug 2018 (v2), last revised 2 Jul 2021 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA COHOMOLOGIE DES ESPACES DE LUBIN-TATE EST LIBRE

par

Pascal Boyer

Résumé. — Le résultat principal de ce travail est l'absence de torsion dans la $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -cohomologie de la tour de Lubin-Tate. Comme dans [7], la stratégie est globale et repose sur l'étude de la filtration de stratification du faisceau pervers des cycles évanescents de certaines variétés de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor, dont les gradués se décrivent comme une extension intermédiaires de systèmes locaux construits dans [13]. Le point crucial consiste à décrire la différence entre ces extensions pour les deux t -structures usuelles p et $p+$. Pour ce faire, on utilise la théorie des dérivées pour les représentations du groupe mirabolique d'après [5].

Abstract (The cohomology of Lubin-Tate spaces is free). — The principal result of this work is the freeness in the $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -cohomology of the Lubin-Tate tower. As in [7], the strategy is of global nature and relies on studying the filtration of stratification of the perverse sheaf of vanishing cycles of some Shimura varieties of Kottwitz-Harris-Taylor types, whose graduates can be explicitated as some intermediate extension of some local system constructed in [13]. The crucial point relies on the study of the difference between such extension for the two classical t -structures p and $p+$. The main ingredients use the theory of derivative for representations of the mirabolic group in [5].

Introduction

Dans [7], nous avons explicité les groupes de cohomologie à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ de la tour de Lubin-Tate en étudiant le faisceau pervers $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$ des cycles évanescents d'une tour de variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor $X_{\mathcal{I}}$, cf. [13], en une place v de son corps reflex F . Le passage du global vers le local est fourni par un analogue du théorème de Serre-Tate couplé au théorème de comparaison de Berkovich. Le but de ce travail est de donner

Classification mathématique par sujets (2010). — 14L05, 11F80, 11F55, 11F70, 11G10, 11G18.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, stratification, catégories quasi-abéliennes, théorie de torsion.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

une $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -version de ces résultats en élucidant *du côté global* la structure du faisceau pervers $\Psi_{\mathcal{I}}$ sur la fibre spéciale géométrique $X_{\mathcal{I},\overline{s}}$ et en prouvant, *du côté local* cf. le théorème 1.1.4, l'absence de torsion dans la cohomologie des espaces de Lubin-Tate.

Sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, pour étudier $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$, nous l'avons dévissé en constituants simples $\mathcal{P}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v, t)$ décrits comme extensions intermédiaires de systèmes locaux $HT_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ construits dans [13]. L'action de l'opérateur de monodromie est en particulier explicite et la filtration de $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$ par les noyaux itérés de la monodromie donne alors une suite spectrale

$$E_1^{i,j} = \mathcal{H}^{i+j} \text{gr}_{-j}^K(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j} \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$$

calculant les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$ à partir de ceux de ses gradués.

Fait 1 — (cf. [7] §5.8) *La suite spectrale $E_1^{i,j}$ dégénère en E_1 , i.e. pour tout n , le faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^n \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$ admet une filtration dont les gradués sont les $\mathcal{H}^n \text{gr}_k^K(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l})$.*

Cette observation nous fournit *une stratégie* pour montrer que les $\mathcal{H}^n \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$ sont sans torsion puisqu'il suffit de construire une version entière, i.e. à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_l$, de la filtration de $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$ par les noyaux itérés de la monodromie, puis de montrer que les $\mathcal{H}^n \text{gr}_k^K(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$ sont sans torsion.

Une $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -filtration de $\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l}$ par les noyaux itérés de la monodromie est donnée dans [9] en utilisant des morphismes d'adjonction $j_!^{-h} j^{=h,*} \rightarrow \text{Id}$ associés à la stratification de Newton $j^{=h} : X_{\mathcal{I},\overline{s}}^{-h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\overline{s}}$ de la fibre spéciale géométrique $X_{\mathcal{I},\overline{s}}$ de $X_{\mathcal{I}}$ à la place v , cf. le §1.3. Cette stratégie soulève essentiellement deux problèmes :

- le premier issu de la nature même de la construction des filtrations de stratification, qui requière de saturer, cf. la définition 1.3.11, les morphismes d'adjonction de sorte que l'on ne contrôle plus les réseaux des systèmes locaux qui apparaissent et plus sérieusement encore, les faisceaux pervers d'Harris-Taylor $\mathcal{P}(\pi_v, t)$ qui interviennent sont seulement connus à bimorphisme près, i.e. avec la notation 1.3.8

$$p j_!^{=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \hookrightarrow_+ \mathcal{P}(\pi_v, t) \hookrightarrow_+ p+ j_!^{=tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)).$$

Remarque : Nous verrons, cf. la proposition 2.4.2, qu'en général ces deux extensions intermédiaires p et $p+$, échangées par la dualité de Grothendieck-Verdier, sont distinctes et qu'identifier $\mathcal{P}(\pi_v, t)$ dépend fortement de comment on filtre $\Psi_{\mathcal{I}}$: rappelons que $\Psi_{\mathcal{I}}$ est autodual, de sorte que si une filtration fournit pour gradués les p -extensions intermédiaires, une filtration « duale » fournira les $p+$ versions.

- Le deuxième concerne le fait que pour calculer les faisceaux de cohomologie des $\text{gr}_k^K(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l})$, on doit utiliser une suite spectrale qui dégénère en E_2 mais pas en E_1 , i.e. certaines des flèches $d_1^{p,q}$ sont non nulles sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ de sorte que lorsqu'on va les considérer sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$, on devrait non seulement contrôler les réseaux, ce qui semble difficile à cause de la saturation évoquée plus haut, mais aussi les déterminer à homothétie près, ce qui semble totalement hors de portée de part la nature même de la construction des suites spectrales.

En ce qui concerne ce dernier point, il existe une explication géométrique qui repose sur le fait que les strates de Newton sont « géométriquement » induites paraboliques, cf. la

proposition 1.2.6

$$X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h} = X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_h}^{\leq h} \times_{P_{h,d-h}(F_v)} GL_d(F_v),$$

de sorte que lorsqu'on considère toutes les strates, on obtient naturellement, lorsqu'on calcule des faisceaux de cohomologie, des représentations induites paraboliques lesquelles en général ne sont pas irréductibles. Or les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}}$ ne font pas apparaître d'induites paraboliques, ce qui explique que dans [7], apparaissent des suites spectrales non triviales, i.e. qui ne dégènèrent qu'en E_2 et non en E_1 .

Or il est bien connu que la théorie des représentations de $GL_d(F_v)$ repose, via la théorie des dérivées, sur celle beaucoup plus simple du groupe mirabolique $M_d(F_v)$ obtenu comme le sous-groupe du parabolique standard $P_{1,r-1}(F_v)$ dont le premier coefficient en haut à gauche est égal à 1. Ainsi pour π et π' des représentations de respectivement $GL_h(F_v)$ et $GL_{d-h}(F_v)$, la restriction au groupe mirabolique de l'induite parabolique $\pi \times \pi'$ se décrit via la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \pi \times \pi'_{|M_{d-h}(F_v)} \longrightarrow (\pi \times \pi')_{|M_d(F_v)} \longrightarrow \pi_{|M_h(F_v)} \times \pi' \rightarrow 0$$

où le premier terme est l'induite parabolique relativement à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_{d-h-1} \\ 0 & GL_h & U \\ 0 & 0 & GL_{d-h-1} \end{pmatrix}$, et le

dernier est l'induite à support compact relativement à $\begin{pmatrix} M_h & U \\ 0 & GL_{d-h} \end{pmatrix}$.

Fait 2 — *Il existe une version géométrique de la suite exacte courte précédente, cf. [10], qui permet de calculer directement les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}}$, i.e. sans avoir recours à une suite spectrale, cf. aussi l'appendice B de ce texte.*

L'idée consiste à considérer pour une strate $X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\leq 1}$, l'application

$$\bar{j}_{\neq c} : \bar{X}_{\mathcal{I}} - X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\geq 1} \hookrightarrow \bar{X}_{\mathcal{I}} := X_{\mathcal{I}} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_v} \text{Spec } \bar{\mathcal{O}}_v,$$

et, plus généralement, pour tout $h \geq 1$ et toute strate $X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\leq h+1}$

$$j_{\neq c}^h : X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_h}^{\geq h} \setminus X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_h}^{\geq h}.$$

Le point essentiel est que $\bar{j}_{\neq c}$ et $j_{\neq c}^h$ sont affines, cf. le lemme 2.1.2 et la suite exacte courte (3.2.2). La théorie classique des dérivées pour les représentations du groupe mirabolique, est utilisée pour montrer que des extensions scindées entre $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux pervers d'Harris-Taylor, restent encore scindées sur $\bar{\mathbb{Z}}_l$ pourvu qu'on filtre $\Psi_{\mathcal{I}}$ dans « le bon ordre ».

D'un point de vue global, on montre alors que la filtration de stratification *exhaustive* de $\Psi_{\mathcal{I}}$ définie dans [9] à l'aide des seuls morphismes d'adjonction $j_!j^* \rightarrow \text{Id}$ (resp. $\text{Id} \rightarrow j_*j^*$) admet pour gradués les extensions intermédiaires pour la t -structure p (resp. $p+$) des systèmes locaux d'Harris-Taylor. L'énoncé principal qui permet de montrer cette propriété repose sur la description du conoyau du bimorphisme naturel entre la p et $p+$ extension intermédiaire d'un système local d'Harris-Taylor. Rappelons qu'un tel système local sur la strate de Newton $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\leq h}$ est associé à une cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$ avec $g|h = tg$, et on montre, cf. la proposition 2.4.1, que ce conoyau est nul si la réduction modulo l de π_v reste

supercuspidale. Sinon on décrit, cf. la proposition 2.4.2, la l -torsion de ce conoyau à l'aide de la réduction modulo l de la représentation de Steinberg $\mathrm{St}_t(\pi_v)$ donnée dans [8].

En ce qui concerne l'organisation du papier, les notations sur les représentations sont données dans l'appendice A. Les résultats des lemmes et propositions de cet article concernant les $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceaux pervers libres sont, d'après [7] et [9], déjà connus sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$: ceux dont nous avons besoin, sont rappelés en appendice B avec quelques compléments autour de l'effet des morphismes $j_{\neq c,!}^{\neq h}, j_{\neq c}^{\neq h,*}$, ingrédient clef de cet article.

Mentionnons enfin la thèse de H. Wang qui, par voie purement locale en se ramenant aux travaux de Bonnafé et Rouquier [6] sur la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig, montre la liberté de l'étage modéré de la cohomologie de la tour de Drinfeld. En utilisant le théorème de Faltings-Fargues, son résultat correspond au cas des représentations cuspidales de niveau zéro.

Table des matières

Introduction.....	1
1. Rappels géométriques.....	5
1.1. Espaces de Lubin-Tate.....	5
1.2. Géométrie de quelques variétés de Shimura unitaires simples.....	6
1.3. Filtrations de stratification d'après [9].....	9
1.4. Rappels sur les faisceaux pervers de Hecke.....	14
2. Sur les faisceaux pervers d'Harris-Taylor.....	15
2.1. Associés à un caractère.....	15
2.2. Extensions entre $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceaux pervers libres.....	18
2.3. Faisceaux de cohomologie des p -faisceaux pervers d'Harris-Taylor ..	19
2.4. Sur les extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor	23
3. Cycles évanescents.....	25
3.1. Décomposition supercuspidale.....	25
3.2. Preuve de la proposition 2.4.1.....	28
3.3. Preuve du théorème principal.....	37
Appendice A. Rappels sur les représentations.....	38
A.1. de $GL_d(K)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$	38
A.2. Réduction modulo l d'une Steinberg généralisée d'après [8].....	41
A.3. Représentations de $D_{K,d}^\times$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_l$ et leurs relèvements.	43
Appendice B. Rappels des résultats faisceautiques sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ d'après [7].....	46
B.1. sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor.....	46
B.2. sur le faisceau pervers des cycles évanescents.....	48
B.3. Compléments.....	49
Références.....	57

1. Rappels géométriques

Dans tout ce texte, les lettres $p \neq l$ désigneront deux nombres premiers distincts, d un entier strictement positif et Λ au choix une extension algébrique de \mathbb{Q}_l comme par exemple $\overline{\mathbb{Q}}_l$, l'anneau des entiers d'une telle extension, comme par exemple \mathbb{Z}_l^{nr} ou une extension algébrique de \mathbb{F}_l , comme par exemple $\overline{\mathbb{F}}_l$.

1.1. Espaces de Lubin-Tate. — On désignera par K une extension finie de \mathbb{Q}_p , \mathcal{O}_K son anneau des entiers, d'idéal maximal \mathcal{P}_K , ϖ_K une uniformisante et $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$ son corps résiduel de cardinal $q = p^f$. L'extension maximale non ramifiée de K sera notée K^{nr} de complété \widehat{K}^{nr} , d'anneau des entiers respectif $\mathcal{O}_{K^{nr}}$ et $\mathcal{O}_{\widehat{K}^{nr}}$. Soit $\Sigma_{K,d}$ le \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate formel sur $\overline{\kappa}$ de hauteur d , cf. [13] §II. On considère la catégorie \mathcal{C} des \mathcal{O}_K -algèbres locales artiniennes de corps résiduel $\overline{\kappa}$.

1.1.1. Définition. — Le foncteur qui à un objet R de \mathcal{C} associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des déformations par quasi-isogénies sur R de $\Sigma_{K,d}$ munies d'une structure de niveau n est pro-représentable par un schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n} = \coprod_{h \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$ où $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$ représente le sous-foncteur pour des déformations par des quasi-isogénies de hauteur h .

Remarque : chacun des $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(h)}$ est non-canoniquement isomorphe au schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(0)}$ noté $\mathrm{Spf} \mathrm{Def}_{d,n}$ dans [7]. On notera sans chapeau les fibres génériques de Berkovich de ces espaces; ce sont donc des \widehat{K}^{nr} -espaces analytiques au sens de [3] et on note $\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K} := \mathcal{M}_{LT,d,n} \widehat{\otimes}_{\widehat{K}^{nr}} \widehat{K}$.

Le groupe des quasi-isogénies de $\Sigma_{K,d}$ s'identifie au groupe $D_{K,d}^\times$ des unités de l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$, lequel, par définition, agit sur $\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}$. Pour tout $n \geq 1$, on a une action naturelle de $GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K^n)$ sur les structures de niveau et donc sur $\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}$; cette action se prolonge en une action de $GL_d(K)$ sur la limite projective $\varprojlim_n \mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}$. Sur cette limite projective on dispose ainsi d'une action de $GL_d(K) \times D_{K,d}^\times$ qui se factorise par $(GL_d(K) \times D_{K,d}^\times)/K^\times$ où K^\times est plongé diagonalement.

1.1.2. Définition. — Soit $\Psi_{K,\Lambda,d,n}^i \simeq H^i(\mathcal{M}_{LT,d,n}^{(0)} \widehat{\otimes}_{\widehat{K}^{nr}} \widehat{K}, \Lambda)$ le Λ -module de type fini associé, via la théorie des cycles évanescents de Berkovich, au morphisme structural $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}^{(0)} \rightarrow \mathrm{Spf} \widehat{\mathcal{O}}_K^{nr}$.

On notera aussi $\mathcal{U}_{K,\Lambda,d,n}^i := H^i(\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}, \Lambda)$ et on pose $\mathcal{U}_{K,\Lambda,d}^i = \varinjlim_n \mathcal{U}_{K,\Lambda,d,n}^i$ de sorte que $\mathfrak{K}_n := \mathrm{Ker}(GL_d(\mathcal{O}_K) \rightarrow GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K^n))$ étant pro- p pour tout $n \geq 1$, on a $\mathcal{U}_{K,\Lambda,d}^i = (\mathcal{U}_{K,\Lambda,d}^i)^{\mathfrak{K}_n}$.

1.1.3. Notation. — Considérant $\mathcal{U}_{K, \overline{\mathbb{Z}}_l, d, n}^i$ comme une représentation de $D_{K, d}^\times$, on pose, d'après A.3.6, pour $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(d)$:

$$\mathcal{U}_{\bar{\tau}, n}^i := \mathcal{U}_{K, \overline{\mathbb{Z}}_l, d, n, \bar{\tau}}^i,$$

ainsi que la limite inductive

$$\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^i = \varinjlim_n \mathcal{U}_{\bar{\tau}, n}^i.$$

On notera aussi $\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}, free}^i$ le quotient libre de $\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^i$.

Remarque : concernant le théorème principal ci-après, on peut décider de raisonner par récurrence sur h auquel cas pour tout $h < d$, on a $\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}, free}^i = \mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^i$.

La description de la $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -cohomologie de ces espaces de Lubin-Tate est donnée dans [7] théorème 2.3.5. Le résultat principal que nous avons en vue est le suivant.

1.1.4. Théorème. — Pour tout $h \geq 1$ et pour tout $0 \leq i \leq h - 1$, le $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -module $\mathcal{U}_{K, \overline{\mathbb{Z}}_l, h}^i$ est sans torsion.

1.2. Géométrie de quelques variétés de Shimura unitaires simples. — Soient E/\mathbb{Q} une extension quadratique imaginaire, F^+/\mathbb{Q} une extension totalement réelle dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$; on pose $F = F^+E$ le corps CM associé.

1.2.1. Notation. — Pour toute place finie w de F , on note F_w le complété de F en cette place, \mathcal{O}_w son anneau des entiers d'idéal maximal \mathcal{P}_w et de corps résiduel $\kappa(w)$. On notera aussi $\overline{\mathcal{O}}_w$ l'anneau des entiers d'une clôture algébrique \overline{F}_w de F_w .

Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F , B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*|_F$ est la conjugaison complexe c . Pour $\beta \in B^{*-1}$, on note \sharp_β l'involution $x \mapsto x^\sharp_\beta = \beta x^* \beta^{-1}$ et G/\mathbb{Q} le groupe de similitudes, noté G_τ dans [13], défini pour toute \mathbb{Q} -algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp_\beta = \lambda\}$$

avec $B^{op} = B \otimes_{F, c} F$. Si x est une place de \mathbb{Q} décomposée $x = yy^c$ dans E alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times,$$

où $x = \prod_i z_i$ dans F^+ .

Dans [13], les auteurs justifient l'existence d'un G comme ci-dessus tel qu'en outre :

- si x est une place de \mathbb{Q} qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé;
- les invariants de $G(\mathbb{R})$ sont $(1, d - 1)$ pour le plongement τ et $(0, d)$ pour les autres.

1.2.2. Notation. — On suppose que

- p est décomposée $p = uu^c$ dans E et on note v_1, v_2, \dots, v_r , les places de F au dessus de u ,
- et qu'il existe au moins une de ces places, mettons v_1 que l'on notera v , telle que $(B_v^{op})^\times \simeq GL_d(F_v)$.

Pour tout sous-groupe compact U^p de $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ et $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/\mathcal{P}_{v_i}^{m_i})^\times)$$

1.2.3. Notation. — On note \mathcal{I} l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts $U^p(m)$ tels qu'il existe une place x pour laquelle la projection de U^p sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [13] bas de la page 90. Pour m comme ci-dessus, on a une application

$$m_1 : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

1.2.4. Définition. — Pour tout $I \in \mathcal{I}$, on note $X_I \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v \llcorner$ la variété de Shimura associée à $G \gg$ construite dans [13] et $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ le schéma de Hecke relativement au groupe $G(\mathbb{A}^\infty)$, au sens de [7]

Remarque : les morphismes de restriction du niveau $r_{J,I} : X_J \rightarrow X_I$ sont finis et plats. et même étales quand $m_1(J) = m_1(I)$.

1.2.5. Notations. — (cf. [7] §1.3) Pour $I \in \mathcal{I}$, on note :

- $X_{I,s}$ la fibre spéciale de X_I et $X_{I,\bar{s}} := X_{I,s} \times \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p$ la fibre spéciale géométrique.
- Pour tout $1 \leq h \leq d$, $X_{I,\bar{s}}^{\geq h}$ (resp. $X_{I,\bar{s}}^{=h}$) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur h , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang $\geq h$ (resp. égal à h).
- On notera aussi $X_{I,\bar{s}}^{\geq 0} := X_I$.

Remarque : pour tout $1 \leq h \leq d$, la strate de Newton de hauteur h est de pure dimension $d - h$; le système projectif associé définit alors un schéma de Hecke $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}$ (resp. $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=h}$) pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$, cf. [13] III.4.4, lisse dans le cas de bonne réduction, i.e. quand $m_1 = 0$.

1.2.6. Proposition. — (cf. [13] p.116) Pour tout $1 \leq h < d$, les strates $X_{I,\bar{s}}^{=h}$ sont géométriquement induites sous l'action du parabolique $P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)^{(1)}$ au sens où il existe un sous-schéma fermé $X_{I,\bar{s},\overline{1}_h}^{=h}$ tel que :

$$X_{I,\bar{s}}^{=h} \simeq X_{I,\bar{s},\overline{1}_h}^{=h} \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1})} GL_d(\mathcal{O}_v/\mathcal{P}_v^{m_1}).$$

Pour $h = 0$, on ne dispose que d'une unique strate et $X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_0}^{\geq 0}$ désignera encore $X_{\mathcal{I}}$.

1. cf. l'appendice A pour les notations

Soit $\mathcal{G}(h)$ le groupe de Barsotti-Tate universel sur $X_{I,\bar{s},\bar{1}_h}^{=h}$:

$$0 \rightarrow \mathcal{G}(h)^c \rightarrow \mathcal{G}(h) \rightarrow \mathcal{G}(h)^{et} \rightarrow 0$$

où $\mathcal{G}(h)^c$ (resp. $\mathcal{G}(h)^{et}$) est connexe (resp. étale) de dimension h (resp. $d - h$). Notons $\iota_{m_1} : (\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d \rightarrow \mathcal{G}(h)[p^{m_1}]$ la structure de niveau universelle. Notant $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ la base canonique de $(\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d$, la strate de Newton $X_{I,\bar{s},\bar{1}_h}^{=h}$ est alors définie par la propriété que $\{\iota_{m_1}(e_i) : 1 \leq i \leq h\}$ forme une base de Drinfeld de $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$.

1.2.7. Notation. — Dans la suite, et afin de ne pas alourdir les notations, on confondra un élément $a \in GL_d(F_v)/P_{h,d-h}(F_v)$ avec le sous-espace vectoriel $\langle a(e_1), \dots, a(e_h) \rangle$ engendré par les images par a des h premiers vecteurs e_1, \dots, e_h de la base canonique de F_v^d . On notera aussi $P_a := aP_{h,d-h}a^{-1}$ le parabolique stabilisant $a \subset F_v^d$.

Pour tout idéal $I \in \mathcal{I}$, l'élément $a \in GL_d(F_v)/P_{h,d-h}(F_v)$ fournit un facteur direct a_{m_1} de $(\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d$ et donc une strate $X_{I,\bar{s},a}^{=h}$. Dans le cas où $a \in GL_d(\mathcal{O}_v)$, la strate $X_{I,\bar{s},a}^{=h}$ s'obtient aussi comme l'image par a de $X_{I,\bar{s},\bar{1}_h}^{=h}$.

Remarque : $X_{I,\bar{s},a}^{=h}$ peut se définir directement en demandant que pour (f_1, \dots, f_h) une base de a_{m_1} , $\{\iota_{m_1}(f_i) : 1 \leq i \leq h\}$ forme une base de Drinfeld de $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$.

1.2.8. Notation. — Pour tout $a \in GL_d(F_v)/P_{h,d-h}(F_v)$, on notera $X_{I,\bar{s},a}^{\geq h}$ l'adhérence dans $X_{I,\bar{s}}^{\geq h}$ de $X_{I,\bar{s},a}^{=h}$. On dira d'une telle strate qu'elle est pure.

Remarque : $X_{I,\bar{s},a}^{\geq h} \setminus X_{I,\bar{s},a}^{=h}$ s'écrit comme la réunion des strates $X_{I,\bar{s},b}^{=h'}$ pour $h < h' \leq d$ et $b \in GL_d(F_v)/P_{h',d-h'}(F_v)$ tel qu'avec les notations précédentes, $a_{m_1} \subset b_{m_1}$.

Remarque : Le système projectif $(X_{I,\bar{s},\bar{1}_h}^{=h})_{I \in \mathcal{I}}$ définit un schéma de Hecke $X_{\mathcal{I},\bar{s},\bar{1}_h}^{=h}$ pour $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d-h}(K)$ où $P_{h,d-h}(K)$ agit à travers le quotient $\mathbb{Z} \times GL_{d-h}(K)$ de son Levi, via l'application $\begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \mapsto (v(\det g_v^c), g_v^{et})$. On dira de l'action de $GL_h(F_v)$ qu'elle est infinitésimale. Le groupe de Weil W_v en v agit sur $(X_{I,\bar{s},\bar{1}_h}^{=h})_{I \in \mathcal{I}}$ via son quotient $-\text{deg} : W_v \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ où deg est la composée du caractère non ramifié de W_v , qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes, avec la valuation v de K .

Dans la suite du texte, nous utiliserons de manière cruciale la situation suivante relativement au choix de $a \in GL_d(F_v)/P_{h,d-h}(F_v)$ et $c \in GL_d(F_v)/P_{h+1,d-h-1}(F_v)$ tels que $a \subset c$. Pour tout $g \geq 1$, on introduit les strates suivantes.

— Soit $X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{=h+g}$ la réunion de strates pures

$$X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{=h+g} := \bigcup_{\substack{b: c \subset b \\ \dim b = h+g}} X_{\mathcal{I},\bar{s},b}^{=h+g},$$

et $X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\geq h+g}$ son adhérence.

— Pour tout $I \in \mathcal{I}$, on a une inclusion de strates pures $X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{I,\bar{s},a}^{\geq h}$ et on utilisera le schéma $X_{I,\bar{s},a}^{\geq h} \setminus X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+1}$ ainsi que pour $g \geq 1$: $X_{I,\bar{s},a}^{\geq h+g} \setminus X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+g}$.

Remarque : lorsque I varie dans \mathcal{I} , le système des $X_{I,\bar{s},a}^{\geq h} \setminus X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+1}$ n'est pas projectif. Prenons par exemple $h = 1$ avec $a = \langle e_1 \rangle$ et $c = \langle e_1, e_2 \rangle$. Pour $b = \langle e_1, e_2 + \varpi_v^2 e_3 \rangle$ alors $X_{I,\bar{s},b}^{\geq 3}$ est contenu dans $X_{I,\bar{s},a}^{\geq 1} \setminus X_{I,\bar{s},c}^{\geq 2}$ si et seulement si $m_1 \geq 3$.

1.2.9. Notations. — Avec la convention que i (resp. j) correspond à une immersion fermée (resp. une inclusion ouverte), on note

$$i^h : X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s}}^{\geq 1}, \quad i_a^h : X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s},a}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s}}^{\geq 1}, \quad j^{\geq h} : X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s}}^{\leq h} \hookrightarrow X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s}}^{\geq h}, \quad j_{\bar{1}}^{\geq h} : X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s},\bar{1}_h}^{\leq h} \hookrightarrow X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s},\bar{1}_h}^{\geq h},$$

ainsi que

$$j_{a-c}^{\geq h} : X_{I,\bar{s},a}^{\geq h} \setminus X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{I,\bar{s},a}^{\geq h}, \quad \text{et } j_c^{\geq h+g} : X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s},c}^{\leq h+g} \hookrightarrow X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s},c}^{\geq h+g}.$$

Pour tout $g \geq 1$, on introduit aussi

$$j_{a-c}^{h+g} : X_{I,\bar{s},a}^{\geq h+g} \setminus X_{I,\bar{s},c}^{\geq h+g} \hookrightarrow X_{I,\bar{s},a}^{\geq h+g}.$$

Remarque : lorsque $a = \bar{1}_h$, on utilisera $j_{\neq c}^{h+g}$ pour désigner $j_{\bar{1}_h-c}^{h+g}$.

Enfin afin de ne pas avoir que des faisceaux sur $X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s}}^{\geq 1}$, on utilisera aussi la notation⁽²⁾

$$j^{\leq h} := i^h \circ j^{\geq h}, \quad j_{\neq c}^{\leq h} := i_{\bar{1}_h}^h \circ j_{\bar{1}_h-c}^{\geq h}, \quad j_{\neq c}^{\leq h+g} = i_{\bar{1}_h}^{h+g} \circ j_{\neq c}^{h+g}.$$

Remarque : On renvoie le lecteur au §B.3 pour des compléments sur $j_{\neq c}^{\leq h+g}$.

1.3. Filtrations de stratification d'après [9]. — Soient S le spectre d'un corps fini et X un schéma de type fini sur S , alors la t -structure usuelle sur $\mathcal{D}(X, \Lambda) := D_c^b(X, \Lambda)$ est

$$\begin{aligned} A \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{H}^k i_x^* A = 0, \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{H}^k i_x^! A = 0, \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où $i_x : \text{Spec } \kappa(x) \hookrightarrow X$ et $\mathcal{H}^k(K)$ désigne le k -ième faisceau de cohomologie de K .

1.3.1. Notation. — On note ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$, ou simplement ${}^p\mathcal{C}$ quand le contexte est clair, le cœur de cette t -structure. Les foncteurs cohomologiques associés seront notés ${}^p\mathcal{H}^i$; pour un foncteur T , on notera ${}^pT := {}^p\mathcal{H}^0 \circ T$.

Remarque : ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ est une catégorie abélienne noethérienne et Λ -linéaire. Pour Λ un corps, cette t -structure est autoduale pour la dualité de Verdier. Pour $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$, on peut munir la catégorie abélienne $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -linéaire ${}^p\mathcal{C}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l)$ d'une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ où \mathcal{T} (resp. \mathcal{F}) est la sous-catégorie pleine des objets de l^∞ -torsion T (resp. l -libres F), i.e. tels que $l^N 1_T$ est nul pour N assez grand (resp. $l.1_F$ est un monomorphisme).

2. Contrairement aux préconisations précédentes, ne sont pas des inclusions ouvertes.

1.3.2. Définition. — Soit d'après [15], la t -structure duale

$$\begin{aligned} {}^{p+}\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 1}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l) : {}^p\mathcal{H}^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l) : {}^p\mathcal{H}^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

de cœur ${}^{p+}\mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ muni de sa théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$ « duale » de celle de ${}^p\mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$.

Remarque : pour $j : U \hookrightarrow X \leftarrow F : i$ avec U ouvert de complémentaire F , la t -structure ainsi définie sur X muni de la théorie de torsion précédente, est obtenue par recollement à partir de celles sur U et F selon la recette

$$\begin{aligned} {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \Lambda) &:= \{K \in \mathcal{D}(X, \Lambda) : j^*K \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(U, \Lambda) \text{ et } i^*K \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(F, \Lambda)\} \\ {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \Lambda) &:= \{K \in \mathcal{D}(X, \Lambda) : j^*K \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(U, \Lambda) \text{ et } i^!K \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(F, \Lambda)\}. \end{aligned}$$

où les théories de torsion sont reliées par

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \{P \in {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) : {}^pi^*P \in \mathcal{T}_F \text{ et } j^*P \in \mathcal{T}_U\} \\ \mathcal{F} &:= \{P \in {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) : {}^pi^!P \in \mathcal{F}_F \text{ et } j^*P \in \mathcal{F}_U\} \end{aligned}$$

1.3.3. Définition. — (cf. [9] §1.3) Soit

$$\mathcal{F}(X, \Lambda) := {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) \cap {}^{p+}\mathcal{C}(X, \Lambda) = {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \Lambda) \cap {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \Lambda)$$

la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres » sur X à coefficients dans Λ . On identifiera aussi $\mathcal{F}(F, \Lambda)$ avec son image dans $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ via le foncteur $i_* = i_! = i_{!*}$.

1.3.4. Lemme. — (cf. [9] lemme 1.3.11) Pour $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert, on a

$${}^{p+}j_!\mathcal{F}(U, \Lambda) \subset \mathcal{F}(X, \Lambda) \quad \text{et} \quad {}^pj_*\mathcal{F}(U, \Lambda) \subset \mathcal{F}(X, \Lambda).$$

Remarque : si $j_!$ est t -exact alors, cf. [9] proposition 1.3.14, $j_! = {}^pj_! = {}^{p+}j_!$ et donc $j_!(\mathcal{F}(U, \Lambda)) \subset \mathcal{F}(X, \Lambda)$. D'après le lemme B.3.1, ce sera en particulier le cas pour les j^h du paragraphe précédent.

1.3.5. Lemme. — Soit $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$ tel que $j_!j^*L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$, alors $i_*{}^p\mathcal{H}^{-\delta}i^*L$ est nul pour tout $\delta \neq 0, 1$; pour $\delta = 1$ c'est un objet de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$.

Démonstration. — Partons du triangle distingué $j_!j^*L \rightarrow L \rightarrow i_*i^*L \rightsquigarrow$. En utilisant la perversité de L et $j_!j^*L$, la suite exacte longue de cohomologie perverse du triangle distingué précédent s'écrit

$$0 \rightarrow i_*{}^p\mathcal{H}^{-1}i^*L \rightarrow {}^pj_!j^*L \rightarrow L \rightarrow i_*{}^p\mathcal{H}^0i^*L \rightarrow 0.$$

La liberté de $i_*{}^p\mathcal{H}^{-1}i^*L$ découle alors de celle, par hypothèse, de ${}^pj_!j^*L = j_!j^*L$. \square

Rappelons, cf. [9] §1.3, que tout morphisme $f : L \rightarrow L'$ de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ possède :

- un noyau $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f$ qui est le p -noyau de f , i.e. dans ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$;
- un conoyau $\text{Coker}_{\mathcal{F}} f$ qui est le $p+$ -conoyau de f , i.e. dans ${}^{p+}\mathcal{C}(X, \Lambda)$;
- une image $\text{Im}_{\mathcal{F}} f$ qui est la $p+$ -image de f ;
- une coimage $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f$ qui est la p -image de f ;

tels que $0 \rightarrow \text{Ker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow L \rightarrow \text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f \rightarrow L' \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow 0$ sont des suites strictement exactes de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$, où le qualificatif strict est rappelé dans la définition suivante.

1.3.6. Définition. — Un morphisme $f : L \rightarrow L'$ de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ est dit *strict* et on note $f : L \dashrightarrow L'$, si la flèche canonique $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$ est un isomorphisme.

Remarque : un monomorphisme $f : L \hookrightarrow L'$ dans ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ entre faisceaux pervers libres, est strict si et seulement si son conoyau dans ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ est libre. Cela revient aussi à demander que f est un monomorphisme de ${}^{p+}\mathcal{C}(X, \Lambda)$.

1.3.7. Définition. — Un *bimorphisme* de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ est un monomorphisme qui est aussi un épimorphisme.

Exemple : $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$ est un bimorphisme.

1.3.8. Notation. — On notera $L \hookrightarrow L'$ un bimorphisme de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$. Si en outre le noyau dans ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ est de dimension strictement plus petite que celle du support de L , on notera $L \hookrightarrow_+ L'$.

Remarque : tout morphisme $f : L \rightarrow L'$ de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ admet, cf. [9] proposition 1.3.7, une factorisation canonique $L \dashrightarrow \text{Coim}_{\mathcal{F}} f \hookrightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f \dashrightarrow L'$.

1.3.9. Définition. — Pour L un objet de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$, on dira que

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_e = L$$

est une \mathcal{F} -filtration si pour tout $1 \leq i \leq e - 1$, $L_i \hookrightarrow L_{i+1}$ est un monomorphisme strict.

Pour $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$, on considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ & \nearrow \text{can}_{!,L} & & \searrow \text{can}_{*,L} & \\ {}^{p+}j_{!,j^*}L & \dashrightarrow & {}^p j_{!,*}j^*L & \hookrightarrow_+ & {}^{p+}j_{!,*}j^*L & \dashrightarrow & {}^p j_{*,j^*}L \end{array}$$

où la ligne du bas est, cf. la remarque suivant 1.3.12 de [9], la factorisation canonique de ${}^{p+}j_{!,j^*}L \rightarrow {}^p j_{*,j^*}L$ et les flèches $\text{can}_{!,L}$ et $\text{can}_{*,L}$ données par adjonction.

1.3.10. Définition. — On note $\mathcal{P}_L := i_* {}^p \mathcal{H}_{\text{libre}}^{-1} i^* j_{*,j^*}L = \text{Ker}_{\mathcal{F}} \left({}^{p+}j_{!,j^*}L \rightarrow {}^p j_{!,*}j^*L \right)$. Avec les notations du diagramme ci-dessus, on pose

$$\text{Fil}_{U,!}^0(L) = \text{Im}_{\mathcal{F}}(\text{can}_{!,L}) \quad \text{et} \quad \text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) = \text{Im}_{\mathcal{F}}\left((\text{can}_{!,L})|_{\mathcal{P}_L} \right).$$

Remarque : d'après le lemme 2.1.2 de [9], $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \subset \text{Fil}_{U,!}^0(L) \subset L$ est une \mathcal{F} -filtration au sens de 1.3.9, avec $L/\text{Fil}_{U,!}^0(L) \simeq i_*^{p+} i^* L$ et ${}^p j_{!*} j^* L \hookrightarrow_+ \text{Fil}_{U,!}^0(L)/\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L)$, ce qui d'après le lemme 1.3.13 de [9] donne un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} {}^p j_{!*} j^* L & \xrightarrow{+} & \text{Fil}_{U,!}^0(L)/\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \\ & \searrow + & \downarrow + \\ & & {}^{p+} j_{!*} j^* L. \end{array}$$

1.3.11. Définition. — La filtration $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \subset \text{Fil}_{U,!}^0(L) \subset L$ est dite *saturée* si $\text{can}_{!,L}$ est strict i.e. si $\text{Fil}_{U,!}^0(L) = \text{Coim}_{\mathcal{F}}(\text{can}_{!,L})$.

Soit X un schéma muni

- d'une stratification $\mathfrak{S} = \{X = X^{\geq 1} \supset X^{\geq 2} \supset \dots \supset X^{\geq e}\}$ et
- de la donnée pour tout $1 \leq h \leq e$ d'un ensemble fini $\mathcal{L}(h)$ de classes d'isomorphismes de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux localement constants irréductibles sur $X^{=h} := X^{\geq h} - X^{\geq h+1}$ tels qu'en notant $j^{=h} = i^h \circ j^{\geq h}$ avec $j^{\geq h} : X^{=h} \hookrightarrow X^{\geq h}$ et $i^h : X^{\geq h} \hookrightarrow X$,

$$\forall \mathcal{L} \in \mathcal{L}(h), \quad R^n j_*^{=h} \mathcal{L} \text{ est } (\mathfrak{S}, \mathcal{L}) \text{ - constructible}$$

au sens où sa restriction à tous les $X^{=h'}$ est une extension itérée finie de faisceaux irréductibles localement constants appartenant à $\mathcal{L}(h')$.

1.3.12. Notation. — On note $D_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ la sous-catégorie pleine de $D^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont $(\mathfrak{S}, \mathcal{L})$ -constructibles au sens précédent ainsi que ${}^p \mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ la catégorie abélienne des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux pervers $(\mathfrak{S}, \mathcal{L})$ -constructibles.

1.3.13. Définition. — Un faisceau pervers $P \in {}^p \mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est dit à support dans $X^{\geq h}$, si h est le plus petit entier $1 \leq r \leq d$ tel que $j^{=r,*} P$ est un système local non nul. Un faisceau pervers libre $P \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$ sera dit à support dans $X^{\geq h}$ si $P \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \in {}^p \mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ l'est au sens précédent.

Remarque : dans la suite on appliquera ces définitions pour la stratification de Newton de la fibre spéciale d'une variété de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor, nous ferons alors disparaître \mathfrak{S} des notations, avec \mathcal{L} constitué des systèmes locaux d'Harris-Taylor. La propriété de stabilité de \mathcal{L} par les foncteurs $Rj_*^{=h}$ découle des résultats de [7]. Dans cette situation on dira que P est à support dans $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}, \mathcal{A}}^{\geq h}$ s'il est à support dans $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h}$ et si pour toute strate pure $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}, a}^{\geq h}$, $j_a^{=h,*} P$ est un système local non nul si et seulement si $a \in \mathcal{A}$.

On cherche à présent à construire des filtrations d'un $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$ tel que $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \in {}^p \mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, à l'aide de la stratification \mathfrak{S} .

1.3.14. Définition. — Soit $L \in \mathcal{F}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ tel que $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \in {}^p\mathcal{C}_{\mathfrak{S}, \mathcal{L}}(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. On dira d'une \mathcal{F} -filtration

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^0(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^1(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^2(L) \cdots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^{e-1}(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}}^e(L) = L,$$

qu'elle est de type $\mathfrak{S}_!$ si pour tout k et h tel que $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^k(L)$ est à support dans $X^{\geq h}$, le morphisme d'adjonction

$${}^{p+}j_!^{j=h,*} \text{gr}_{\mathfrak{S}}^k(L) \longrightarrow \text{gr}_{\mathfrak{S}}^k(L)$$

est un épimorphisme, pas nécessairement strict, de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$.

1.3.15. Définition. — Pour $1 \leq h < e$, on note $X^{1 \leq h} := X^{\geq 1} - X^{\geq h+1}$ et $j^{1 \leq h} : X^{1 \leq h} \hookrightarrow X^{\geq 1}$. Pour $L \in \mathcal{F}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ soit

$$\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L) := \text{Im}_{\mathcal{F}} \left({}^{p+}j_!^{1 \leq r,*} j^{1 \leq r,*} L \longrightarrow L \right).$$

1.3.16. Proposition. — (cf. [9] §2.2) La définition précédente munit fonctoriellement tout objet L de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ d'une \mathcal{F} -filtration de type $\mathfrak{S}_!$ dite de stratification

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^1(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^2(L) \cdots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{e-1}(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^e(L) = L.$$

1.3.17. Définition. — On dira que L est $\mathfrak{S}_!$ -saturé si pour tout $1 \leq r \leq e-1$ le morphisme d'adjonction ${}^{p+}j_!^{1 \leq r,*} j^{1 \leq r,*} L \longrightarrow L$ est strict, i.e. si

$$\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L) = \text{Coim}_{\mathcal{F}} \left({}^{p+}j_!^{1 \leq r,*} j^{1 \leq r,*} L \longrightarrow L \right).$$

Autrement dit si pour tout $1 \leq r \leq e-1$, ${}^{p+}j_!^{r+1,*} L$ est un objet de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$.

Remarque : les filtrations de type $\mathfrak{S}_!$ ne sont, en général, pas assez fines. Dans [9] proposition 2.3.3, en utilisant les $\text{Fil}_{U,!}^{-1}$, on construit de façon fonctorielle la filtration exhaustive de stratification de tout objet L de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$,

$$0 = \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-1}}(L) \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-1}+1}(L) \subset \cdots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \subset \cdots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{2^{e-1}-1}(L) = L, \quad (1.3.18)$$

telle que tous les gradués $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^k$ sont libres et sont, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, simples, i.e. vérifient ${}^{p+}j_{!*}^{j=h,*} \text{gr}_{\mathfrak{S}}^k \hookrightarrow_+ \text{gr}_{\mathfrak{S}}^k$, où $X^{\geq h}$ est le support de $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^k$. Décrivons rapidement la construction de loc. cit. :

- on commence par regarder le morphisme d'adjonction ${}^{p+}j_!^{j=1,*} L \longrightarrow L$ dont le conoyau Q_1 donnera des gradués pour des indices strictement positifs alors que l'image dans L du noyau P_1 de ${}^{p+}j_!^{j=1,*} L \longrightarrow {}^{p+}j_{!*}^{j=1,*} L$ donnera des gradués pour des indices strictement négatifs, le gradué d'indice 0 sera tel que ${}^{p+}j_{!*}^{j=1,*} L \hookrightarrow_+ \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^0(L)$.
- On passe alors à la strate suivante $X_{\overline{\mathbb{Z}}, \overline{\mathbb{S}}}^{\geq 2}$ pour P_1 et Q_1 . Pour $F := P_1$ (resp. $F := Q_1$), on considère ${}^{p+}j_!^{j=2,*} F \longrightarrow F$. Le conoyau de ce morphisme donnera des gradués pour les indices $-2^{e-2} < k < 0$ (resp. $2^{e-2} < k < 2^{e-1}$), alors que le noyau de ${}^{p+}j_!^{j=2,*} F \longrightarrow {}^{p+}j_{!*}^{j=2,*} F$ donnera des gradués pour les indices strictement

inférieurs à -2^{e-2} (resp. $0 < k < 2^{e-2}$); le gradué d'indice $k = -2^{e-2}$ (resp. $k = 2^{e-2}$) vérifiant $p_{j_*}^{-2} j^{=2,*} F \xrightarrow{+} \mathrm{gr}_{\mathbb{G},1}^k(L)$.

— On traite ainsi toutes les strates jusqu'à $h = e$.

1.4. Rappels sur les faisceaux pervers de Hecke. — Soit $\mathbb{X}_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ un schéma de Hecke pour $(\mathbb{G}, \mathcal{I})$ au sens du §1.2.2 de [7], pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P(F_v)$ où $P(F_v)$ est un sous-groupe de $G(F_v) \simeq GL_d(F_v)$. Rappelons que

- $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ est un système projectif de schémas relativement à des morphismes dits de restriction du niveau $[1]_{J,I} : \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$, finis et plats;
- pour tout $g \in \mathbb{G}$ et tous $J \subset I$ tels que $g^{-1}Jg \subset I$, on dispose d'un morphisme fini $[g]_{J,I} : \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$ vérifiant les propriétés suivantes
 - pour $g \in I$ et $J \subset I$, $[g]_{J,I} = [1]_{J,I}$;
 - pour tous $g, g' \in \mathbb{G}$, et tous $K \subset J \subset I$ tels que $g^{-1}Jg \subset I$ et $(g')^{-1}Kg' \subset J$, on a $[gg']_{K,I} = [g]_{J,I} \circ [g']_{K,J} : \mathbb{X}_K \rightarrow \mathbb{X}_J \rightarrow \mathbb{X}_I$.

La catégorie $\mathrm{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ (resp. $\mathrm{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$) des *faisceaux pervers* (resp. des *faisceaux de Hecke*) sur $\mathbb{X}_{\mathcal{I}}$ à coefficients dans Λ est définie comme la catégorie dont :

- les objets sont les systèmes $(\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ où \mathcal{F}_I est un faisceau pervers (resp. faisceau) sur \mathbb{X}_I à coefficients dans Λ , tels que pour tout $g \in \mathbb{G}$ et $J \subset I$ tel que $g^{-1}Jg \subset I$, on dispose d'un morphisme de faisceaux sur \mathbb{X}_I , $u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \rightarrow [g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J$ soumis à la condition de cocycle $u_{K,I}(g'g) = [g]_{J,I,*}(u_{K,J}(g')) \circ u_{J,I}(g)$;
- Les flèches sont les systèmes $(f_I : \mathcal{F}_I \rightarrow \mathcal{F}'_I)_{I \in \mathcal{I}}$ avec des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_J) \\ \downarrow f_I & & \downarrow [g]_{J,I,*}(f_J) \\ \mathcal{F}'_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}'_J) \end{array}$$

Remarque : par rapport à [7] §1.3.7, on a supprimé les conditions (ii) et (iii). Les propositions 6.1 et 6.2 de loc. cit. sont encore valables, i.e. $\mathrm{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ et $\mathrm{FH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ sont des catégories abéliennes munies de foncteurs $j_!, i^*$ (resp. Rj_*, i_* , resp. $j_*, Ri^!$) qui sont t -exact à droite (resp. t -exact, resp. t exacts à gauche) avec les propriétés d'adjonction habituelles, de sorte que l'on se retrouve à nouveau dans une situation de recollement.

Pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$, comme les $[g]_{J,I,*}$ sont t -exact, les théories de torsion à chaque étage munissent $\mathrm{FPH}_{\mathbb{G}}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}; \Lambda)$ d'un « système » de théories de torsion et donc d'un « système » de t -structure $p+$, i.e. à chaque étage.

1.4.1. Notation. — On notera $\mathcal{F}(\mathbb{X}_{\mathcal{I}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ la catégorie quasi-abélienne des *faisceaux pervers « libres » de Hecke*, i.e. le système de Hecke des $\mathcal{F}(\mathbb{X}_I, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ pour $I \in \mathcal{I}$.

2. Sur les faisceaux pervers d'Harris-Taylor

On considère dans cette section, un $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -système local d'Harris-Taylor $HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$ associé à une représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$ et Π_t une représentation quelconque, qui ne jouera aucun rôle, de $GL_{tg}(F_v)$ où on a aussi posé $h = tg$. On entend par là qu'on a fixé un $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -réseau stable par l'action de $P_{h,d-h}(F_v)$. Le but de cette section est, en particulier, de prouver que les faisceaux de cohomologie de ${}^p j_{\overline{1}_{tg},!}^{=tg} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$ sont sans torsion.

2.1. Associés à un caractère. — Soit F un faisceau pervers libre sur $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$ tel que $j_{\overline{1}_h}^{=h,*} F$ est de la forme $HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$. On note $P_F := i_*^{h+1} p\mathcal{H}^{-1} i^{h+1,*} F$ avec

$$0 \rightarrow P_F \rightarrow j_{\overline{1}_h,!}^{=h} j_{\overline{1}_h}^{=h,*} F \rightarrow F \rightarrow 0. \quad (2.1.1)$$

On considère alors une strate pure $X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, c}^{\geq h+1} \subset X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$, et on note pour tout $r, \delta \geq 0$:

$$i_{\overline{1}_h, c}^{h+r \leq +\delta} : X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, c}^{\geq h+r+\delta} \subset X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h+r}.$$

Soit alors le triangle distingué

$$j_{\neq c,!}^{=h} j_{\neq c}^{=h,*} P_F \rightarrow P_F \rightarrow i_{c,*}^{h+1} i_c^{h+1,*} P_F \rightsquigarrow$$

2.1.2. Lemme. — *Le complexe $i_c^{h+1,*} P_F$ est un faisceau pervers libre.*

Démonstration. — Comme F est de la forme $i_{\overline{1}_h,*}^h F'$, il suffit de montrer que

$$i_{\overline{1}_h, c}^{h+1 \leq +0,*} \left(p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}_h}^{h \leq +1,*} F' \right)$$

est p -pervers sans torsion. Pour ce faire, on utilise la suite spectrale

$$E_2^{r,s} = p\mathcal{H}^r i_{\overline{1}_h, c}^{h+1 \leq +0,*} \left(p\mathcal{H}^s i_{\overline{1}_h}^{h \leq +1,*} F' \right) \Rightarrow p\mathcal{H}^{r+s} i_{\overline{1}_h, c}^{h \leq +1,*} F'.$$

Comme $j_{\overline{1}_h}^{\geq h}$ est affine, d'après le lemme 1.3.5, $p\mathcal{H}^s i_{\overline{1}_h}^{h \leq +1,*} F'$ est nul pour tout $s < -1$; la surjectivité $j_{\overline{1}_h,!}^{\geq h} j_{\overline{1}_h}^{\geq h,*} F' \rightarrow F'$, implique aussi la nullité pour $s = 0$. Ainsi la suite spectrale précédente dégénère en E_2 avec

$$p\mathcal{H}^r i_{\overline{1}_h, c}^{h \leq +1,*} F' \simeq p\mathcal{H}^{r+1} i_{\overline{1}_h, c}^{h+1 \leq +0,*} \left(p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}_h}^{h \leq +1,*} F' \right).$$

De la même façon, comme $j_{\overline{1}_h - c}^{\geq h} : X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h} \setminus X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{L}}, \overline{s}, \overline{1}_h}^{\geq h}$ est affine, $p\mathcal{H}^r i_{\overline{1}_h, c}^{h \leq +1,*} F'$ est nul pour $r < -1$ et sans torsion pour $r = -1$ d'après le lemme 1.3.5, d'où le résultat. \square

Ainsi le triangle distingué précédent s'écrit sous la forme d'une suite exacte courte

$$0 \rightarrow j_{\neq c,!}^{=h} j_{\neq c}^{=h,*} P_F \rightarrow P_F \rightarrow i_{c,*}^{h+1} i_c^{h+1,*} P_F \rightarrow 0. \quad (2.1.3)$$

Considérons dans un premier temps, le cas où $F = {}^p j_{\overline{1}_{tg},!}^{=tg} HT_{\overline{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$. Au lemme B.3.3, on montre que sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, on a

$$i_c^{h+1,*} P_F \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq {}^p j_{c,!}^{=(t+1)g} j_c^{=(t+1)g,*} P_F \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l.$$

L'objectif principal de cette section est ainsi de démontrer que cet isomorphisme est encore valable sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$ sachant qu'à priori on sait simplement que

$${}^p j_{c,!}^{=(t+1)g} j_c^{=(t+1)g,*} P_F \hookrightarrow_+ i_c^{h+1,*} P_F \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{c,!}^{=(t+1)g} j_c^{=(t+1)g,*} P_F.$$

Des suites exactes courtes (2.1.1) et (2.1.3), on en déduit le lemme suivant qui nous ramène ainsi, en raisonnant par récurrence, à prouver les isomorphismes (2.1.5).

2.1.4. Lemme. — *Si les faisceaux de cohomologie de ${}^p j_{!*}^{=(t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_{t+1})$ sont sans torsion et si avec les notations précédentes pour $F = {}^p j_{1_t g,!*}^{=tg} HT_{1_h}(\pi_v, \Pi_t)$, on a*

$$i_{c,*}^{tg+1} i_c^{tg+1,*} P_F \simeq {}^p j_{c,!}^{=(t+1)g} j_c^{=(t+1)g,*} P_F, \quad (2.1.5)$$

alors les faisceaux de cohomologie de ${}^p j_{!*}^{=tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ sont sans torsion.

Considérons le cas simple où $g = 1 =$, i.e. où π_v est un caractère χ_v de F_v^\times , soit

$$\mathcal{L} := j_{1_h}^{=h,*} F[h-d] \simeq \overline{\mathbb{Z}}_l$$

avec l'action du groupe fondamental $\Pi_1(X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=h})$ de $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=h}$ qui se factorise par son quotient $\Pi_1(X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=h}) \twoheadrightarrow \mathcal{D}_{v,h}^\times$, où l'action de $\mathcal{D}_{v,h}^\times$ est donnée par un caractère χ_v .

2.1.6. Lemme. — *Avec les notations précédentes, on a*

$${}^p j_{1_h,!}^{\geq h} \mathcal{L}[d-h] \simeq {}^{p+} j_{1_h,!}^{\geq h} \mathcal{L}[d-h] \simeq \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h].$$

Démonstration. — Rappelons que $X_{\mathcal{I},\bar{s},1_h}^{\geq h}$ est lisse sur $\text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p$ de sorte que $\overline{\mathbb{Z}}_l[d-h]$ y est pervers au sens des deux t -structures avec $i_{1_h}^{h \leq +1,*} \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h] \in {}^p \mathcal{D}^{<0}$ et $i_{1_h}^{h \leq +1,!} \overline{\mathbb{Z}}_l[d-h] \in {}^{p+} \mathcal{D}^{\geq 1}$, d'où le résultat. \square

Pour des raisons élémentaires, cf. la proposition 2.4.2, on ne peut pas espérer l'égalité entre les deux extensions intermédiaires en général. L'idée pour prouver (2.1.5) est de considérer le poussé en avant Q_F :

$$\begin{array}{ccccc} j_{\neq c,!}^{=h} j_{\neq c}^{=h,*} P_F & \hookrightarrow & P_F & \twoheadrightarrow & i_{c,*}^{h+1} i_c^{h+1,*} P_F \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ {}^p j_{\neq c,!}^{=h} j_{\neq c}^{=h,*} Q_F & \simeq & {}^p j_{\neq c,!}^{=h} j_{\neq c}^{=h,*} P_F & \hookrightarrow & i_{c,*}^{h+1} i_c^{h+1,*} P_F. \end{array}$$

2.1.7. Notation. — *Pour \mathcal{L} un système local sur une strate pure $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{=h+g}$ avec $c \notin a$, la notation ${}^{p(c)} j_{a,!}^{=h+g} \mathcal{L}[d-h-g]$ désignera une extension intermédiaire*

$${}^p j_{a,!}^{=h+g} \mathcal{L}[d-h-g] \hookrightarrow_+ {}^{p(c)} j_{a,!}^{=h+g} \mathcal{L}[d-h-g]$$

dont le conoyau T vérifie la propriété suivante. Pour tout point z de $X_{\mathcal{I},\bar{s},c}^{\geq h+1}$, avec $i_z : \overline{\{z\}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}$, on a ${}^p h^0 i_z^* T = 0$.

Notons alors que le terme ${}^p j_{\neq c, !*}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *} Q_F$ du diagramme précédent, vérifie la condition de la notation ci-avant, i.e. pour tout point z de $X_{\overline{L}, \overline{s}, c}^{\geq h+1}$ et T le conoyau du morphisme naturel

$$\bigoplus_{a: c \notin a} {}^p j_{a, !*}^{\neq h+g} j_a^{\neq h+g, *} Q_F \hookrightarrow_+ {}^p j_{\neq c, !*}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *} Q_F \twoheadrightarrow T,$$

on a ${}^p h^0 i_z^* T = 0$. Ainsi, on peut décrire ${}^p j_{\neq c, !*}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *} Q_F$ à l'aide d'une filtration dont les gradués sont des faisceaux pervers de la forme ${}^{p(c)} j_{a, !*}^{\neq h} j_a^{\neq h, *} Q_F$ où a décrit les sous-espaces vectoriels de dimension $h+g$ de F_v^d ne contenant pas c . Pour matérialiser cette propriété, on écrira dans la suite

$${}^{p(c)} j_{\neq c, !*}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *} Q_F.$$

Du lemme 2.1.4 et de la proposition 2.3.1, on en déduit la proposition suivante.

2.1.8. Proposition. — Soient π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et $1 \leq t \leq \frac{d}{g}$, alors les faisceaux de cohomologie de ${}^p j_{!*}^{\neq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ sont sans torsion.

2.1.9. Corollaire. — Pour toute représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$ et pour tout $1 \leq t \leq d/g$, les gradués de la filtration de stratification exhaustive, cf. (1.3.18), de ${}^p j_{!*}^{\neq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ sont les ${}^p j_{!*}^{\neq (t+i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \{-\frac{i}{2}\} \times \text{St}_i(\pi_v) \{\frac{t}{2}\}) (\frac{t}{2})$.

Remarque : le résultat est démontré dans [7] sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$, l'apport nouveau de ce nouvel énoncé est le fait que sur $\overline{\mathbb{Z}_l}$, ce sont les p -extensions intermédiaires qui interviennent.

Démonstration. — Le cas $i = 0$ est trivial puisque $j_!^{\neq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \twoheadrightarrow {}^p j_!^{\neq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$. Dans le cas général, on se ramène trivialement à $j_{1tg, !*}^{\neq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ et à la proposition 2.3.1 qui traite le cas $i = 1$. Concrètement soit tout d'abord

$$0 \rightarrow P_i \rightarrow j_!^{\neq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow P'_i \rightarrow 0,$$

tel que $P_i \twoheadrightarrow Q_i$ où $Q_i \otimes_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \overline{\mathbb{Q}_l} \simeq {}^p j_{!*}^{\neq (t+i)g} HT_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(\pi_v, \Pi_t \{-\frac{i}{2}\} \times \text{St}_i(\pi_v) \{\frac{t}{2}\}) (\frac{t}{2})$: pour $i = 1$ on a noté précédemment $P_1 = P_F$. Comme dans le lemme 2.1.2, $i_c^{h+1, *} P_i \hookrightarrow i_c^{h+1, *} P_1$ est un faisceau pervers libre, ce qui fournit une suite exacte analogue à (2.1.3)

$$0 \rightarrow j_{\neq c, !*}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *} P_i \rightarrow P_i \rightarrow i_{c, *}^{h+1} i_c^{h+1, *} P_i \rightarrow 0,$$

avec

$$0 \rightarrow {}^{p(c)} j_{\neq c, !*}^{\neq (h+i)g} j_{\neq c}^{\neq (h+i)g, *} Q_i \rightarrow i_{c, *}^{h+1} i_c^{h+1, *} Q_i \rightarrow 0,$$

et le résultat découle de la proposition 2.3.1. \square

On en déduit aussi directement la version entière de B.3.2.

2.1.10. Corollaire. — Le lemme B.3.2 est valable sur $\overline{\mathbb{Z}_l}$.

2.2. Extensions entre $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceaux pervers libres. — Etant donnés deux systèmes locaux $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ sur un ouvert $j : U \hookrightarrow X$, il est bien connu qu'il n'y a pas, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, d'extensions entre leurs extensions intermédiaires, i.e. toute suite exacte courte

$$0 \rightarrow {}^p j_{!*} \mathcal{L}_1 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l[\dim X] \longrightarrow P_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \longrightarrow {}^p j_{!*} \mathcal{L}_2 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l[\dim X] \rightarrow 0$$

est nécessairement scindée. Sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$, la propriété subsiste pourvu qu'on prenne les p (resp. les $p+$) extensions intermédiaires pour \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 mais sinon il peut y avoir de telles suites exactes courtes non scindées. C'est ce phénomène que l'on veut étudier dans ce paragraphe. Concrètement soient A_1 et A_2 des faisceaux pervers libres et A une extension

$$0 \rightarrow A_1 \longrightarrow A \longrightarrow A_2 \rightarrow 0,$$

que l'on suppose scindée sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Notons alors A'_2 le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccc} A'_2 \hookrightarrow & \text{-----} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_2 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \hookrightarrow & \longrightarrow & A \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \end{array}$$

de sorte que

$$\begin{array}{ccccc} & & A_1 & \xlongequal{\quad} & A_1 & & (2.2.1) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A'_2 \hookrightarrow & A & \longrightarrow & A'_1 & & & \\ \parallel & \downarrow & & \downarrow & & & \\ A'_2 \hookrightarrow & A_2 & \longrightarrow & T & & & \end{array}$$

En particulier T est nul si et seulement si l'extension A est scindée, i.e. $A'_i \simeq A_i$ pour $i = 1, 2$.

2.2.2. Lemme. — Avec les notations ci-avant, on suppose en outre que

— pour $k = 1$ et $k = 2$, alors $A_k \simeq i_{k,*} {}^{p+} j_{k,!} \mathcal{L}_k[d_k]$ où $j_k : U_k \hookrightarrow \overline{U}_k$ est l'immersion ouverte dans son adhérence de dimension d_k , $i_k : \overline{U}_k \hookrightarrow X$ et \mathcal{L}_k un système local.

— Si $d_1 > d_2$, alors en tout point fermé z de $U_1 \setminus U_2$, on a $(h^{-d_1} X)_z \simeq \mathcal{L}_{1,z}$.

Alors $A = A_1 \oplus A_2$.

Démonstration. — La deuxième hypothèse impose que lorsque l'on décompose A sous la forme $0 \rightarrow A'_2 \rightarrow A \rightarrow A'_1 \rightarrow 0$ alors $j_1^* i_1^* A'_1 = j_1^* i_1^* A_1 = \mathcal{L}_1[d_1]$, i.e. on ne modifie pas le réseau. Ainsi dans la preuve de la proposition précédente, on doit avoir une suite $p+$ exacte

$$0 \rightarrow T_1[-1] \longrightarrow i_{1,*} {}^{p+} j_{1,!} \mathcal{L}_1[d_1] \longrightarrow A'_1 \rightarrow 0$$

où T_1 est à support dans $\overline{U}_1 \setminus U_1$, il est donc nul. \square

2.3. Faisceaux de cohomologie des p -faisceaux pervers d'Harris-Taylor. — La problématique décrite au paragraphe précédent est en général difficile à contrôler. Dans notre situation, les arguments reposent

- d'une part sur l'utilisation des foncteurs $j_{\neq c, !*}^{=h} j_{\neq c}^{=h,*}$, dont le lecteur pourra trouver au §B.3 les effets sur les $\overline{\mathbb{Q}}_l$ faisceaux pervers d'Harris-Taylor,
- et d'autre part sur la théorie des représentations du groupe mirabolique et de leurs dérivées d'après [5] et [16] pour son adaptation aux corps finis.

2.3.1. Proposition. — *Soit Q un $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers libre qui est $P_{h,d-h}(F_v)$ -équivariant et tel que*

- $Q \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq {}^p j_{1_h, !*}^{=h+g} HT_{1_h}(\pi_v, \Pi_h \otimes \pi_v)$ avec π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et Π_h une représentation quelconque de $GL_h(F_v)$;
- Q s'écrit comme une extension $0 \rightarrow Q_{\neq c} \rightarrow Q \rightarrow Q_c \rightarrow 0$ où $X_{\overline{I}, \overline{s}, c}^{\geq h+1}$ est une strate pure contenue dans $X_{\overline{I}, \overline{s}, 1_h}^{\geq h}$, avec $Q_{\neq c} \simeq {}^{p(c)} j_{\neq c, !*}^{=h+g} j_{\neq c}^{=h+g,*} Q$ et Q_c libre.

Alors la suite exacte ci-dessus est scindée et $Q \simeq {}^p j_{1_h, !*}^{=h+g} j_{1_h}^{=h+g,*} Q$.

Démonstration. — Supposons dans un premier temps que la suite exacte est scindée et considérons une strate pure $X_{\overline{I}, \overline{s}, a}^{=h+g}$ telle que $c \not\subset a$. Notons Q_a le quotient de Q tel que ${}^p j_{a, !*}^{=h+g} j_a^{=h+g,*} Q \hookrightarrow_+ Q_a$. La suite exacte de l'énoncé étant scindée on en déduit que $Q_a \simeq {}^{p(c)} j_{a, !*}^{=h+g} j_a^{=h+g,*} Q$. Par équivariance, l'isomorphisme précédent est valable pour tout $c \not\subset a$ de sorte que

$$Q_a \simeq {}^p j_{a, !*}^{=h+g} j_a^{=h+g,*} Q.$$

Si on note Q^a le noyau de $Q \rightarrow Q_a$ alors pour $a' \neq a$, on a

$$\begin{array}{ccccc} Q^{a'} & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & Q_a \\ & \searrow & \downarrow & & \\ & & Q_{a'} & & \end{array}$$

Comme $Q^a \rightarrow {}^p j_{a', !*}^{=h+g} j_{a'}^{=h+g,*} Q$ est non nulle et que son conoyau est à support dans $X_{\overline{I}, \overline{s}}^{\geq h+g+1}$, cette application est nécessairement surjective. De proche en proche, on obtient bien $Q \simeq {}^p j_{1_h, !*}^{=h+g} j_{1_h}^{=h+g,*} Q$.

Montrons à présent que la suite exacte de l'énoncé est scindée. On raisonne par l'absurde en supposant que le conoyau T de ${}^p j_{1_h, !*}^{=h+g} j_{1_h}^{=h+g,*} Q \hookrightarrow Q$, est non nul. Par construction, il est à support dans $X_{\overline{I}, \overline{s}, c}^{\geq h+g}$. Soit $T[l]$ sa l -torsion qui est donc un $\overline{\mathbb{F}}_l$ -faisceau pervers $P_{h,d-h}(F_v)$ -équivariant, et on choisit $T_0 \hookrightarrow T[l]$ de sorte que T_0 soit simple.

Notons que $T \hookrightarrow \overline{T}$ où \overline{T} est le conoyau de ${}^p j_{1_h, !*}^{=h+g} j_{1_h}^{=h+g,*} Q \hookrightarrow {}^{p+} j_{1_h, !*}^{=h+g} j_{1_h}^{=h+g,*} Q$ que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$0 \rightarrow \overline{T}_{\neq c} \rightarrow \overline{T} \rightarrow \overline{T}_c \rightarrow 0 \tag{2.3.2}$$

où $\overline{T}_{\neq c}$ (resp. \overline{T}_c) est le conoyau de

$${}^p j_{\neq c,!*}^{\neq h+g} j_{\neq c}^{\neq h+g,*} Q \hookrightarrow {}^{p+} j_{\neq c,!*}^{\neq h+g} j_{\neq c}^{\neq h+g,*} Q,$$

(resp. de ${}^p j_{c,!*}^{\neq h+g} j_c^{\neq h+g,*} Q \hookrightarrow {}^{p+} j_{c,!*}^{\neq h+g} j_c^{\neq h+g,*} Q$). Concrètement, supposons pour simplifier les notations que $c = \overline{1}_{h+1}$, et considérons une filtration du conoyau du bimorphisme

$${}^p j_{\overline{1}_{h+g},!*}^{\neq h+g} j_{\overline{1}_{h+g}}^{\neq h+g,*} Q \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{\overline{1}_{h+g},!*}^{\neq h+g} j_{\overline{1}_{h+g}}^{\neq h+g,*} Q \twoheadrightarrow \overline{T}_1.$$

Alors $\overline{T}_1[l]$ admet une filtration avec pour gradués

$$\operatorname{ind}_{P_{h,g+\delta_k,d-h-g-\delta_k}(F_v)}^{P_{h,g,d-h-g}(F_v)} {}^p j_{k,!*} \mathcal{L}_k[d_k]$$

où \mathcal{L}_k est un $\overline{\mathbb{F}}_l$ -système local sur $U_k \subset X_{\mathcal{I},\overline{s},\overline{1}_{h+g+\delta_k}}^{\neq h+g+\delta_k}$ avec $j_k : U_k \hookrightarrow \overline{U}_k \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\overline{s}}^{\geq 1}$, $d_k := \dim U_k \leq d - h - g - \delta_k$. Pour z_k un point générique de U_k , on écrit la fibre en z_k de \mathcal{L}_k en tant que $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation du sous-groupe de Levi de $P_{h,g,\delta_k}(F_v)$ sous la forme $r_l(\Pi_h) \otimes r_l(\pi_v)\{r_k\} \otimes \overline{\pi}_k$.

En ce qui concerne $\overline{T}[l]$, il suffit alors d'induire de $P_{h,g,d-h-g}(F_v)$ à $P_{h,d-h}(F_v)$. Considérons ainsi un point générique z d'un des $U_k \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\overline{s},\overline{1}_{h+g+\delta}}^{\neq h+g+\delta}$ tels que $d_k = \dim U_k$ est maximal, et regardons simplement l'action infinitésimale de $P_{h,g+\delta}(F_v)$ sur la fibre en z .

La filtration de $\overline{T}_1[l]$ ci-avant fournit alors une filtration de $\overline{T}_z[l]$ dont les gradués en tant que $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation du sous-groupe de Levi de $P_{h,g+\delta_k}(F_v)$, s'écrivent sous la forme $r_l(\Pi_h) \otimes (r_l(\pi_v)\{r_k\} \times \overline{\pi}_k)$. La suite exacte courte (2.3.2) fournit alors sur chacun de ces gradués, une suite exacte courte $P_{1,g+\delta-1}(F_v)$ -équivariante

$$0 \rightarrow r_l(\pi_v\{r_k\}) \times (\overline{\pi}_i)|_{P_{1,\delta-1}(F_v)} \longrightarrow (r_l(\pi_v\{r_k\}) \times \overline{\pi}_i)|_{P_{1,g+\delta-1}(F_v)} \longrightarrow r_l(\pi_v\{r_k\})|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \overline{\pi}_i \rightarrow 0$$

où la première induite à gauche (resp. celle de droite) est l'induite de $M_{1,g,\delta}(F_v) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & GL_g & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ (resp. de $P_{1,g-1,\delta}(F_v)$) à $P_{1,g+\delta-1}(F_v)$. En particulier $T_0 \hookrightarrow \overline{T}[l]$ se factorise par un de ces gradués avec ${}^p h^0 i_z^* T_0 \hookrightarrow r_l(\Pi_h) \otimes (r_l(\pi_v\{r_k\})|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \overline{\pi}_k)$.

Considérons alors le tiré en arrière Q_0

$$\begin{array}{ccccc} {}^p j_{\overline{1}_h,!*}^{\neq h+g} j_{\overline{1}_h}^{\neq h+g,*} c & \longrightarrow & Q & \twoheadrightarrow & T \\ \parallel & & \uparrow \text{---} & & \uparrow \\ {}^p j_{\overline{1}_h,!*}^{\neq h+g} j_{\overline{1}_h}^{\neq h+g,*} c & \longrightarrow & Q_0 & \dashrightarrow & T_0 \end{array}$$

Par composition des monomorphismes stricts, on a encore

$$0 \rightarrow {}^{p(c)} j_{\neq c,!*}^{\neq h+g} j_{\neq c}^{\neq h+g,*} Q_0 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow Q_{0,c} \rightarrow 0 \quad (2.3.3)$$

avec ${}^p h^0 i_z^* Q_0 = {}^p h^0 i_z^* Q_{0,c} = {}^p h^0 i_z^* T_0$. En outre z étant choisi dans $X_{\bar{l},s,c}^{\geq h+1}$, on écrit ${}^p h^0 i_z^* T_0$ sous la forme $r_l(\Pi_h) \otimes \theta$ où θ est une représentation irréductible de $GL_{g+\delta}(F_v)$

$$\begin{array}{ccc} & \theta & \\ & \downarrow & \searrow \\ r_l(\pi_v\{r_k\}) \times (\bar{\pi}_k)|_{P_{1,\delta-1}(F_v)} & \hookrightarrow & (r_l(\pi_v\{r_k\}) \times \bar{\pi}_k)|_{P_{1,g+\delta-1}(F_v)} \longrightarrow r_l(\pi_v\{r_k\})|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \bar{\pi}_k. \end{array}$$

On utilise à présent la théorie des représentations du groupe $P_{1,g+\delta-1}(F_v)$ de [5] dans le cas complexe et [16] chapitre III §1 sur $\bar{\mathbb{F}}_l$. En particulier d'après [16] III 1.10, pour $\bar{\pi}_k$ irréductible, $r_l(\pi_v\{r_k\})|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \bar{\pi}_k$ admet une unique dérivée d'ordre > 0 non nulle de sorte que d'après [16] III.1.5, c'est une représentation irréductible de $P_{1,g+\delta-1}(F_v)$. Ainsi

(i) d'une part $\theta \simeq r_l(\pi_v\{r_k\})|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \bar{\pi}_k$ et donc $Q_{0,c} \simeq \text{ind}_{P_{1,g-1,\delta}(F_v)}^{P_{1,g+\delta-1}(F_v)} Q_{\bar{1}_{h+g}}$ où ${}^p j_{\bar{1}_{h+g},!*}^{=h+g} {}^j j_{\bar{1}_{h+g}}^{=h+g,*} Q_0 \hookrightarrow_+ Q_{\bar{1}_{h+g}}$ de conoyau $T_{0,\bar{1}_{h+g}}$ non nul.

(ii) D'autre part, si on veut que $r_l(\pi_v\{r_k\}) \times \bar{\pi}_k$ ne soit pas une représentation irréductible, auquel cas θ ne pourrait pas être stable sous l'action de $GL_{g+\delta}(F_v)$, le support cuspidal de θ doit être un segment de Zelevinsky, nécessairement associé à $r_l(\pi_v\{r_k\})$. En particulier toutes les dérivées d'ordre $0 < k < g$ de $\bar{\pi}_k$ sont nulles.

On utilise alors que l'extension (2.3.3) est scindée sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$ pour écrire Q_0 sous la forme

$$0 \rightarrow {}^p j_{c,!*}^{=h+g} {}^j j_c^{=h+g,*} Q_0 \rightarrow Q_0 \rightarrow Q_{0,\neq c} \rightarrow 0.$$

D'après (2.2.1), si l'extension (2.3.3) n'est pas scindée, on a une flèche $P_{h,1,g+\delta-1,d-h-g-\delta}(F_v)$ -équivariante non nulle $T_0 \rightarrow T_{\neq c}$ où $T_{\neq c}$ est le conoyau de ${}^{p(c)} j_{\neq c,!*}^{=h+g} {}^j j_{\neq c}^{=h+g,*} Q_0 \hookrightarrow_+ Q_{0,\neq c}$, i.e. une injection

$$r_l(\pi_v\{r_k\})|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \bar{\pi}_k \hookrightarrow r_l(\pi_v\{r_k\}) \times (\bar{\pi})|_{P_{1,\delta-1}(F_v)},$$

où le support cuspidal de $\bar{\pi}$ doit ⁽³⁾ être dans la droite de Zelevinsky associée à $r_l(\pi_v\{r_k\})$.

On reprend alors la preuve du théorème 4.11 de [5] p458, cf. [16] pour la justification que les arguments de loc. cit. sont valables sur $\bar{\mathbb{F}}_l$. On introduit, d'après [5] 3.2 p450, le foncteur

$$\Phi^- := r_{V,\psi} : \text{Alg}(P_{1,n-1}(F_v)) \rightarrow \text{Alg}(P_{1,n-2}(F_v))$$

qui à une représentation algébrique V de $P_{1,n-1}(F_v)$ associe la représentation algébrique de $P_{1,n-2}(F_v)$ sur $V/E(V,\theta)$ où $E(V,\theta)$ est le sous-espace de V engendré par $\pi(u)\zeta - \psi(u)\zeta$ où u (resp. ζ) décrit $P_{1,n-1}(F_v)$ (resp. V), cf. loc. cit. p444, et où ψ est un caractère additif non trivial de F_v qu'on prolonge sur le radical unipotent de $P_{1,n-1}(F_v)$.

3. On peut sans difficulté montrer que $\bar{\pi}$ devrait être isomorphe à $\bar{\pi}_k$.

D'après [5] §3.5, cf. aussi [16] III.1.3, on a $(\Phi^-)^{g-1}(r_l(\pi_v\{r_k\})|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \bar{\pi}_k) \neq (0)$ et $(\Phi^-)^g(r_l(\pi_v\{r_k\})|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \bar{\pi}_k) = (0)$. De l'exactitude de Φ^- , on en déduit alors que

$$\begin{aligned} (\Phi^-)^{g-1}(r_l(\pi_v\{r_k\})|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \bar{\pi}_k) &\hookrightarrow \\ (\Phi^-)^{g-1}(r_l(\pi_v\{r_k\}) \times (\bar{\pi})|_{P_{1,\delta-1}(F_v)}) &= r_l(\pi_v\{r_k\}) \times (\Phi^-)^{g-1}((\bar{\pi})|_{P_{1,\delta-1}(F_v)}), \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de [5] proposition 4.13 (c) et du point (ii) ci-avant, i.e. du fait que les dérivées d'ordre $< g$ de $\bar{\pi}_k$ sont nulles. D'après [5] proposition 4.13 (d), on a alors $\Phi^-((\Phi^-)^{g-1}(r_l(\pi_v\{r_k\})|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \bar{\pi}_k) = (\Phi^-)^g(r_l(\pi_v\{r_k\})|_{P_{1,g-1}(F_v)} \times \bar{\pi}_k) \neq 0$, ce qui n'est pas, d'où la contradiction et donc la suite de l'énoncé est bien scindée. \square

À ce stade nous avons donc prouvé la proposition 2.1.8, i.e. que les faisceaux de cohomologie des p -extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor, sont sans torsion. Afin d'étudier les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{L}}$, cf. le §3.3, nous utiliserons l'énoncé suivant qui n'est qu'une version légèrement modifiée de la proposition précédente.

2.3.4. Proposition. — Soit $X_{\mathcal{L},\bar{s},c}^{\geq 1}$ une strate pure et $Q_{\neq c}$ un $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers libre et $P_c(F_v)$ -équivariant tel que $Q_{\neq c} \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l \simeq {}^p j_{\neq c,!}^{=tg} HT_{\neq c}(\pi_v, \tau)$ pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et où τ est la représentation mirabolique de $P_{1,tg-1}(F_v)$, i.e. celle dont la seule dérivée non nulle est celle d'ordre tg . On considère alors une extension de faisceaux pervers libre $P_{1,d-1}(F_v)$ -équivariants :

$$0 \rightarrow Q_{\neq c} \rightarrow X \rightarrow P_c \rightarrow 0$$

telle que

- l'extension est scindée après extension des scalaires à $\bar{\mathbb{Q}}_l$;
- avec les notations précédentes, $Q_{\neq c} \simeq {}^{p(c)} j_{\neq c,!}^{=tg} j_{\neq c,*}^{=tg,*} Q_{\neq c}$;
- P_c est supporté sur une strate $X_{\mathcal{L},\bar{s},c}^{\geq h}$ avec $h \leq tg$.

Alors l'extension ci-avant est scindée.

Démonstration. — On raisonne comme dans la preuve de la proposition précédente en partant de

$$0 \rightarrow P'_c \rightarrow X \rightarrow Q'_{\neq c} \rightarrow 0$$

avec $Q_{\neq c} \hookrightarrow_+ Q'_{\neq c}$. Le conoyau $T'_{\neq c}$ de ${}^p j_{\neq c,!}^{=tg} j_{\neq c,*}^{=tg,*} Q_{\neq c} \hookrightarrow_+ Q'_{\neq c}$, d'après (2.2.1), s'identifie avec le conoyau T_c de $P'_c \hookrightarrow P_c$. On décrit alors $T_c[l]$ à l'aide d'une filtration comme ci-avant où les gradués sont de la forme $i_* {}^p j_{!*} \mathcal{L}_{\bar{\mathbb{F}}_l} \otimes (\bar{\pi} \times \sigma_{P_{1,h-1}(F_v)})$ et on observe que $\bar{\pi} \times \sigma_{P_{1,h-1}(F_v)}$ est de dérivée inférieure ou égale à $h \leq tg$, alors que la dérivée de tout sous-espace de $\bar{\pi}|_{P_{1,\delta}(F_v)} \times \tau$ est d'ordre strictement supérieur à celui de τ , i.e. tg de sorte que $T_c[l]$ est nécessairement trivial, i.e. la suite exacte courte de l'énoncé est scindée. \square

En particulier dans le cas où $h = tg$, on obtient le résultat suivant.

2.3.5. Corollaire. — Soit $X_{T,s,c}^{\geq 1}$ une strate pure et soit Q un $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers libre, $GL_d(F_v)$ -équivariant tel que :

- $Q \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq {}^p j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$;
- Q s'écrit comme une extension de faisceaux pervers libres $P_c(F_v)$ -équivariants

$$0 \rightarrow Q_{\neq c} \rightarrow Q \rightarrow Q_c \rightarrow 0$$

$$\text{avec } Q_{\neq c} \simeq {}^{p(c)} j_{\neq c,!*}^{-tg} {}^{p(c)} j_{\neq c,!*}^{-tg,*} Q_{\neq c}.$$

Alors la suite exacte ci-dessus est scindée.

2.4. Sur les extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor. — Au §3.2, nous montrerons le résultat suivant.

2.4.1. Proposition. — Soit $\pi_{v,-1}$ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ dont la réduction modulo l est supercuspidale, alors, pour tout $1 \leq t \leq \frac{d}{g}$ et pour toute représentation Π_t de $GL_{tg}(F_v)$, le bimorphisme naturel

$${}^p j_{!*}^{-tg} HT(\pi_{v,-1}, \Pi_t) \longleftrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*}^{-tg} HT(\pi_{v,-1}, \Pi_t),$$

est un isomorphisme.

Notons ϱ la réduction modulo l d'une telle $\pi_{v,-1}$ qui est donc par hypothèse, supercuspidale. Avec les notations du §A.3, notons $\bar{\tau}$ la réduction modulo l de $\pi_{v,-1}[1]_D$ qui est donc irréductible, de sorte que $\pi_{v,-1} \in \text{Scusp}_{-1}(\bar{\tau})$. Dans ce paragraphe, nous voulons en déduire le calcul de la p -torsion du conoyau du bimorphisme ci-avant lorsque $\pi_{v,u} \in \text{Scusp}_u(\bar{\tau})$ pour $u \geq 0$. Avec les notations de A.2.9, cela signifie que la réduction modulo l de $\pi_{v,u}$ est isomorphe à ρ_u .

Soit $\mathbb{F}(\bullet) := \bullet \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$, le foncteur de réduction modulo l . Rappelons que ce dernier ne commute pas aux foncteurs de troncations et que d'après les équations 2.54-2.61 de [15], on a

$$\mathbb{F} {}^p j_{!*} \rightarrow {}^p j_{!*} \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{H}^{-1} \mathbb{F} {}^p i_* {}^p \mathcal{H}_{tors}^0 i^* j_* [1] \rightsquigarrow$$

$${}^p j_{!*} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} {}^{p+} j_{!*} \rightarrow \mathcal{H}^0 \mathbb{F} {}^p i_* {}^p \mathcal{H}_{tors}^0 i^* j_* \rightsquigarrow$$

En revanche, dans le cas où ${}^p j_! = {}^{p+} j_!$, en utilisant

$${}^p j_! \rightarrow {}^{p+} j_! \rightarrow {}^p i_* \mathcal{H}_{tors}^{-1} i^* j_* [1] \rightsquigarrow$$

quand ${}^p i_* \mathcal{H}^{-1} i^* j_*$ est libre, alors le triangle distingué

$$\mathbb{F} {}^p j_! \rightarrow {}^p j_! \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{H}^{-1} \mathbb{F} {}^p i_* {}^p \mathcal{H}_{tors}^{-1} i^* j_* [2] \rightsquigarrow$$

nous donne que \mathbb{F} et ${}^p j_!$ commutent.

2.4.2. Proposition. — Avec les notations précédentes et celles de la proposition A.2.16, dans le groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -faisceaux pervers équivariants sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}$, on a l'égalité

$$\mathbb{F}\left({}^p j_{l*}^{\equiv tg_u(\varrho)} HT(\pi_{v,u}, \Pi_t)\right) = m(\varrho) l^u \sum_{r=0}^{s-tm(\varrho)l^u} {}^p j_{l*}^{\equiv tg_u(\varrho)+rg_{-1}(\varrho)} HT\left(\varrho, r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} V_{\varrho}(r+tm(\varrho)l^u, < \underline{\delta}_u)\right) \otimes \Xi^{r \frac{g-1}{2}}.$$

Remarque : dans le groupe de Grothendieck, l'induite $r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} V_{\varrho-1}(r+tm(\varrho-1)l^u, < \underline{\delta}_u)$ n'intervient que par sa semi-simplifiée. Pour les mêmes raisons, il est inutile de préciser les réseaux stables utilisés pour les systèmes locaux de la formule précédente.

Démonstration. — Les cas $tg_u \geq d$ étant triviaux, on raisonne par récurrence en supposant le résultat acquis pour tout $t < t'$ et on traite le cas de t . L'idée est de partir de la commutation entre \mathbb{F} et les $j_l^{\equiv tg}$:

$$\mathbb{F}\left({}^p j_l^{\equiv tg_u(\varrho)} HT(\pi_{v,u}, \Pi_t)\right) = \sum_{t'=t}^{s_u} \mathbb{F}\left({}^p j_{l*}^{\equiv t'g_u(\varrho)} HT(\pi_{v,u}, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_{t'-t}(\pi_{v,u}))\right) \otimes \Xi^{\frac{(t'-t)(g_u(\varrho)-1)}{2}},$$

et, en posant $t(u) = tm(\varrho)l^u$

$$\mathbb{F}\left({}^p j_l^{\equiv t(u)g_{-1}(\varrho)} HT(\pi_{v,-1}, \Pi_t)\right) = \sum_{t'=t(u)}^s \mathbb{F}\left({}^p j_{l*}^{\equiv t'g_{-1}(\varrho)} HT(\pi_{v,-1}, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_{t'-t(u)}(\pi_{-1}))\right) \otimes \Xi^{\frac{(t'-t(u))(g_{-1}(\varrho)-1)}{2}}. \quad (2.4.3)$$

Or d'après A.3.10, on a

$$\mathbb{F} j_l^{\equiv tg_u(\varrho)} HT(\pi_{v,u}, \Pi_t) = j_l^{\equiv tg_u(\varrho)} \mathbb{F} HT(\pi_{v,u}, \Pi_t) = m(\varrho) l^u j_l^{\equiv t(u)g_{-1}(\varrho)} \mathbb{F} HT(\pi_{v,-1}, \Pi_t)$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{t'=t+1}^{s_u} \mathbb{F}\left({}^p j_{l*}^{\equiv t'g_u(\varrho)} HT(\pi_{v,u}, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_{t'-t}(\pi_u))\right) \otimes \Xi^{\frac{(t'-t)(g_u(\varrho)-1)}{2}} \\ &= \sum_{t'=t(u)+1}^{s(u)} {}^p j_{l*}^{\geq t'g_{-1}(\varrho)} HT(\varrho, r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} V_{\varrho-1}(t'-t(u), \geq \underline{\delta}_u)) \otimes \Xi^{\frac{(t'-t(u))(g_{-1}(\varrho)-1)}{2}} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

En soustrayant (2.4.4) à (2.4.3), on obtient le résultat. \square

Remarque : on notera en particulier que si Π_t est un sous-quotient irréductible de $\text{St}_t(\pi_{v,u})$ alors pour tout sous-quotient irréductible σ de $V_{\varrho-1}(s(u) - t(u), \geq \underline{\delta}_u)$, l'induite $\Pi_t \times \sigma$ est irréductible.

Remarque : la surjection

$${}^p j_l^{\equiv t'g_u(\varrho)} (\mathbb{F} HT(\pi_{v,u}, \Pi_{t'})) \rightarrow \mathbb{F}({}^p j_{l*}^{\equiv t'g_u(\varrho)} HT(\pi_{v,u}, \Pi_{t'}))$$

nous donne en outre que la suite des dimensions des gradués de la filtration de stratification exhaustive est strictement croissante ce qui fixe complètement cette filtration. En particulier, en notant $T := i_*^{tg} \left({}^p\mathcal{H}_{\text{tor}}^0 i_*^{tg,*} j_*^{\geq tg}[1] \right)$, alors pour tout sous-faisceau pervers T_0 de la l -torsion $T[l]$ de T , il existe un sous-quotient irréductible σ de $V_{\varrho-1}(s(u) - t(u), \geq \underline{\delta}_u)$ tel que T_0 admet ${}^p j_{1*}^{s(u)g-1(\varrho)} HT(\varrho, r_l(\Pi_t) \xrightarrow{\sigma} \sigma) \otimes \Xi^{\frac{(s(u)-t(u))(g-1(\varrho)-1)}{2}}$ comme sous-objet.

Remarque : la l -torsion du quotient des $p+$ faisceaux pervers d'Harris-Taylor par leur p version, est complètement décrit par la combinatoire de la réduction modulo l des représentations de $GL_d(F_v)$ et de $D_{v,d}^\times$. L'étude de la torsion d'ordre supérieure découlerait selon le même schéma de démonstration, de l'étude de la réduction modulo l^n des représentations irréductibles de $GL_d(F_v)$ et $D_{v,d}^\times$.

3. Cycles évanescents

Pour tout $I \in \mathcal{I}$, le faisceaux pervers des cycles évanescents $R\Psi_{\eta_v, I}(\Lambda[d-1])\left(\frac{d-1}{2}\right)$ sur $X_{I, \bar{s}}$ sera noté $\Psi_{I, \Lambda}$. Le faisceau pervers de Hecke associé sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}$ est noté $\Psi_{\mathcal{I}, \Lambda}$. Pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$, on notera plus simplement Ψ_I et $\Psi_{\mathcal{I}}$. On notera aussi qu'avec ces décalages, $\Psi_{\mathcal{I}, \Lambda}$ est autodual pour la dualité de Grothendieck-Verdier.

Remarque : soit, cf. [13] III.2, \mathcal{L}_ξ le système local attaché à une représentation irréductible algébrique ξ de G sur Λ . Alors $R\Psi_{\eta_v, \mathcal{I}}(\mathcal{L}_\xi) \simeq R\Psi_{\eta_v, \mathcal{I}}(\Lambda) \otimes \mathcal{L}_\xi$, i.e. d'un point de vue faisceautique, le rôle de \mathcal{L}_ξ est transparent ce qui justifie de n'étudier que le cas ξ trivial.

D'après [7] théorème 2.2.4, cf. aussi la proposition B.2.2, les gradués de la filtration par les poids de $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$ sont les $\mathcal{P}(t, \pi_v)\left(\frac{1-t+2k}{2}\right)$ où

- π_v décrit les classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ pour g variant de 1 à d ,
- t varie de 1 à $\lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ et k de 0 à $t-1$.

3.0.1. Définition. — On dira d'un $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers libre P tel que

$$P \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathcal{P}(t, \pi_v)\left(\frac{1-t+2k}{2}\right)$$

comme ci-avant, tel que $\pi_v \in \text{Scusp}_i(\bar{\tau})$, qu'il est un faisceau pervers d'Harris-Taylor de $\bar{\tau}$ -type i , ou simplement de type $\bar{\tau}$ quand on ne souhaitera pas préciser l'indice i .

Le but de cette section est de montrer que les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{I}}$ de $\Psi_{\mathcal{I}}$ sont sans torsion. Pour ce faire, comme indiqué dans l'introduction, nous allons utiliser une filtration de $\Psi_{\mathcal{I}}$ dont la suite spectrale calculant les $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{I}}$ à partir des faisceaux de cohomologie de ses gradués, dégénère en E_1 .

3.1. Décomposition supercuspidale. — À l'aide des variétés d'Igusa de première et seconde espèce, les auteurs de [13] p136, associent à toute Λ -représentation admissible ρ_v de $\mathcal{D}_{v,h}^\times$, un Λ -système local $\mathcal{L}_{\Lambda, \overline{\mathbb{I}}_h}(\rho_v)$ sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, \overline{\mathbb{I}}_h}^=h$ muni d'une action de $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P_{h, d-h}(\mathcal{O}_v)$,

où le deuxième facteur agit via la projection $P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v) \longrightarrow \mathbb{Z} \times GL_{d-h}(\mathcal{O}_v)$ comme dans la remarque précédant 1.2.8. On note alors

$$\mathcal{L}_\Lambda(\rho_v) := \mathcal{L}_{\Lambda, \overline{1}_h}(\rho_v) \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)} GL_d(\mathcal{O}_v)$$

sa version induite sur $X_{\mathcal{I}, \overline{s}}^{\overline{h}}$, cf. les notations du §B.1. Pour ρ_v une représentation de $D_{v,h}^\times$, on notera $\mathcal{L}_\Lambda(\rho_v)$ pour $\mathcal{L}_\Lambda(\rho_v, |_{D_{v,h}^\times})$.

Remarque : l'action du facteur $GL_h(F_v)$ du sous-groupe de Levi $P_{h,d-h}(F_v)$ est dite « infinitésimale ». Pour toute strate pure $X_{\mathcal{I}, \overline{s}, a}^{\overline{h}}$ et pour $\mathcal{L}_{\Lambda, a}(\rho_v)$ le système local associé, on a aussi une action dite infinitésimale du facteur $GL_h(F_v)$ du sous-groupe de Levi de $P_a(F_v) = aP_{h,d-h}(F_v)a^{-1}$, cf. le deuxième tiret de A.1.2.

Le découpage (B.2.16) de $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$ selon les classes d'équivalence inertielles des représentations irréductibles cuspidales π_v de $GL_g(F_v)$ pour g variant de 1 à d , n'est plus valable sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$. L'idée est alors d'utiliser la proposition A.3.6. Ainsi à la décomposition $\rho_v \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} \rho_{v, \bar{\tau}}$ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation entière de $D_{v,h}^\times$, selon ses $\bar{\tau}$ -composantes, on associe

$$\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\rho_v) \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\rho_{v, \bar{\tau}}).$$

3.1.1. Proposition. — (cf. [13] proposition IV.2.2 et le §2.4 de [7])

On a un isomorphisme⁽⁴⁾ $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P_{h,d-h}(F_v) \times W_v$ -équivariant

$$\text{ind}_{(D_{v,h}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,h}^\times} \left(\mathcal{H}^{h-d-i} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \right) |_{X_{\mathcal{I}, \overline{s}, 1_h}^{\overline{h}}} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^{h-1-i}),$$

où $\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}$ est défini en 1.1.3 et la correspondance entre le système indexé par \mathcal{I} et \mathbb{N} est donnée par l'application m_1 de 1.2.3.

3.1.2. Notation. — Pour $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$, on notera $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\bar{\tau})$ pour $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{1}_h}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}, \text{free}}^{h-1})$ et $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau})$ pour la version induite.

Remarque : on retrouve ces systèmes locaux dans les gradués $\text{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}})$ de la filtration de stratification

$$j^{=h,*} \text{gr}_!^h(\Psi_{\mathcal{I}}) \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau}).$$

3.1.3. Proposition. — On a une décomposition

$$\Psi_{\mathcal{I}} \simeq \bigoplus_{g=1}^d \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(g)} \Psi_{\varrho}$$

4. Noter le décalage $[d-1]$ dans la définition de $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$.

où les gradués $\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho)$ de la filtration de stratification de Ψ_ϱ vérifient, cf. la notation A.3.8,

$$j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } g \nmid h \\ \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\varrho[t]_D) & \text{pour } h = tg, \end{cases}$$

et où les constituants irréductibles de $\Psi_\varrho \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ sont exactement ceux de $\Psi_{\mathcal{I}} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ qui sont de type ϱ au sens de la définition 3.0.1.

Démonstration. — Raisonnons par récurrence sur la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}}$

$$0 = \mathrm{Fil}_!^0(\Psi_{\mathcal{I}}) \subset \mathrm{Fil}_!^1(\Psi_{\mathcal{I}}) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_!^d(\Psi_{\mathcal{I}}) = \Psi_{\mathcal{I}}$$

en supposant l'existence d'une décomposition

$$\mathrm{Fill}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}) = \bigoplus_{g=1}^d \bigoplus_{\varrho \in \mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(g)} \mathrm{Fil}_{!,\varrho}^r(\Psi_{\mathcal{I}}).$$

Le cas de $r = 0$ étant clair, supposons le résultat acquis pour $r - 1$ et montrons le pour r . De la décomposition $j^{=r,*}\mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \simeq \bigoplus_{g|r=tg} \bigoplus_{\varrho \in \mathrm{Scusp}_{F_v}(g)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\varrho[t]_D)$, on obtient

$$\mathrm{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \simeq \bigoplus_{g|r} \bigoplus_{\varrho \in \mathrm{Scusp}_{F_v}(g)} \mathrm{gr}_{!,\varrho}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$$

avec $j_!^{-r} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\varrho[t]_D)[d-r] \rightarrow \mathrm{gr}_{!,\varrho}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$ et où tous les constituants simples de $\mathrm{gr}_{!,\varrho}^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ sont de type ϱ .

Considérons alors un diagramme comme (2.2.1) où A_1 (resp. A_2) est un faisceau pervers d'Harris-Taylor de type ϱ_1 (resp. ϱ_2) où on suppose que ϱ_1 et ϱ_2 ne sont pas dans la même droite de Zelevinsky. L'action de W_v sur $T[l]$ vu comme quotient de A'_1 (resp. de A_2) est alors isotypique relativement à la représentation galoisienne associée à ϱ_1 (resp. ϱ_2) par la correspondance de Langlands-Vigneras, d'où la contradiction. Ainsi $\mathrm{gr}_{!,\varrho_2}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$ est en somme directe avec $\mathrm{Fil}_{!,\varrho_1}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}})$ ce qui donne la propriété au rang r en faisant varier ϱ_1 et ϱ_2 . \square

Remarque : on peut donc ainsi traiter séparément chacun des Ψ_ϱ , ce qui nous amène à fixer pour la suite une telle $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale ϱ .

3.1.4 — *Notations :* dans la fin de cette section, nous allons introduire quelques notations utiles dans les paragraphes suivants. Avec les notations de A.3.4, rappelons que $g_{-1}(\varrho) \mid g_0(\varrho) \mid \cdots \mid g_s(\varrho)$. On note alors $i_\varrho(h)$ le plus grand entier $i \geq -1$ tel que $g_i(\varrho)$ divise $h = g_i(\varrho)t_i(\varrho, h)$. De la formule (B.2.17), on a alors

$$j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{i=-1}^{i_\varrho(h)} \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\overline{\tau})} j^{=h,*}\mathcal{P}(t_i(\varrho, h), \pi_v) \left(\frac{1 - t_i(\varrho, h)}{2} \right). \quad (3.1.5)$$

Notons alors, pour $k = -i_\varrho(h), \dots, 1$,

$$\mathrm{Fil}_\varrho^k(j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l) := \bigoplus_{i=-i_\varrho(h)}^k \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\overline{\tau})} j^{=h,*}\mathcal{P}(t_i(\varrho, h), \pi_v) \left(\frac{1-t_i(\varrho, h)}{2} \right)$$

et soit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fil}_\varrho^k(j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho)) & \hookrightarrow & \mathrm{Fil}_\varrho^k(j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l) \\ \downarrow & & \downarrow \\ j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho) & \hookrightarrow & j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l, \end{array}$$

et $\mathrm{gr}_\varrho^k(j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho))$ les gradués associés à cette ϱ -filtration naïve. Avec les notations de B.2.3, on note

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_!^{h,-}(\Psi_\varrho) \rightarrow \mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho) \rightarrow \mathrm{gr}_!^{h,+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0,$$

tel que $\mathrm{gr}_!^{h,+}(\Psi_\varrho) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq {}^p j_{!*} j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l)$ et on introduit

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{gr}_{!, \geq 0}^{h,+}(\Psi_\varrho) \\ & & \downarrow \\ j_!^{=h} j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho) & \twoheadrightarrow & \mathrm{gr}_!^{h,+}(\Psi_\varrho) \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_!^{=h} \mathrm{gr}_\varrho^{-1}(j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho)) & \dashrightarrow & \mathrm{gr}_{!, -1}^{h,+}(\Psi_\varrho). \end{array}$$

Enfin on peut filtrer chacun des $\mathrm{gr}_\varrho^k(j^{=h,*}\mathrm{gr}_!^h(\Psi_\varrho))$ de sorte que les gradués soient des systèmes locaux d'Harris-Taylor, i.e. des réseaux stables de chacun des $j^{=h,*}\mathcal{P}(t_i(\varrho, h), \pi_v) \left(\frac{1-t_i(\varrho, h)}{2} \right)$, lesquels dépendent, à priori, de tous les choix non naturels faits pour construire cette filtration. Ainsi pour $k = -1$, on obtient alors une filtration de $\mathrm{gr}_{!, -1}^{h,+}(\Psi_\varrho)$ dont les gradués seront notés $\mathrm{gr}_{!, \pi_v}^{h,+}(\Psi_\varrho)$, pour $\pi_v \in \mathrm{Scusp}_{-1}(\varrho)$.

On introduira aussi, pour $i \geq 0$ et $\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\varrho)$, les notations $\mathrm{gr}_{!, i}^{h,+}(\Psi_\varrho)$ et $\mathrm{gr}_{!, \pi_v}^{h,+}(\Psi_\varrho)$, qui dépendent de tous les choix faits.

3.2. Preuve de la proposition 2.4.1. — Notons $\bar{j} : X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}} \hookleftarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}} : \bar{i}$, et considérons la t -structure p sur $\overline{X}_{\mathcal{I}} := X_{\mathcal{I}} \times_{\mathrm{Spec} \mathcal{O}_v} \mathrm{Spec} \overline{\mathcal{O}}_v$ obtenue en recollant

$$\left({}^p D^{\leq -1}(X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}}, \overline{\mathbb{Z}}_l), {}^p D^{\geq -1}(X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}}, \overline{\mathbb{Z}}_l) \right) \quad \text{et} \quad \left({}^p D^{\leq 0}(X_{\mathcal{I}, \bar{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l), {}^p D^{\geq 0}(X_{\mathcal{I}, \bar{s}}, \overline{\mathbb{Z}}_l) \right).$$

Les foncteurs $\bar{j}_!$ et $\bar{j}_* = {}^p \bar{j}_{!*}$ sont alors t -exactes avec

$$0 \rightarrow \Psi_{\mathcal{I}} \rightarrow \bar{j}_! \overline{\mathbb{Z}}_l[d-1] \left(\frac{d-1}{2} \right) \rightarrow \bar{j}_* \overline{\mathbb{Z}}_l[d-1] \left(\frac{d-1}{2} \right) \rightarrow 0$$

où $\Psi_{\mathcal{I}} = {}^p \mathcal{H}^{-1} \bar{i}^* \bar{j}_* \overline{\mathbb{Z}}_l[d-1] \left(\frac{d-1}{2} \right)$.

3.2.1. Lemme. — Pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$, $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$ est un objet de $\mathcal{F}(X_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{S}}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$.

Démonstration. — D'après [1] proposition 4.4.2, $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$ est un objet de ${}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{S}}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$. D'après [14] variante 4.4 du théorème 4.2, on a $D\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \simeq \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$ de sorte que

$$\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{S}}}, \overline{\mathbb{Z}}_l) \cap {}^{p+}\mathcal{D}^{\geq 0}(X_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{S}}}, \overline{\mathbb{Z}}_l) = \mathcal{F}(X_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{S}}}, \overline{\mathbb{Z}}_l).$$

□

Le morphisme $\bar{j}_{\neq c} : \overline{X}_{\mathcal{I}} \setminus X_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{S}}, c}^{\geq 1} \hookrightarrow \overline{X}_{\mathcal{I}}$ étant affine, on peut reprendre la preuve du lemme 2.1.2 et conclure à la liberté de ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\mathcal{I}}) \simeq \bigoplus_{\varrho} {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\varrho})$ avec

$$0 \rightarrow \bar{j}_{\neq c, !} \bar{j}_{\neq c}^* \Psi_{\varrho} \longrightarrow \Psi_{\varrho} \longrightarrow i_{c,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\varrho}) \rightarrow 0. \quad (3.2.2)$$

De l'exactitude de $\bar{j}_{\neq c, !} \bar{j}_{\neq c}^*$, les filtrations de Ψ_{ϱ} introduites plus avant, fournissent des filtrations de $\bar{j}_{\neq c, !} \bar{j}_{\neq c}^* \Psi_{\varrho}$. Ainsi la filtration de stratification fournit les gradués $\mathrm{gr}_{!, \neq c}^h(\Psi_{\varrho})$ avec

$$0 \rightarrow \mathrm{gr}_{!, \neq c}^{h,-}(\Psi_{\varrho}) \longrightarrow \mathrm{gr}_{!, \neq c}^h(\Psi_{\varrho}) \longrightarrow \mathrm{gr}_{!, \neq c}^{h,+}(\Psi_{\varrho}) \rightarrow 0.$$

Remarque : au sens de la notation 2.1.7, on a $\mathrm{gr}_{!, \neq c, \pi_v}^{h,+}(\Psi_{\varrho}) \simeq {}^{p(c)}j_{\neq c, !}^{=h, *} \mathrm{gr}_{!, \neq c}^h(\Psi_{\varrho})$.

3.2.3. Notation. — Partant des $\mathrm{gr}_{!, \neq c}^{h,+}(\Psi_{\varrho})$, on introduit comme précédemment les $\mathrm{gr}_{!, \neq c, -1}^{h,+}(\Psi_{\varrho})$, $\mathrm{gr}_{!, \neq c, \geq 0}^{h,+}(\Psi_{\varrho})$ et $\mathrm{gr}_{!, \neq c, \pi_v}^{h,+}(\Psi_{\varrho})$ pour tout $\pi_v \in \mathrm{Scusp}(\varrho)$.

Comme rappelé à la proposition B.3.4, le faisceau pervers libre $i_{c,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\varrho})$ admet une filtration de stratification⁽⁵⁾

$$\mathrm{Fil}_c^0(\Psi_{\varrho}) = 0 \subset \mathrm{Fil}_c^1(\Psi_{\varrho}) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_c^d(\Psi_{\varrho}) = i_{c,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\varrho}),$$

dont les gradués $\mathrm{gr}_c^h(\Psi_{\varrho})$ vérifient, en supposant pour simplifier les notations que $c = \overline{1}_1$,

$$\mathrm{gr}_c^h(\Psi_{\varrho}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathrm{ind}_{P_{1, h-1, d-h}(F_v)}^{P_{1, d-1}(F_v)} {}^p j_{\overline{1}_h, !}^{=h, *} {}^p j_{\overline{1}_h}^{=h, *} \mathrm{gr}_{!, \neq c}^h(\Psi_{\varrho}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l.$$

3.2.4. Notation. — Comme précédemment, on introduit les notations $\mathrm{gr}_{c, -1}^h(\Psi_{\varrho})$ et $\mathrm{gr}_{c, \geq 0}^h(\Psi_{\varrho})$.

Pour prouver le théorème 3.3.1, il nous suffit de montrer que la filtration de stratification de $i_{c,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*} \Psi_{\varrho}$, dont la $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -version est donnée à la proposition B.3.4, admet pour gradués les p -extensions intermédiaires de B.3.4. En effet soit z un point géométrique et $X_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{S}}, c}^{\geq 1}$ une strate pure contenant z . De la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \bar{j}_{\neq c, !} \bar{j}_{\neq c}^* \Psi_{\varrho} \longrightarrow \Psi_{\varrho} \longrightarrow {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\varrho}) \rightarrow 0,$$

on en déduit que le germe en z de $\mathcal{H}^i \Psi_{\varrho}$ est donné par celui de ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\varrho})$. Or

5. La formulation sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ est plus agréable car on peut y séparer les contributions selon les cuspidales de $GL_g(F_v)$ pour g variant de 1 à d .

- si ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$ admet une filtration dont les gradués sont des p -extensions intermédiaires de systèmes locaux d’Harris-Taylor,
- et comme les faisceaux de cohomologie de ceux-ci sont, d’après 2.1.8, sans torsion, de sorte que les termes initiaux de la suite spectrale associée à cette filtration et calculant les germes en z des faisceaux de cohomologie de ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l})$, sont sans torsion.
- Ainsi le résultat découlerait du fait que sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, cette suite spectrale dégénère en E_1 , cf. la dernière remarque de cet article.

3.2.5. Proposition. — Avec les notations précédentes, pour tout $\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)$, la filtration de stratification de $\text{gr}_{!}^{g-1(\varrho)}(\Psi_{\varrho})$ admet pour gradués les ${}^p j_{!*}^{-tg-1(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{1-t}{2})$.

Démonstration. — Notons que $\text{gr}_{!}^{g-1(\varrho)} \hookrightarrow \Psi_{\varrho}$, de sorte que

$${}^p i_{c,*}^1 \mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\text{gr}_{!}^{g-1(\varrho)}) \hookrightarrow {}^p i_{c,*}^1 \mathcal{H}^0 i_c^{1,*} \Psi_{\varrho}$$

est libre. Ainsi le résultat pour $t > 1$ (resp. $t = 1$) se déduit de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \bar{j}_{\neq c, !} \bar{j}_{\neq c}^* (\text{gr}_{!}^{g-1(\varrho)}) \longrightarrow \text{gr}_{!}^{g-1(\varrho)} \longrightarrow {}^p \mathcal{H}^0 i_c^{1,*} (\text{gr}_{!}^{g-1(\varrho)}) \rightarrow 0,$$

et du corollaire 2.1.9 (resp. de la proposition 2.3.1). \square

Remarque : on déduit du résultat précédent que les gradués de la filtration de stratification de $\text{gr}_{!}^{g-1(\varrho)}(\Psi_{\varrho})$ sont les $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)} {}^p j_{!*}^{-tg-1(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{1-t}{2})$.

En utilisant le fait que $\Psi_{\mathcal{I}}$ est autodual, on en déduit le corollaire suivant.

3.2.6. Corollaire. — Pour tout $\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)$, on a une surjection $\Psi_{\varrho} \twoheadrightarrow P(\pi_v)$, où les gradués de la filtration de stratification de $P(\pi_v)$ sont les ${}^{p+} j_{!*}^{-tg-1(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{1-t}{2})$, pour $t = 1, \dots, \lfloor \frac{d}{g-1(\varrho)} \rfloor$.

Remarque : on a de même $\Psi_{\varrho} \twoheadrightarrow P_{\varrho}$, où les gradués de la filtration de stratification de P_{ϱ} sont les $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)} {}^{p+} j_{!*}^{-tg-1(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{1-t}{2})$.

Dans la suite nous aurons besoin d’une version légèrement amélioré du corollaire précédent.

3.2.7. Proposition. — Soit $s_{\varrho} = \frac{d}{g-1(\varrho)}$ que l’on suppose entier et ≥ 4 . Il existe un quotient $\Psi_{\varrho} \twoheadrightarrow Q_{\varrho}$ où les gradués $\text{gr}_{!}^k(Q_{\varrho})$ de la filtration de stratification de Q_{ϱ} sont nuls pour $k \neq tg_{-1}(\varrho)$ avec $1 \leq t \leq s_{\varrho}$, isomorphes à $\bigoplus_{\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)} {}^{p+} j_{!*}^{-tg-1(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{1-t}{2})$

pour $t \neq s_\varrho - 1$ et sinon

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \bigoplus_{\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)} \bigoplus_{p+j_*^{\varrho} = s_\varrho g - 1} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \left(\frac{3 - s_\varrho}{2} \right) \\
 \rightarrow \text{gr}_!^{s_\varrho - 1}(Q_\varrho) \rightarrow \\
 \bigoplus_{\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)} \bigoplus_{p+j_*^{\varrho} = s_\varrho g - 1} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \left(\frac{2 - s_\varrho}{2} \right) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Démonstration. — Comme précédemment, nous allons procéder en utilisant la dualité de Grothendieck-Verdier, i.e. en construisant un sous-espace de Ψ_ϱ . Soit tout d'abord $\widetilde{\text{gr}}_{!, -1}^{2g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho) \hookrightarrow \text{gr}_!^{2g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho)$ le sous-espace strict isomorphe sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ à $\text{gr}_{!, -1}^{2g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho)$, i.e. par rapport à la ϱ -filtration naïve utilisée jusqu'à présent, on commence par filtrer avec $\text{Scusp}_{-1}(\varrho)$. Soit alors

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Fil}_!^{g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho) & \hookrightarrow & P_1 & \dashrightarrow & \widetilde{\text{gr}}_{!, -1}^{2g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho) \\
 \parallel & & \uparrow & & \downarrow \\
 \text{Fil}_!^{g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho) & \hookrightarrow & \text{Fil}_!^{2g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho) & \twoheadrightarrow & \text{gr}_{!, -1}^{2g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho).
 \end{array}$$

On considère ensuite

$$\begin{array}{ccccc}
 P_2 & \hookrightarrow & P & \dashrightarrow & Q \\
 \parallel & & \uparrow & & \downarrow \\
 P_2 & \hookrightarrow & P_1 & \twoheadrightarrow & j_*^{j=d-4g-1(\varrho)} j^{j=d-4g-1(\varrho), *}_! P_1
 \end{array}$$

où $Q \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)} \mathcal{P}(s_\varrho - 4, \pi_v) \left(\frac{s_\varrho - 4}{2} \right)$. La filtration de stratification exhaustive de P_2 fournit alors une filtration

$$0 = \text{Fil}^0(P) \hookrightarrow \text{Fil}^1(P) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \text{Fil}^6(P) = P$$

dont les gradués $\text{gr}^k(P)$ sont donnés sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ par la somme directe sur tous les $\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)$ des faisceaux pervers d'Harris-Taylor suivant :

- $\mathcal{P}(s_\varrho - k + 1, \pi_v) \left(\frac{s_\varrho - k}{2} \right)$ pour $k = 1, 2, 3$
- $\mathcal{P}(s_\varrho - k + 4, \pi_v) \left(\frac{s_\varrho - k + 3}{2} \right)$ pour $k = 4, 5$ et
- $\mathcal{P}(s_\varrho - 4, \pi_v) \left(\frac{s_\varrho - 4}{2} \right)$ pour $k = 6$.

Par application du foncteur exact $j_{\neq c, !}^{j=1, j \neq c} \dashrightarrow j_{\neq c, !}^{j=1, *}$ au monomorphisme strict $P \hookrightarrow \Psi_\varrho$, la filtration précédente de P fournit une filtration de longueur 8 de $j_{\neq c, !}^{j=1, j \neq c} P \hookrightarrow \Psi_\varrho$ dont les gradués $\text{gr}_{\neq c}^k(P)$ sont d'après le corollaire 2.1.10 aux p -extensions intermédiaires associés à la somme directe sur les $\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)$ des faisceaux pervers d'Harris-Taylor

- $\mathcal{P}(s_\varrho, \pi_v) \left(\frac{s_\varrho - 1}{2} \right)$ pour $k = 1$;
- $\mathcal{P}_{\neq c}(s_\varrho - 1, \pi_v) \left(\frac{s_\varrho - 2}{2} \right)$ pour $k = 2$;

- $\mathcal{P}_c(s_\varrho - 1, \pi_v)(\frac{s_\varrho - 2}{2})$ pour $k = 3$;
- $\mathcal{P}_{\neq c}(s_\varrho - 2, \pi_v)(\frac{s_\varrho - 3}{2})$ pour $k = 4$;
- $\mathcal{P}(s_\varrho, \pi_v)(\frac{s_\varrho - 3}{2})$ pour $k = 5$;
- $\mathcal{P}_{\neq c}(s_\varrho - 1, \pi_v)(\frac{s_\varrho - 4}{2})$ pour $k = 6$;
- $\mathcal{P}_c(s_\varrho - 2, \pi_v)(\frac{s_\varrho - 3}{2})$ pour $k = 7$ et
- $\mathcal{P}_{\neq c}(s_\varrho - 3, \pi_v)(\frac{s_\varrho - 4}{2})$ pour $k = 8$.

Ainsi d'après (2.2.1), on peut échanger l'ordre des gradués d'indice 6 et 7 sans modifier $\text{gr}_{\neq c}^7(P)$. Pour reconstituer $\text{Fil}^4(P)$, on échange ensuite les gradués d'indice 4 et 5 ce qui, d'après (2.2.1), fournit un nouveau gradué $\widetilde{\text{gr}}_{\neq c}^5(P)$ vérifiant

$$\bigoplus_{\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)} p_{j_{\neq c, !*}^{(s_\varrho - 2)g - 1}(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_{s_\varrho - 2}(\pi_v))(\frac{s_\varrho - 3}{2}) \hookrightarrow \widetilde{\text{gr}}_{\neq c}^5(P),$$

avec

$$0 \rightarrow \widetilde{\text{gr}}_{\neq c}^5(P) \rightarrow \text{gr}^4(P) \rightarrow \bigoplus_{\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)} p_{j_{c, !*}^{(s_\varrho - 2)g - 1}(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_{s_\varrho - 2}(\pi_v))(\frac{s_\varrho - 3}{2}) \rightarrow 0.$$

Par équivariance, on en déduit la trivialité du bimorphisme ci-avant et donc le résultat cherché. \square

Remarque : on notera que l'argument repose de manière cruciale sur le fait qu'on peut utiliser $\mathcal{P}(s_\varrho - 3, \pi_v)$ et donc $s_\varrho \geq 4$.

On raisonne à présent par l'absurde et considérons un point géométrique de dimension maximale de sorte qu'il existe un entier k tel que ${}^p h^0 i_z^* \text{gr}_c^k(\Psi_\varrho) \neq (0)$. Soit alors h_z maximal tel que z est contenu dans $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq h_z}$ et on note

$$i_z : \overline{\{z\}}_{|X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{1 \leq h_z}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{1 \leq h_z} := X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq 1} \setminus X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq h_z + 1}$$

ainsi que $j_z : X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{1 \leq h_z} \setminus \overline{\{z\}}_{|X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{1 \leq h_z}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{1 \leq h_z}$.

Remarque : pour simplifier les notations, on supposera dans la suite que z est un point supersingulier, i.e. $h_z = d$. Les modifications pour retrouver le cas général se font en appliquant simplement le foncteur exact $j_{1/h_z}^{1 \leq h_z, *}$ où

$$j^{1 \leq h} : X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{1 \leq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\geq 1},$$

à tous les faisceaux pervers intervenant et en utilisant l'équivariance sous $P_{h_z, d - h_z}(F_v)$ (resp. $P_{1, h_z - 1, d - h_z}(F_v)$) en lieu et place de celle de $GL_d(F_v)$ (resp. $P_{1, d - 1}(F_v)$).

On introduit les hypothèses suivantes dont le lecteur pourra trouver une illustration graphique à la figure 1 et que nous allons montrer par récurrence sur h de $d - h_z$ (supposé égal à d d'après la remarque précédente), à 1. On notera encore $s_\varrho := \lfloor \frac{d}{g - 1(\varrho)} \rfloor$.

- $\boxed{HR_\Psi(h + 1)}$: Ψ_ϱ admet une filtration

$$0 = \text{Fil}^0(\Psi_\varrho, h) \subset \text{Fil}^1(\Psi_\varrho, h) \subset \text{Fil}^2(\Psi_\varrho, h) \subset \text{Fil}^3(\Psi_\varrho, h) \subset \text{Fil}^4(\Psi_\varrho, h) \subset \text{Fil}^5(\Psi_\varrho, h) = \Psi_\varrho$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $\text{Fil}^1(\Psi_\varrho, h) = j_{\neq c, !}^{=1} j_{\neq c}^{=1, *} \text{Fil}_!^{h-1}(\Psi_\varrho)$;
- $\text{gr}^2(\Psi_\varrho, h)$ admet une filtration dont les gradués sont ⁽⁶⁾ si $s_\varrho g_{-1}(\varrho) \neq d$, (resp. sinon) les $\text{gr}_{!, \neq c, \geq 0}^k(\Psi_\varrho)$ et $\text{gr}_{!, -1}^{k, -}(\Psi_\varrho)$ pour k variant de h à d (resp. on enlève le terme $\text{gr}_{!, -1}^{(s_\varrho-1)g_{-1}(\varrho), -}(\Psi_\varrho)$ par rapport au cas non respé). On notera en particulier que la partie libre de ${}^p\mathcal{H}^0 i_z^* \text{Fil}^2(\Psi_\varrho, h)$ est triviale et on demande qu'il en est de même pour sa torsion ;
- $\text{gr}^3(\Psi_\varrho, h) \simeq \text{gr}_{!, \neq c, -1}^h(\Psi_\varrho)$;
- $\text{Fil}^4(\Psi_\varrho, h)$ est $GL_d(F_v)$ équivariant et on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Fil}_{\geq 0}^4(\Psi_\varrho, h) \rightarrow \text{Fil}^4(\Psi_\varrho, h) \rightarrow \text{Fil}_{-1}^4(\Psi_\varrho, h) \rightarrow 0$$

telle que la filtration de stratification de $\text{Fil}_{\geq 0}^4(\Psi_\varrho, h)$ (resp. de $\text{Fil}_{-1}^4(\Psi_\varrho, h)$) admet pour gradués successifs les $\text{gr}_{c, \geq 0}^k(\Psi_\varrho)$ pour $1 \leq k \leq d$ (resp. les $\text{gr}_{c, -1}^k(\Psi_\varrho)$ pour $1 \leq k \leq h$).

- Si s_ϱ ne divise pas h_z (supposé égal à d) ou si $s_\varrho \leq 2$, la filtration de stratification de $\text{gr}^5(\Psi_\varrho, h)$ admet pour gradués successifs $\text{gr}_!^k(\text{gr}^5(\Psi_\varrho, h)) = {}^p j_{! * }^{=k} j^{=k, *} \text{gr}_{!, -1}^k(\Psi_\varrho)$ pour $h+1 \leq k \leq d$. Dans les autres cas, on demande la même condition sauf pour

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow {}^p j_{! * }^{=d} j^{=d, *} \text{gr}_{!, -1}^{d-g_{-1}(\varrho), -}(\Psi_\varrho) \\ \rightarrow \text{gr}_!^{(s_\varrho-1)g_{-1}(\varrho)}(\text{gr}^5(\Psi_\varrho, h)) \rightarrow \\ {}^p j_{! * }^{=d-g_{-1}(\varrho)} j^{=d-g_{-1}(\varrho), *} \text{gr}_{!, -1}^{d-g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Remarque : la modification de la filtration pour les cas où $s_\varrho \geq 3$ divise $h_z = d$, provient du fait qu'on cherche à avoir la partie libre de ${}^p\mathcal{H}^0 i_z^* \text{Fil}^2(\Psi_\varrho, h)$ nulle, ce qui sera utile pour montrer l'inductivité. Cela implique en particulier que l'on doit alors utiliser la proposition 3.2.7 au lieu du corollaire 3.2.6.

- $\boxed{HR_p(h)}$: pour tout $k > h$, on a ${}^p j_{! * }^{=k} j^{=k, *} \text{gr}_{!, -1}^k(\Psi_\varrho) = {}^{p+} j_{! * }^{=k} j^{=k, *} \text{gr}_{!, -1}^k(\Psi_\varrho)$.

Remarque : on notera que $HR_p(1)$ implique le résultat cherché, i.e. la proposition 2.4.1.

Commençons par noter que tout système local sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^d = X_{\mathcal{I}, \bar{s}, c}^d$ est pervers et donc $HR_p(d)$ est trivialement vérifié. En ce qui concerne $HR_\Psi(d)$, il suffit simplement de poser $\text{Fil}^1(\Psi_\varrho, d) = \text{Fil}^2(\Psi_\varrho, d) = \text{Fil}^3(\Psi_\varrho, d) = j_{\neq c, !}^{=1} j_{\neq c}^{=1, *} \Psi_\varrho$ et $\text{Fil}^4(\Psi_\varrho, d) = \text{Fil}^5(\Psi_\varrho, d)$.

3.2.8. Lemme. — *Si $HR_\Psi(h+1)$ et $HR_p(h+1)$ sont vérifiées, alors $HR_p(h)$ aussi.*

Démonstration. — Visuellement à l'aide de la figure 1, il s'agit de montrer qu'on peut faire passer le terme $\text{gr}_{!, \neq c, -1}^{h, +}(\Psi_\varrho)$ de l'autre côté de la flèche notée \heartsuit , pour former avec $\text{Fil}_{-1}^4(\Psi_\varrho, h)$, un quotient $\text{Fil}_{-1}^4 \Psi_\varrho, h \twoheadrightarrow \text{gr}_!^h(\Psi_\varrho)$ vérifiant

$$0 \rightarrow {}^{p(c)} j_{\neq c, !}^{=h} j_{\neq c}^{=h, *} \text{gr}_!^h(\Psi_\varrho) \rightarrow \text{gr}_!^h(\Psi_\varrho) \rightarrow {}^{p+} j_{c, ! * }^{=h} j_c^{=h, *} \text{gr}_!^h(\Psi_\varrho) \rightarrow 0.$$

6. On rappelle que ces gradués sont nuls si k n'est pas un multiple de $g_{-1}(\varrho)$.

On utilise ensuite le corollaire 3.2.6 pour conclure.

Considérons ainsi $\text{Fil}^4(\Psi_\varrho, h)$ et $\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)$. S'il n'existe pas d'entier t tel que $tg_{-1} = h$ alors il n'y a rien à démontrer puisque $HR_p(h) = HR_p(h+1)$. Notons alors t tel que $tg_{-1}(\varrho) = h$ et considérons

$$0 \rightarrow \text{gr}^{3, \pi_v}(\Psi_\varrho, h) \longrightarrow \text{gr}^3(\Psi_\varrho, h) \longrightarrow \text{gr}_{\pi_v}^3(\Psi_\varrho, h) \rightarrow 0$$

où $\text{gr}_{\pi_v}^3(\Psi_\varrho, h) \simeq {}^{p(c)}j_{!*}^{j=h} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{1-t}{2})$. Introduisons

$$\begin{array}{ccccc} \text{Fil}^2(\Psi_\varrho, h) & \hookrightarrow & \text{Fil}^{3, \pi_v}(\Psi_\varrho, h) & \dashrightarrow & \text{gr}^{3, \pi_v}(\Psi_\varrho, h) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Fil}^2(\Psi_\varrho, h) & \hookrightarrow & \text{Fil}^3(\Psi_\varrho, h) & \twoheadrightarrow & \text{gr}^3(\Psi_\varrho, h), \end{array}$$

et on écrit

$$0 \rightarrow \text{gr}_{\pi_v}^3(\Psi_\varrho, h) \longrightarrow \text{Fil}^4(\Psi_\varrho, h) / \text{Fil}^{3, \pi_v}(\Psi_\varrho, h) \longrightarrow \text{gr}^4(\Psi_\varrho, h) \rightarrow 0$$

puis

$$0 \rightarrow \text{gr}^{4, \pi_v}(\Psi_\varrho, h) \longrightarrow \text{gr}^4(\Psi_\varrho, h) \longrightarrow \text{gr}_{\pi_v}^4(\Psi_\varrho, h) \rightarrow 0,$$

et le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccccc} {}^{p(c)}j_{\neq c, !*}^{j=h} HT_{\neq c}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{t-1}{2}) & \hookrightarrow & X & \dashrightarrow & \text{gr}^{4, \pi_v}(\Psi_\varrho, h) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{gr}_{\pi_v}^3(\Psi_\varrho, h) & \hookrightarrow & \text{Fil}^4(\Psi_\varrho, h) / \text{Fil}^{3, \pi_v}(\Psi_\varrho, h) & \twoheadrightarrow & \text{gr}^4(\Psi_\varrho, h). \end{array}$$

3.2.9. Lemme. — Si $h_z \neq 3g_{-1}(\varrho)$, on a une surjection $\text{Fil}^{4, \pi_v}(\Psi_\varrho, h) \rightarrow {}^{p+}j_{!*}^{j=h} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{1-t}{2})$.

Démonstration. — Le cas où s_ϱ ne divise pas h_z (supposé égal à d), découle du corollaire 3.2.6, de l'hypothèse de récurrence et la forme de $\text{gr}^5(\Psi, h)$. Supposons donc que $s_\varrho g_{-1}(\varrho) = h_z = d$: si $s_\varrho \leq 2$, il n'y a rien à montrer et pour $s_\varrho \geq 4$, on conclut comme ci-avant en remplaçant l'appel à 3.2.6 par 3.2.7. \square

Ainsi en échangeant l'ordre des termes de l'extension définissant X , on obtient

$$0 \rightarrow \text{gr}^{4, \pi_v}(\Psi_\varrho, h)' \longrightarrow X \longrightarrow {}^{p+}j_{\neq c, !*}^{j=h} HT_{\neq c}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{t-1}{2}) \rightarrow 0.$$

Remarque : on rappelle que, après application du foncteur exact $j^{=h, *}$, les réseaux obtenus en partant de $\text{gr}^3(\Psi_\varrho, h)$ ou du quotient $\text{Fil}^4(\Psi_\varrho, h) \rightarrow {}^{p+}j_{!*}^{j=h} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{t-1}{2})$, sont donnés par ${}^{p}h^0 j^{=h, *} \Psi_\varrho$ de sorte que le réseau de $HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ n'est pas modifié.

Supposons, par l'absurde que le conoyau

$$\begin{aligned} T &= \text{Coker} \left(\text{gr}^{4, \pi_v}(\Psi_\varrho, h)' \hookrightarrow_+ \text{gr}^{4, \pi_v}(\Psi_\varrho, h) \right) \\ &= \text{Coker} \left({}^{p(c)}j_{\neq c, !*}^{j=h} HT_{\neq c}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{t-1}{2}) \hookrightarrow_+ {}^{p+}j_{\neq c, !*}^{j=h} HT_{\neq c}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{t-1}{2}) \right), \end{aligned}$$

est non nul.

(a) En voyant T comme quotient de $\mathrm{gr}^{4,\pi_v}(\Psi_\varrho, h)$ comme ci-dessus, d'après (2.2.1), T admettrait une filtration

$$(0) = \mathrm{Fil}^0(T) \subset \mathrm{Fil}^1(T) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}^r(T) = T$$

dont les gradués $\mathrm{gr}^k(T)$ s'écriraient comme le conoyau T_δ d'un bimorphisme

$${}^p j_{c,!}^{\delta g_{i_\delta}(\varrho)} HT(\pi_{v,\delta}, \mathrm{St}_\delta(\pi_{v,\delta}))\left(\frac{\delta-1}{2}\right) \hookrightarrow_+ {}^p j_{c,!}^{\delta g_{i_\delta}(\varrho)} HT(\pi_{v,\delta}, \mathrm{St}_\delta(\pi_{v,\delta}))\left(\frac{\delta-1}{2}\right) \twoheadrightarrow T_\delta,$$

associé à un sous-quotient irréductible de $\mathrm{gr}^{4,\pi_v}(\Psi_\varrho, h)$, où $\pi_{v,\delta} \in \mathrm{Scusp}_{i_\delta}(\varrho)$ avec lorsque $i_\delta = -1$, $\delta < t$. Or un tel $T_\delta[l]$ peut s'écrire comme extensions successives de $P_{1,d-1}(F_v)$ -représentations de la forme $\tilde{\pi} \times \sigma_{P_{1,d g_{i_\delta}(\varrho)-1}(F_v)}$, dont la dérivée vérifie la propriété suivante : pour $i_\delta = -1$, cette dérivée est d'ordre $< t g_{-1}(\varrho)$ et pour $i_\delta \geq 0$, cet ordre est divisible par $g_0(\varrho)$.

(b) Comme conoyau de ${}^{p(c)} j_{\neq c,!}^{\delta h} HT_{\neq c}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))\left(\frac{t-1}{2}\right) \hookrightarrow_+ {}^{p(c)} j_{\neq c,!}^{\delta h} HT_{\neq c}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))\left(\frac{t-1}{2}\right)$, $T[l]$ admet un sous-espace de la forme $\tilde{\pi}|_{P_{1,d-t g_{-1}-1}(F_v)} \times \sigma_0$ où on peut prendre σ_0 de dérivée d'ordre $t g_{-1}(\varrho)$ ou $(t-1)g_{-1}(\varrho)$. de sorte que $\tilde{\pi}|_{P_{1,d-t g_{-1}-1}(F_v)} \times \sigma_0$ admet une sous-représentation de dérivée d'ordre strictement plus grand que $(t-1)g_{-1}(\varrho)$ et non divisible par $g_0(\varrho)$, ce qui contredit la propriété obtenue en (a).

Ainsi on a ${}^{p(c)} j_{\neq c,!}^{\delta h} HT_{\neq c}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)) = {}^{p(c)} j_{\neq c,!}^{\delta h} HT_{\neq c}(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))$, d'où $HR_p(h)$ en faisant varier c .

Il nous reste désormais à traiter le cas où h_z (supposé égal à d) est égal à $3g_{-1}(\varrho)$ et $h = g_{-1}(\varrho)$, i.e. à montrer que ${}^p j_{!}^{\delta g_{-1}(\varrho)} j_{\neq c}^{\delta g_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_1^{\delta g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho) \simeq {}^{p+} j_{!}^{\delta g_{-1}(\varrho)} j_{\neq c}^{\delta g_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_1^{\delta g_{-1}(\varrho)}(\Psi_\varrho)$. On part de la filtration donnée par $HR_\Psi(2g_{-1}(\varrho) + 1)$ et le fait déjà démontré que $\mathrm{gr}_{1,-1}^{2g_{-1}(\varrho),+}$ passe en suivant la flèche notée \heartsuit pour former $\mathrm{gr}^5(\Psi_\varrho, g_{-1}(\varrho) + 1)$ avec

$$0 \rightarrow X \rightarrow \mathrm{Fil}^4(\Psi_\varrho, g_{-1}(\varrho) + 1) \twoheadrightarrow {}^{p+} j_{c,!}^{\delta g_{-1}(\varrho)} j_{\neq c}^{\delta g_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_{c,-1}^{\delta g_{-1}(\varrho)} \rightarrow 0.$$

Il suffit alors de montrer que l'extension P définie ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc} X & \hookrightarrow & \mathrm{Fil}^4(\Psi_\varrho, g_{-1}(\varrho) + 1) & \twoheadrightarrow & {}^{p+} j_{c,!}^{\delta g_{-1}(\varrho)} j_{\neq c}^{\delta g_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_{c,-1}^{\delta g_{-1}(\varrho)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ X/\mathrm{Fil}^1(\Psi_\varrho, g_{-1}(\varrho) + 1) & \hookrightarrow & P & \twoheadrightarrow & {}^{p+} j_{c,!}^{\delta g_{-1}(\varrho)} j_{\neq c}^{\delta g_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_{c,-1}^{\delta g_{-1}(\varrho)} \end{array}$$

est scindée. On raisonne alors comme précédemment en notant que

- d'un côté tout quotient de l -torsion de ${}^{p+} j_{c,!}^{\delta g_{-1}(\varrho)} j_{\neq c}^{\delta g_{-1}(\varrho),*} \mathrm{gr}_{c,-1}^{\delta g_{-1}(\varrho)}$ ne fait intervenir que des représentations du groupe mirabolique dont la dérivée est d'ordre $g_{-1}(\varrho)$,
- et que de l'autre côté tous les quotients de torsion associés aux extensions intermédiaires de $X/\mathrm{Fil}^1(\Psi_\varrho, g_{-1}(\varrho) + 1)$, ont nécessairement une dérivée d'ordre strictement plus grande que $g_{-1}(\varrho)$.

En ce qui concerne ce dernier point, il est clair pour toutes les extensions intermédiaires associées à des $\pi_v \in \text{Scusp}_i(\varrho)$ pour $i \geq 0$ et il ne reste alors plus qu'à le vérifier pour le système local concentré aux points supersinguliers $\text{gr}_{!,-1}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)$. La fibre en un point supersingulier z de

$$0 \rightarrow \text{gr}_{!,-1}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho) \longrightarrow \text{gr}_{!,-1}^{2g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho) \longrightarrow \text{gr}_{!,-1}^{2g-1(\varrho),+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0$$

fournit, d'après la proposition 2.1.8, pour chaque $\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\varrho)$, un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{H}^{-1}i_z^* \text{gr}_{!,\pi_v}^{2g-1(\varrho)}(\Psi_\varrho) & \\ & \downarrow & \searrow \sim \\ \text{St}_2(\pi_v\{\frac{-1}{2}\}) \times (\pi_v\{1\})_M \hookrightarrow & (\text{St}_2(\pi_v\{\frac{-1}{2}\}) \times (\pi_v\{1\}))_M & \twoheadrightarrow \text{St}_2(\pi_v\{\frac{-1}{2}\})_M \times (\pi_v\{1\}) \\ & \downarrow & \\ & \mathcal{H}^0i_z^* \text{gr}_{!,\pi_v}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho) & \end{array}$$

où on a noté simplement M pour le mirabolique associé et on a omis les termes galoisiens. Ainsi le réseau de $\text{St}_3(\pi_v)$ de $\mathcal{H}^0i_z^* \text{gr}_{!,\pi_v}^{2g-1(\varrho),-}(\Psi_\varrho)$ vérifie la propriété suivante d'après [5] proposition 4.13 (d) : toute sous-représentation irréductible de sa réduction modulo l a une dérivée d'ordre $2g-1(\varrho)$ ou $3g-1(\varrho)$. □

3.2.10. Lemme. — *Si $HR_\Psi(h+1)$ et $HR_p(h)$ sont vérifiées alors $HR_\Psi(h)$ aussi.*

Démonstration. — On filtre $\text{gr}^3(\Psi_\varrho, h)_{-1}$ de sorte que chacun des gradués soit de la forme $p j_{!*}^{:=tg-1(\varrho)} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))(\frac{1-t}{2})$ pour π_v décrivant $\text{Scusp}_{-1}(\varrho)$. Comme dans la preuve du lemme précédant, chacun de ces gradués « passe à travers » la flèche notée \heartsuit dans la figure (1), ce qui permet de construire $\text{Fil}^4(\Psi_\varrho, h-1)$ avec $\text{gr}^5(\Psi_\varrho, h-1)$ vérifiant les hypothèses demandées.

Il s'agit alors de faire remonter $\text{gr}^2(\Psi_\varrho, h)$ le long de la flèche notée \diamond dans la figure 1. Soit alors

$$\begin{array}{ccccc} \text{Fil}^1(\Psi_\varrho, h) & \hookrightarrow & \text{Fil}^2(\Psi_\varrho, h) & \twoheadrightarrow & \text{gr}^2(\Psi_\varrho, h) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \text{gr}_{!,\neq c,-1}^{h-1,+}(\Psi_\varrho) & \hookrightarrow & P & \twoheadrightarrow & \text{gr}^2(\Psi_\varrho, h) \end{array}$$

et il s'agit de montrer que

$$0 \rightarrow \text{gr}_{!,\neq c,-1}^{h-1,+}(\Psi_\varrho) \longrightarrow P \longrightarrow \text{gr}^2(\Psi_\varrho, h) \rightarrow 0 \quad (3.2.11)$$

est scindée. Dans le cas contraire, on aurait

$$0 \rightarrow \widetilde{\text{gr}}^2(\Psi_\varrho, h) \longrightarrow P \longrightarrow \widetilde{\text{gr}}_{!,\neq c,-1}^{h-1,+}(\Psi_\varrho) \rightarrow 0$$

avec, puisque les réseaux ne sont pas modifiés,

$$\mathrm{gr}_{!, \neq c, -1}^{h-1, +}(\Psi_\varrho) \hookrightarrow_+ \widetilde{\mathrm{gr}}_{!, \neq c, -1}^{h-1, +}(\Psi_\varrho) \twoheadrightarrow T \neq 0.$$

Or rappelons que $\mathrm{Fil}^2(\Psi_\varrho, h)$ a été construit de sorte que la partie libre de son ${}^p\mathcal{H}^0 i_z^* \mathrm{Fil}^2(\Psi_\varrho, h)$ est triviale. Ainsi si T était non nul, on en déduirait que ${}^p\mathcal{H}^0 i_z^* \mathrm{Fil}^2(\Psi_\varrho, h)$ serait de torsion, ce qui n'est pas par hypothèse. \square

3.3. Preuve du théorème principal. — D'après le théorème de comparaison de Berkovich, cf. [4], le théorème 1.1.4 découle de l'énoncé suivant.

3.3.1. Théorème. — *Pour tout i , les $\mathcal{H}^i \Psi_\varrho$ sont sans torsion.*

Sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$, cf. la proposition B.3.4, les gradués de la filtration de stratification de $i_{c,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_{\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Z}_l}})$ sont des faisceaux pervers d'Harris-Taylor et la suite spectrale calculant ses faisceaux de cohomologie à partir de ceux de ses gradués, dégénère en E_1 . Ainsi sur $\overline{\mathbb{Z}_l}$, d'après 2.1.8, il suffit de montrer que ces gradués sont les p -faisceaux pervers d'Harris-Taylor. Ainsi pour $d = 2$, sachant que les seuls faisceaux pervers d'Harris-Taylor non ponctuels sont associés à des caractères, le résultat découle trivialement du lemme 2.1.6.

On reprend la suite exacte courte (3.2.2) et la filtration du faisceau pervers libre ${}^p\mathcal{H}^0 i_c^{1,*}(\Psi_\varrho)$ dont les gradués gr_c^k vérifient

$${}^p j_{c,!*}^{:=tg_i(\varrho)} HT_c(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))\left(\frac{1-t}{2}\right) \hookrightarrow_+ \mathrm{gr}_c^k \twoheadrightarrow T_c^k$$

pour $i \geq -1$ et $\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\varrho)$. Supposons par l'absurde qu'il existe un tel gradué tel que le bimorphisme ci-dessus ne soit pas un isomorphisme et notons z un point générique de dimension maximale tel que la fibre en z d'un tel T_c^k soit non nulle.⁽⁷⁾ Soit alors i minimal tel la fibre en z d'un T_c^k soit non nulle. D'après le paragraphe précédent, on a nécessairement $i \geq 0$. En outre on en déduit que ${}^p h^0 i_z^* \Psi_{\bar{\tau}}$ admet alors un sous-quotient de la forme $\bar{\pi} \times \sigma_{|P_{1, tg_i(\bar{\tau})}(F_v)}$ où

- σ est un sous-quotient de la réduction modulo l de $\mathrm{St}_t(\pi_v)$ et
- $\bar{\pi}$ est, d'après la proposition 2.4.2, un sous-quotient irréductible de $V_{\bar{p}}(r + tm(\varrho)l^i, < \delta_i)$.
- En outre tous les sous-quotients irréductibles de ${}^p h^0 i_z^* \Psi_{\bar{\tau}}$, ont alors une dérivée d'ordre $\geq g_i(\varrho)$.

Rappelons la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \bar{\pi}_{|P_{1, h-1}(F_v)} \times \sigma \rightarrow (\bar{\pi} \times \sigma)_{|P_{1, h+tg_i(\varrho)-1}(F_v)} \rightarrow \bar{\pi} \times \sigma_{|P_{1, tg_i(\varrho)}(F_v)} \rightarrow 0,$$

7. On peut pour simplifier considérer comme dans le paragraphe précédent que z est un point super-singulier.

où, puisque les supports cuspidaux sont disjoints, $\bar{\pi} \times \sigma$ est irréductible. Ainsi comme ${}^p h^0 \iota_z^* \Psi_\rho$ est $GL_{h+tg_i(\rho)}(F_v)$ équivariant, on en déduit qu'il admet aussi $\bar{\pi}|_{P_{1,h-1}(F_v)} \times \sigma$ comme sous-quotient et que donc il admet un sous-quotient irréductible ayant une dérivée d'ordre $< g_i(\bar{\tau})$, d'où la contradiction.

Appendice A

Rappels sur les représentations

A.1. de $GL_d(K)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$. — Notons K un corps local non archimédien dont le corps résiduel est de cardinal q une puissance de p . Une racine carrée $q^{\frac{1}{2}}$ de q dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$ étant fixée, pour $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, nous noterons $\pi\{k\}$ la représentation tordue de π où l'action de $g \in GL_n(K)$ est donnée par $\pi(g)\nu(g)^k$ avec $\nu : g \in GL_n(K) \mapsto q^{-\text{val}(\det g)}$.

A.1.1. Définition. — Pour V un sous-espace vectoriel de dimension h de K^n , soit P_V le sous-groupe parabolique associé et N_V son radical unipotent, i.e. l'ensemble des $g \in GL_n(K)$ tels que le noyau de $g - \text{Id}$ contienne V et son image soit contenue dans V .

A.1.2. Notations. — — Dans le cas où dans la définition précédente, V est engendré par les h premiers vecteurs de la base canonique, V sera noté $\overline{\mathbb{1}}_h$ et P_V par $P_{h,d-h}$.

— Pour tout $a \in GL_d(K)/P_{h,d-h}(K)$, on rappelle qu'on note encore a le sous-espace vectoriel obtenu comme l'image par a de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_h)$, où $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ désigne la base canonique de K^d . On notera aussi $P_a(K) = aP_{h,d-h}(K)a^{-1}$ le parabolique associé et $N_a = aN_{h,d}(K)a^{-1}$ son sous-groupe unipotent. Le facteur $GL_h(K)$ de $P_a(K)$ est appelé « son facteur infinitésimal ».

— Plus généralement pour un drapeau $\Delta = \{(0) \subsetneq a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \dots \subsetneq a_r \subset K^d =: a_{r+1}\}$, de gradués a_i/a_{i-1} , on note $P_\Delta(F_v)$ le sous-groupe parabolique associé et $U_\Delta(F_v)$ son radical unipotent.

— Enfin pour $\Delta = \{(0) \subsetneq a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \dots \subsetneq a_r \subset K^d\}$ un drapeau et $a_r \subset a \subset K^d$, on notera

$$\Delta(a) := \{(0) \subsetneq a_1 \subsetneq a_2 \subsetneq \dots \subsetneq a_r \subset a \subset K^d\}.$$

Pour $a_r \subset a \subset b \subset K^d$, on notera $\Delta(a \subset b) := (\Delta(a))(b)$.

Remarque : afin d'alléger les notations, on notera $\dim a$ pour $\dim V_a$.

A.1.3. Définition. — Soit $P = MN$ un parabolique standard de GL_n de Lévi M et de radical unipotent N . On note $\delta_P : P(K) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_l}^\times$ l'application définie par $\delta_P(h) = |\det(\text{ad}(h)|_{\text{Lie}N})|^{-1}$. Pour (π_1, V_1) et (π_2, V_2) des représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$, et P_{n_1, n_2} le parabolique standard de $GL_{n_1+n_2}$ de Lévi $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$ et de radical unipotent N , $\pi_1 \times \pi_2$ désigne l'induite parabolique

normalisée de $P_{n_1, n_2}(K)$ à $GL_{n_1+n_2}(K)$ de $\pi_1 \otimes \pi_2$ c'est à dire l'espace des fonctions $f : GL_{n_1+n_2}(K) \rightarrow V_1 \otimes V_2$ telles que

$$f(nmg) = \delta_{P_{n_1, n_2}}^{-1/2}(m)(\pi_1 \otimes \pi_2)(m)\left(f(g)\right), \quad \forall n \in N, \forall m \in M, \forall g \in GL_{n_1+n_2}(K).$$

Rappelons qu'une représentation irréductible π de $GL_n(K)$ est dite *cuspidale* (resp. *supercuspidale*) si elle n'est pas isomorphe à un sous-quotient (resp. à un sous-espace) d'une induite parabolique propre. D'après [18] §V.4, la réduction modulo l d'une représentation irréductible cuspidale est encore irréductible cuspidale mais pas nécessairement supercuspidale.

A.1.4. Notations. — Soient g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$.

- L 'unique quotient (resp. sous-représentation) irréductible de $\pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \cdots \times \pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\}$ est noté $St_s(\pi)$ (resp. $Speh_s(\pi)$).
- L 'unique sous-espace (resp. quotient) irréductible de $St_t(\pi_v\left\{\frac{-r}{2}\right\}) \times Speh_r(\pi_v\left\{\frac{t}{2}\right\})$ (resp. de $St_{t-1}(\pi_v\left\{\frac{-r-1}{2}\right\}) \times Speh_{r+1}(\pi_v\left\{\frac{t-1}{2}\right\})$) est noté $LT_{\pi_v}(t-1, r)$.

On termine ces rappels par un lemme certainement bien connu des experts dont nous présentons une version limitée afin d'éviter d'introduire trop de notations inutiles.

A.1.5. Lemme. — Soit π une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$, alors en tant que représentation du parabolique $P_{1, (t+s)g}(K)$, on a des isomorphismes

$$St_t(\pi\left\{-\frac{s}{2}\right\})|_{P_{1, tg}(K)} \times Speh_s(\pi\left\{\frac{t}{2}\right\}) \simeq LT_{\pi}(t-1, s)|_{P_{1, (t+s)g}(K)},$$

et

$$St_t(\pi\left\{-\frac{s}{2}\right\}) \times Speh_s(\pi\left\{\frac{t}{2}\right\})|_{P_{1, sg}(K)} \simeq LT_{\pi}(t, s-1)|_{P_{1, (t+s)g}(K)},$$

où dans le premier isomorphisme, l'induite parabolique est relativement à

$$\begin{pmatrix} P_{1, tg} & U \\ 0 & GL_{sg} \end{pmatrix}$$

alors que dans le deuxième, il s'agit de l'induite à support compact relativement à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_{sg-1} \\ 0 & GL_{tg} & U \\ 0 & 0 & GL_{sg-1} \end{pmatrix}.$$

Remarque : si dans le lemme précédent, on remplace la représentation de Steinberg $St_t(\pi)$ par $LT_{\pi}(\delta, t - \delta - 1)$, le membre de droite dans le premier isomorphisme devient $LT_{\pi}(\delta, t - \delta - 1 + s)$.

Démonstration. — Pour $n \geq 2$, on note $M_n(K)$ le sous-groupe de $P_{1,n}(K)$ dont le premier coefficient en haut à gauche est égal à 1. Quitte à tordre les actions par $g \mapsto \sigma({}^t g^{-1})\sigma^{-1}$, où σ est la matrice de permutation associé au cycle $(12 \cdots n)$, on reconnaît le traditionnel groupe mirabolique dont le radical unipotent $V_{n-1}(K)$ est abélien isomorphe à $(K^\times)^{n-1}$. On rappelle cf. par exemple [16] §III.1.10, que

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})|_{M_{sg}(K)} \\ \rightarrow \left(\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}) \right)|_{M_{(t+s)g}(K)} \\ \rightarrow \mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où le deuxième terme est l'induite parabolique relativement à $\begin{pmatrix} M_{tg} & U \\ 0 & GL_{sg} \end{pmatrix}$ et le premier,

l'induite à support compact relativement à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_{sg-1} \\ 0 & GL_{tg} & U \\ 0 & 0 & GL_{sg-1} \end{pmatrix}$. En outre pour tout

$k \geq 0$, la dérivée d'ordre k de $\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})$ est, cf. [16] p153, donnée par celle de $\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)}$ induite avec $\mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})$, i.e.

$$\left(\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}) \right)^{(k)} \simeq \left(\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \right)^{(k)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}).$$

Rappelons que la dérivée d'ordre k de $\mathrm{St}_t(\pi)$ est nulle sauf si k est de la forme δg avec $0 \leq \delta \leq t$ auquel cas elle est isomorphe à $\mathrm{St}_{t-\delta}(\pi\{\frac{\delta}{2}\})$. Ainsi en raisonnant par récurrence sur t , on en déduit que $\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})$ et $LT_{\pi_v}(t-1, s)|_{M_{(t+s)g}(K)}$ ont les mêmes dérivées et qu'elles sont toutes d'ordre $\leq tg$. Considérons alors le morphisme composé

$$\begin{aligned} LT_{\pi_v}(t-1, s)|_{M_{(t+s)g}(K)} \hookrightarrow \left(\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}) \right)|_{M_{(t+s)g}(K)} \\ \twoheadrightarrow \mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}) \end{aligned}$$

et notons $K \hookrightarrow \mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})|_{M_{sg}(K)}$ son noyau. D'après [19] proposition 5.3 et corollaire 6.8, $\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})|_{M_{sg}(K)}$ est homogène, i.e. tout sous-espace $M_{(t+s)g}(K)$ -équivariant irréductible a une dérivée d'ordre $(t+1)g$, or on vient de voir que les dérivées de $LT_{\pi}(t-1, s)|_{M_{(t+s)g}(K)}$ sont d'ordre $\leq tg$, de sorte que

$$LT_{\pi}(t-1, s) \hookrightarrow \mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(K)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}).$$

Comme ces deux termes ont les mêmes dérivées, cette injection est un isomorphisme. \square

A.2. Réduction modulo l d'une Steinberg généralisée d'après [8]. — On rappelle que l et p désignent des nombres premiers distincts et que q est une puissance de p . On note $e_l(q)$ l'ordre de l'image de q dans \mathbb{F}_l^\times . Afin de simplifier la lecture, dans la suite on utilisera la lettre π pour désigner une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation entière et les lettres ϱ et ρ pour des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations.

A.2.1. Définition. — Une représentation ϱ de $GL_n(K)$ est dite

- *cuspidale* si pour tout sous-groupe parabolique propre P de $GL_n(K)$, $J_P(\varrho)$ est nul.
- Elle sera dite *supercuspidale* si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre. Pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_l$ ou $\overline{\mathbb{F}}_l$, on notera $\text{Scusp}_\Lambda(g)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations supercuspidales de $GL_g(K)$.

Remarque : sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, les notions de cuspidales et de supercuspidales coïncident, ce qui n'est pas le cas sur $\overline{\mathbb{F}}_l$, cf. ci-après.

A.2.2. Proposition. — (cf. [16] III.5.10) *La réduction modulo l d'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$ est irréductible cuspidale.*

A.2.3. Proposition. — [12] §2.2.3

Soit π une représentation irréductible cuspidale entière. Alors pour tout $s \geq 1$, la réduction modulo l de $\text{Speh}_s(\pi)$ est irréductible.

A.2.4. Définition. — Une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible est dite l -Speh (resp. l -superSpeh) si c'est la réduction modulo l d'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation entière $\text{Speh}_s(\pi)$ pour π irréductible cuspidale (resp. et dont la réduction modulo l de π est supercuspidale).

A.2.5. Notation. — On notera $\epsilon(\varrho)$ le cardinal de la droite de Zelevinski de ϱ , i.e. de l'ensemble des classes d'équivalence $\{\varrho\{i\} / i \in \mathbb{Z}\}$. On pose alors cf. [18] p.51

$$m(\varrho) = \begin{cases} \epsilon(\varrho), & \text{si } \epsilon(\varrho) > 1; \\ l, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque : $\epsilon(\varrho)$ est un diviseur de $e_l(q)$.

A.2.6. Définition. — Étant donné un multi-ensemble $\underline{s} = \{\rho_1^{n_1}, \dots, \rho_r^{n_r}\}$ de représentations cuspidales, on note d'après [18] V.7, $\text{St}(\underline{s})$ l'unique représentation non dégénérée de l'induite

$$\rho(\underline{s}) := \overbrace{\rho_1 \times \dots \times \rho_1}^{n_1} \times \dots \times \overbrace{\rho_r \times \dots \times \rho_r}^{n_r}.$$

Remarque : d'après [18] V.7, toutes les représentations non dégénérées sont de cette forme.

A.2.7. Notation. — Pour ρ une représentation irréductible cuspidale et $s \geq 1$, on note $\underline{s}(\rho)$ le multi-segment $\{\rho, \rho\{1\}, \dots, \rho\{s-1\}\}$ et comme dans [18] V.4, $\text{St}_s(\rho) := \text{St}(\underline{s}(\rho))$.

A.2.8. Proposition. — [18] V.4 Soit ϱ une représentation irréductible cuspidale. La représentation non dégénérée $\text{St}_s(\varrho)$ est cuspidale si et seulement $s = 1$ ou $m(\varrho)l^k$ pour $k \geq 0$.

Remarque : d'après [16] III-3.15 et 5.14, toute représentation irréductible cuspidale est de la forme $\text{St}_s(\varrho)$ pour ϱ irréductible supercuspidale et $s = 1$ ou de la forme $m(\varrho)l^k$ avec $k \geq 0$.

A.2.9. Notation. — Soit ϱ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$; on note $\varrho_{-1} = \varrho$ et pour tout $i \geq 0$, $\varrho_i = \text{St}_{m(\varrho)l^i}(\varrho)$.

A.2.10. Définition. — On dira d'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière qu'elle est de type ϱ si, à torsion par un caractère non ramifié près, sa réduction modulo l est de la forme ϱ_i pour $i \geq -1$.

A.2.11. Notation. — Soit $s \geq 1$ un entier et ϱ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$. Soit $\mathcal{I}_\varrho(s)$ l'ensemble des suites (m_{-1}, m_0, \dots) à valeurs dans \mathbb{N} telles que

$$s = m_{-1} + m(\varrho) \sum_{k=0}^{+\infty} m_k l^k.$$

On notera $\text{lg}_\varrho(s)$ le cardinal de $\mathcal{I}_\varrho(s)$.

A.2.12. Définition. — Pour $\underline{i} = (i_{-1}, i_0, \dots) \in \mathcal{I}_\varrho(s)$, on définit

$$\text{St}_{\underline{i}}(\varrho) := \text{St}_{\underline{i}_{-1}}(\varrho_{-1}) \times \text{St}_{\underline{i}_0}(\varrho_0) \times \dots \times \text{St}_{\underline{i}_u}(\varrho_u)$$

où $i_k = 0$ pour tout $k > u$ et où les ϱ_i sont définis en A.2.9.

A.2.13. Théorème. — Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$ et ϱ sa réduction modulo l . Dans le groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations de $GL_{sg}(K)$, on a l'égalité suivante :

$$r_l(\text{St}_s(\pi)) = \sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}_\varrho(s)} \text{St}_{\underline{i}}(\varrho).$$

Par ailleurs pour tout $\underline{i} \in \mathcal{I}_\varrho(s)$ et pour tout parabolique P , $J_P(\text{St}_{\underline{i}}(\varrho))$ est égal à la somme des constituants irréductibles de ϱ -niveau \underline{i} de $r_l(J_P(\text{St}_s(\pi)))$.

Remarque : pour $s < m(\varrho)$, la réduction modulo l de $\text{St}_s(\pi)$ est irréductible.

A.2.14. Définition. — On dira que l est banal pour $GL_d(K)$ si $e_l(q) > d$.

Remarque : dans le cas banal toute représentation cuspidale est supercuspidale, i.e. $m(\varrho) < s$ avec les notations précédentes.

Pour π une représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$, comme, d'après A.2.2, sa réduction modulo l , notée ϱ , est irréductible, on en déduit qu'à isomorphismes près, π possède un unique réseau stable, cf. par exemple [2] proposition 3.3.2 et la remarque qui suit.

A.2.15. Définition. — (cf. [8]) Étant donné un réseau de $\text{St}_t(\pi)$, la surjection (resp. l'injection)

$$\text{St}_t(\pi) \xrightarrow{\times} \pi \rightarrow \text{St}_{t+1}(\pi), i$$

induit un réseau de $\text{St}_{t+1}(\pi)$ de sorte que par récurrence on dispose d'un réseau $RI_{\mathbb{Z}_l, -}(\pi, t)$ que l'on qualifie de *réseau d'induction*. On note alors

$$RI_{\mathbb{F}_l, -}(\pi, t) := RI_{\mathbb{Z}_l, -}(\pi, t) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{F}}_l,$$

A.2.16. Proposition. — (cf. [8] propositions 3.2.2 et 3.2.7) Pour tout $0 \leq k \leq \text{lg}_\varrho(s)$, il existe une sous-représentation $V_{\varrho, -}(s; k)$ de longueur k de $RI_{\mathbb{F}_l, -}(\pi, s)$

$$(0) = V_{\varrho, \pm}(s; 0) \subsetneq V_{\varrho, \pm}(s; 1) \subsetneq \cdots \subsetneq V_{\varrho, \pm}(s; \text{lg}_\varrho(s)) = RI_{\mathbb{F}_l, -}(\pi, s),$$

définie de sorte que l'image de $V_{\varrho, -}(s; k)$ dans le groupe de Grothendieck est telle que tous ses constituants irréductibles sont de ϱ -niveau strictement plus grand que n'importe quel constituant irréductible de $W_{\varrho, -}(s; k) := V_{\varrho, -}(s; \text{lg}_\varrho(s)) / V_{\varrho, -}(s; k)$.

A.2.17. Notation. — Une représentation irréductible ϱ étant fixée ainsi qu'un entier s , pour $k \geq 0$ tel que $m(\varrho)l^k \leq s$, on note :

- $\underline{\delta}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathcal{I}_\varrho(s)$ et
- pour tout t tel que $m(\varrho)l^k t \leq s$, $V_{\varrho, -}(s, \geq t, \underline{\delta}_k)$ le sous-espace $V_{\varrho, -}(s, \text{lg}_\varrho(s))$ défini ci-dessus tel que tous les constituants irréductibles de $V_{\varrho, -}(s, \text{lg}_\varrho(s))$ sont de ϱ -niveau plus grand ou égal à $t, \underline{\delta}_k$.

A.3. Représentations de $D_{K,d}^\times$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_l$ et leurs relèvements. —

Soient $D_{K,d}$ l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$, $\mathcal{D}_{K,d}$ son ordre maximal de radical $\mathcal{P}_{K,d} : 1 + \mathcal{P}_{K,d} \subset \mathcal{D}_{K,d}^\times \subset D_{K,d}^\times / \varpi^\mathbb{Z}$ de quotients successifs $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ et $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

A.3.1. Notation. — Pour π une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$ et $s \geq 1$, on note $\pi[s]_D$ la représentation irréductible de $D_{K,sg}^\times$ image de $\text{St}_s(\pi^\vee)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands.

Remarque : toute représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$ s'écrit de manière unique $\pi[s]_D$ pour $s|d$ et π une représentation irréductible cuspidale de $GL_{d/s}(K)$.

A.3.2. Notation. — On notera $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$ l'ensemble des classes d'équivalence des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles de $D_{v,h}^\times$.

À torsion par un caractère non ramifié près, toute représentation irréductible τ de $D_{K,d}^\times$ se factorise par $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$, on choisit alors un facteur irréductible ρ de $\tau|_{1+\mathcal{P}_{K,d}}$ et on note N_ρ le normalisateur de sa classe d'isomorphisme dans $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$. Comme $1+\mathcal{P}_{K,d}$ est un pro- p -groupe, la dimension de ρ est une puissance de p de sorte que, un p -Sylow de $N_\rho/(1+\mathcal{P}_{K,d})$ étant cyclique, ρ admet un prolongement $\tilde{\rho}$ à N_ρ , cf. [17] lemme 1.19. Soit alors ζ une sous-représentation irréductible de N_ρ agissant sur $\text{Hom}_{1+\mathcal{P}_{K,d}}(\tilde{\rho}, \tau)$ laquelle d'après la preuve de la proposition 2.3.2 de [12] que nous suivons, est de la forme $\zeta \simeq \text{ind}_J^{N_\rho}(\chi)$ pour un groupe J contenant $N_\rho \cap \mathcal{O}_{K,d}^\times$ et un caractère χ de J trivial sur $1+\mathcal{P}_{K,d}$.

A.3.3. Proposition. — (cf. [12] proposition 2.3.2)

Avec les notations précédentes, on a

$$\tau = \text{ind}_J^{D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}}(\tilde{\rho}|_J \otimes \chi)$$

avec $J = N_\rho \cap N_\chi$ où N_χ désigne le normalisateur de χ . La réduction $r_l(\tau)$ de τ modulo l est de la forme

$$\text{ind}_J^{D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}}(r_l(\tilde{\rho}|_J) \otimes r_l(\chi))$$

où $r_l(\tilde{\rho}|_J)$ reste irréductible de normalisateur N_ρ de sorte que la longueur de $r_l(\tau)$ est égale à

$$m(\tau) := [N_\rho \cap N_{r_l(\chi)} : J].$$

Remarque : deux sous-quotients irréductibles τ et τ' quelconques de la réduction modulo l d'une représentation irréductible entière de $D_{K,d}^\times$, sont inertiuellement équivalents, i.e. il existe un caractère $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ tel que $\tau' \simeq \tau \otimes \zeta \circ \text{val} \circ \text{rn}$.

Par construction il existe des entiers f', d', e' de produit égal à d tels que

$$J/(1+\mathcal{P}_{K,d}) \simeq \mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes m\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z},$$

où m est un diviseur de d' tel que $f'm = [D_{K,d}^\times : \varpi^\mathbb{Z}\mathcal{D}_{d,K}^\times J]$. L'abélianisé de $J/(1+\mathcal{P}_{K,d})$ s'identifie, via la norme, à $\mathbb{F}_{q^{f'm}}^\times \times m\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z}$ et le nombre de représentations irréductibles strictement congrues à τ est la plus grande puissance de l divisant le cardinal de cet abélianisé.

A.3.4. Notation. — Pour $\bar{\tau}$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$, avec les notations de la proposition précédente et τ un relèvement, avec les notations précédentes, on notera

$$m(\bar{\tau}) = [N_\chi \cap N_{r_l(\chi)} : J] \quad \text{et} \quad g(\bar{\tau}) := \frac{d}{e'} = f'd'.$$

Soit aussi $s(\bar{\tau})$ la plus grande puissance de l divisant $\frac{d}{m(\bar{\tau})g(\bar{\tau})}$ et on note

$$g_{-1}(\bar{\tau}) = g(\bar{\tau}) \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq i \leq s(\bar{\tau}), \quad g_i(\bar{\tau}) = m(\bar{\tau})l^i g(\bar{\tau}).$$

A.3.5. Définition. — Pour $\bar{\tau}$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$, soit $\mathcal{C}_{\bar{\tau}} \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{K,d}^\times)$ la sous-catégorie pleine formée des objets dont tous les $\mathbb{Z}_l^{nr} \mathcal{D}_{K,d}^\times$ -sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$. On note $\bar{\tau}^0$ un sous-quotient irréductible quelconque de $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$.

A.3.6. Proposition. — (cf. [11] §B.2)

Soit $P_{\bar{\tau}^0}$ une enveloppe projective de $\bar{\tau}^0$ dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(\mathcal{D}_{K,d}^\times)$. Alors la sous-catégorie $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$ est facteur direct dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{K,d}^\times)$ pro-engendrée par l'induite $P_{\bar{\tau}} := \text{ind}_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}^{D_{K,d}^\times}(P_{\bar{\tau}^0})$.

Ainsi toute \mathbb{Z}_l^{nr} -représentation $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}}$ de $D_{K,d}^\times$ se décompose en une somme directe $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau}} V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}}$ où $\bar{\tau}$ décrit les classes d'équivalence inertielles des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles de $D_{K,d}^\times$ et où $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}}$ est un objet de $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$, i.e. tous ses sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$.

A.3.7. Proposition. — (cf. [12] proposition 2.3.2) Soient $\bar{\tau}$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$ et $\tau' \in \mathcal{C}_{\bar{\tau}}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible entière. Il existe alors $-1 \leq i \leq s(\bar{\tau})$ et une représentation irréductible cuspidale π_i de $GL_{g_i(\bar{\tau})}(K)$ telle que $\tau' \simeq \pi_i[\frac{d}{g_i(\bar{\tau})}]_D$.

Remarque : avec les notations de la proposition précédente, la réduction modulo l de π_i est supercuspidale si et seulement si $i = -1$ et sinon son support supercuspidal est un segment de Zelevinsky-Vignéras de longueur $m(\bar{\tau})l^i$ associé à une supercuspidale ϱ de $GL_{g_{-1}(\bar{\tau})}(K)$. En outre $\bar{\tau}$ est uniquement déterminée par ϱ , on dira qu'elle est de type ϱ .

A.3.8. Notation. — Étant donné une représentation irréductible supercuspidale ϱ de $GL_g(K)$ et un multiple $h = tg$ de g , on notera $\varrho[t]_D \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)$ la classe de la représentation de $D_{K,h}^\times$ de type ϱ . On note

$$\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(\varrho) := \left\{ \varrho[t]_D : 1 \leq t \leq \frac{d}{g} \right\}.$$

Exemple : soit π_{-1} une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$ dont la réduction modulo l est supercuspidale. Soient $t \geq 1$ et $\bar{\tau}$ un constituant irréductible de la réduction modulo l de $\pi_{-1}[t]_D$: on a alors $g_{-1}(\bar{\tau}) = g$. Soit alors π_i une représentation irréductible cuspidale de $GL_{g_i(\bar{\tau})}(K)$ dont la réduction modulo l a pour support supercuspidal un segment de Zelevinsky $[r_l(\pi_{-1}[\frac{1-s}{2}]), r_l(\pi_{-1}[\frac{s-1}{2}])]$ avec $g_i(\bar{\tau}) = sg$. Pour tout t_i tel que $t_i g_i(\bar{\tau}) \geq tg$, la représentation $\pi_i[t_i]_D$ (resp. un sous-quotient irréductible de la réduction modulo l de $\pi_i[t_i]_D$) est de $\bar{\tau}$ -type i .

A.3.9. Notation. — Avec les notations précédentes, on notera $\text{Scusp}_i(\bar{\tau})$ l'ensemble des classes d'équivalences des représentations π_i .

A.3.10. Proposition. — Soit $\pi_{v,i} \in \text{Scusp}_i(\bar{\tau})$. Pour $t \geq 1$, on a alors l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck

$$r_l(\pi_{v,u}[t]_D) = l^u \sum_{i=0}^{m(\varrho)-1} r_l(\pi_{v,-1}[tm(\varrho)l^u] \nu^i). \quad (\text{A.3.13})$$

Remarque : dans le cas où $\epsilon(\varrho) = 1$, la formule (A.3.13) s'écrit $r_l(\pi_{v,u}[t]_D) = l^{u+1} r_l(\pi_{v,-1}[t]_D)$.

Appendice B

Rappels des résultats faisceautiques sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ d'après [7]

Dans ce paragraphe nous rappelons les résultats de [7] que nous utilisons dans ce texte : les notations sont celles des paragraphes précédents. Précisons de nouveau que tous les résultats de loc. cit. sont sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ ce qui permet de l'enlever des notations afin d'alléger les écritures.

Rappelons que pour σ_v (resp. π_v) une représentation de W_v (resp. de $GL_d(F_v)$), l'action d'un élément g sur

$$\sigma_v(n) \quad (\text{resp. } \pi_v\{n\})$$

est donnée par $\sigma_v(g) | \text{Art}_{F_v}^{-1}(g)|^n$ (resp. $\pi_v(g) | \det g|^n$) où $|-|$ est la valeur absolue sur F_v et $\text{Art}_{F_v}^{-1} : W_v \rightarrow F_v^\times$ le morphisme de la théorie du corps de classe qui envoie les frobenius géométriques Fr^{-1} de W_v de F_v sur les uniformisantes, i.e. $v(\text{Art}_{F_v}^{-1}(\text{Fr})) = -1$.

B.1. sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor. — Soient π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et $1 \leq t \leq \frac{d}{g}$. La représentation $\pi_v[t]_D$ de $D_{v,tg}^\times$, cf. la notation A.3.1, fournit un système local sur $X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_h}^{=tg}$

$$\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h} = \bigoplus_{i=1}^{e\pi_v} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\rho_{v,i})_{\overline{1}_h}$$

où $(\pi_v[t]_D)_{|D_{v,h}^\times} = \bigoplus_{i=1}^{e\pi_v} \rho_{v,i}$ avec $\rho_{v,i}$ irréductible et muni d'une action de $P_{tg,d-tg}(F_v)$ via son quotient $GL_{d-tg} \times \mathbb{Z}$.

Remarque : ce système local est noté $\mathcal{F}(t, \pi_v)_1$ dans loc. cit. 1.4.7.

B.1.1. Notation. — Pour toute strate pure $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{=tg}$, on note $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_a$ l'image de $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h}$ par un élément quelconque de $a \in GL_d(F_v)/P_{tg,d-tg}(F_v)$.

Exemple : pour $h \leq tg$ on a ainsi $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h}$ est la somme directe des $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_a$ sur les strates pures $X_{\mathcal{I},\bar{s},a}^{=tg}$ contenues dans $X_{\mathcal{I},\bar{s},\overline{1}_h}^{\geq h}$.

B.1.2. Définition. — Les systèmes locaux d'Harris-Taylor sont les

$$\widetilde{HT}_a(\pi_v, \Pi_t) := \mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_a \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}}$$

et leurs versions induites

$$\widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t) := \left(\mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h} \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \right) \times_{P_{tg, d-tg}(F_v)} GL_d(F_v),$$

où l'action du radical unipotent de $P_{tg, d-tg}(F_v)$ est triviale, et celle de

$$(g^{\infty, v}, \left(\begin{array}{cc} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{array} \right), \sigma_v) \in G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P_{tg, d-tg}(F_v) \times W_v$$

est donnée

- par celle de g_v^c sur Π_t et $\deg(\sigma_v) \in \mathbb{Z}$ sur $\Xi^{\frac{tg-d}{2}}$ ainsi que
- celle de $(g^{\infty, v}, g_v^{et}, \text{val}(\det g_v^c) - \deg \sigma_v) \in G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times GL_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z}$ sur $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v[t]_D)_{\overline{1}_h} \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}}$, où $\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$ est défini par $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$.

On dit de l'action de $GL_{tg}(F_v)$ qu'elle est *infinitésimale*, cf. aussi la remarque précédant 1.2.8.

B.1.3. Notations. — *On pose*

$$HT(\pi_v, \Pi_t) := \widetilde{HT}(\pi_v, \Pi_t)[d - tg],$$

et le faisceau pervers d'Harris-Taylor associé est

$$P(t, \pi_v) := j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v),$$

ou sa version non induite

$$P(t, \pi_v)_a = i_{a,*}^h i_a^{h,*} P(t, \pi_v) = j_{a,!}^{-tg} HT_a(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v),$$

où \mathbb{L}^\vee désigne la correspondance locale de Langlands.

Remarque : on rappelle que π'_v est inertiuellement équivalente à π_v si et seulement s'il existe un caractère $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ tel que $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes (\zeta \circ \text{val} \circ \det)$. Les faisceaux pervers $P(t, \pi_v)$ ne dépendent que de la classe d'équivalence inertielle de π_v et sont de la forme

$$P(t, \pi_v) = e_{\pi_v} \mathcal{P}(t, \pi_v)$$

où $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ est un faisceau pervers irréductible.

B.1.4. Notation. — *On note $\text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)$ le noyau du morphisme d'adjonction*

$$j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t),$$

qui est à support dans $X_{\overline{\mathbb{Z}}, \overline{s}}^{\geq tg+1}$.

B.1.5. Proposition. — (cf. [9] 3.3.5) *Le faisceau pervers $\text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)$ est en fait à support dans $X_{\overline{\mathbb{Z}}, \overline{s}}^{\geq t(g+1)}$ et le morphisme d'adjonction*

$$j_{!*}^{=(t+1)g} j^{=(t+1)g,*} \text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow \text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)$$

est surjectif.

En itérant cette proposition, on obtient, pour $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$, la résolution

$$0 \rightarrow j_!^{\text{sg}} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-t}(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{s-t}{2}} \rightarrow \cdots \rightarrow j_!^{\text{(t+2)g}} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_2(\pi_v)) \otimes \Xi^1 \\ \rightarrow j_!^{\text{(t+1)g}} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0. \quad (\text{B.1.14})$$

où pour π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{t_1g}(F_v)$ et $GL_{t_2g}(F_v)$, $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$ désigne l'induite normalisée $\pi_1 \{-\frac{t_2}{2}\} \times \pi_2 \{\frac{t_1}{2}\}$.

Remarque : de cette résolution on en déduit :

- le calcul des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor du théorème 2.2.5 de [7]. Précisément, pour $g > 1$, le i -ème faisceau de cohomologie de $j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ est nul sauf si i est de la forme $-d + tg + \delta(g-1)$ auquel cas il est isomorphe à $HT(\pi_v, \Pi_t \{-\frac{\delta}{2}\} \times \text{Speh}_\delta(\pi_v \{\frac{t}{2}\})) [tg - d] \otimes \Xi^{\frac{\delta}{2}}$.
- la description des constituants irréductibles de $j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ de la proposition 4.3.1, complétée par le corollaire 5.4.1, de [7], cf. aussi le corollaire 3.3.8 de [9], qui dans le groupe de Grothendieck correspondant, s'écrit

$$[j_{!*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t)] = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{d}{g} \rfloor - t} [j_{!*}^{\text{(t+r)g}} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{r}{2}}]. \quad (\text{B.1.15})$$

B.2. sur le faisceau pervers des cycles évanescents. — La première étape de [7] consiste, cf. loc. cit. définition 2.2.2, à découper $\Psi_{\mathcal{I}}$ selon les classes d'équivalence inertielles $\text{Cusp}_v(g)$ des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ pour g variant de 1 à d :

$$\Psi_{\mathcal{I}} \simeq \bigoplus_{g=1}^d \bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}_v(g)} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}. \quad (\text{B.2.16})$$

Les résultats du §7 de [7] sur $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ sont résumés par la proposition 3.4.3 de [9] que nous reproduisons ci-dessous.

B.2.2. Proposition. — (cf. [9] 3.4.3) Soit

$$0 = \text{Fil}_!^0(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \text{Fil}_!^1(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \cdots \subset \text{Fil}_!^d(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) = \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ de la proposition 1.3.16. Pour tout r non divisible par g , le gradué $\text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ est nul et pour $r = tg$ avec $1 \leq t \leq s$, il est à support dans $X_{\overline{L}, \overline{s}}^{\geq tg}$ avec⁽⁸⁾

$$j^{\geq tg, *} \text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \simeq j^{\geq tg, *} \mathcal{P}(t, \pi_v) \left(\frac{1-t}{2} \right).$$

La surjection $j_!^{-tg} j^{\geq tg, *} \text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \rightarrow \text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$, où dans le groupe de Grothendieck

$$\left[\text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \right] = \sum_{i=t}^s \left[\mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{1+i-2t}{2} \right) \right].$$

8. à un facteur e_{π_v} près, $j^{\geq tg, *} \text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v})$ est donc isomorphe à $\widetilde{HT}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v) \left(\frac{1-t}{2} \right)$

Remarque : dans [9], on explique comment ce résultat permet de calculer les fibres des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$, i.e. d'en déduire le corollaire 2.2.10 de [7]. En particulier la fibre en un point fermé de $X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s}}^{=tg}$ de $\mathcal{H}^{h-d}\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}$ est munie d'une action de $(D_{v,tg}^\times)^0 := \text{Ker}(\text{val orn} : D_{v,tg}^\times \rightarrow \mathbb{Z})$ et de $\varpi_v^{\mathbb{Z}}$ que l'on voit plongé dans $F_v^\times \subset D_{v,tg}^\times$. D'après le théorème 2.2.6 de [7], ou plus simplement d'après la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} \text{ind}_{(D_{v,tg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,tg}^\times} \left(\mathcal{H}^{tg-d}\Psi_{\mathcal{I},\pi_v} \right)_{|X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s}}^{=tg}} &\simeq \mathcal{H}^{tg-d}P(t, \pi_v) \left(\frac{1-t}{2} \right) \\ &\simeq \widehat{HT}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v) \otimes \Xi^{\frac{1-t}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.2.17})$$

B.2.3. Notation. — On note

$$0 \rightarrow \text{gr}_!^{tg,-}(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \rightarrow \text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \rightarrow \text{gr}_!^{tg,+}(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) \rightarrow 0,$$

avec $\text{gr}_!^{tg,+}(\Psi_{\mathcal{I},\pi_v}) := \mathcal{P}(t, \pi_v) \left(\frac{1-t}{2} \right)$.

B.3. Compléments. — Les résultats de ce paragraphe sont développés plus en détail dans [10]. L'article n'étant pas encore publié, nous donnons ci-après un rapide aperçu du §6 de loc. cit.

Etant donnée une inclusion de strates pures $X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},a}^{\geq h}$, l'ingrédient essentiel et nouveau par rapport à [7] est l'utilisation des morphismes

$$j_{a-c}^{\geq h} : X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},a}^{\geq h} - X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},c}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},a}^{\geq h}$$

que l'on notera simplement $j_{\neq c}^{\geq h}$ lorsque $a = \overline{1}_h$. On s'intéressera plus particulièrement, pour P un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau pervers supporté dans $X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},a}^{\geq h}$, aux morphismes d'adjonction $j_{a-c}^{=h}, j_{a-c}^{=h,*} P \rightarrow P$. Dans les applications P sera en fait à support dans $X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},a}^{\geq h+g}$, pour $g \geq 1$, de sorte que

$$j_{a-c}^{=h}, j_{a-c}^{=h,*} P = j_{a-c}^{=h+g}, j_{a-c}^{=h+g,*} P,$$

où $j_{a-c}^{=h+g} = i^{h+g} \circ j_{a-c}^{\geq h+g}$ avec

$$j_{a-c}^{\geq h+g} : X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},a}^{\geq h+g} - X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},c}^{\geq h+g} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},a}^{\geq h+g}.$$

Remarque : on autorise $h = 0$ auquel cas $X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},a}^{\geq 0}$ est la variété de Shimura $X_{\mathcal{I}} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v$.

L'intérêt principal des inclusions $j_{a-c}^{\geq h}$ est son caractère affine rappelé dans le lemme suivant.

B.3.1. Lemme. — *L'inclusion ouverte $j_{a-c}^{\geq h}$ est affine.*

Démonstration. — Par symétrie il suffit de traiter le cas de $a = \overline{1}_h$ et $c = \overline{1}_{h+1}$. Or pour tout $\text{Spec } A \rightarrow X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},\overline{1}_h}^{\geq h}$, le fermé $X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},\overline{1}_{h+1}}^{\geq h+1} \times_{X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s},\overline{1}_h}^{\geq h}} \text{Spec } A$ est, avec les notations du §1.2, donné par l'annulation de $\iota(e_{h+1})$. \square

En utilisant la description des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor et du complexe des cycles évanescents, donnée dans [7] et rappelée plus haut, nous allons donner quelques résultats sur l'effet du foncteur exact $j_{\neq c, !}^{\neq h} j_{\neq c}^{\neq h, *}$ sur les faisceaux pervers d'Harris-Taylor et le complexe des cycles évanescents. On commence par $h = 0$ et un faisceau pervers d'Harris-Taylor $HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ à support dans $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}}^{\geq tg}$ de sorte que pour toute strate pure $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, c}^{\geq 1}$,

$$j_{\neq c, !}^{\neq 1} j_{\neq c}^{\neq 1, *} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \simeq \cdots \simeq j_{\neq c, !}^{\neq tg} j_{\neq c}^{\neq tg, *} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)).$$

Pour simplifier les notations on prendra $c = \overline{1}$.

B.3.2. Lemme. — (cf. le corollaire 6.6 de [10]) *Etant donné un système local d'Harris-Taylor $HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ relativement à une représentation irréductible cuspidale π_v de $Gl_g(F_v)$, on a la suite exacte courte*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ind}_{P_{1, (t+1)g-1, d-(t+1)g}(F_v)}^{P_{1, d-1}(F_v)} j_{\overline{1}, (t+1)g, !}^{(t+1)g} HT_{\overline{1}, (t+1)g}(\pi_v, \text{St}_{t+1}(\pi_v)_{P_{1, (t+1)g-1}(F_v)}) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \\ \rightarrow j_{\neq \overline{1}, !}^{\neq 1} j_{\neq \overline{1}}^{\neq 1, *} (j_{!}^{\neq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))) \rightarrow j_{\neq \overline{1}, !}^{\neq 1} j_{\neq \overline{1}}^{\neq 1, *} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Démonstration. — Il s'agit simplement d'identifier ${}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}}^{1, *} (j_{!}^{\neq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)))$ avec le premier terme de la suite exacte courte de l'énoncé. La technique est commune avec les preuves des lemmes qui suivront : on construit tout d'abord une surjection de ${}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}}^{1, *} (j_{!}^{\neq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)))$ vers le faisceau pervers de l'énoncé et on vérifie dans un deuxième temps que les faisceaux de cohomologie de ces deux faisceaux pervers possèdent les mêmes germes en tout point géométrique. Pour le premier point notons tout d'abord que

$${}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}}^{1, *} (j_{!}^{\neq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))) \simeq {}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}}^{1, *} (j_{\neq \overline{1}, !}^{\neq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))).$$

Dans [7] 4.5.1, on décrit $j_{\overline{1}, tg, !}^{\neq tg} HT_{\overline{1}, tg}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers Hecke équivariant. En appliquant alors le foncteur ${}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}}^{tg+1, *}$ à la filtration par les poids de $j_{\overline{1}, tg, !}^{\neq tg} HT_{\overline{1}, tg}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$, on obtient

$$\begin{aligned} {}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}}^{tg+1, *} (j_{\overline{1}, tg, !}^{\neq tg} HT_{\overline{1}, tg}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))) \twoheadrightarrow \\ \text{Ind}_{P_{1, tg-1, g, d-(t+1)g}(F_v)}^{P_{1, tg-1, d-tg}(F_v)} j_{\overline{1}, (t+1)g, !}^{(t+1)g} HT_{\overline{1}, (t+1)g} \left(\pi_v, \left(\text{St}_t(\pi_v \left\{ \frac{-1}{2} \right\}) \right)_{|P_{1, tg-1}(F_v)} \otimes \pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\} \right) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} {}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\overline{1}}^{tg+1, *} (j_{!}^{\neq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))) \twoheadrightarrow \\ \text{Ind}_{P_{1, (t+1)g-1, d-(t+1)g}(F_v)}^{P_{1, d-1}(F_v)} j_{\overline{1}, (t+1)g, !}^{(t+1)g} HT_{\overline{1}, (t+1)g} \left(\pi_v, \left(\text{St}_t(\pi_v \left\{ \frac{-1}{2} \right\}) \right)_{|P_{1, tg-1}(F_v)} \times \pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\} \right) \otimes \Xi^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où d'après le lemme A.1.5,

$$\left(\mathrm{St}_t(\pi_v \left\{ \frac{-1}{2} \right\}) \right)_{|P_{1,tg-1}(F_v)} \times \pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\} \simeq \mathrm{St}_{t+1}(\pi_v)_{|P_{1,(t+1)g-1}(F_v)}.$$

Ainsi on obtient bien une surjection de ${}^p\mathcal{H}^{-1}i_1^{1,*}({}^pj_{1,*}^{-tg} HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)))$ vers le faisceau pervers induit de l'énoncé.

Passons à présent au deuxième point. Pour tout point géométrique z de $X_{\mathcal{L}, \bar{s}, \bar{1}_1}^=h$, le germe en z du i -ème faisceau de cohomologie de ${}^p\mathcal{H}^{-1}i_1^{1,*}({}^pj_{1,*}^{-tg} HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v)))$ est isomorphe à celui du $(i-1)$ -ème de ${}^pj_{1,*}^{-tg} HT(\pi_v, \mathrm{St}_t(\pi_v))$. Ainsi d'après [7], ce germe est

- nul si (h, i) n'est pas de la forme $((t+\delta)g, (t+\delta)g - d - \delta)$ avec $(t+\delta)g \leq d$,
- et sinon il est isomorphe au germe en z de $HT(\pi_v, \Pi)$ où Π est l'induite normalisée

$$\Pi := \left(\mathrm{St}_t(\pi_v \left\{ -\frac{\delta}{2} \right\}) \right)_{|P_{1,tg-1}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_\delta(\pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\}) \simeq LT(t, \delta - 1, \pi_v)_{|P_{1,(t+\delta)g-1}(F_v)},$$

le dernier isomorphisme étant donné par le lemme A.1.5.

On calcule de même le germe en z du i -ème faisceau de cohomologie du premier faisceau pervers de la suite exacte courte de l'énoncé. Les conditions d'annulation sont les mêmes et sinon on trouve le germe en z de $HT(\pi_v, \Pi')$ avec

$$\Pi' := \mathrm{St}_{t+1}(\pi_v)_{|P_{1,(t+1)g-1}(F_v)} \left\{ \frac{1-\delta}{2} \right\} \times \mathrm{Speh}_{\delta-1}(\pi_v \left\{ \frac{t+1}{2} \right\})$$

qui d'après le lemme A.1.5 est isomorphe à $\Pi \simeq LT_{\pi_v}(t, \delta - 1)_{|P_{1,(t+\delta)g-1}(F_v)}$. □

Considérons à présent $h \geq 1$ et $a = \bar{1}_h$. Pour $\mathcal{L}[d-h] = HT_{\bar{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$ un système local d'Harris-Taylor relativement à une représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$ et Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$ avec $h = tg$, ne jouant aucun rôle, on notera

$$P_{\mathcal{L}} := i_*^{h+1} {}^p\mathcal{H}^{-1} i_{\bar{1}_h}^{h+1,*} \left({}^pj_{\bar{1}_h,!*}^{-h} HT_{\bar{1}_h}(\pi_v, \Pi_t) \right),$$

de sorte que

$$0 \rightarrow P_{\mathcal{L}} \rightarrow j_{\bar{1}_h,!*}^{-h} HT_{\bar{1}_h}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow {}^pj_{\bar{1}_h,!*}^{-h} HT_{\bar{1}_h}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0.$$

B.3.3. Lemme. — *On a une suite exacte courte de faisceaux pervers $P_{\Delta(c)}(F_v)$ -équivariants*

$$0 \rightarrow j_{\neq c,!*}^{-h+1} j_{\neq c}^{h+1,*} P_{\mathcal{L}} \rightarrow P_{\mathcal{L}} \rightarrow {}^pj_{c,!*}^{-h+g} j_c^{h+g,*} P_{\mathcal{L}} \rightarrow 0.$$

Remarque : rappelons que dans [7], on calcule dans un premier temps l'image de $j_{\bar{1}_h,!*}^{-h} HT_{\bar{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$ dans un groupe de Grothendieck de faisceaux pervers équivariants au moyen de la formule des traces calculant la somme alternée de la cohomologie à support compact de $HT_{\bar{1}_h}(\pi_v, \Pi_t)$. Moralement donc la suite exacte de l'énoncé est à portée de la formule des traces puisque

- d'une part l'injectivité du morphisme d'adjonction $j_{\neq c, !}^{=h+1} j_{\neq c}^{h+1, *} P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}}$ est formelle et découle du caractère affine de $j_{1_h, \neq c}^{h \leq +1}$,
- et que l'image dans le groupe de Grothendieck du quotient se déduit par récurrence de celle de $P_{\mathcal{L}}$ et de $j_{\neq c, !}^{=h+1} j_{\neq c}^{h+1, *} P_{\mathcal{L}}$.

Démonstration. — En ce qui concerne le fait que le morphisme d'adjonction

$$j_{\neq c, !}^{=h+1} j_{\neq c}^{=h+1, *} P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}}$$

soit injectif, on renvoie le lecteur au lemme 2.1.2 qui traite ce point plus généralement sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$. Le quotient de ce morphisme d'adjonction est ${}^p\mathcal{H}_c^0 i_c^{h+1, *} P_{\mathcal{L}}$ et il s'agit donc de montrer qu'il est isomorphe à ${}^p j_{c, !*}^{=h+g} j_c^{=h+g, *} P_{\mathcal{L}}$. On suit la stratégie détaillée dans la preuve du lemme précédent : le morphisme d'adjonction $j_{c, !}^{=h+g} j_c^{=h+g, *} ({}^p\mathcal{H}_c^0 i_c^{h+1, *} P_{\mathcal{L}}) \longrightarrow ({}^p\mathcal{H}_c^0 i_c^{h+1, *} P_{\mathcal{L}})$ est surjectif et fournit donc une surjection

$$({}^p\mathcal{H}_c^0 i_c^{h+1, *} P_{\mathcal{L}}) \twoheadrightarrow {}^p j_{c, !*}^{=h+g} j_c^{=h+g, *} P_{\mathcal{L}}.$$

On est, comme précédemment, ramené à montrer que les faisceaux de cohomologie de ces deux faisceaux pervers possèdent les mêmes germes en tout point géométrique de $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, c}^{\geq h+g}$. Par symétrie du problème et afin de simplifier les notations on suppose que $c = \overline{1}_{h+1}$ et que z est un point géométrique de $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{s}, \overline{1}_{h+\delta}}^{=h+\delta}$. Notons que le germe en z du i -ème faisceau de cohomologie de ${}^p\mathcal{H}_c^0 i_c^{h+1, *} P_{\mathcal{L}}$ est isomorphe à celui de $P_{\mathcal{L}}$ lequel, d'après la suite exacte courte

$$0 \rightarrow P_{\mathcal{L}} \rightarrow j_!^{=h} \mathcal{L}[d-h] \rightarrow {}^p j_{!*}^{=h} \mathcal{L}[d-h] \rightarrow 0,$$

est isomorphe à celui du $(i-1)$ -ème faisceau de cohomologie de ${}^p j_!^{=h} \mathcal{L}[d-h]$. D'après [7], le germe en z de $\mathcal{H}^i({}^p j_!^{=h} \mathcal{L}[d-h])$ est non nul si et seulement si δ est de la forme rg avec $h+rg \leq d$ et $i = h-d+r(g-1)$ auquel cas il est isomorphe, en tant que $P_{\Delta(\overline{1}_{h+1} \subset \overline{1}_{h+rg})}(F_v)$ au germe en z de

$$HT_{\overline{1}_{h+rg}} \left(\pi_v, \Pi_t \left\{ \frac{-r}{2} \right\} \otimes \left(\text{Speh}_r(\pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\}) \Big|_{P_{1, rg-1}(F_v)} \right) \right) [rg+h-d].$$

En ce qui concerne le germe en z de ${}^p j_{c, !*}^{=h+g} j_c^{=h+g, *} P_{\mathcal{L}}$, notons tout d'abord que

$$j_{\overline{1}_{h+1}}^{=h+g, *} P_{\mathcal{L}} \simeq \text{Ind}_{P_{\Delta(\overline{1}_{h+1} \subset \overline{1}_{h+g})}(F_v)}^{P_{\Delta(\overline{1}_{h+1})}(F_v)} \left(j_{\overline{1}_{h+g}}^{=h+g, *} P_{\mathcal{L}} \right),$$

et que donc, d'après [7], le germe en question est isomorphe à celui de

$$HT_{\overline{1}_{h+rg}} \left(\pi_v, \Pi_t \left\{ \frac{-r}{2} \right\} \otimes \left((\pi_v \left\{ \frac{t-r+1}{2} \right\}) \Big|_{P_{1, g-1}(F_v)} \times \text{Speh}_{r-1}(\pi_v \left\{ \frac{t+1}{2} \right\}) \right) \right) [rg+h-d].$$

Le résultat découle alors du fait, cf. A.1.5, que $(\text{Speh}_r(\pi_v)) \Big|_{P_{1, rg-1}(F_v)}$ est irréductible isomorphe à $(\pi_v \left\{ \frac{-r+1}{2} \right\}) \Big|_{P_{1, g-1}(F_v)} \times \text{Speh}_{r-1}(\pi_v \left\{ \frac{1}{2} \right\})$. □

Terminons par l'effet de $\bar{j}_{\neq a, !} \bar{j}_{\neq a}^*$ sur le complexe des cycles évanescents. Rappelons qu'en notant

$$\bar{j} : X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}} \hookleftarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}} : \bar{i},$$

où $\bar{j}_! = {}^p \bar{j}_!$ et $\bar{j}_* = {}^p \bar{j}_*$ pour la t -structure dont la construction est rappelée au début du §3.2, le complexe des cycles évanescents est ${}^p \mathcal{H}^{-1} \bar{i}_* \bar{j}_* \bar{\mathbb{Q}}_l$. Ainsi en utilisant que pour toute strate pure $X_{\mathcal{I}, \bar{s}, a}^{\geq 1}$, l'inclusion $\bar{j}_{\neq a} : \bar{X}_{\mathcal{I}} - X_{\mathcal{I}, \bar{s}, a}^{\geq 1} \hookrightarrow \bar{X}_{\mathcal{I}} := X_{\mathcal{I}} \times_{\text{Spec } \mathcal{O}_v} \text{Spec } \bar{\mathcal{O}}_v$ étant affine, le lemme 2.1.2 nous donne que $i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}}$ est pervers et libre, ce qui donne la suite exacte courte de $\mathcal{F}(X_{\mathcal{I}, \bar{s}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)$

$$0 \rightarrow \bar{j}_{\neq a, !} \bar{j}_{\neq a}^* \Psi_{\mathcal{I}} \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I}} \longrightarrow i_a^{1,*} {}^p \mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}} \rightarrow 0.$$

Rappelons, cf. [7], que $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l}$ se décompose en une somme directe

$$\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l} \simeq \bigoplus_{\pi} \Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l, \pi}$$

où π décrit les classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ pour $1 \leq g \leq d$.

B.3.4. Proposition. — *Avec les notations précédentes, et pour π irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, le faisceau pervers $i_{a,*}^1 {}^p \mathcal{H}^0 i_a^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l, \pi}$ admet une filtration*

$$\text{Fil}_a^1(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \subset \text{Fil}_a^2(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \subset \dots \subset \text{Fil}_a^s(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l, \pi}),$$

où $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ avec pour gradués

$$\text{gr}_a^k(\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l, \pi}) \simeq {}^p j_{a,!}^{-kg} HT_a(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-k}{2}}.$$

Remarque : comme dans la remarque suivant le lemme B.3.3, ce résultat est à la portée de la formule des traces et permet de simplifier les arguments les plus complexes de [7].

Démonstration. — Par symétrie il suffit de considérer le cas $a = \bar{1}_1$. On rappelle que d'après [7], l'image I_{π} du morphisme d'adjonction

$$\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l, \pi} \longrightarrow j_*^{-g} j^{=g,*} \Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Q}}_l, \pi}$$

admet une filtration $\text{Fil}^1(I_{\pi}) \subset \dots \subset \text{Fil}^s(I_{\pi})$ dont les gradués sont $\text{gr}^k(I_{\pi}) \simeq {}^p j_{!*}^{-kg} HT(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-k}{2}}$.

B.3.5. Lemme. — *Pour tout $1 \leq r \leq s$, le faisceau pervers $i_{\bar{1}_1,*}^1 {}^p \mathcal{H}^0 i_{\bar{1}_1}^{1,*} \text{Fil}^r(I_{\pi})$ admet une filtration similaire à celle de l'énoncé de la proposition précédente, i.e. dont les gradués sont les ${}^p j_{\bar{1}_1,*}^{-kg} HT_{\bar{1}_1}(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{-\frac{k}{2}}$ pour $1 \leq k \leq r$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur r de 1 à s . Comme il est clair que

$$i_{\bar{1}_1,*}^1 {}^p \mathcal{H}^0 i_{\bar{1}_1}^{1,*} \left({}^p j_{!*}^{-rg} HT(\pi_v, \text{St}_r(\pi_v)) \right) \simeq {}^p j_{\bar{1}_1,*}^{-rg} HT_{\bar{1}_1}(\pi_v, \text{St}_r(\pi_v)),$$

il suffit de vérifier que

$$i_{\bar{1}_1,*}^1 {}^p \mathcal{H}^{-1} i_{\bar{1}_1}^{1,*} \left({}^p j_{!*}^{-rg} HT(\pi_v, \text{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-r}{2}} \right) \longrightarrow {}^p \mathcal{H}^{-1} i_{\bar{1}_1}^{1,*} \left(\text{Fil}^{r-1}(I_{\pi}) \right) \quad (\text{B.3.18})$$

est nulle. Or d'après l'hypothèse de récurrence tous les constituants irréductibles de ${}^p\mathcal{H}^{-1}i_{\mathbb{1}}^{1,*}(\mathrm{Fil}^{r-1}(I_\pi))$ sont des extensions intermédiaires de systèmes locaux sur des strates $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=kg}$ pour $1 \leq k \leq r-1$ alors que ${}^p\mathcal{H}^{-1}i_{\mathbb{1}}^{1,*}(p j_{1*}^{=rg} HT(\pi_v, \mathrm{St}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-r}{2}})$ est à support dans $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq(r+1)g}$ de sorte que (B.3.18) est nécessairement nulle. \square

On a ainsi une surjection de $i_{\mathbb{1},*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_{\mathbb{1}}^{1,*} \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi}$ vers le $\mathrm{Fil}_{\mathbb{1}}^s(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi})$ de l'énoncé et comme dans la preuve du lemme B.3.3 il suffit de montrer que ces deux faisceaux pervers ont les mêmes germes en tout point géométrique de $X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathbb{1}}^{\geq 1}$. Considérons donc z un point géométrique de $X_{\mathcal{I},\bar{s},\mathbb{1}_h}^{=h}$. D'après [7], la fibre en z du i -ème faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^i j_{1_{kg},*}^{=kg} HT_{1_{kg}}(\pi_v, \mathrm{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-k}{2}}$ est nulle si (h, i) n'est pas de la forme $(tg-d, tg-d+k-t)$ avec $k \leq t \leq \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ et sinon est isomorphe à celle de

$$HT_{1_{tg}}(\pi_v, \mathrm{St}_k(\pi_v \{ \frac{k-t}{2} \})) \otimes \mathrm{Speh}_{t-k}(\pi_v \{ \frac{k}{2} \}) \otimes \Xi^{\frac{1+t-2k}{2}}.$$

On en déduit alors que la fibre en z de $j_{\mathbb{1},*}^{=kg} HT_{\mathbb{1}}(\pi_v, \mathrm{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-k}{2}}$ est isomorphe à celle de

$$HT_{1_{tg}}(\pi_v, (\mathrm{St}_k(\pi_v \{ \frac{k-t}{2} \})_{|P_{1,k_{g-1}}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_{t-k}(\pi_v \{ \frac{k}{2} \})) \otimes \Xi^{\frac{1+t-2k}{2}},$$

où on induit de $P_{1,k_{g-1}}(F_v) \otimes GL_{(t-k)g}(F_v)$ à $P_{1,t_{g-1}}(F_v)$. Par ailleurs, en regardant les poids, on voit que la suite spectrale calculant la fibre des faisceaux de cohomologie de $\mathrm{Fil}_{\mathbb{1}}^s(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi})$ en fonction de ceux des $\mathrm{gr}_{\mathbb{1}}^k(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi})$ dégénère en E_1 . D'après A.1.5,

$$(\mathrm{St}_k(\pi_v \{ \frac{k-t}{2} \}))_{|P_{1,k_{g-1}}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_{t-k}(\pi_v \{ \frac{k}{2} \}) \simeq (LT_\pi(k, t-1-k)_{\pi_v})_{|P_{1,t_{g-1}}(F_v)}$$

de sorte que d'après le résultat principal de [7], la fibre en z de $\mathcal{H}^i(\mathrm{Fil}_{\mathbb{1}}^s(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi}))$ est isomorphe à celle de $\mathcal{H}^i({}^p\mathcal{H}^0 i_{\mathbb{1}}^{1,*} \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi})$, d'où le résultat. \square

Remarque : les mêmes arguments que précédemment appliqués à $\mathrm{Fil}_{\mathbb{1}}^{rg}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi})$ donnent

$$i_{a,*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_a^{1,*} (\mathrm{Fil}_{\mathbb{1}}^{rg}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi})) \simeq \mathrm{Fil}_a^r(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi}).$$

On en déduit alors que l'image du morphisme d'adjonction

$$j_{\mathbb{1},!}^{=g} j_{\mathbb{1}}^{=g,*} \left(i_{\mathbb{1},*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_{\mathbb{1}}^{1,*} \mathrm{Fil}_{\mathbb{1}}^{rg}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi}) \right) \longrightarrow i_{\mathbb{1},*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_{\mathbb{1}}^{1,*} \mathrm{Fil}_{\mathbb{1}}^{rg}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi})$$

est $j_{\mathbb{1},!}^{=g} HT(\pi_v, \pi_v)(\frac{1}{2})$. Plus généralement les applications successives des morphismes d'adjonction

$$j_{\mathbb{1},!}^{=kg} j_{\mathbb{1}}^{=kg,*} \left(i_{\mathbb{1},*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_{\mathbb{1}}^{k,*} \mathrm{Fil}_{\mathbb{1}}^{rg}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi}) \right) \longrightarrow i_{\mathbb{1},*}^1 {}^p\mathcal{H}^0 i_{\mathbb{1}}^{r,*} (\mathrm{Fil}_{\mathbb{1}}^{rg}(\Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}_l},\pi}))$$

donnent pour images les ${}^p j_{\mathbb{1},!}^{=kg} HT_{\mathbb{1}}(\pi_v, \mathrm{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{\frac{1-k}{2}}$ pour $1 \leq k \leq r$.

Remarque : on notera enfin que de la description des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor, la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de ${}^p\mathcal{H}^0 i_{\overline{1}}^{1,*} \Psi_{\mathcal{X}, \overline{\mathbb{Q}_l}}$ à partir de ceux des gradués de la proposition B.3.4, dégénère en E_1 .

Références

- [1] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [2] J. Bellaïche. À propos d’un lemme de Ribet. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 109 :45–62, 2003.
- [3] V.G. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161, 1993.
- [4] V.G. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. II. *Invent. Math.*, 125(2) :367–390., 1996.
- [5] I.N. Bernstein and A.V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p -adic groups. I. 1977.
- [6] Cédric Bonnafé and Raphaël Rouquier. Coxeter orbits and modular representations. *Nagoya Math. J.*, 183 :1–34, 2006.
- [7] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [8] P. Boyer. Réseaux d’induction des représentations elliptiques de Lubin-Tate. *Journal of Algebra*, 336, issue 1 :28–52, 2011.
- [9] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 142, fascicule 4 :777–814, 2014.
- [10] P. Boyer. Cohomologie des espaces de Lubin-Tate : une nouvelle preuve géométrique simple. *preprint*, 2017.
- [11] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne l -entière. *Duke Math. J.* 161 (6), pages 951–1010, 2012.
- [12] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo l . *Proc. London Math. Soc.* 104, pages 690–727, 2012.
- [13] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [14] L. Illusie. Autour du théorème de monodromie locale. In *Périodes p -adiques*, number 223 in *Astérisque*, 1994.
- [15] D. Juteau. Decomposition numbers for perverse sheaves. *Annales de l’Institut Fourier*, 59 (3), pages 1177–1229, 2009.
- [16] M.-F. Vignéras. *Représentations l -modulaires d’un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [17] M.-F. Vignéras. À propos d’une conjecture de Langlands modulaire. In *Finite reductive groups (Luminy, 1994)*, volume 141 of *Progr. Math.*, pages 415–452. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [18] M.-F. Vignéras. Induced R -representations of p -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.
- [19] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.

PASCAL BOYER, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France), PerCoLaTor : ANR-14-CE25 • *E-mail* : boyer@math.univ-paris13.fr