



Abaques et nomogrammes

Dominique Tournès

► To cite this version:

| Dominique Tournès. Abaques et nomogrammes. 2016. hal-01484563

HAL Id: hal-01484563

<https://hal.science/hal-01484563>

Preprint submitted on 7 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Abaques et nomogrammes

Dominique TOURNÈS

LIM, EA2525, Université de la Réunion

SPHERE, UMR 7219, CNRS, Université Paris-Diderot

dominique.tournes@univ-reunion.fr

En calcul digital, on utilise fréquemment des tables numériques. Le but de ces tables, qui rassemblent les résultats de nombreux calculs faits une fois pour toutes, est d'éviter à l'utilisateur la répétition d'opérations fastidieuses. L'analogue existe dans le calcul graphique : c'est vers la fin du XVIII^e siècle que sont apparues les premières tables graphiques permettant de lire directement sur une feuille de papier ou tout autre support, avec un minimum de manipulation, le résultat d'un calcul. Une table graphique se présente comme un réseau de lignes ou de points cotés, avec des échelles convenablement graduées, mobiles ou non, donnant par simple lecture la valeur cherchée en fonction de celles des paramètres. Les tables graphiques ont été appelées d'abord « abaqes » puis « nomogrammes », et la discipline qui s'occupe de leur étude et de leur emploi a reçu le nom de « nomographie » (cf. § 4.3.1). Certains abaqes spécifiquement destinés à la résolution graphique des équations algébriques ont déjà été rencontrés dans le chapitre 3 (cf. § 3.7). Il s'agit maintenant de reprendre le sujet dans sa généralité¹.

Utilisés d'abord par quelques pionniers, les abaqes se sont répandus progressivement dans de nombreux corps de métiers au point de devenir, pendant la première moitié du XX^e siècle, les principaux instruments du calcul graphique. Peu onéreux, de faible encombrement et d'une précision suffisante pour les besoins courants de la technique, les abaqes l'ont emporté avant tout par la rapidité des calculs qu'ils permettent, rapidité essentielle pour les professionnels ayant à faire usage en temps réel de formules plus ou moins complexes (ingénieurs, artilleurs, navigateurs, industriels, médecins, etc.). Les abaqes présentent également des avantages d'ordre plus strictement scientifique : ils facilitent l'interpolation, ils mettent davantage en évidence les

1. Le seul exposé d'ensemble récent sur l'histoire de la nomographie est la thèse soutenue en 1982 par Harold Ainsley Evesham, *The History and Development of Nomography* [37], qui n'a malheureusement donné lieu qu'à deux publications ultérieures très courtes ([38], [39]). Cette thèse nous a servi de point de départ pour nos travaux précédents ([201], [202]) et leur développement dans le présent chapitre.

lois des phénomènes étudiés, ils autorisent des calculs faisant intervenir des relations à un nombre quelconque de variables, là où les tables numériques se heurtent à une impossibilité matérielle au-delà de quatre variables.

Les auteurs des premiers traités de calcul graphique attribuent tous à Louis-Ézéchiél Pouchet, un manufacturier de Rouen, le mérite d'avoir créé pendant la Révolution française les premières tables graphiques dignes de ce nom. Ce sont ensuite des ingénieurs français du génie civil, Léon-Louis Lallanne, Charles Lallemand, Maurice d'Ocagne et Rodolphe Soreau, auxquels il faut adjoindre l'ingénieur belge Junius Massau, qui élaborent, entre 1840 et la fin du XIX^e siècle, les concepts de base de la science des abaques et développent considérablement cette dernière jusqu'à en faire une discipline à part entière, promise à un grand avenir international. Tous ces ingénieurs ont été initialement motivés par les énormes calculs nécessaires à la construction des lignes de chemin de fer et des autres voies de communication (routes, canaux) qui se multiplient très rapidement à cette époque, en lien avec le développement économique de l'Europe.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord scruter en détail la phase de création de la nomographie, en étudiant successivement les deux grands types d'abaques que sont les abaques à lignes concourantes (cf. § 4.1) et les nomogrammes à points alignés (cf. § 4.2). Il sera notamment intéressant de constater que la conception de ces instruments de calcul, suscitée au départ par les besoins pratiques des ingénieurs, a soulevé des problèmes inattendus et fort ardu de mathématiques théoriques. Nous nous pencherons ensuite sur le phénomène, ici exemplaire, de constitution et de diffusion d'une nouvelle discipline, avec la reconstruction *a posteriori* de son histoire sur le long terme et les querelles inévitables entre ceux qui estiment en être les fondateurs (cf. § 4.3). Nous terminerons par un panorama de la place scientifique, économique et sociale occupée par la nomographie depuis le début du XX^e siècle (cf. § 4.4) : très importante jusque dans les années 1970, cette place apparaît encore significative de nos jours. En effet, en dehors du cas particulier des planimètres (cf. chapitre 6), la nomographie est la seule branche du calcul graphique qui, tout au moins dans certains domaines, demeure vivante et d'usage courant.

4.1. Abaques à lignes concourantes

La première méthode systématique apparue pour représenter graphiquement les relations à trois variables² $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ est celle des

2. Pour cette introduction, nous suivons la présentation et les notations de l'ouvrage publié en 1891 par Maurice d'Ocagne, *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques* [123], qui contient le premier exposé de synthèse sur le sujet. Nous reviendrons ensuite aux notations originales propres à chaque auteur.

abaques « à lignes concourantes », appelés aussi abaques « cartésiens » ou abaques « à entrecroisement ». Un tel abaque est formé de trois familles de courbes cotées, d'équations respectives $F_1(x,y,\alpha) = 0$, $F_2(x,y,\beta) = 0$ et $F_3(x,y,\gamma) = 0$, tracées dans un plan muni de coordonnées cartésiennes x et y . Pour chaque valeur du paramètre α , la première équation détermine une courbe que l'on distingue sur le graphique en inscrivant près d'elle cette valeur de α . Il en va de même pour les deux autres familles (cf. figure 4.1). Toutes ces courbes sont dites « isoplèthes » pour traduire le fait que, sur chacune d'elles, le paramètre associé garde une valeur constante. Les équations des trois familles doivent naturellement être choisies de sorte que l'élimination entre elles de x et de y redonne l'équation initiale à résoudre :

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = 0 \iff \exists (x,y) \begin{cases} F_1(x,y,\alpha) = 0 \\ F_2(x,y,\beta) = 0 \\ F_3(x,y,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Sur l'abaque, une solution (α,β,γ) de l'équation correspond tout simplement au croisement en un même point de trois courbes, l'une de chaque famille, associées respectivement aux cotes α , β et γ . Si l'on se donne les valeurs de deux quelconques des variables, par exemple α et β , on trouve directement la valeur correspondante de γ en lisant la cote de l'isoplèthe de la troisième famille qui passe par le point de croisement des isoplèthes des deux premières familles ayant pour cotes α et β (sur la figure 4.1, on lit par exemple $\gamma = 2$ lorsque $\alpha = 3$ et $\beta = 4$). Entre les valeurs marquées sur l'abaque, on procède par interpolation visuelle.

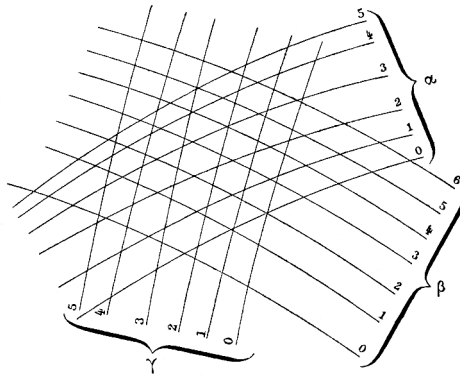


FIGURE 4.1. Abaque à trois faisceaux de courbes ([123], p. 10)

La démarche la plus simple et la plus commune, qui s'applique à n'importe quelle équation, consiste à poser $F_1(x,y,\alpha) = x - \alpha$ et $F_2(x,y,\beta) = y - \beta$.

Dans ce cas, les isoplèthes paramétrées par α sont des parallèles à l'axe des ordonnées et les isoplèthes paramétrées par β sont des parallèles à l'axe des abscisses. En pratique, il y a seulement à construire les courbes d'équation $F(x, y, \gamma) = 0$ sur une feuille quadrillée (cf. figure 4.2). Cependant, pour éviter l'important travail nécessité par le tracé précis de toute une famille de courbes, on peut chercher à se ramener à un abaque dans lequel les isoplèthes des trois faisceaux soient des droites, quitte à ne plus utiliser les parallèles aux axes de coordonnées; on parle alors d'abaque « à droites concourantes » (cf. figure 4.3).

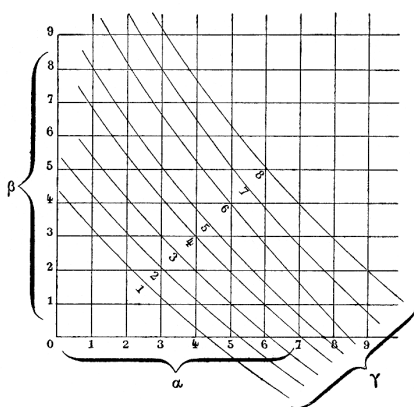


FIGURE 4.2. Abaque à deux faisceaux de droites et un de courbes ([123], p. 12)

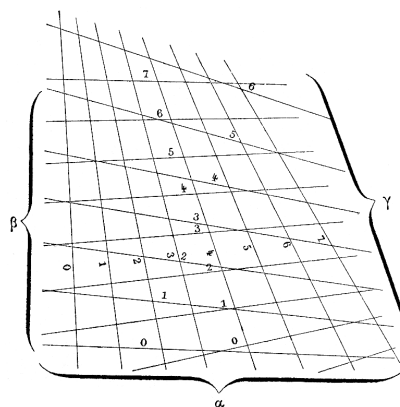


FIGURE 4.3. Abaque à trois faisceaux de droites ([123], p. 14)

Dans cette section, on va suivre le développement de la théorie des abaques à lignes concourantes sur environ un siècle à partir des années 1790. C'est le temps qu'il a fallu pour que ce premier type de table graphique trouve son équilibre et atteigne ses limites avant d'être supplanté par le type dual des nomogrammes à points alignés (cf. § 4.2). On s'intéressera notamment aux recherches visant à caractériser les équations susceptibles d'être représentées par des abaques à droites concourantes.

4.1.1. L'arithmétique linéaire de Pouchet

Les premières tables graphiques reconnues comme telles sont issues des efforts de la Révolution française pour imposer un nouveau système de poids et mesures ([41], p. xx-xxi; [90], p. 3; [151], 3^e éd., p. xxiii). Afin d'aider la population à s'approprier la réforme, l'article 19 de la loi du 18 germinal an III de la République française prescrivait une simplification des outils de conversion : « Au lieu des tables de rapports entre les anciennes et les

nouvelles mesures, qui avaient été ordonnées par le décret du 8 mai 1790, il sera fait des échelles graphiques pour estimer ces rapports sans avoir besoin d'aucun calcul » (cité dans [41], p. 72). C'est pour répondre à cet appel d'offres que Louis-Ézéchiél Pouchet (1748-1809), un manufacturier de coton de Rouen, rédigea un ouvrage de métrologie qui connut trois éditions ([175], [176], [178]). En appendice de la 2^e édition figure un traité d'*Arithmétique linéaire*, qui a fait aussi l'objet d'une publication séparée dans une version légèrement modifiée [177].

En 1795, dans la première version de son arithmétique linéaire, Pouchet fournissait des feuilles graphiques contenant des réseaux de lignes sur lesquels on pouvait effectuer les opérations courantes en reportant des longueurs au moyen d'un compas. Deux ans plus tard, dans la 3^e édition de son ouvrage, Pouchet remanie l'annexe sur l'arithmétique linéaire et en fait un chapitre à part entière. Cette fois, il propose de véritables abaques, c'est-à-dire des graphiques sur lesquels on peut lire directement, sans aucune manipulation, les résultats des opérations. Voici comment Pouchet décrit cette avancée dans un passage important du point de vue historique, puisque l'expression de « calcul graphique » y est employée pour la première fois :

L'Arithmétique linéaire consiste à résoudre, sur des lignes, les problèmes pour lesquels on se sert ordinairement de chiffres. Les lignes tirées suivant différentes directions, forment à cet effet un tableau graphique pour l'usage duquel il n'est pas de rigueur de savoir lire ni écrire. [...]

L'avantage du calcul graphique est la faculté d'opérer avec promptitude et sans nécessité de plumes, papier ni encre, puisqu'il présente en quelque sorte une table universelle de comptes faits, pour l'intelligence desquels il suffit de savoir compter des lignes. [...]

Ce serait cependant une grande erreur de croire que le calcul ordinaire pourrait être abandonné pour le calcul linéaire; car celui-ci ne donne souvent que des résultats approximatifs, mais qui sont cependant suffisants pour la plus grande partie des transactions commerciales ([178], p. 146-147).

Pouchet dresse ainsi des tables graphiques permettant de réaliser les opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication, division, élévation au carré et extraction d'une racine carrée, règle de trois, changements d'unités. Ses abaques sont constitués de deux faisceaux de lignes droites cotées, verticales et horizontales, à travers lesquels passe un faisceau de courbes, cotées elles aussi. Par exemple, pour la multiplication $z = xy$, le procédé permet de remplacer la table de Pythagore par un faisceau d'hyperboles d'égale cote (cf. figure 4.4). Sur cette table graphique, la multiplication et la division s'exécutent instantanément par simple lecture. Si l'on veut effectuer la multiplication, disons de 5 par 2, on prend le point d'intersection de la verticale $x = 5$ et de l'horizontale $y = 2$, et on suit de l'œil l'hyperbole sur laquelle se trouve ce point pour aller lire sa cote $z = 10$. Pour des valeurs de x , y ou z qui n'apparaissent pas directement sur le graphique, on interpole

à vue. Enfin, la même table sert, de manière évidente, à effectuer les divisions et les extractions de racines carrées.

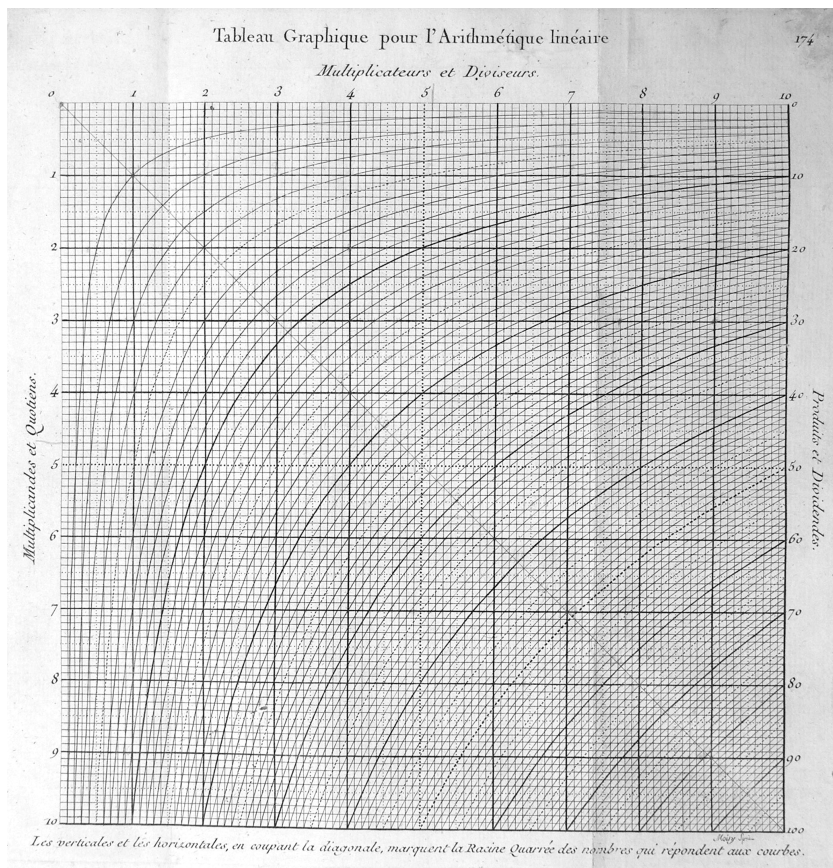


FIGURE 4.4. Tableau graphique de Pouchet pour la multiplication ([178], p. 174)

Ce mode de représentation, comme nous l'avons vu plus haut, s'applique plus généralement à toute relation entre trois variables. D'autres exemples isolés de traduction graphique de tables à double entrée se rencontrent ainsi dans la première moitié du XIX^e siècle, principalement dans le domaine de l'artillerie ([83], p. 63-66; [88], 2^e éd., p. 10-11) : en 1814 et 1818, Alexandre Magnus d'Obenheim (1753-1840), officier du génie et professeur à l'École d'artillerie de Strasbourg, utilise la construction de courbes d'égale cote dans des travaux de balistique ([117], [118]); en 1825, Guillaume Piobert (1793-1871) vérifie par la construction de plans topographiques cotés les tables du tir

à ricochet de Lyautey ; en 1830, Bellencontre, chef d'escadron d'artillerie, traduit graphiquement les tables de tir de Lombard ; en 1839, Isidore Didion (1798-1878), capitaine d'artillerie, figure par des courbes les résultats comparatifs des expériences faites sur la justesse du tir des balles plates et des balles longues [27] ; en 1840, Georges-Jean-Baptiste-François Allix, ingénieur des constructions navales, publie des tableaux graphiques dans une *Explication d'un nouveau système de tarifs, ou Nouvelle méthode pour trouver, en mesures métriques, sans aucun calcul, le poids des métaux en barres ou en feuilles, le cube des bois bruts ou équarris, le cube des pierres de taille...* [4]. Toutefois, aucun des auteurs précédents, de Pouchet à Allix, n'associe explicitement ses graphiques cotés à des représentations par coupes horizontales de surfaces existant dans l'espace à trois dimensions. C'est seulement en 1830, en rendant compte des travaux d'Obenheim et de Bellencontre, qu'Olry Terquem (1782-1862), bibliothécaire du Dépôt central de l'artillerie à Vincennes, met en évidence pour la première fois cette idée fondamentale que, puisqu'une formule à trois variables représente une surface dans l'espace, les projections horizontales cotées de sections de la surface parallèles à l'horizon donnent, par lecture à vue, les mêmes résultats qu'une table numérique à double entrée [199].

4.1.2. L'anamorphose géométrique de Lalanne

Après ces premières tentatives sporadiques de traduction graphique de relations à trois variables, c'est surtout Léon-Louis Lalanne (1811-1892), ingénieur des ponts et chaussées, qui fit franchir un pas décisif à la théorie des abaques. Lalanne s'intéressa beaucoup aux chemins de fer : en France, il construisit notamment la ligne de Sceaux et la ligne Paris-Strasbourg ; il supervisa également la constitution de réseaux ferrés en Suisse et en Espagne. Au début de sa carrière, il consacra des efforts importants à l'invention et au perfectionnement d'instruments variés propres à simplifier les calculs nécessaires à l'établissement d'un projet de route, notamment ceux des quantités de déblai et de remblai, et des distances moyennes de transport. Parmi ces instruments, on peut citer, outre les tables graphiques dont il va être question, une balance à calcul et un arithmoplanimètre (cf. § 6.2.5).

En 1843 paraît à Paris la traduction française d'un *Cours complet de météorologie* [70] de Ludwig Friedrich Kämtz, professeur de physique à l'université de Halle. Le livre contient un *Appendice contenant la représentation graphique des tableaux numériques*, signé de Lalanne. Dans cet appendice, Lalanne énonce de manière systématique que toute loi à trois variables peut être représentée graphiquement de la même manière qu'une surface topographique à l'aide de ses lignes de niveau cotées. Il applique cette idée à huit tableaux à double entrée du traité de Kämtz. Par exemple (cf. figure 4.5),

Tableau des variations de la température moyenne, à Halle.

HEURES.	MARS.	AVRIL.	MAI.	JUIN.	JUILLET.	AOUT.	SEPTÈMB.	OCTOBRE.	NOVEMBRE.	DÉCEMBRE.	JANVIER.	FÉVRIER.
	degrés.	degrés.	degrés.	degrés.	degrés.	degrés.	degrés.	degrés.	degrés.	degrés.	degrés.	degrés.
Matin.	6	1.73	6.76	10.20	13.11	15.34	14.19	11.19	6.59	2.75	1.65	-2.95
	5	1.60	6.55	9.65	12.03	14.40	13.46	10.69	6.39	2.71	1.67	-2.87
	4	1.70	6.98	8.21	11.20	13.73	13.04	10.56	6.44	2.74	1.71	-2.80
Minuit.	3	1.91	6.45	7.81	10.70	13.42	13.03	10.72	6.62	2.79	1.74	-2.75
	2	2.18	6.88	7.06	10.83	13.55	13.34	11.09	6.89	2.81	1.76	-2.71
	1	2.43	7.32	8.64	11.44	14.90	13.92	11.55	7.19	2.89	1.80	-2.65
Soir.	10	2.65	7.81	9.07	12.36	14.90	14.61	12.09	7.56	3.05	1.84	-2.56
	9	2.89	8.37	10.88	13.46	15.86	15.18	12.68	8.00	3.26	1.88	-2.44
	8	3.14	8.93	12.08	14.59	16.84	16.37	13.37	8.55	3.51	1.91	-2.31
Mid.	7	3.55	9.63	13.05	15.63	17.88	17.30	14.10	9.09	3.74	2.07	-2.19
	6	3.95	10.46	14.00	16.63	18.89	18.23	14.94	9.66	3.95	2.23	-2.05
	5	4.53	11.23	14.90	17.59	19.94	19.22	15.86	10.26	4.17	2.38	-1.89
Matin.	4	5.02	12.26	15.75	18.50	20.90	19.95	16.75	10.90	4.50	2.59	-1.67
	3	5.65	13.02	16.35	19.15	21.65	21.04	17.58	11.66	4.94	2.86	-1.39
	2	6.21	13.66	16.84	19.76	22.31	21.61	18.19	12.30	5.43	3.26	-0.98
	1	6.51	14.10	17.14	20.05	22.63	21.95	18.53	12.85	5.90	3.51	-0.72
	11	6.66	14.18	17.09	19.91	22.53	21.90	18.50	13.16	6.16	3.70	-0.59
	10	6.45	13.88	16.85	19.56	22.15	21.68	18.35	12.98	6.08	3.69	-0.69
	9	6.04	13.25	16.26	19.01	21.51	21.11	17.86	12.45	5.69	3.46	-1.02
	8	5.36	12.35	15.54	18.23	20.69	20.12	17.00	11.48	5.09	3.01	-1.49
	7	4.70	11.25	14.61	17.39	19.84	18.99	16.29	10.29	4.39	2.45	-2.11
	6	3.63	9.99	13.03	16.44	18.91	17.71	14.31	8.99	3.62	1.99	-2.50
	5	2.70	8.10	12.53	15.41	17.91	16.44	13.23	8.75	3.07	1.65	-2.86
	4	2.10	7.56	11.31	14.24	16.65	15.11	12.00	7.02	2.85	1.61	-2.95

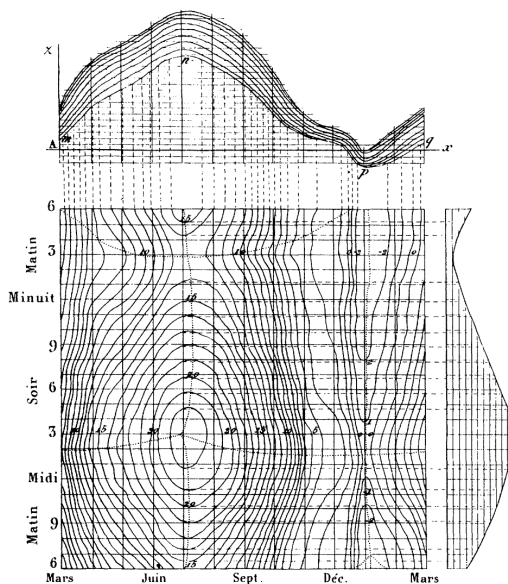


FIGURE 4.5. Variations de la température moyenne par heure, dans les différents mois de l'année, à Halle ([70], p. 14 et pl. I, fig. 1)

le météorologue allemand avait dressé, à partir d'observations thermométriques à Halle, une table fournissant la température moyenne de cette ville suivant l'heure du jour et le mois de l'année. Lalanne traduit sous forme graphique les résultats de ce tableau en prenant deux axes plans correspondant, pour l'un, aux mois de l'année, pour l'autre, aux heures du jour, et en

assimilant la température à une troisième dimension. Il apparaît ainsi des courbes d'égale température analogues aux lignes de niveau d'une surface. Pour réaliser concrètement ce graphique, on se sert des lignes et des colonnes de la table pour tracer des courbes auxiliaires qui représentent autant de sections de la surface cherchée, soit à heure constante, soit à mois constant. Les lignes d'égale température de la surface sont alors construites selon les techniques usuelles de la géométrie descriptive. Une telle représentation graphique permet à Lalanne de mettre en évidence certains phénomènes intéressants qui étaient restés cachés dans la table numérique. De façon plus générale, il développe les avantages des tables graphiques et prévoit avec justesse qu'elles sont promises à un bel avenir :

[...] nous sommes convaincu que la représentation graphique des lois naturelles ou mathématiques à trois variables, que la substitution des plans cotés à des tables numériques à double entrée, est une idée féconde qui ne tardera pas à porter des fruits. Lorsque les météorologistes, les physiciens, les ingénieurs seront familiarisés avec l'emploi de ce procédé, ils seront mieux à même de discuter les résultats de leurs expériences, de diriger leurs recherches, de simplifier leurs calculs, que s'ils opéraient directement sur des nombres dont la dépendance naturelle n'est pas toujours facilement reconnaissable, ou qui s'obtiennent par des opérations compliquées ([70], appendice, p. 7).

En cette même année 1843, Lalanne présente à l'Académie des sciences un mémoire dans lequel il pousse plus avant ses recherches sur la représentation graphique des lois à trois variables [78]. Approuvé par l'Académie et devant figurer à l'origine dans le *Recueil des savants étrangers*, ce mémoire a finalement été publié en 1846 dans les *Annales des ponts et chaussées* [83]. Lalanne y expose tout d'abord l'idée d'utiliser des échelles non régulières sur les axes des abscisses et des ordonnées : en remplaçant les variables primitives par des fonctions auxiliaires de celles-ci, convenablement choisies, il réussit, dans certains cas, à ramener à des droites les lignes de niveau cotées. Dans l'exemple simple de la multiplication, après avoir constaté que la relation $z = xy$ s'écrit aussi $\log z = \log x + \log y$, il suffit de graduer les axes des abscisses et des ordonnées avec les nouvelles variables $x' = \log x$ et $y' = \log y$ pour que le faisceau d'hyperboles de Pouchet devienne un faisceau de droites d'équations $x' + y' = \log z$ (cf. figure 4.6).

Grâce à la transformation de Lalanne, certaines relations entre trois variables peuvent prendre désormais l'aspect d'un ensemble de trois faisceaux de lignes droites. Dans ce cas, une solution de l'équation correspond au concours de trois droites (une de chaque faisceau). Lalanne a appliqué ce principe de façon remarquable à la résolution graphique des équations du troisième degré et, plus généralement, à celle des équations trinômes (cf. § 3.7.1). C'est par analogie avec un phénomène d'optique qu'il trouve un nom pour cette transformation :

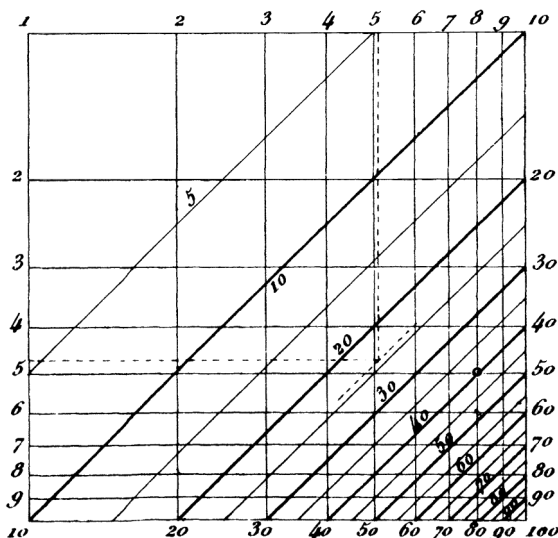


FIGURE 4.6. Abaque de Lalanne pour la multiplication ([83], pl. 98, fig. 4)

Cette variation suivant des lois plus ou moins compliquées, dans les proportions des figures, a quelque chose d'analogue aux effets produits par la réflexion sur des surfaces courbes. On sait que des figures bizarres, tout à fait irrégulières en apparence, prennent un aspect complètement différent lorsqu'elles sont vues par réflexion sur un miroir d'une forme déterminée et dans certaines positions. Nous appliquerons à la transformation d'un tableau graphique en un autre équivalent, l'expression d'« anamorphose », que les physiciens ont attribuée depuis longtemps, au phénomène optique dont il vient d'être question, et nous donnerons le nom de « géométrie anamorphique » à une branche nouvelle de la géométrie qui paraît devoir résulter de la considération des anamorphoses géométriques ([83], p. 13).

Une version en grand format de l'anamorphose de la table de Pouchet a été commercialisée par Lalanne sous le nom d'« abaque » ou « compteur universel » (cf. figure 4.7). Il s'agit de la première apparition du mot « abaque » dans ce contexte. Auparavant, un abaque était une table à calculer en forme de damier, sur laquelle on disposait et déplaçait des jetons. Lalanne considère que les nouvelles tables graphiques, dans la mesure où on y lit le résultat cherché à l'intersection d'une horizontale et d'une verticale, sont également des sortes de damiers servant à compter, d'où l'extension de sens conférée au mot « abaque », destinée à inscrire l'art du calcul dans la continuité. Après Lalanne, le mot fut définitivement adopté pour désigner toutes les tables graphiques servant au calcul. C'est également Lalanne qui a introduit en français le mot « isoplèthe » pour désigner une ligne d'égale cote, mais beaucoup plus

Abaque ou compteur universel de M. L. Lalanne.
(Fig. 50)

Pl. II.

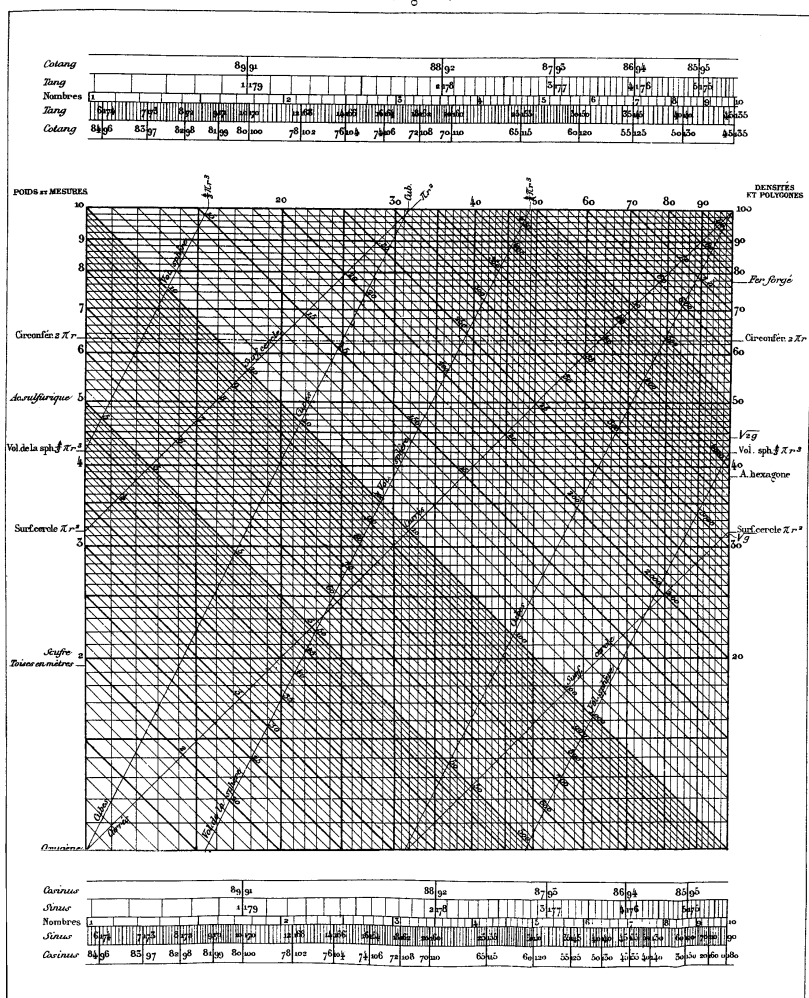


FIGURE 4.7. L'abaque, ou compteur universel, de Lalanne ([42], pl. II)

tard, en 1878 ([88], 2^e éd., p. 54), en reprenant une proposition de l'auteur allemand Christian August Vogler (1841-1925) ([207], p. 7).

En plus de la multiplication et de la division, l'abaque de Lalanne permet d'effectuer la plupart des opérations mathématiques usuelles grâce à l'adjonction de quelques lignes et échelles supplémentaires : carré et racine carrée, cube et racine cubique, règle de trois, conversion de poids et mesures, circon-

férence et surface du cercle, volume de la sphère, lignes trigonométriques, équilibrage des réactions chimiques, etc. Présenté à l'exposition universelle de Londres en 1851, cet instrument peu coûteux y obtint une mention honorable de la part du jury. Lalanne ambitionnait qu'il puisse « remplacer avec avantage la règle à calcul des Anglais » ([83], p. 43) et l'imaginait promis à un brillant avenir :

Il n'y a donc rien d'impossible à ce que, dans quelques années, l'abaque figure dans les salles de nos écoles primaires et même sur les murs des places de nos villages, comme l'horloge et le cadran solaire, servant d'instrument pour tous les calculs usuels, de même que l'horloge et le cadran servent à mesurer et à régler le temps ([83], p. 53).

Vendu accompagné d'un livret d'explications, l'abaque a connu une certaine popularité puisqu'il a fait l'objet de plusieurs éditions françaises ([80], [81]), d'une édition allemande [84] et d'une édition anglaise [85], ainsi que de quelques imitations ([64], [206]), mais il n'a manifestement pas réussi à freiner l'irrésistible ascension de la règle à calcul.

Si cet instrument universel n'a rencontré qu'un succès relatif, Lalanne a, par contre, obtenu une diffusion massive des abaques cartésiens dans le secteur des travaux publics, où ses idées arrivèrent à un moment favorable. En effet, la loi du 11 juin 1842 avait décidé l'établissement d'un réseau de grandes lignes de chemin de fer organisé en étoile à partir de Paris et, pour exécuter rapidement cette décision, on éprouva la nécessité de disposer de nouveaux moyens d'évaluation des terrassements considérables à effectuer. Dans le cas d'une voie avec fossés latéraux, on a besoin d'un système de neuf formules pour calculer les déblais et les remblais selon les différentes configurations possibles du terrain. Pour remplacer les tables numériques antérieures, comme celles que Gustave-Gaspard Coriolis (1792-1843) avait calculées en 1835-1837, on se livra, sur une suggestion faite par Lalanne dès 1842 ([77], p. xli), à quelques essais de tables topographiques. Par exemple, celle de la figure 4.8 représente la formule

$$z = \frac{(5,10 + y)^2}{2(1 - x)} - 13,005$$

au moyen d'arcs de paraboles cotés par les valeurs de z . Lalanne montra ultérieurement que, par application de son anamorphose, on pouvait obtenir des abaques à droites concourantes, beaucoup plus faciles à construire. Pour cela, il suffit de poser $x' = \log(1 - x)$ et $y' = \log(5,10 + y)$ pour que l'équation prenne la forme

$$y' = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}[\log 2 + \log(13,005 + z)].$$

En 1843, l'administration française adressa à tous les ingénieurs concernés des tables graphiques pour le calcul des superficies de déblai et de remblai

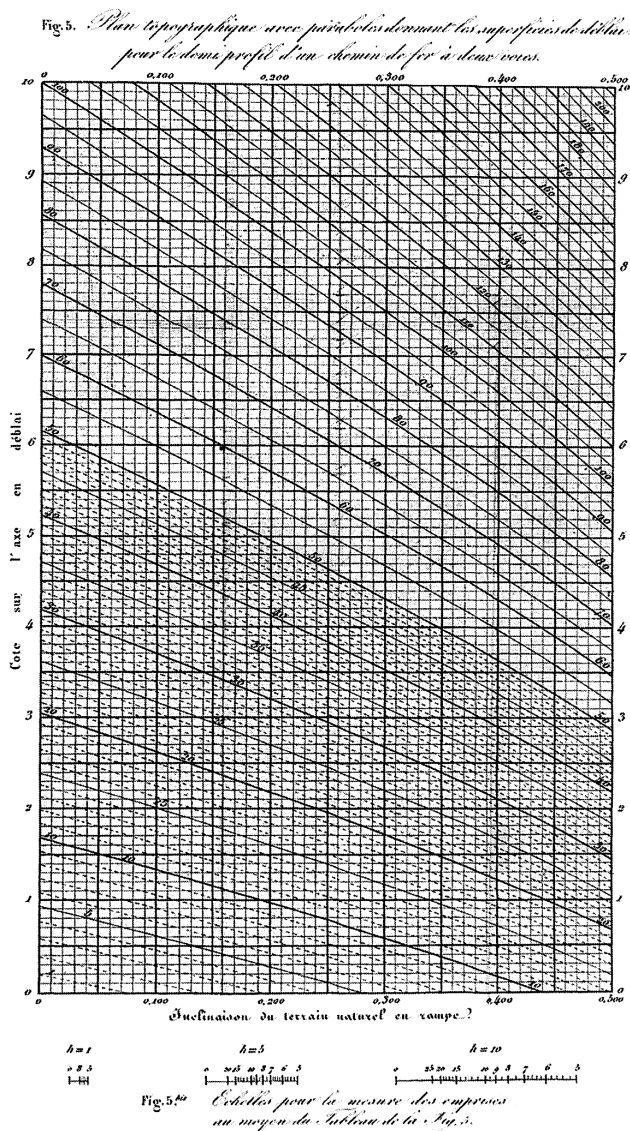


FIGURE 4.8. Surfaces de déblais pour un chemin de fer à deux voies ([83], pl. 98, fig. 5)

relatives au profil des voies ferrées et des routes [79]. Indépendamment de la facilité d'utilisation de ces abaques, Lalanne a fait ressortir le bénéfice financier qui a résulté de leur choix : une feuille de tables graphiques est revenue à un prix compris entre 1 et 2 francs, alors qu'une table numérique à

double entrée, contenant la même quantité d'informations, aurait occupé un volume de 125 pages et aurait coûté entre 20 et 25 francs ([83], p. 69).

Après les premières publications de Lalanne, l'utilisation d'abaques à lignes concourantes, anamorphosées ou non, se développe rapidement de manière importante, en premier lieu parmi ses collègues des ponts et chaussées ([83], p. 1 et 65) : en 1844, l'inspecteur général Jean-Baptiste-Simon Fèvre (1775-1850) propose, dans son *Traité du mouvement de translation des locomotives*, un abaque qui fait connaître la vitesse d'une locomotive en fonction du poids du convoi et de l'inclinaison de la rampe sur laquelle on le remorque ([45], pl. 10) ; en 1845, l'ingénieur Emmanuel-Napoléon Davaine (né en 1804) élabore un tableau graphique pour les terrassements donnant simultanément les surfaces de déblai, de remblai, les largeurs d'emprise et les longueurs des talus ([23], [24]), mais Lalanne montre les défauts de ce tableau et le perfectionne en transformant les hyperboles qu'il comporte en droites parallèles ([86], [25]) ; en 1846, l'ingénieur en chef Barthélémy-Édouard Cousinery (1790-1851) est le premier, après Lalanne, à employer l'anamorphose géométrique pour introduire quelques abaques dans le second volume du *Recueil de tables à l'usage des ingénieurs* [19], qu'il publie pour faire suite à celui [52], purement numérique, de Raymond Génieys (1790-1831). Cette dernière publication provoque une petite querelle de priorité avec Lalanne ([83], note p. 1), car Cousinery ne manque pas de rattacher les tables graphiques au « calcul par le trait », dont il a écrit lui-même le premier traité en 1839 [18] :

Outre les développements donnés aux tables exclusivement arithmétiques sur lesquels il est inutile d'insister, renvoyant le lecteur pour cela à la table des matières ; nous appellerons son attention sur un petit nombre de tables graphiques : plus particulièrement sur celle qui correspond au mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite. Ce n'est là, à proprement parler, qu'un premier essai ; et si, comme tout porte à le croire, il était goûté du public, nous pourrions y donner suite d'une manière encore plus étendue ; car, les tables graphiques ressortissant du *calcul par le trait*, il y a déjà longtemps que nous en avons signalé la convenance et la fécondité ([19], p. vj).

Conformément à la prédiction de Cousinery, les tables graphiques rencontrent effectivement le succès. Faisant une rétrospective en 1878, Lalanne cite de nombreux autres exemples ([88], 2^e éd., p. 14-18 et 35-37) qui montrent que, dans le troisième quart du XIX^e siècle, les abaques cartésiens et l'anamorphose étaient devenus des outils courants dans le monde des ingénieurs français.

4.1.3. L'anamorphose généralisée de Massau

C'est l'ingénieur belge Junius Massau (1852-1909) qui prit le relais de Lalanne pour enrichir la méthode et le champ d'application des abaques

cartésiens. Professeur à l'école du génie civil de l'université de Gand, Massau s'est distingué de manière importante dans le champ des sciences de l'ingénieur : à partir de 1878, année où il commence à enseigner, il ne cesse de contribuer de manière inventive à la mécanique rationnelle, à la nomographie et, surtout, à l'intégration graphique, discipline dont il est considéré comme le créateur (cf. § 7.1.3 et § 7.4.2). Pour l'essentiel, ses apports à la théorie des abaques sont contenus dans deux gros mémoires publiés en 1884 et en 1887 ([107], [108]).

Après avoir rappelé les travaux de Lalanne dont il s'inspire, Massau développe des « principes nouveaux sur la représentation des fonctions ». Pour représenter une fonction w définie par l'équation $f(u, v, w) = 0$, il part de deux séries de courbes arbitraires $f_1(x, y, u) = 0$ et $f_2(x, y, v) = 0$, qu'il appelle les « lignes des u » et les « lignes des v », et qui déterminent un système de coordonnées curvilignes (u, v) par rapport aux coordonnées rectangulaires (x, y) . L'équation $f(u, v, w) = 0$ définit alors les « lignes des w » en coordonnées u et v , lignes dont l'équation en coordonnées x et y s'obtiendrait en éliminant u et v entre les trois relations précédentes. Massau introduit ainsi une notion d'anamorphose généralisée reposant sur l'idée que si l'on effectue un changement de coordonnées du type $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, cela se traduit par une déformation du plan qui conserve la propriété du concours de trois lignes et, par suite, ne change rien au fonctionnement de l'abaque. De ce point de vue, l'anamorphose géométrique de Lalanne correspond au cas particulier $x = \varphi(u)$, $y = \psi(v)$, dans lequel on se contente d'effectuer des allongements ou raccourcissements indépendants dans la direction des x et dans celle des y .

Massau cherche ensuite quelles sont les fonctions que l'on peut représenter en utilisant trois faisceaux de droites, sans imposer aux deux premiers faisceaux d'être parallèles aux axes de coordonnées. Dans ce cas, les lignes des u , des v et des w doivent avoir des équations respectives de la forme

$$\begin{aligned} a(u)x + b(u)y + c(u) &= 0, \\ a'(v)x + b'(v)y + c'(v) &= 0, \\ a''(w)x + b''(w)y + c''(w) &= 0, \end{aligned}$$

et la condition de concours, provenant de l'élimination de x et de y , s'écrit

$$\begin{vmatrix} a(u) & b(u) & c(u) \\ a'(v) & b'(v) & c'(v) \\ a''(w) & b''(w) & c''(w) \end{vmatrix} = 0.$$

C'est donc lorsqu'on pourra ramener à cette forme une relation $f(u, v, w) = 0$ qu'elle sera susceptible d'être représentée par un abaque à droites concourantes dans sa version la plus générale.

Massau développe ensuite un grand nombre d'exemples et d'applications de sa conception élargie des abaques. Tout d'abord, il perfectionne les tables de déblai et de remblai de Lalanne et de Davaine. Ces dernières avaient l'inconvénient d'être divisées en plusieurs régions correspondant aux neuf formules à prendre en compte : soit il fallait se contenter de plusieurs abaques anamorphosés partiels associés aux différentes régions, soit on cherchait à construire un abaque global, mais dans ce cas, même si l'on parvenait à transformer en lignes droites les courbes des régions les plus vastes, les courbes des autres régions restaient curvilignes. Grâce à un nouveau choix de variables, Massau ramène les neuf cas à un seul système de formules qu'il parvient à représenter par un abaque unique à droites concourantes ([107], p. 106-107). Après le problème des terrassements, l'ingénieur belge aborde longuement celui des murs de soutènement. En se proposant de construire des tableaux graphiques donnant immédiatement les dimensions des murs de soutènement ou de réservoir de forme rectangulaire ou trapézoïdale sur un terrain horizontal, il se donne l'occasion de montrer la pleine puissance de son anamorphose généralisée ([108], p. 66-105). En effet, les équations à représenter, comme, par exemple, celle-ci :

$$(\lambda - 1) v^2 + \lambda (1 + \pi) v + \frac{1}{3} (1 + \lambda)(1 + 2\pi) = 0,$$

ne peuvent pas se traiter par l'anamorphose simple de Lalanne (cf. § 4.1.4). Massau introduit ici les nouvelles coordonnées :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{1 - \lambda} (1 + \pi), \\ y &= \frac{1}{3} \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} (1 + 2\pi), \end{aligned}$$

ce qui fournit immédiatement les lignes des v :

$$-v^2 + xv + y = 0.$$

Par ailleurs, en éliminant successivement π et λ , il obtient les lignes des λ et celles des π :

$$\begin{aligned} \frac{2x(1 - \lambda)}{\lambda} - \frac{3y(1 - \lambda)}{1 + \lambda} &= 1, \\ -\frac{2x}{1 + \pi} + \frac{3y}{1 + 2\pi} &= 1. \end{aligned}$$

La figure 4.9 montre l'abaque à droites concourantes qui résulte de cette anamorphose (on observera que les lignes des π et des v ont été construites directement, tandis que des échelles projectives auxiliaires ont été utilisées pour améliorer la précision du tracé des lignes des λ).

L'anamorphose généralisée et l'introduction des déterminants dans l'étude des abaques sont incontestablement les deux innovations de Massau

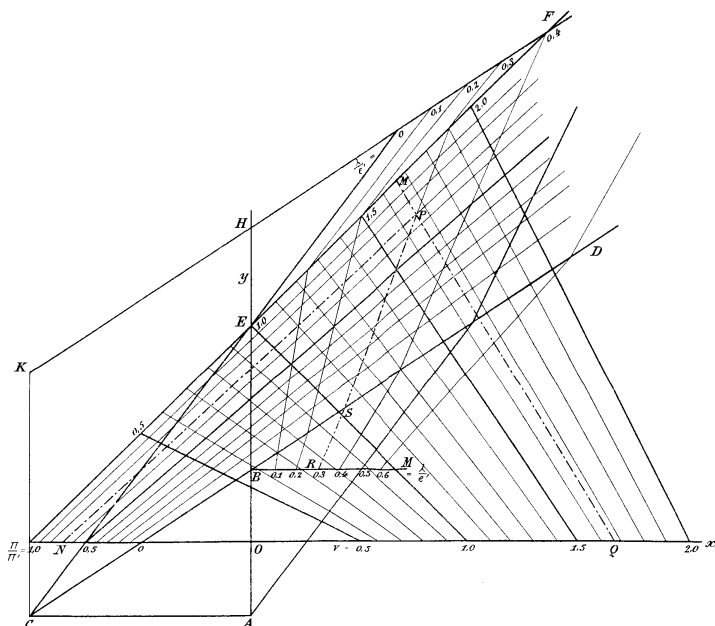


FIGURE 4.9. Abaque de Massau pour les murs de soutènement ([108], pl. 3, fig. 143)

qui sont passées à la postérité. En particulier, les déterminants du type de celui écrit plus haut, appelés « déterminants de Massau », ont joué un rôle important dans l'histoire ultérieure de la nomographie ; on les rencontre dans des travaux de recherche jusqu'à nos jours. Cependant, il serait injuste de réduire à ces deux points les recherches nomographiques de l'ingénieur belge : ses mémoires contiennent bien d'autres résultats et anticipations dont nous parlons ailleurs, que ce soit en rapport avec la résolution graphique des équations algébriques (cf. § 3.7.1), la caractérisation des équations susceptibles d'être représentées par un abaque à droites concourantes (cf. § 4.1.4) ou la représentation graphique des relations à plus de trois variables (cf. § 4.1.6). En fin de compte, si les idées de Massau ont été relativement peu exploitées par ses successeurs immédiats, c'est sans doute parce que ses mémoires, longs et touffus, publiés dans une revue belge peu diffusée, n'ont pas eu autant de lecteurs qu'ils l'auraient mérité.

4.1.4. Théorie des abaques à droites concourantes

Lalanne, plus ingénieur que mathématicien, n'a pas cherché à caractériser les relations à trois variables se prêtant à une représentation par des abaques à droites concourantes. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), par contre, dans

le rapport sur le mémoire de Lalanne qu'il a rédigé en 1843 pour l'Académie des sciences, a soulevé cette question théorique et a commencé à la traiter en décrivant la forme générale des équations auxquelles s'applique directement le procédé de l'anamorphose :

En effet, en supposant X et Y fonctions de x et de y , on pourra généralement réduire à la construction de lignes droites la résolution d'une équation de la forme

$$f(z) = X\varphi(z) + Y\chi(z),$$

$f(z)$, $\varphi(z)$, $\chi(z)$ désignant trois fonctions de la variable z que l'on suppose fonction de x et de y ([15], p. 494).

Restait à savoir quelles sont les relations à trois variables $F(x, y, z) = 0$ susceptibles d'être ramenées à la forme réduite de Cauchy. Le problème est resté longtemps en suspens puisque, dans l'édition française de 1880 du *Traité de statique graphique* de Carl Culmann (1821-1881), on lit encore ([21], p. 76) : « On ne peut donner de règle générale pour transformer $\varphi(x, y, z) = 0$ en $a_z x' + b_z y' + c_z = 0$ » (dans les notations de Culmann, x' représente une fonction de x , y' une fonction de y et a_z , b_z , c_z trois fonctions de z).

Faute de règle générale, une première avancée avait néanmoins été présentée en 1867 devant l'Académie des sciences de Turin [183] par Paul de Saint-Robert (1815-1888), à qui l'on doit un critère pour déterminer si une équation donnée $F(x, y, z) = 0$ peut être transformée en une équation de la forme

$$Z(z) = X(x) + Y(y).$$

Les abaquages correspondant à cette dernière équation, du même type que celui qu'avait construit Lalanne pour la multiplication, sont formés de trois faisceaux de droites parallèles ayant pour directions respectives les axes de coordonnées et la droite d'équation $x + y = 0$. Au départ, l'objectif de Saint-Robert était de fabriquer une règle à calcul, analogue à la règle logarithmique usuelle, pour évaluer rapidement la différence d'altitude en fonction des variations de la pression barométrique et de la température. C'est pour cela qu'il devait se ramener à une relation additive entre trois échelles parallèles convenablement graduées, l'une étant mobile entre les deux autres.

Le critère de Saint-Robert s'énonce ainsi : une équation $F(x, y, z) = 0$ peut être réduite à la forme $Z(z) = X(x) + Y(y)$ si et seulement si

$$\frac{\partial^2(\ln R)}{\partial x \partial y} = 0, \quad \text{où} \quad R = \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = \frac{\partial z / \partial x}{\partial z / \partial y}.$$

Pour obtenir la condition nécessaire, on élimine les fonctions inconnues X , Y et Z grâce à des différentiations successives :

$$R = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{X'}{Y'};$$

$$\frac{\partial^2(\ln R)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\ln X' - \ln Y') = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{X''}{X'} \right) = 0.$$

Réciproquement, lorsque cette condition est satisfaite, la fonction $X(x)$ s'obtient en intégrant deux fois la relation $X''/X' = \partial(\ln R)/\partial x$, puis la fonction $Y(y)$ s'obtient en intégrant la relation $Y' = X'/R$, et enfin la fonction $Z(z)$ provient de l'élimination de x et de y entre les équations $F(x, y, z) = 0$ et $Z(z) = X(x) + Y(y)$.

Pour illustrer la méthode aussi simplement que possible, reprenons le premier exemple de Lalanne, dans lequel $F(x, y, z) = z - xy = 0$. Ici, $R = y/x$, $\ln R = \ln y - \ln x$, $\partial(\ln R)/\partial x = -1/x$, $\partial^2(\ln R)/\partial x \partial y = 0$, donc la condition est satisfaite. Il vient alors successivement $X''/X' = -1/x$, $\ln X' = -\ln x$, $X' = 1/x$ et $X = \ln x$, puis $Y' = (1/x)/(y/x) = 1/y$ et $Y = \ln y$, enfin $Z = \ln x + \ln y = \ln(xy) = \ln z$. On retrouve bien l'équation $\ln z = \ln x + \ln y$.

Un peu plus tard, le problème de l'anamorphose simple est résolu dans toute sa généralité à deux reprises, tout d'abord en 1884 ([107], p. 73) par Mas-sau, puis, indépendamment, en 1886 [95] par l'ingénieur français des mines Léon Lecornu (1854-1940). Tous deux considèrent l'équation de Cauchy sous la forme plus simple³

$$Z_1(z) X(x) + Z_2(z) Y(y) = 1.$$

Par des dérivations successives, ils trouvent chacun une condition nécessaire et suffisante pour que la relation $F(x, y, z) = 0$ puisse se ramener à cette forme. Dans les deux cas, la condition obtenue, assez compliquée, est constituée de deux équations aux dérivées partielles du cinquième ordre. Donnons, par exemple, le résultat de Lecornu. Avec les notations usuelles

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

la condition s'écrit

$$\frac{1}{p} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{q} \frac{\partial w}{\partial y} = u - vw,$$

où les fonctions u , v , w sont définies par

$$u = \frac{1}{pq} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \left(\frac{q}{p} \right), \quad v = \frac{s}{pq}, \quad w = \frac{q \frac{\partial u}{\partial x} - p \frac{\partial u}{\partial y}}{q \frac{\partial v}{\partial x} - p \frac{\partial v}{\partial y}}.$$

Une fois la condition satisfaite, les fonctions X , Y , Z_1 et Z_2 peuvent se déterminer par trois quadratures dans la méthode de Lecornu et par quatre

3. Le cas général $Z_1 X + Z_2 Y = Z_3$ s'y ramène directement par division lorsque $Z_3 \neq 0$. Si $Z_3 = 0$, on a en fait une équation du type $XY = Z$, qui, en prenant les logarithmes, se transforme en $X + Y = Z$, soit encore $Z_1 X + Z_2 Y = 1$, avec $Z_1 = Z_2$. C'est justement ce cas particulier qui est identifié par le critère de Saint-Robert.

quadratures dans la méthode équivalente de Massau. Par la suite, en 1912, Soreau a donné une solution par deux intégrations [193] et Gronwall une solution sans quadrature, mais par des substitutions pénibles ([58], p. 95).

Pour ce qui est de l'anamorphose généralisée introduite par Massau en 1884, tout revient, comme nous l'avons vu dans la section précédente, à déterminer des conditions pour qu'une relation $f(u, v, w) = 0$ puisse se mettre sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} a(u) & b(u) & c(u) \\ a'(v) & b'(v) & c'(v) \\ a''(w) & b''(w) & c''(w) \end{vmatrix} = 0.$$

Il s'agit bien d'une extension du problème puisque la condition de Massau fait intervenir six fonctions indépendantes, alors que celle de Cauchy n'en comportait que quatre. Avec les notations de Massau, les graduations non régulières de Lalanne correspondent seulement au cas particulier où l'on prend $x + c(u) = 0$ et $y + c'(v) = 0$ pour les deux premiers faisceaux, ce qui redonne effectivement la condition de Cauchy :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & c(u) \\ 0 & 1 & c'(v) \\ a''(w) & b''(w) & c''(w) \end{vmatrix} = c''(w) - a''(w)c(u) - b''(w)c'(v) = 0.$$

L'étude théorique de l'anamorphose généralisée a été faite ultérieurement dans le contexte dual des nomogrammes à points alignés, notamment par Duporcq en 1898 et par Gronwall en 1912 (cf. § 4.2.2). Toutefois, à défaut d'obtenir d'emblée un critère général, Massau étudie en détail deux cas particuliers d'équations pouvant se mettre sous la forme d'un déterminant. En premier lieu, il s'intéresse au cas où les trois systèmes de droites sont, dans son vocabulaire, « du premier degré », c'est-à-dire où les fonctions $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ sont des polynômes du premier degré. Le déterminant, une fois développé, prend alors la forme

$$D + Au + Bv + Cw + A'vw + B'wu + C'uv + Euvw = 0.$$

Réciproquement, Massau étudie à quelle condition une telle relation peut être représentée par trois systèmes de droites du premier degré. Le problème est traité successivement en coordonnées cartésiennes et en coordonnées trilineaires, ces dernières étant mieux adaptées à l'homogénéité du problème. Massau aborde ensuite le cas analogue où les trois systèmes de droites sont du second degré, ce qui conduit à une équation du sixième degré en u, v, w, u^2, v^2 et w^2 , mais il se contente cette fois, face à la complexité des calculs, de résoudre le problème dans deux situations particulières. Ces questions ont été reprises et traitées plus complètement à partir de 1893, essentiellement par d'Ocagne et Soreau, là encore dans le contexte dual des nomogrammes à points alignés (cf. § 4.2.3).

De façon générale, après Massau, la théorie des abaques cartésiens n'a quasiment plus été abordée en tant que telle : les nouveaux résultats la concernant ont été simplement des traductions automatiques, par dualité, de résultats de la théorie des nomogrammes à points alignés, un nouveau type d'abaques qui a été introduit par d'Ocagne en 1884, l'année même de la publication du mémoire de Massau, et dont nous étudierons plus loin le développement historique.

4.1.5. Les abaques hexagonaux de Lallemand

Juste avant l'entrée en scène des nomogrammes à points alignés, une variante des abaques cartésiens a été imaginée par Charles Lallemand (1857-1938), ingénieur du corps des mines. Il s'agit des « abaques hexagonaux », qui ont incontestablement prolongé l'intérêt pour les abaques à droites concourantes et ont eu l'ambition d'apparaître, dans une certaine mesure, comme des concurrents crédibles des abaques d'alignement de d'Ocagne.

Nous sommes à l'époque où s'élabore en France un large programme de travaux publics. Son exécution exige une connaissance plus précise du relief du sol, d'où la décision d'entreprendre ce que les géodésiens appellent le nivellement d'ensemble du pays : complémentaire de la triangulation qui fixe la position des points du sol en projection horizontale, le nivellement a pour objet d'en déterminer les altitudes. À partir de 1880, Lallemand fut chargé de créer un Service du nivellement général de la France, qui vit officiellement le jour en 1884. Il en conserva la direction pendant quarante-quatre ans, jusqu'à sa retraite en 1928. C'est dans ce contexte que Lallemand imagina les abaques hexagonaux, conçus comme un procédé graphique permettant d'automatiser les calculs, longs et fastidieux, nécessaires à l'exploitation des innombrables mesures faites sur le terrain. Les efforts de Lallemand permirent de tripler la précision des résultats antérieurs, tout en réduisant sensiblement les prix de revient. Le Service du nivellement ne tarda pas à jouir d'un prestige incontesté à l'étranger, où il servit de modèle à la création d'organismes analogues.

Les abaques hexagonaux ont été concrètement mis en œuvre dès 1883 pour le calcul des corrections des opérations de nivellement. Deux ans plus tard, Lallemand rédigea, à l'usage interne de son service, un mémoire de synthèse très fouillé sur la question, intitulé *Les abaques hexagonaux. Nouvelle méthode générale de calcul graphique, avec de nombreux exemples d'application, notamment au calcul des profils en travers dans les projets de chemins de fer, de canaux, de routes, etc., à la poussée des terres, au calcul des intérêts composés, à plusieurs problèmes usuels de géométrie, au calcul des erreurs dans le nivellement, etc.* [90]. Enfin, la nouvelle méthode fut annoncée publiquement en 1886 dans une communication à l'Académie des sciences [91].

Au début de son mémoire, après avoir rendu hommage à Lalanne pour sa géométrie anamorphique, Lallemand note que les abaques à lignes concourantes sont longs et pénibles à construire, même lorsqu'on s'est ramené à des droites parallèles; de plus, l'entrecroisement des lignes fatigue les yeux et l'esprit, causant à la longue des erreurs ([90], p. 4). Une première idée simplificatrice de notre ingénieur consiste à remarquer que, si l'on considère un abaque à trois faisceaux de droites parallèles (cf. figure 4.10), il suffit, pour repérer ces droites, de couper chaque faisceau par une droite quelconque et de marquer la cote de chaque isoplèthe à côté de son point d'intersection avec la transversale correspondante. On peut alors effacer les trois faisceaux de droites en ne conservant que les trois transversales graduées, appelées des « échelles linéaires ». Pour relier entre elles ces échelles, on se sert d'un transparent, appelé « indicateur », sur lequel sont tracés trois axes respectivement parallèles aux directions des faisceaux effacés. Il suffit alors de déplacer ce transparent sur l'abaque parallèlement à lui-même pour qu'il puisse remplacer les isoplèthes. L'utilisateur, au lieu de se perdre dans les nombreuses lignes d'un abaque à entrecroisement, peut ainsi se concentrer sur les seules droites utiles à son calcul, la mobilité du transparent facilitant en outre grandement les interpolations.

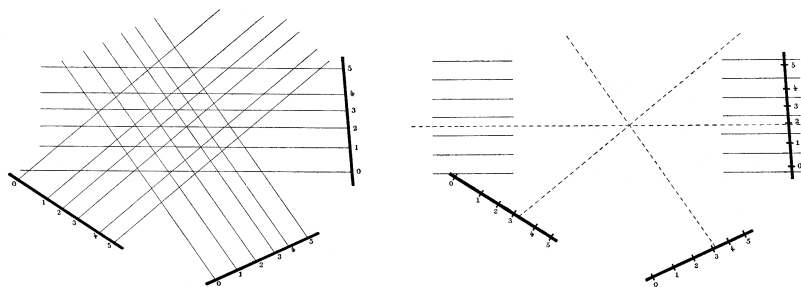


FIGURE 4.10. Échelles linéaires et indicateur ([123], p. 31)

Cette première avancée, de portée très générale, est déjà intéressante en soi, puisqu'il s'agit d'un véritable processus de compression de données permettant de gagner beaucoup de place sur la feuille de papier. Cependant, l'inconvénient résiduel d'un tel abaque est qu'il faut utiliser *a priori* des unités différentes, convenablement liées entre elles, pour la construction des trois échelles linéaires. C'est là qu'intervient la seconde idée simplificatrice de Lallemand, contenue dans un « théorème fondamental » qu'il énonce ainsi (cf. figure 4.11) :

La somme des projections d'un segment de droite sur deux axes faisant entre eux un angle de 120° , est égale en grandeur et en signe, à la projec-

tion du même segment sur la bissectrice intérieure de l'angle de ces axes ([90], p. 9).

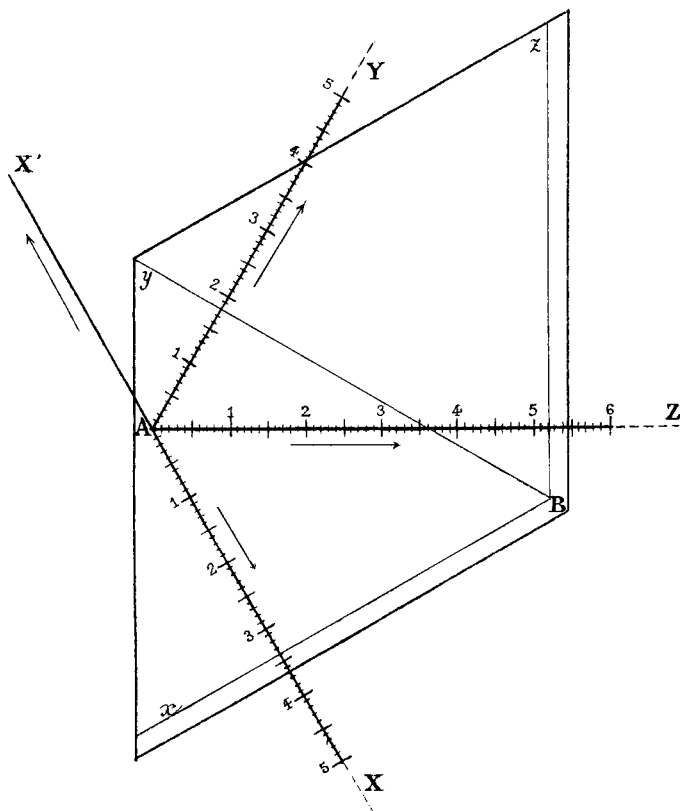


FIGURE 4.11. Principe de l'addition graphique ([90], p. 16)

La preuve de ce résultat est élémentaire : si l'on désigne par α l'angle orienté que fait le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec la bissectrice intérieure AZ des axes AX et AY inclinés à 120° , tout revient à constater l'égalité

$$\cos(\alpha + 60^\circ) + \cos(\alpha - 60^\circ) = 2 \cos \alpha \cos 60^\circ = \cos \alpha.$$

L'application aux abaques de son théorème fondamental est qualifiée par Lallemand de « règle de l'addition graphique » : si l'on emploie la même unité (un centimètre par exemple, comme sur la figure 4.11) pour graduer régulièrement les échelles linéaires AX , AY et AZ , et si les axes de l'indicateur sont placés perpendiculairement aux trois échelles, ils vont intercepter ces

dernières en des points dont les abscisses vérifient la relation $x + y = z$ (sur la figure : $3,4 + 1,8 = 5,2$). Étant donné que les échelles d'une part, les axes de l'indicateur d'autre part, sont parallèles aux diagonales d'un hexagone régulier, les abaques exploitant la règle de l'addition graphique sont appelés « abaques hexagonaux ». En combinant les idées précédentes avec l'anamorphose géométrique de Lalanne, on peut, toujours avec la même unité sur les axes AX , AY et AZ , construire des échelles non régulières à partir des relations $x = f(u)$, $y = g(v)$ et $z = h(w)$, et représenter ainsi par un abaque hexagonal toute équation à trois variables de la forme $f(u) + g(v) = h(w)$.

De par leur conception même, les abaques hexagonaux présentent cet autre avantage que les échelles peuvent être déplacées perpendiculairement à elles-mêmes, voire fractionnées, de sorte qu'elles tiennent tout entières dans un espace restreint. L'abaque construit par Lallemand pour la multiplication et la division (cf. figure 4.12) illustre bien cette possibilité : les échelles des x et des y , graduées logarithmiquement, ont été découpées chacune en deux parties A et B ; trois échelles des z (AA, BB et AB), graduées elles-mêmes logarithmiquement, sont disponibles selon que l'on accouple deux points des échelles A, deux points des échelles B, ou un point d'une échelle A et un point d'une échelle B.

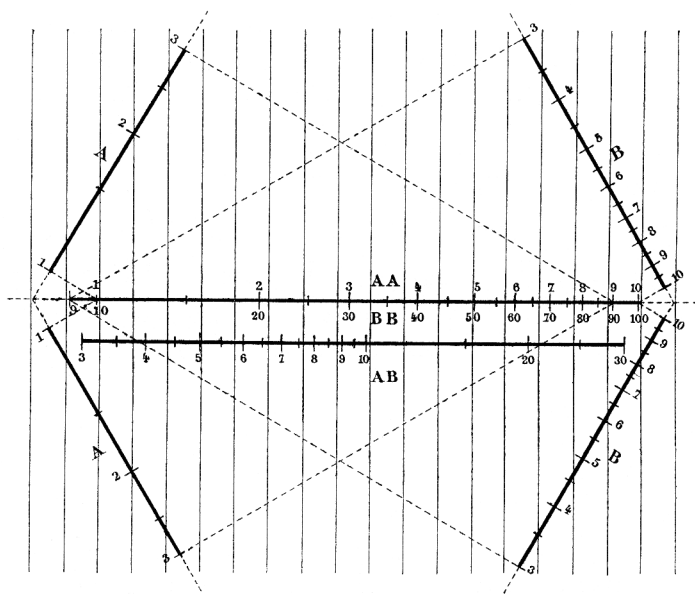


FIGURE 4.12. Abaque hexagonal de multiplication et de division ([90], p. 34)

En outre, le gain de place inhérent aux abaques hexagonaux permet de rassembler facilement plusieurs tables graphiques sur la même feuille de papier. Par exemple, l'abaque de la figure 4.13, utilisé dans le Service du nivellement, est constitué par la superposition de quatre abaques indépendants ayant une ou plusieurs échelles communes. Si l'on avait opté pour un abaque classique à entrecroisement, la superposition des faisceaux de droites correspondant aux mêmes équations aurait conduit à une épure totalement illisible.

4.1.6. Représentation par lignes concourantes des équations à plus de trois variables

Grâce aux abaques hexagonaux, Lallemand parvient à faire progresser de façon significative le problème de la représentation des lois à quatre variables ou plus. Auparavant, cette question était restée balbutiante.

Dans son mémoire de 1846, tout en restant dans le cas des lois à trois variables, Lalanne avait pensé à introduire des variables supplémentaires pour traiter des équations qui ne sont pas anamorphosables en lignes droites ([83], p. 33-34). Par exemple, pour la relation

$$z = \frac{ax^2}{x + y},$$

il pose $y' = x + y$ et $x' = ax^2$, ce qui conduit à une représentation graphique de l'équation donnée sous la forme de deux tables graphiques à droites concourantes traduisant respectivement les équations $y' = x + y$ et $x' = zy'$, ces tables étant reliées entre elles par l'échelle commune des y' . En 1884, sans entrer véritablement dans le détail, Massau énonce une généralisation de ce procédé d'élimination graphique : « Si une équation entre un nombre quelconque de variables est susceptible d'être considérée comme le résultat de l'élimination de certaines variables auxiliaires entre plusieurs équations à trois variables, il est possible de remplacer la relation par un certain nombre de tableaux graphiques » ([107], p. 81). Autrement dit, une équation peut être représentée par la technique des abaques à lignes concourantes lorsqu'elle est dissociable en un enchaînement d'équations à trois variables, chaque équation étant reliée à une autre par une variable commune (la figure 4.14 suggère une telle ramification pour la construction d'un abaque à 12 variables). Plutôt que de disposer les différents abaques partiels à trois variables sur la même feuille de papier, ce qui n'est pas toujours très commode, Massau lance aussi l'idée qu'on pourrait employer des feuilles transparentes mobiles, les liaisons entre abaques partiels se faisant alors par déplacement des feuilles les unes sur les autres ([107], p. 80).

L'ingénieur belge n'a pas développé plus avant et n'a jamais mis en pratique ces extensions entrevues du champ d'application des abaques à

ABAQUE

Pl. II

donnant, pour une opération de nivellement :

- 1° La longueur moyenne d'une nivelée.
- 2° La durée moyenne d°
- 3° L'erreur probable d°
- 4° L'erreur probable kilométrique .

Légende .

- L _ Longueur nivelée (en kilomètres)
 N _ Nombre de nivelées.
 T _ Durée totale du travail
 P _ Somme des carrés des discordances,
 pour chaque nivelée, entre l'opération
 aller et l'opération retour.
 l _ Longueur moyenne d'une nivelée
 t _ Durée d° d°
 ε _ Erreur probable d°
 h _ d° kilométrique

Formules

- I . . $l = \frac{T}{N} \times 1000$
 II . . $t = \frac{T}{N}$
 III . . $\varepsilon = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{P}{N}}$
 IV . . $h = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{P}{N}}$

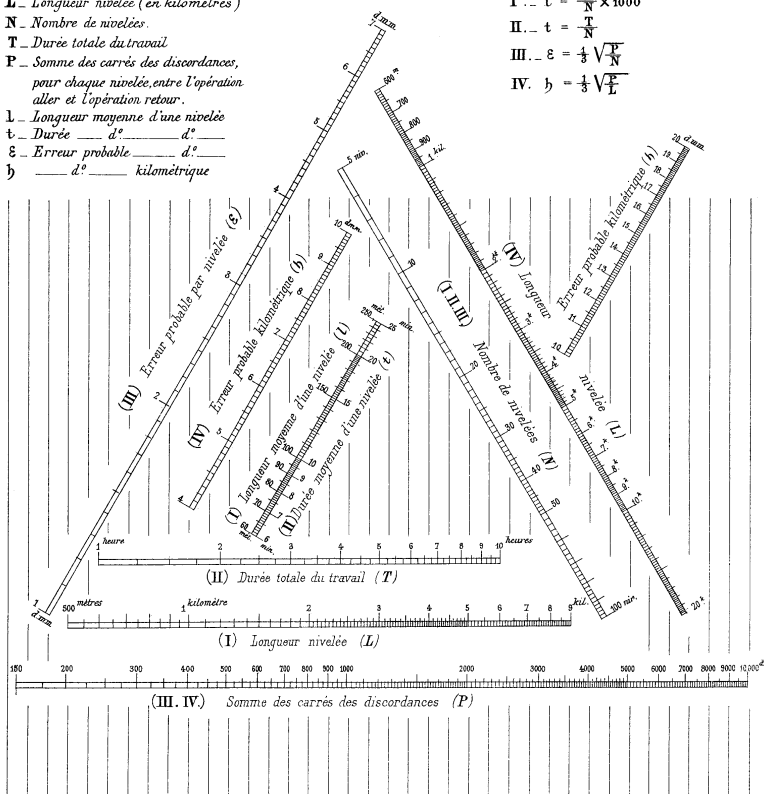
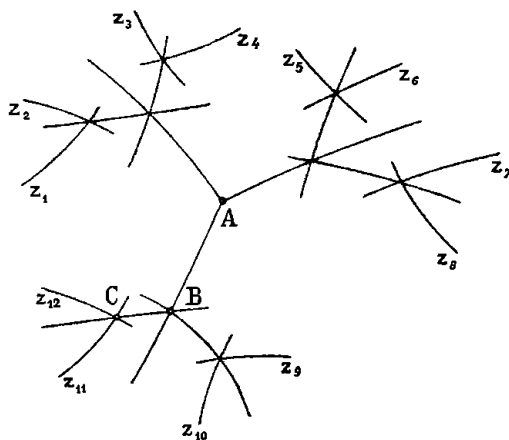


FIGURE 4.13. Abaque pour le nivellement ([90], pl. II)

entrecroisement. Par contre, au même moment et de façon indépendante, Lallemand approfondit de diverses manières sa méthode des abaques hexagonaux afin de représenter graphiquement des lois à un nombre quelconque de variables. Cela commence par une généralisation de la règle de l'addition graphique : supposons tracés les six rayons d'un hexagone régulier, numérotés

FIGURE 4.14. Schéma d'un abaque cartésien à 12 variables ([151], 3^e éd., p. 207)

de 1 à 6 en tournant dans le sens trigonométrique et gradués régulièrement avec la même unité; marquons un nombre a sur l'échelle 1, puis un nombre b sur l'échelle 3, un nombre c sur l'échelle 4, un nombre d sur l'échelle 5, etc. Une première utilisation de l'indicateur avec les rayons 1 et 3, inclinés à 120° , fait apparaître le nombre $a + b$ sur l'échelle 2; une deuxième utilisation de l'indicateur avec les échelles 2 et 4 fournit le nombre $a + b + c$ sur l'échelle 3; une troisième utilisation de l'indicateur avec les échelles 3 et 5 fournit le nombre $a + b + c + d$ sur l'échelle 4, etc. Quitte à faire plusieurs tours, on parvient ainsi à calculer une somme d'un nombre quelconque de termes. Pour faciliter la manipulation, on donne à l'indicateur transparent mobile la forme d'un hexagone régulier, avec ses trois diamètres, dont on fait glisser successivement chaque côté le long d'une règle. En utilisant des échelles non régulières, en juxtaposant éventuellement plusieurs échelles sur chaque rayon de l'hexagone, il devient donc envisageable de réaliser un abaque pour n'importe quelle relation de la forme

$$f(x) + \varphi(y) + \psi(z) + \chi(t) + \dots = 0.$$

Une autre extension consiste à associer à chaque axe, non plus des échelles linéaires, mais des échelles binaires ou « échelles diagraphiques », c'est-à-dire des diagrammes à deux cours d'isoplèthes représentant des fonctions de deux variables. Avec les notations de la figure 4.15, si l'on accole aux axes les échelles $x = f(\alpha_1, \alpha'_1)$, $y = \varphi(\alpha_2, \alpha'_2)$ et $t = \psi(\alpha_3, \alpha'_3)$, on obtient un abaque de l'équation à six variables

$$f(\alpha_1, \alpha'_1) + \varphi(\alpha_2, \alpha'_2) = \psi(\alpha_3, \alpha'_3).$$

Pour calculer par exemple α'_3 , on fait passer l'index I_1 du transparent par le point d'intersection des isoplèthes cotées par α_1 et α'_1 , et l'index I_2 par le point d'intersection des isoplèthes cotées par α_2 et α'_2 ; le troisième index coupe alors la courbe cotée par α_3 en un point, et la valeur cherchée de α'_3 est la cote de la courbe du second faisceau passant par ce point.

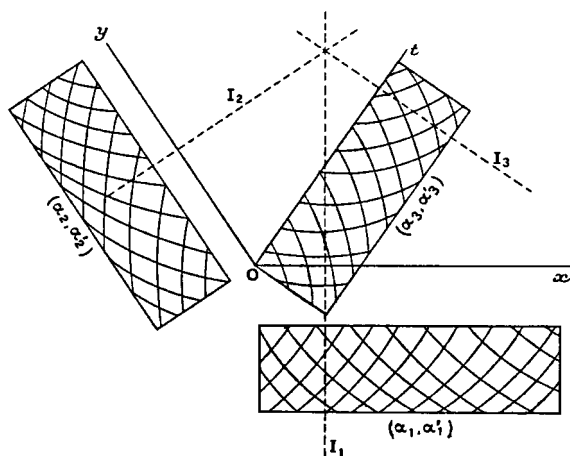


FIGURE 4.15. Abaque hexagonal à échelles diagraphiques ([133], p. 222)

En combinant ensuite les échelles diagraphiques avec l'addition graphique, Lallemand parvient à construire des abaques pour toute équation à variables séparées par groupe de deux :

$$f(x,y) + \varphi(p,q) + \psi(u,v) + \chi(z,t) + \dots = 0.$$

Pour terminer, il envisage la possibilité d'une multiplication graphique de deux quantités $f_1(x_1, y_1)$ et $f_2(x_2, y_2)$ en accolant les deux échelles diagraphiques correspondantes aux axes d'un abaque radial de multiplication formé des droites $x = \alpha$ et $y = x \beta$. Tout comme l'addition graphique, la multiplication graphique peut être itérée. Au final, les abaques hexagonaux permettent de représenter une équation à un nombre quelconque de variables, pourvu que ces variables soient séparées, par groupes de deux au plus, dans une somme de produits de fonctions, telle que

$$\sum f_1(x_1, y_1) f_2(x_2, y_2) f_3(x_3, y_3) \dots = 0.$$

Il est bien entendu possible de combiner sur un même abaque des échelles linéaires et des échelles diagraphiques, de remplacer deux échelles linéaires associées à des variables indépendantes par une seule échelle diagraphique,

de remplacer inversement une échelle diagraphique par une échelle linéaire mobile qui est graduée suivant les valeurs de l'une des variables et dont la position dépend de la valeur de la seconde variable, d'éliminer graphiquement une variable auxiliaire entre deux équations pour obtenir directement les échelles linéaires ou diagraphiques nécessaires. Au passage, Lallemand rend hommage à deux de ses collaborateurs du Service du nivellement, MM. Prévot et Renard, à qui il doit respectivement l'idée des échelles diagraphiques et celle de l'élimination graphique.

De nombreux exemples mettant en œuvre les diverses techniques évoquées ci-dessus se trouvent dans le mémoire de 1885, dans l'ouvrage *Nivellement de haute précision* [92], paru en 1889, ainsi que dans le traité *Lever des plans et nivellement* [35], auquel Lallemand contribua et qui fut publié lui aussi en 1889 sous la direction de Charles-Léon Durand-Claye (1830-1906), ingénieur en chef des ponts et chaussées. Dans ce dernier ouvrage, on découvre, parmi d'autres procédés graphiques, divers abaques hexagonaux effectivement utilisés sur le terrain : corrections de latitude et d'altitude pour une différence donnée de niveau, erreur de réfraction dans le nivellement géométrique, et même calcul de la prime d'intéressement des porte-mires en fonction du nombre de jours travaillés, de la longueur totale nivelée et du nombre de nivelées. Il y a aussi des abaques pour corriger les erreurs de division des mires, qui ne sont pas hexagonaux, mais qui sont ici particulièrement intéressants, puisqu'il s'agit de deux exemples d'abaques à éléments mobiles : le premier est composé de deux échelles binaires fixes juxtaposées, la liaison étant effectuée par un indicateur mobile transparent portant un réseau de droites parallèles et glissant le long d'une règle guide ; le second comprend deux échelles linéaires mobiles par rotation – les feuilles transparentes portant ces échelles sont punaisées sur la table à dessin –, reliées entre elles par le même indicateur mobile que précédemment ([35], p. 487-505). Pour souligner le gain de temps et d'argent dû aux tables graphiques, Lallemand nous informe notamment que ces abaques « permettent, après quelques heures seulement d'exercice, de corriger en 25 à 30 minutes les 60 ou 70 nivelées qui constituent en moyenne, pour une brigade, le travail d'une journée d'opérations sur le terrain » ([35], p. 488).

En dehors de son domaine professionnel au sens strict, l'une des plus belles réalisations de Lallemand, saluée par tous les commentateurs, est indiscutablement l'« abaque hexagonal donnant sans calcul et sans relèvements la déviation du compas, pour le bateau "Le Triomphe" » (cf. figure 4.16).

La déviation du compas d'un navire, variable avec la position de celui-ci à la surface du globe, est donnée par la formule

$$\delta = A + B \sin \zeta' + C \cos \zeta' + D \sin 2\zeta' + E \cos 2\zeta',$$

Abaque hexagonal donnant sans calcul et sans relevements la déviation du compas, pour le bateau « Le Triomphe »

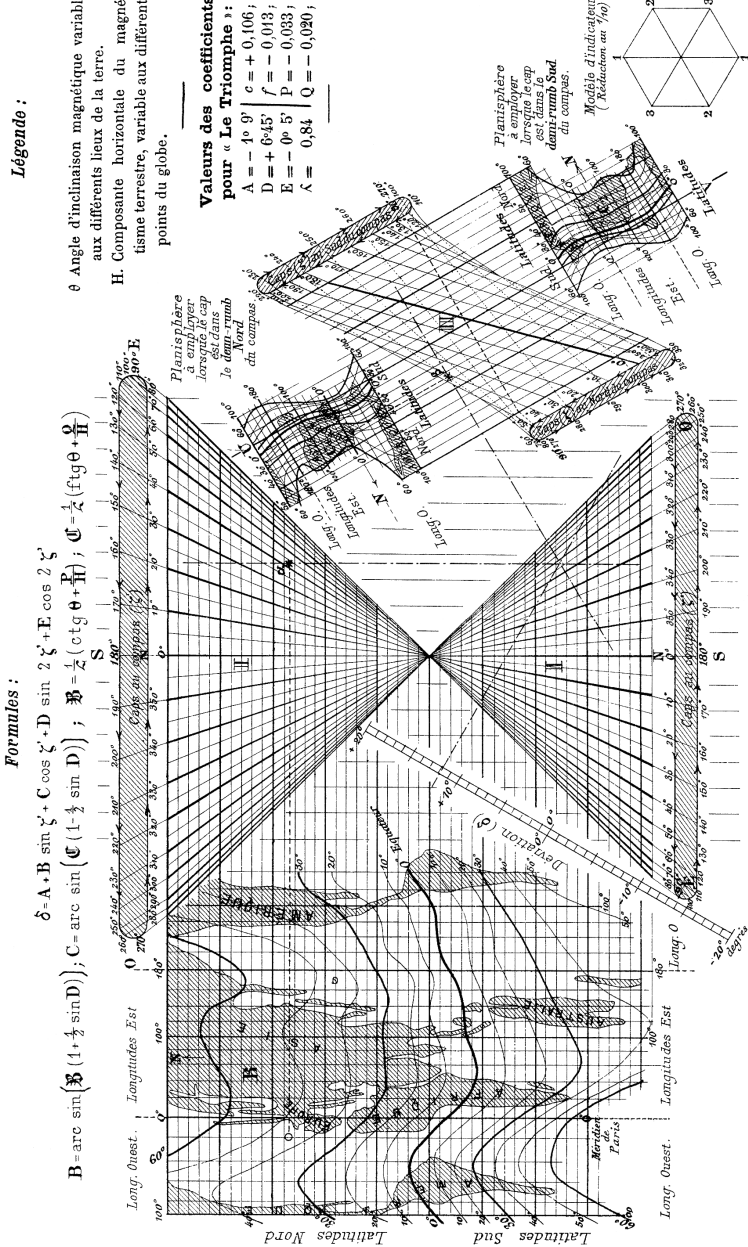


FIGURE 4.16. Abaque de la déviation du compas ([90], pl. h. t.)

$$\begin{aligned} \text{avec } B &= \arcsin \left[\frac{1}{\lambda} \left(c \operatorname{tg} \theta + \frac{P}{H} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin D \right) \right] \\ \text{et } C &= \arcsin \left[\frac{1}{\lambda} \left(f \operatorname{tg} \theta + \frac{Q}{H} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \sin D \right) \right], \end{aligned}$$

où A, D, E, λ , c , f , P et Q sont des constantes particulières au navire. La déviation δ dépend donc de trois variables qui sont le cap ζ' du compas, l'inclinaison magnétique θ et la composante magnétique horizontale H du lieu. Lallemand organise le calcul en posant $\delta = \delta' + \delta''$, avec $\delta' = B \sin \zeta'$ et $\delta'' = C \cos \zeta' + D \sin 2\zeta' + E \cos 2\zeta' + A$. Les quantités B et C sont des fonctions de θ et de H, deux données qui ne dépendent que de la latitude l et de la longitude L du lieu : en pratique, θ et H sont connues par l'intermédiaire des courbes isomagnétiques du globe tracées à partir de nombreuses observations. On va donc, en fait, exprimer graphiquement B et C comme fonctions de la latitude et de la longitude. Sur le planisphère anamorphosé situé à gauche de la figure, on a construit par points les courbes de niveau de l en fonction de L et de B ; une échelle diagraphique, sur laquelle la valeur de B est reportée grâce à une droite horizontale, permet alors d'obtenir la valeur de δ' en fonction de B et de ζ' . De même, sur le planisphère (découpé en deux parties) situé à droite de la figure, on a construit par points les courbes de niveau de l en fonction de L et de C ; associée à ce planisphère, une seconde échelle diagraphique fournit la valeur de δ'' en fonction de C et de ζ' . Enfin, l'indicateur de l'abaque hexagonal central permet de réaliser l'addition graphique de δ' et de δ'' pour obtenir la déviation δ sur une simple échelle linéaire régulièrement graduée. En fin de compte, nous avons affaire ici à un échantillon représentatif de l'ensemble des techniques graphiques développées par Lallemand : il s'agit, en effet, d'un abaque hexagonal composé d'une échelle linéaire et de deux échelles diagraphiques, avec élimination graphique de variables auxiliaires grâce à deux abaques complémentaires à entrecroisement.

Après ces travaux novateurs de Massau et Lallemand sur la représentation graphique des relations à quatre variables ou plus, les mêmes idées ont été mises en application à plusieurs reprises par d'autres ingénieurs dans la dernière décennie du XIX^e siècle, sans qu'on sache d'ailleurs s'il y a eu filiation ou redécouverte : on peut citer notamment les abaques de Louis-Eugène-Napoléon Favé (1853-1922) et Maurice Rollet de l'Isle (1859-1943) pour la détermination du point à la mer ([43], [44]), ceux d'Alphonse-Marius Chancel pour traduire la formule de jauge des yachts [16] et ceux de Marcelin Duplaix pour le calcul des efforts tranchants et des moments de flexion développés dans les poutres à une travée sur les ponts métalliques ([31], [32]). Par ailleurs, Wladimir Margoulis (né en 1886), un scientifique russe qui a travaillé à Paris dans le laboratoire aérodynamique Eiffel avant de devenir, entre 1926

et 1931, directeur du laboratoire de recherche balistique de l'armée russe, s'est intéressé aux abaques à éléments mobiles de Lallemand au point d'entreprendre une étude théorique complète de la question : après quelques publications préliminaires ([104], [105]), il a soutenu en 1931 une thèse à l'université de Paris, intitulée *Les abaques à transparent orienté ou tournant. Théorie générale de la représentation plane des équations. Applications à l'art de l'ingénieur* [106]. En 1933, il a reçu le prix de la fondation Gegner pour ses travaux en nomographie et ses applications à l'aérodynamique et l'aviation.

4.2. Nomogrammes à points alignés

Les publications de Massau et Lallemand des années 1884-1886 avaient fait entrer les abaques à lignes concourantes dans une phase de maturité : les bases de la théorie étaient posées et, même si certains problèmes n'étaient pas complètement résolus, on disposait d'un ensemble de procédés techniques opérationnels permettant, en principe, de faire face à tous les cas courants qui pouvaient se présenter dans la pratique. Pourtant, comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, c'est au moment même où cette théorie semblait promise à un brillant avenir dans la forme stabilisée qu'elle avait atteinte, qu'un nouveau personnage est entré en scène pour transformer en profondeur le domaine des tables graphiques et lui donner une direction entièrement nouvelle.

4.2.1. Les nomogrammes à points alignés de d'Ocagne

Philibert Maurice d'Ocagne (1862-1938), entré à l'École polytechnique en 1880, en sort dans le corps des ponts et chaussées, dans lequel se déroule ensuite toute sa carrière : d'abord détaché dans les services hydrauliques de la Marine, il est notamment appelé, de 1891 à 1901, comme adjoint de Lallemand au Service du nivellement (cf. § 4.1.5); promu inspecteur général en 1920, il prend sa retraite en 1927. Parallèlement, il enseigne sans relâche pendant 45 ans : recruté comme répétiteur d'astronomie et de géodésie à l'École polytechnique en 1893, il y devient professeur de géométrie en 1912; il est également, à partir de 1894, professeur à l'École des ponts et chaussées et, à partir de 1907, chargé d'un cours libre de calcul graphique et nomographie à la Sorbonne. En lien étroit avec cette double activité d'ingénieur et d'enseignant, d'Ocagne a poursuivi toute sa vie une activité soutenue de recherche qui s'est traduite par une production scientifique considérable : la bibliographie de ses principaux travaux mathématiques et de ses publications sur l'histoire des sciences, élaborée par lui-même en 1935 [165], rassemble déjà une vingtaine de livres et 240 articles publiés dans 45 revues; la base de données *Zentralblatt MATH* recense, quant à elle, environ 400 de ses publi-

cations. Il convient cependant de relativiser l'apparente abondance de cette production en soulignant son caractère fortement redondant : d'Ocagne avait coutume de publier plusieurs fois les mêmes résultats en divers endroits, avec seulement de légères variantes dans les titres et les contenus ; par ailleurs, il reprenait et remaniait régulièrement ses travaux antérieurs dans de nouveaux articles ou ouvrages de synthèse. Au sein de cette œuvre foisonnante qui aborde de nombreux thèmes, c'est essentiellement la partie concernant les abaqes, rebaptisés nomogrammes, qui a valu la célébrité à d'Ocagne en le faisant apparaître comme le fondateur d'une nouvelle discipline, la nomographie (cf. § 4.3). Dans ce seul domaine, ses publications dépassent la centaine et c'est à ce titre que l'Académie des sciences lui a décerné plusieurs distinctions – le prix Leconte en 1892, le prix Dalmont en 1894, le prix Poncelet en 1902 – avant de l'élire en son sein en 1922. C'est encore en raison de sa réputation de calculateur graphique qu'on lui confia pendant la guerre, en 1916, alors qu'il était mobilisé comme lieutenant-colonel, la direction d'un bureau d'études pour construire des nomogrammes au service de l'artillerie et de l'aviation.

Le premier apport de d'Ocagne à la science des abaqes eut lieu en 1884, alors qu'il était âgé de seulement 22 ans. Exploitant au mieux les acquis de la géométrie projective, il définit alors deux nouveaux systèmes de coordonnées tangentielles dans le plan, qu'il appelle respectivement « coordonnées parallèles et axiales » [119], et se sert du premier de ces systèmes pour élaborer un « procédé nouveau de calcul graphique » [120], grâce auquel il transforme et simplifie grandement l'abaque de Lalanne pour l'équation du troisième degré⁴. Dépassant ensuite ce cas particulier, il parvient à donner au nouveau procédé une portée très générale en 1890 [122], ce qui le conduit à la publication, l'année suivante, d'un traité de synthèse intitulé *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaqes* [123]. Dans ce texte fondateur, destiné à insérer de manière cohérente les travaux personnels de d'Ocagne dans l'ensemble des connaissances antérieures sur les abaqes, apparaît pour la première fois le terme de « nomographie », choisi pour qualifier le nouveau corpus de connaissances ainsi rassemblé (cf. § 4.3).

Pour introduire son procédé, d'Ocagne part du constat que la plupart des équations rencontrées dans la pratique sont représentables par un abaque à trois systèmes de droites – dans son vocabulaire, il dit que ce sont des « équations à triple réglure quelconque » – et que trois de ces isoplèthes, prises l'une dans chaque système, se correspondent lorsqu'elles se coupent en un même point. L'idée fondamentale est alors de construire par dualité, en substituant l'usage de coordonnées tangentielles à celui de coordonnées ponctuelles,

4. Les coordonnées parallèles et leur application à la résolution graphique des équations algébriques ont été présentées en détail dans le chapitre précédent : cf. § 3.7.2.

une figure corrélative de la précédente : chaque droite de l'abaque initial sera transformée en un point, et trois droites concourantes seront transformées en trois points alignés. Les trois systèmes de droites cotées deviendront trois courbes cotées, formant ce que d'Ocagne appelle un « abaque à points isoplèthes » (cf. figure 4.17). Pour résoudre une équation $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ représentée par un tel abaque, le mode d'emploi est particulièrement simple : si, par exemple, ce sont les valeurs de α_1 et α_2 qui sont données, on trace une droite passant par les points cotés α_1 et α_2 sur les deux premières courbes, et cette droite rencontre la troisième courbe en un point dont la cote est la valeur cherchée de α_3 . Dans la pratique, pour ne pas abîmer l'abaque, on ne trace pas réellement la droite auxiliaire sur le papier : on se sert, soit d'un transparent marqué d'un trait fin rectiligne, soit d'un fil mince que l'on tend entre les points à joindre.

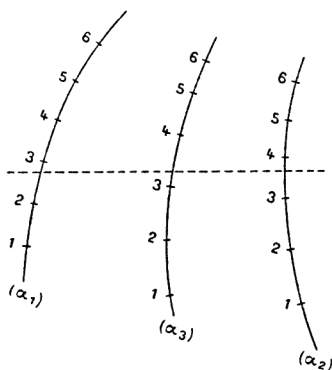


FIGURE 4.17. Abaque à points isoplèthes ([133], p. 217)

Les avantages des abaques à points alignés sont indéniables : simplicité de construction, suppression des erreurs de lecture anciennement dues à la nécessité de suivre les lignes pour aller lire leurs cotes, plus grande précision des interpolations à vue. Par ailleurs, l'alignement étant conservé par homographie, on peut transformer facilement une table graphique de ce type pour que ses courbes soient disposées au mieux sur la feuille de papier. Enfin, tout comme les abaques hexagonaux de Lallemand, la méthode des points isoplèthes permet de remplacer trois systèmes de droites par trois échelles linéaires, mais le procédé de d'Ocagne couvre le cas général de trois faisceaux de droites quelconques, alors que celui de Lallemand ne concernait que trois faisceaux de droites parallèles. L'emploi d'échelles linéaires, de même que c'était le cas chez Lallemand, est perçu par d'Ocagne comme un véritable processus de compression de données qui, de par la place libérée sur la feuille

de papier, ouvre la porte à de nombreuses possibilités : fractionnement des échelles, superposition de plusieurs abaques, représentation de relations à un grand nombre de variables grâce aux techniques déjà évoquées d'élimination graphique, de dédoublement des échelles linéaires en échelles binaires et d'adjonction d'éléments mobiles.

Contentons-nous de donner deux exemples pour illustrer ces possibilités. Le premier exemple (cf. figure 4.18) est un abaque pour la multiplication, transformé de celui de Lalanne, avec cette seule différence qu'il a été décomposé en trois parties afin d'occuper une place réduite : les échelles (I) permettent de faire le produit de deux nombres compris entre 1 et 3 ; les échelles (II) celui de deux nombres entre 3 et 10 ; les échelles (III) celui d'un nombre entre 1 et 3 par un nombre entre 3 et 10.

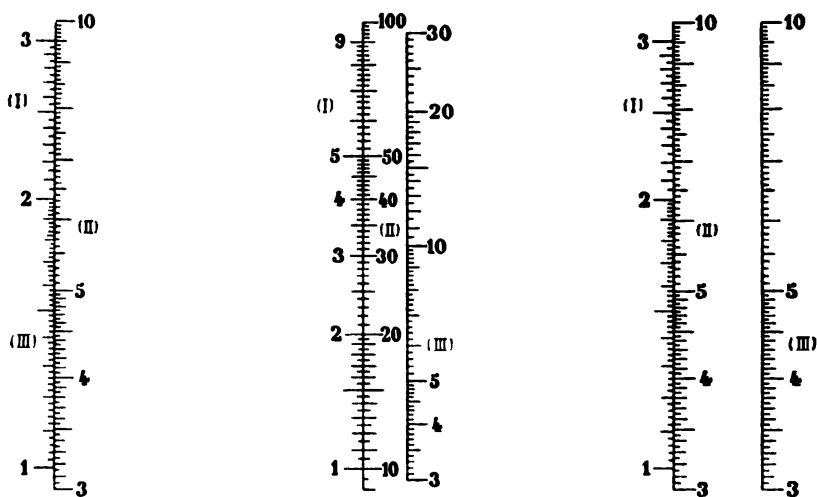


FIGURE 4.18. Abaque à points alignés pour la multiplication ([136], p. 152)

Le second exemple (cf. figure 4.19), dû au commandant du génie Léopold Bertrand, est un abaque destiné à traiter les problèmes relatifs à la distribution des eaux [7], qui illustre bien comment composer les échelles par groupe de trois pour représenter un ensemble de relations entre douze quantités.

Après la publication de sa brochure de 1891, d'Ocagne approfondit la théorie et les applications de la méthode des points isoplèthes jusqu'à la publication d'un traité beaucoup plus imposant en 1899, le fameux *Traité de nomographie. Théorie des abaques. Applications pratiques* [136], qui devient pour longtemps l'ouvrage de référence de la nouvelle discipline. Dans ce traité, d'Ocagne emploie encore le terme consacré d'« abaque » pour dési-

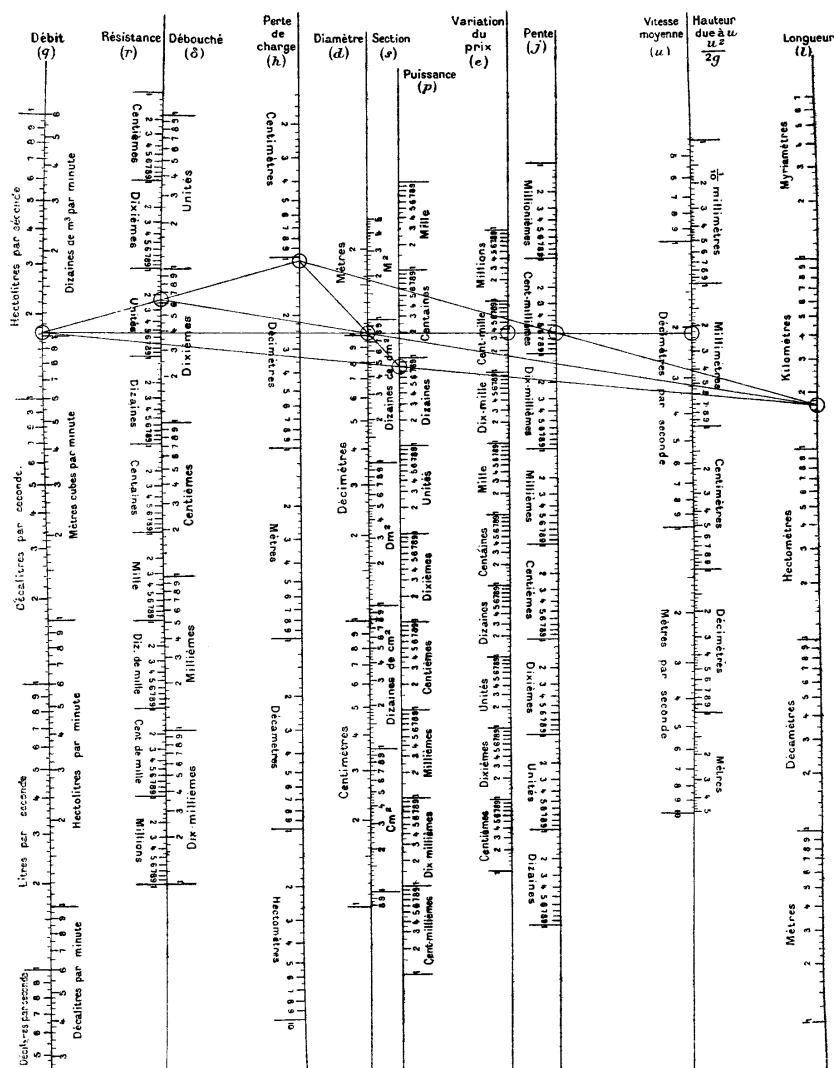


FIGURE 4.19. Abaque à points alignés pour la distribution des eaux ([136], p. 162)

gner n'importe quelle table graphique ; par contre, il abandonne l'adjectif « isoplèthe » et adopte, pour les nouveaux abaques qu'il a créés, l'expression plus simple d'« abaques à points alignés ». Un peu plus tard, en 1902, sur une suggestion de Friedrich Georg Schilling (1868-1950), professeur à l'université de Göttingen, il introduit le terme générique de « nomogramme » pour remplacer « abaque », réservant ce dernier aux tableaux graphiques

offrant l'aspect d'un damier ([140], p. 68). À partir de là, c'est l'expression de « nomogramme à points alignés » qu'il utilise systématiquement et qui devient d'usage courant chez la plupart des auteurs ultérieurs⁵.

Dans la dernière décennie du XIX^e siècle, les abaques à points alignés sont rapidement adoptés par un grand nombre d'ingénieurs au profit des applications les plus diverses. D'Ocagne a rassemblé une liste impressionnante de ces applications dans un article de 1898 [134] et dans son traité de 1899. Une bonne partie des exemples figurant dans l'inventaire sont des réalisations personnelles du fondateur de la nomographie : abaques pour la résolution générale des triangles sphériques, l'équation de Kepler, l'équation des marées diurnes et semi-diurnes, le calcul des profils de remblai et de déblai, le fruit intérieur des murs de soutènement, les moments d'inertie des rectangles, les voûtes en dôme, les remous d'une rivière, la correction barométrique, l'épaisseur des lentilles plan-convexes, le poids des cordes filées, les intérêts composés, etc. Les autres exemples, tout comme celui du commandant Bertrand cité plus haut, sont repris de divers auteurs qui se sont appropriés la méthode d'alignement : abaques pour la détermination de la section d'une poutre uniformément chargée (lieutenant Mandl, du génie autrichien), la répartition des tôles de semelles dans les grandes poutres de ponts (J. Pillet, professeur au Conservatoire des arts et métiers), le calcul des sections résistantes dans les travées associées pour tous les types usuels de poutres en bois ou en fer (D. Gorrieri, professeur à l'École d'application des ingénieurs de Bologne), l'écoulement de l'eau dans une conduite (G. Dariès, conducteur du service des eaux de la ville de Paris), l'écoulement de l'eau dans les canaux et rivières (E. Ganguillet et W. R. Kutter), l'écoulement des gaz par des tuyaux (F. Gaud), la vitesse d'un train remorqué par une locomotive de type connu (A. Beghin), la consommation théorique d'une machine à vapeur (A. Rateau, ingénieur des Mines), le tir des pièces de siège (capitaine d'artillerie Lafay), le tir des mortiers de côte (colonel Langensheld, de l'artillerie russe), le tir en mer (lieutenant de vaisseau Strohl), les marches de troupes en colonne (capitaine Goedseels, professeur à l'École de guerre de Bruxelles), les divers problèmes de l'art naval (G. Pesci, professeur à l'Académie navale de Livourne), le nivellement barométrique (E. Prévot), la réduction des assurances mixtes aux assurances en cas de décès (A. Quiquet, actuaire de la compagnie d'assurances *La Nationale*), etc.

Ce foisonnement d'exemples concrets prouve qu'au tournant du XX^e siècle, la nomographie, corps de doctrine en pleine expansion, est d'ores et déjà bien installée dans le paysage des sciences appliquées. La période suivante voit la poursuite de cette progression fulgurante, qui se traduit notamment par

5. L'histoire de la terminologie nomographique employée dans les différentes langues a été étudiée en profondeur par Henri Vérine [205].

la publication de plusieurs centaines d'ouvrages et d'articles dans le monde entier. Nous reviendrons longuement sur ce phénomène, particulièrement intéressant pour l'historien, de constitution et de diffusion d'une nouvelle discipline (cf. § 4.3). Auparavant, de même que nous l'avons fait pour les abaques à droites concourantes (cf. § 4.1.4), nous allons passer en revue les principaux problèmes théoriques soulevés par la nouvelle technique des nomogrammes à points alignés.

4.2.2. Théorie des nomogrammes à points alignés

Du point de vue mathématique, le problème principal de la nomographie est de savoir quelles sont les équations susceptibles d'être représentées par un nomogramme à points alignés. La question est à peine évoquée dans la brochure fondatrice de 1891, mais, deux ans plus tard, sans doute parce qu'il doit s'adresser à un public de mathématiciens, d'Ocagne décide d'en faire le thème de sa communication au Congrès international de Chicago [128].

Considérons trois courbes quelconques, définies par des équations paramétriques

$$\xi = \frac{f_i(t)}{h_i(t)}, \quad \eta = \frac{g_i(t)}{h_i(t)} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Trois points de cotes $t = x$, $t = y$ et $t = z$, pris respectivement sur ces trois courbes, sont alignés lorsque

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} = 0.$$

Une relation donnée $F(x, y, z) = 0$ entre trois variables est donc représentable par un nomogramme à points alignés si, et seulement si, elle peut être mise sous la forme d'un déterminant du type précédent. On reconnaît sans surprise un déterminant de Massau (cf. § 4.1.3), car il est clair que le problème des abaques à droites concourantes et celui des nomogrammes à points alignés, d'un côté, et celui des nomogrammes à points alignés, d'autre, sont mathématiquement équivalents. En déplaçant la question dans un nouveau cadre, d'Ocagne donne soudain une nouvelle impulsion à la lignée de recherches qui avait été développée précédemment par Saint-Robert, Massau et Lecornu, et qui s'était quelque peu essouffée depuis. Face à ce problème difficile, d'Ocagne n'obtient lui-même que des résultats partiels, ne dépassant guère ceux de ses prédécesseurs et consistant principalement à caractériser les équations associées à des types particuliers de nomogrammes (cf. § 4.2.3). Après lui, ce sont d'autres mathématiciens qui ont fait progresser de façon substantielle le traitement du cas général.

En 1898, Ernest Duporcq (1873-1903), ancien élève de l'École polytechnique, ingénieur des télégraphes, est le premier à tenter une solution par une voie algébrique pure, c'est-à-dire ne faisant pas appel à des équations aux dérivées partielles ([33], [34]). Pour les besoins de sa démonstration, il fixe tout d'abord trois valeurs arbitraires distinctes a, a', a'' et, de même, b, b', b'' et c, c', c'' . Son analyse part du fait que, si une fonction $F(x, y, z)$ peut se mettre sous la forme d'un déterminant de Massau, le développement du déterminant suivant la première ligne montre qu'elle est du type

$$F(x, y, z) = f_1(x) U(y, z) + f_2(x) V(y, z) + f_3(x) W(y, z).$$

Pour y et z fixés, les quatre fonctions suivantes de x : $F(x, y, z)$, $F(x, b, c)$, $F(x, b', c')$ et $F(x, b'', c'')$ sont donc linéairement dépendantes, ce qui se traduit par une relation de la forme

$$\lambda_1 F(x, y, z) + \lambda_2 F(x, b, c) + \lambda_3 F(x, b', c') + \lambda_4 F(x, b'', c'') = 0,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 ne dépendent que de y et de z . En considérant cette relation pour quatre valeurs de x , à savoir x, a, a' et a'' , on aboutit à l'identité suivante, valable quels que soient x, y et z :

$$\begin{vmatrix} F(x, y, z) & F(x, b, c) & F(x, b', c') & F(x, b'', c'') \\ F(a, y, z) & F(a, b, c) & F(a, b', c') & F(a, b'', c'') \\ F(a', y, z) & F(a', b, c) & F(a', b', c') & F(a', b'', c'') \\ F(a'', y, z) & F(a'', b, c) & F(a'', b', c') & F(a'', b'', c'') \end{vmatrix} = 0.$$

En reprenant le même raisonnement par rapport à y , puis par rapport à z , on obtient deux autres conditions nécessaires analogues.

Inversement, si ces trois conditions sont réalisées, il découle de la première, par développement du déterminant, une relation du type

$$F(x, y, z) = F(x, b, c) U(y, z) + F(x, b', c') V(y, z) + F(x, b'', c'') W(y, z).$$

Il est ici naturel de poser $f_1(x) = F(x, b, c)$, $f_2(x) = F(x, b', c')$ et $f_3(x) = F(x, b'', c'')$, après quoi il reste à trouver des fonctions $f_2, g_2, h_2, f_3, g_3, h_3$ telles que

$$U = \begin{vmatrix} g_2(y) & h_2(y) \\ g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} h_2(y) & f_2(y) \\ h_3(z) & f_3(z) \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} f_2(y) & g_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) \end{vmatrix}.$$

Duporcq détermine alors quatre conditions supplémentaires qui, jointes aux trois précédentes, assurent que c'est possible et fournissent en théorie une méthode effective de calcul. En fait, la caractérisation ainsi obtenue est quasiment impraticable, même pour des équations très simples.

En 1912, Thomas Hakon Gronwall (1877-1932) aborde le problème d'une façon très différente [58]. Ce mathématicien d'origine suédoise s'était d'abord distingué par des recherches en mathématiques pures – on pensera par

exemple à l'inégalité qui porte son nom en théorie des équations différentielles –, mais, ne parvenant pas à obtenir un poste de professeur de mathématiques en Suède, il avait été conduit à réorienter sa carrière : après avoir passé un diplôme d'ingénieur civil à Berlin en 1902, il avait émigré aux États-Unis en 1904 pour y exercer son nouveau métier d'ingénieur dans diverses entreprises de construction de ponts et de chemins de fer. De 1912 jusqu'à sa mort en 1932, il devient « mathématicien consultant » et se spécialise dans les mathématiques appliquées et industrielles [54]. En 1912, compte tenu de sa formation théorique en analyse mathématique et de son expérience d'ingénieur du génie civil, il avait sans nul doute le profil idéal pour s'intéresser au problème fondamental de la nomographie. À son tour, il cherche des conditions nécessaires et suffisantes pour mettre une relation à trois variables $F(x, y, z) = 0$ sous la forme d'un déterminant, qu'on peut toujours ramener par homogénéité à l'écriture réduite

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & 1 \\ f_2(y) & g_2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le même esprit que ce qu'avaient fait Saint-Robert, Massau ou Lecornu pour les abaques d'alignement (cf. § 4.1.4), Gronwall, supposant la fonction F analytique, obtient une condition nécessaire par une suite de différentiations partielles du déterminant jusqu'à l'élimination, à l'aide de la relation $F(x, y, z) = 0$, des six fonctions inconnues f_i et g_i . Il lui faut tout de même sept pages de calculs pour aboutir à la condition qu'il doit exister une intégrale commune C aux deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = \left(MC - 2 \frac{\partial M}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x} + 2 C \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial x} C^2 \\ \quad + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \right) C - \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ 2M \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 2 \left(M^2 C + MN - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \\ \quad + \left(MC + N - 2 \frac{\partial M}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial y} + 2M \frac{\partial M}{\partial x} C^2 \\ \quad + 2 \left(N \frac{\partial M}{\partial x} + M \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} \right) C \\ \quad + 2N \frac{\partial N}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}, \end{array} \right.$$

dans lesquelles M et N désignent les fonctions définies par

$$M = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}} \quad \text{et} \quad N = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Gronwall établit ensuite que la condition est suffisante. En supposant acquise l'existence d'une intégrale commune C , il montre comment déterminer explicitement des fonctions f_i et g_i qui conviennent, et précise que les diverses solutions sont obtenues à une homographie près. Pour ce qui est de la fonction auxiliaire C sur laquelle tout repose, il se contente d'écrire : « Dans un travail ultérieur, je formerai explicitement l'intégrale commune des équations aux dérivées partielles » ([58], p. 61). Ce travail annoncé n'a apparemment jamais vu le jour.

Dans la suite de l'article, Gronwall spécialise son résultat général en déterminant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une, deux ou trois des échelles utilisées pour le nomogramme soient rectilignes, ce qui est évidemment important pour la pratique. Au passage, il retrouve les critères de Saint-Robert, Massau et Lecornu, améliore ces derniers en donnant une méthode de réduction sans aucune quadrature, et caractérise également d'une nouvelle manière les nomogrammes coniques et cubiques de Clark (cf. § 4.2.4). La plupart des résultats antérieurs de la nomographie sont ainsi englobés dans une théorie mathématique unique fournissant des caractères différentiels pour tous les types usuels de nomogrammes⁶.

Les spécialistes ont unanimement salué ce brillant exposé, tout en marquant fortement leur scepticisme quant à ses éventuelles retombées pratiques. Pour d'Ocagne, il s'agit d'« un mémoire de pure analyse des plus remarquables. [...] Cette analyse présente un intérêt théorique de premier ordre et peut être considérée comme épuisant la question sous ce rapport. En pratique, on n'a heureusement pas besoin de recourir aux calculs assez compliqués qu'elle comporte » ([151], 3^e éd., p. 229-230). Soreau renchérit dans le même sens en disant que la méthode de Gronwall « aboutit à des équations aux dérivées partielles d'une résolution difficile, et l'on ne rencontre jamais l'occasion de l'appliquer » ([196], t. 1, p. 22). Soreau a pourtant repris l'exposé de Gronwall dans son *Traité des abaque*s de 1921 (*ibid.*, t. 2, p. 241-248), en tentant de le simplifier, alors que les autres auteurs se sont généralement contentés d'y faire référence en deux ou trois lignes sans entrer dans les détails.

La contribution de Gronwall a reçu un écho plus constructif dans la communauté mathématique américaine. En mars 1913, lors du colloque de printemps de la section de Chicago de l'*American Mathematical Society* ([190], p. 459), Oliver Dimon Kellogg (1878-1932) présente – en présence de Gronwall – une communication dans laquelle il donne une nouvelle condition

6. Pour davantage de détails, consulter [28], qui contient une traduction anglaise de l'article de Gronwall de 1912 et d'abondantes analyses.

nécessaire et suffisante d'existence d'un nomogramme à points alignés, plus simple et plus facile à mettre en œuvre que celle de son collègue. Le résultat a été publié l'année suivante en Allemagne [72]. Kellogg était depuis 1905 professeur à l'université du Missouri, après avoir fait des études à Berlin et à Göttingen, où il s'était initié au problème de Dirichlet, aux équations intégrales et à la théorie du potentiel, thèmes qui sont toujours restés centraux dans ses recherches. S'il s'est soudain intéressé à la nomographie en 1913, c'est peut-être uniquement parce qu'il connaissait Gronwall pour l'avoir rencontré dans les congrès nord-américains et qu'il avait donc porté une attention particulière à son fameux article de 1912.

Comme nous l'avons vu, l'inconvénient majeur du critère de Gronwall est que tout repose sur la détermination d'une intégrale commune à deux équations aux dérivées partielles fort compliquées. Si l'on ne trouve pas cette intégrale, on est bloqué. Kellogg, s'efforçant en conséquence d'éviter toute résolution d'équation différentielle, parvient à dégager un critère qui ne fait intervenir que des opérations de différentiation et la détermination du rang de certaines matrices. Par ailleurs, sa démarche est incontestablement novatrice en ce qu'il étudie de manière rigoureuse l'indépendance linéaire des fonctions qui entrent en jeu, là où ses prédécesseurs, s'en tenant à une sorte de calcul formel, raisonnaient implicitement comme si les fonctions étaient toujours indépendantes. Cela est important ici, car, si une fonction $g(x, y, z)$ admet une représentation sous la forme d'un déterminant de Massau, alors elle peut s'écrire

$$g(x, y, z) = F_1(y, z) X_1(x) + F_2(y, z) X_2(x) + F_3(y, z) X_3(x),$$

et il faut distinguer le cas, que Kellogg qualifie d'« irréductible », où les fonctions X_1, X_2, X_3 d'une part, les fonctions F_1, F_2, F_3 d'autre part, sont linéairement indépendantes, des deux autres cas où la fonction g admet des écritures réduites du type $g = F_1 X_1 + F_2 X_2$ ou du type $g = F_1 X_1$. Si l'indépendance des fonctions d'une variable était alors bien maîtrisée, il n'en allait pas de même dans le cas de plusieurs variables. Kellogg commence donc par dégager un critère intéressant de dépendance linéaire de n fonctions analytiques à plusieurs variables à l'aide de la matrice formée par les n fonctions et toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n - 1$, matrice qui doit être de rang inférieur à n . Tout repose ensuite sur ce théorème. Pour donner au lecteur un aperçu de cette approche, nous donnons ci-après les quatre conditions nécessaires et suffisantes obtenues pour qu'une fonction g admette une représentation sous forme de déterminant et soit irréductible par rapport à x (les lettres en indice servent à noter les dérivées partielles, par exemple : $g_y = \partial g / \partial y$) :

1. La matrice

$$\begin{pmatrix} g & g_y & g_z & g_{yy} & g_{yz} & g_{zz} & g_{yyy} & g_{yyz} & g_{yzz} & g_{zzz} \\ g_x & g_{xy} & g_{xz} & g_{xyy} & g_{xyz} & g_{xzz} & g_{xyyy} & g_{xyyz} & g_{xyzz} & g_{xzzz} \\ g_{xx} & g_{xxy} & g_{xxz} & g_{xxxy} & g_{xxyz} & g_{xxzz} & g_{xxxxy} & g_{xxxzy} & g_{xxxzz} & g_{xxxxz} \\ g_{xxx} & g_{xxxxy} & g_{xxxz} & g_{xxxxy} & g_{xxxzy} & g_{xxxzz} & g_{xxxxyy} & g_{xxxxyz} & g_{xxxzyz} & g_{xxxzzz} \end{pmatrix}$$

est de rang 3.

2. La matrice $\begin{pmatrix} g & g_y & g_z & g_{yy} & g_{yz} & g_{zz} \\ g_x & g_{xy} & g_{xz} & g_{xyy} & g_{xyz} & g_{xzz} \\ g_{xx} & g_{xxy} & g_{xxz} & g_{xxxy} & g_{xxyz} & g_{xxzz} \end{pmatrix}$ est de rang 3.

$$3. \begin{vmatrix} g & g_x & g_{xx} \\ g_y & g_{xy} & g_{xxy} \\ g_{yy} & g_{xyy} & g_{xxyy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & g_x & g_{xx} \\ g_z & g_{xz} & g_{xxz} \\ g_{zz} & g_{xzz} & g_{xxzz} \end{vmatrix} = 0.$$

$$4. \begin{vmatrix} g & g_x & g_{xx} \\ g_y & g_{xy} & g_{xxy} \\ g_{yy} & g_{xyy} & g_{xxyy} \end{vmatrix} \left[\begin{vmatrix} g_y & g_{xy} & g_{xxy} \\ g_{yz} & g_{xzy} & g_{xxyz} \\ g_z & g_{xz} & g_{xxz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} g & g_x & g_{xx} \\ g_{yy} & g_{xyy} & g_{xxyy} \\ g_{zz} & g_{xzz} & g_{xxzz} \end{vmatrix} \right] - \begin{vmatrix} g & g_x & g_{xx} \\ g_{yz} & g_{xzy} & g_{xxyz} \\ g_z & g_{xz} & g_{xxz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g & g_x & g_{xx} \\ g_y & g_{xy} & g_{xxy} \\ g_{yy} & g_{xyy} & g_{xxyy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g & g_x & g_{xx} \\ g_{yy} & g_{xyy} & g_{xxyy} \\ g_z & g_{xz} & g_{xxz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g & g_x & g_{xx} \\ g_y & g_{xy} & g_{xxy} \\ g_{zz} & g_{xzz} & g_{xxzz} \end{vmatrix} = 0.$$

Kellogg fournit également deux autres ensembles de conditions pour traiter les cas réductibles. Comme annoncé, le critère, bien qu'assez fastidieux à vérifier, est toujours effectif. En revanche, lorsque la fonction g est représentable par un déterminant, il ne fournit pas directement sa décomposition. Il faut alors en passer par la résolution d'une équation différentielle ordinaire linéaire homogène du troisième ordre pour calculer la première ligne du déterminant, mais on sait en principe intégrer une telle équation.

Nous n'avons trouvé aucune référence à ce travail très original dans les traités de nomographie des décennies suivantes. Il semble être passé quasiment inaperçu. Cependant, par son approche basée sur une étude rigoureuse des relations de dépendance linéaire entre fonctions de plusieurs variables, Kellogg a ouvert la voie au traitement moderne du problème de l'anamorphose générale, tel qu'il a été conduit par le mathématicien polonais Mieczysław Warmus (1918-2007). Ce dernier a commencé sa carrière académique comme assistant de Hugo Steinhaus (1877-1972) à la nouvelle université de Wrocław créée après la guerre. En 1955, il devient directeur de la section des méthodes numériques et graphiques de l'École polytechnique de Wrocław. C'est là qu'en janvier 1958, il soutient sa dissertation en vue de l'habilitation comme professeur, intitulée *Funkcje nomogramowalne* et publiée l'année suivante en anglais sous le titre *Nomographic functions* [208]. Le rapport de soutenance indique qu'il s'agit de « la première solution com-

plète d'un intéressant problème théorique ayant une grande importance pour les applications pratiques » ([36], p. 36).

Warmus, commençant par analyser les recherches précédentes de Duporcq, Gronwall et Kellogg, les considère comme inutilement compliquées et conduisant à des calculs trop fastidieux pour un usage pratique. Dans la voie prometteuse ouverte par Kellogg, il se dote d'outils pour prendre en compte efficacement le problème de l'indépendance linéaire des fonctions, mais dans un cadre purement algébrique, sans utilisation de différentiations, se rangeant finalement au point de vue initial de Duporcq. C'est ainsi qu'un résultat préliminaire établit que les fonctions $T_1(t)$, $T_2(t)$, ..., $T_n(t)$, sont linéairement indépendantes si, et seulement si, il existe des valeurs $t_1, t_2, \dots, t_n$ de t telles que

$$\begin{vmatrix} T_1(t_1) & T_2(t_1) & \cdots & T_n(t_1) \\ T_1(t_2) & T_2(t_2) & \cdots & T_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_1(t_n) & T_2(t_n) & \cdots & T_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Warmus définit ensuite la notion de « rang d'une fonction » : la fonction $G(u,v)$ est dite de rang n ($n > 1$) s'il existe des fonctions $U_1, U_2, \dots, U_n$ de u et des fonctions $V_1, V_2, \dots, V_n$ de v telles que $G = U_1 V_1 + U_2 V_2 + \cdots + U_n V_n$, et si G ne peut pas s'écrire sous la forme $G = \bar{U}_1 \bar{V}_1 + \bar{U}_2 \bar{V}_2 + \cdots + \bar{U}_{n-1} \bar{V}_{n-1}$; G est de rang 0 si $G = 0$; G est de rang 1 si $G = U_1 V_1$ avec $U_1 \neq 0$ et $V_1 \neq 0$. La notion de rang s'étend aux fonctions de trois variables dont on a besoin pour le problème nomographique en disant, par exemple, que la fonction $F(x,y,z)$ est de rang n par rapport à x si elle est de rang n lorsqu'on la considère comme fonction des deux variables y et (y,z) . Cela permet alors d'introduire de manière précise la notion-clé de « fonction nomographique » : une fonction $F(x,y,z)$ est dite nomographique si

- (i) il existe des fonctions X_1, X_2, X_3 de x , Y_1, Y_2, Y_3 de y et Z_1, Z_2, Z_3 de z telles que

$$F = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix};$$

- (ii) F est de rang > 1 par rapport à chacune des variables.

La condition (ii) a pour but d'éliminer les cas sans intérêt. En effet, si F était de rang 1, disons par rapport à x , on pourrait écrire $F = X(x) K(x,y)$ et l'équation $F = 0$ se ramènerait aux équations $X = 0$ et $K = 0$, pour lesquelles il n'y a pas besoin de nomogramme. La forme (i), quant à elle, est appelée « déterminant de Massau » pour rendre hommage à celui qui s'est trouvé à l'origine du problème de l'anamorphose générale. Warmus

considère que deux déterminants de Massau sont « équivalents » lorsque les nomogrammes correspondants sont obtenus l'un à partir de l'autre par une transformation projective.

Au terme d'une étude rigoureuse, Warmus parvient à dresser une liste exhaustive des fonctions nomographiques. Il les classe en sept types « principaux » s'excluant mutuellement : considérant l'écriture générale $F = X_1 G_1 + X_2 G_2 + X_3 G_3$, le classement se fait sur la base du rang de F par rapport à chacune des variables x, y, z et du rang des fonctions composantes G_1, G_2, G_3 . Pour chaque type principal, Warmus détermine les formes non équivalentes de déterminants de Massau auxquelles une fonction de ce type peut se ramener. Au total, on obtient dix-sept classes d'équivalence de déterminants de Massau. Le plus souvent, une fonction nomographique est représentable – à équivalence près – par un seul déterminant de Massau : on dit qu'elle est « simplement nomographique ». Dans certains cas, une même fonction nomographique peut admettre des représentations par deux déterminants de Massau non équivalents : on dit alors qu'elle est « doublement nomographique ». Par exemple, le premier type principal est celui des fonctions F qui sont de rang 2 par rapport à chacune des variables et qui s'écrivent $F = X_1 G_1 + X_2 G_2$, avec G_1 et G_2 de rang 2. Ces fonctions admettent deux formes de Massau :

$$\left| \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & 0 \\ 0 & Y_1 & Y_3 \\ Z_3 & 0 & Z_1 \end{array} \right| \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & 0 \\ Y_3 & 0 & Y_1 \\ 0 & -Z_1 & -Z_3 \end{array} \right|.$$

Avec cette classification est fourni un « schéma de calcul » qui permet, pour une fonction donnée, soit de déterminer les formes de Massau associées, soit de conclure qu'elle n'est pas nomographique. L'algorithme est assez complexe – sa description détaillée occupe une vingtaine de pages –, mais on peut considérer qu'il constitue une réponse complète et effective au problème de l'anamorphose. Dans la pratique, un utilisateur, même s'il ne souhaite pas mettre en œuvre cet algorithme fastidieux, pourra toujours tirer parti du catalogue de Warmus pour trouver rapidement et par tâtonnements, dans les cas simples, un nomogramme adapté à l'équation à résoudre.

Dans les années 1950 et après, d'autres recherches ont été conduites dans les pays de l'Est, en parallèle de celles de Warmus, sur le problème de l'anamorphose générale. On peut mentionner notamment d'importantes contributions des mathématiciens russes H. A. Bitner et S. V. Smirnov, qui ont continué à chercher des critères différentiels dans l'esprit de Gronwall ([167], trad. angl., p. 308), et G. E. Dzhems-Levi, qui a développé une méthode générale d'approximation pour la construction de nomogrammes, méthode qui fournit un nomogramme exact si, et seulement si, la fonction est anamorphosable ([38], p. 331).

4.2.3. L'ordre nomographique de Soreau

La section précédente a mis en évidence que le problème général de l'anamorphose, particulièrement difficile, ne saurait admettre de solution simple. Seuls quelques mathématiciens tenaces s'en sont emparés de manière significative. En revanche, nombreux sont ceux qui se sont penchés sur des problèmes plus spécifiques consistant à caractériser les équations associées à un type usuel de nomogramme, ou, inversement, à décrire les nomogrammes représentant une classe simple d'équations. Nous allons maintenant parcourir cette autre lignée de recherches, beaucoup plus riche en retombées exploitables par les utilisateurs. Pour alléger et uniformiser l'écriture des formules, nous reprendrons une convention généralement adoptée par les auteurs de l'époque : si les variables en jeu sont notées $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, etc., une fonction portant sur un certain nombre de ces variables sera simplement affectée de tous les indices correspondants ; par exemple, f_1 désignera une fonction de la seule variable α_1 , f_{23} une fonction des variables α_2 et α_3 , etc.

Tout commence, encore une fois, avec la communication de d'Ocagne au Congrès de Chicago de 1893, dont nous avons parlé plus haut. D'Ocagne y caractérise les équations représentables par un nomogramme d'alignement formé de trois échelles rectilignes à graduation régulière ([128], [126]). En 1896-1897, il traite le problème plus général des équations représentables par trois échelles rectilignes quelconques ([129], [130], [132]). Dans le *Traité* de 1899, la question est reprise longuement ([136], p. 114-203) ; on y trouve tout un ensemble de techniques et d'exemples couvrant de nombreuses catégories de nomogrammes : trois échelles rectilignes parallèles ; deux échelles rectilignes parallèles et une troisième sécante ; trois échelles rectilignes non parallèles, soit concourantes, soit non concourantes ; deux échelles rectilignes parallèles et une échelle curviligne ; trois échelles curvilignes. Cependant, de cette énumération qui est fondée sur la seule forme des nomogrammes et qui semble d'ailleurs incomplète, il ne se dégage pas encore de principe clair de classification, d'autant plus qu'il arrive qu'une même équation puisse être représentée par des nomogrammes de plusieurs des types précédents.

C'est ici qu'un nouveau personnage important de la nomographie entre en scène : Rodolphe Soreau (1865-1935). Cet ancien élève de l'École polytechnique, ingénieur des chemins de fer, professeur au Conservatoire national des arts et métiers, fut un passionné d'aviation : il écrivit plusieurs livres sur les ballons, les avions et la navigation aérienne, il présida la commission d'aviation de l'Aéro-Club de France et il devint le premier président de la Fédération française aéronautique, créée à Paris en 1929. Il fit également d'importantes recherches en nomographie à partir de 1901, qui aboutirent à la publication, en 1921, d'un imposant ouvrage en deux volumes intitulé *Nomographie ou Traité des abaqués* [196]. En 1922, l'Académie des sciences

décerna à Soreau le prix Houlevigue pour ses travaux sur l'aviation et la nomographie. Notre ingénieur pouvait ainsi se positionner comme un sérieux concurrent de d'Ocagne, ce qui n'alla pas sans quelques frictions (cf. § 4.3.2). Toute sa vie, Soreau refusa d'adopter le terme de nomogramme introduit par son rival et conserva l'ancien mot d'abaque, que nous reprendrons donc provisoirement chaque fois qu'il sera question de lui. De même, il n'employa jamais les coordonnées parallèles, préférant développer toute la nomographie en coordonnées cartésiennes, selon lui plus naturelles et plus familières aux ingénieurs.

Pour classifier les équations susceptibles d'être représentées par des abaques à points alignés, Soreau introduit en 1901 la notion d'« ordre nomographique » ([191], p. 243). Les motivations qu'il nous livre apparaissent un peu comme une réponse aux insuffisances du *Traité* de d'Ocagne :

[...] nous avons été amené, par un examen attentif du problème, à adopter une classification nouvelle basée sur la notion de ce que nous appelons l'ordre nomographique.

Cette innovation ne nous paraît pas seulement intéressante au point de vue didactique. Une bonne classification n'est jamais sans utilité : celle que nous proposons met en lumière l'esprit des méthodes, et groupe diverses sortes d'abaques qui ne sont que des traductions différentes d'une même conception analytique, par exemple, pour les équations à 3 variables, les abaques à 3 réseaux de droites, les abaques à points alignés de M. d'Ocagne, et, comme cas particulier, les abaques hexagonaux de M. Lallemant [...]. En outre, l'ordre nomographique a l'avantage de déterminer *a priori* les caractères géométriques d'un type d'abaque, s'il existe, suivant les caractères fonctionnels de l'équation : la classification est donc éminemment rationnelle ([191], p. 195).

Qu'est-ce donc que l'ordre nomographique ? Quand une équation à trois variables provient du développement d'un déterminant de Massau

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & g_1(\alpha_1) & h_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & g_2(\alpha_2) & h_2(\alpha_2) \\ f_3(\alpha_3) & g_3(\alpha_3) & h_3(\alpha_3) \end{vmatrix} = 0,$$

le premier membre de cette équation prend la forme d'un polynôme de degré au plus 3 par rapport à neuf fonctions d'une seule variable. Après réduction par homogénéité et prise en compte des relations de dépendance linéaire qui peuvent exister sur chaque ligne du déterminant, il reste un nombre de fonctions indépendantes compris entre 3 et 6. C'est ce nombre qui est appelé ordre nomographique de l'équation. Lorsque les termes d'une ligne sont linéairement dépendants, l'échelle correspondante est portée par une droite. Par suite, les équations d'ordres 3, 4, 5, 6 se traduisent respectivement par un abaque à trois échelles rectilignes, deux échelles rectilignes et une curviligne, une échelle rectiligne et deux curvilignes, trois échelles curvilignes. Par exemple, la forme de Cauchy $f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0$ (cf. § 4.1.4) se

réduit par homogénéité à $f_1 f_3 + f_2 g_3 + 1 = 0$ et a pour ordre nomographique 3 ou 4 suivant qu'il existe ou non une relation de dépendance du type $af_3 + bg_3 + c = 0$. L'année suivante, en 1902, d'Ocagne a tenté d'introduire un autre système de classification en prenant le problème par l'autre bout, c'est-à-dire en partant de la géométrie du nomogramme plutôt que de la nature algébrique de l'équation [140]. Il a appelé « genre » d'un nomogramme le nombre d'échelles curvilignes qu'il comporte, ce qui revient à dire que le genre est égal à l'ordre nomographique moins trois. Cette attitude est caractéristique du fondateur de la nomographie, qui a toujours plus ou moins cherché à s'approprier les créations des autres en les rebaptisant et en les rattachant *a posteriori* à sa propre théorie. Dans le cas présent, c'est la présentation de Soreau qui l'a emporté auprès des autres auteurs; d'Ocagne s'y est lui-même rallié plus tard, tout en conservant parallèlement sa propre terminologie.

Dans son mémoire de 1901, Soreau a complété la théorie générale des équations d'ordre nomographique 3 et a institué une méthode pratique pour construire les abaques correspondants. Le résultat essentiel est qu'une équation est représentable par un abaque à trois échelles rectilignes si, et seulement si, elle est de la forme

$$A f_1 f_2 f_3 + B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0,$$

avec des coefficients vérifiant la condition $\Delta \geq 0$, où Δ est le discriminant défini par

$$\Delta = (B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 C_3 - AD)^2 - 4(B_1 B_2 C_1 C_2 + B_2 B_3 C_2 C_3 + B_3 B_1 C_3 C_1 - AC_1 C_2 C_3 - DB_1 B_2 B_3).$$

Lorsque $\Delta = 0$, l'équation se ramène par une transformation homographique à la « forme canonique »

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0$$

et l'on obtient trois échelles concourantes (au sens de la géométrie projective, *i. e.* concourantes ou parallèles). Dans le cas $\Delta > 0$, on aboutit à la seconde forme canonique

$$f_1 f_2 f_3 = 1$$

qui, quant à elle, se traduit par des échelles non concourantes (en triangle). Les deux formes canoniques sont irréductibles l'une à l'autre par homographie, mais, si l'on accepte des transformations transcendantes, on peut néanmoins passer de la première à la seconde par l'anamorphose logarithmique $f_1 = \ln f'_1$, $f_2 = \ln f'_2$ et $f_3 = \ln f'_3$, ce qui signifie, en fait, que chaque équation nomographiable d'ordre 3 admet un abaque de chaque type.

À ce moment-là, Soreau n'avait pas encore pris en compte un résultat complémentaire mis en évidence par Georges Fontené (1848-1923) en 1900 [46] : dans le cas $\Delta < 0$, l'équation se ramène homographiquement à la troisième forme canonique

$$f_1 + f_2 + f_3 = f_1 f_2 f_3,$$

qui, par l'anamorphose transcendante $f_1 = \tan f'_1$, $f_2 = \tan f'_2$ et $f_3 = \tan f'_3$, se ramène elle-même à la première forme $f'_1 + f'_2 + f'_3 = 0$. Dans une publication ultérieure [193], Soreau a pu adjoindre ce résultat à sa théorie pour conclure que, moyennant des anamorphoses transcendentes, toute équation d'ordre 3 est représentable par un abaque à échelles rectilignes et peut se ramener à la forme unique $f_1 + f_2 + f_3 = 0$. Ainsi, cette étude de l'ordre nomographique 3 couvre finalement tous les abaques à droites concourantes ou à points alignés qui relèvent du critère de Saint-Robert (cf. § 4.1.4) ou, ce qui revient au même, toutes les équations qui se prêtent à une représentation par un abaque hexagonal de Lallemant (cf. § 4.1.5).

4.2.4. Les abaques coniques et cubiques de Clark

Comme on le voit, ces premières investigations de d'Ocagne et Soreau, même si elles précisent bien les acquis, n'apportent pas fondamentalement de nouveaux résultats. C'est un peu plus tard, en 1905, qu'une percée est accomplie par le Dr. John Clark, un personnage dont on ne sait pratiquement rien sinon qu'il était à ce moment-là professeur de mathématiques à l'École polytechnique du Caire. Clark présenta une communication remarquée au Congrès de Cherbourg de l'Association française pour l'avancement des sciences, qui fut suivie d'un long article publié en feuilleton dans quatre livraisons de la *Revue de mécanique* en 1907 et 1908 [17]. L'article a été traduit de l'anglais par G. Fleuri, professeur de mécanique rationnelle dans le même établissement que Clark. Il est précédé d'une introduction de d'Ocagne.

Se plaçant dans la lignée de Soreau, Clark conserve comme lui l'ancien terme d'« abaque » et reprend sa notion d'ordre nomographique. Il commence par montrer que toute équation d'ordre 4 peut se mettre sous l'une des deux formes canoniques suivantes, exclusives l'une de l'autre :

$$\begin{aligned} f_1 f_3 + f_2 g_3 &= 1 ; \\ f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2) g_3 &= 1. \end{aligned}$$

Les équations de la première forme, dans laquelle nous reconnaissons la forme de Cauchy (cf. § 4.1.4), sont représentables par un abaque à deux échelles rectilignes et une échelle curviligne. Les équations de la seconde forme, que Clark appelle la « forme symétrique » et qui sera appelée plus tard « forme de Clark », n'admettent pas d'abaque de ce type.

L'étude des équations d'ordre 4 aurait pu s'arrêter là, mais Clark songe soudain à changer de point de vue : pourquoi se restreindrait-on à chercher des abaques avec deux échelles rectilignes ? N'y aurait-il pas d'autres représentations possibles en s'autorisant *a priori* n'importe quel nombre d'échelles curvilignes ? Cet élargissement du problème s'avère extrêmement fécond et conduit même à revisiter l'ordre 3, sur lequel tout semblait avoir été dit. En effet, Clark remarque que les trois formes canoniques des équations d'ordre 3 et la forme canonique symétrique des équations d'ordre 4, celle pour laquelle il n'existe pas d'abaque à deux échelles rectilignes, entrent toutes dans le schéma général suivant, symétrique par rapport aux deux premières variables :

$$f_1 f_2 A_3 + (f_1 + f_2) B_3 + C_3 = 0.$$

En posant $x = f_1 f_2$ et $y = f_1 + f_2$, on obtient le système

$$\begin{cases} x - y f_1 + f_1^2 = 0 \\ x - y f_2 + f_2^2 = 0 \\ x A_3 + y B_3 + C_3 = 0, \end{cases}$$

d'où le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1 & f_1^2 \\ 1 & f_2 & f_2^2 \\ A_3 & -B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation obtenue n'est rien d'autre, en fait, que l'équation initiale multipliée par le facteur parasite $f_2 - f_1$. L'échelle α_1 est donnée par $x = f_1$ et $y = f_1^2$; elle a pour support la parabole $x^2 = y$. Cette parabole est, de même, le support de l'échelle α_2 . Par une transformation homographique, on peut toujours transformer cette parabole en une autre conique, en un cercle par exemple. Ainsi, toute équation d'ordre 3, sans exception, peut se représenter au moyen d'un abaque consistant en un cercle (ou une conique) à double cote et une droite à simple cote. Les équations d'ordre 4, quant à elles, sont de deux types distincts, l'un représentable par un abaque composé de deux droites et d'une courbe, et l'autre par un abaque composé d'une conique à double cote et d'une courbe. Dans un « abaque conique », toute corde de la conique est une droite d'alignement. À titre d'exemple, la figure 4.20 représente la relation

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta},$$

qui est d'ordre 3, au moyen d'une hyperbole à double cote et d'une droite. Le choix d'une hyperbole permet ici d'avoir l'échelle rectiligne entre les deux branches, d'où une meilleure précision de lecture.

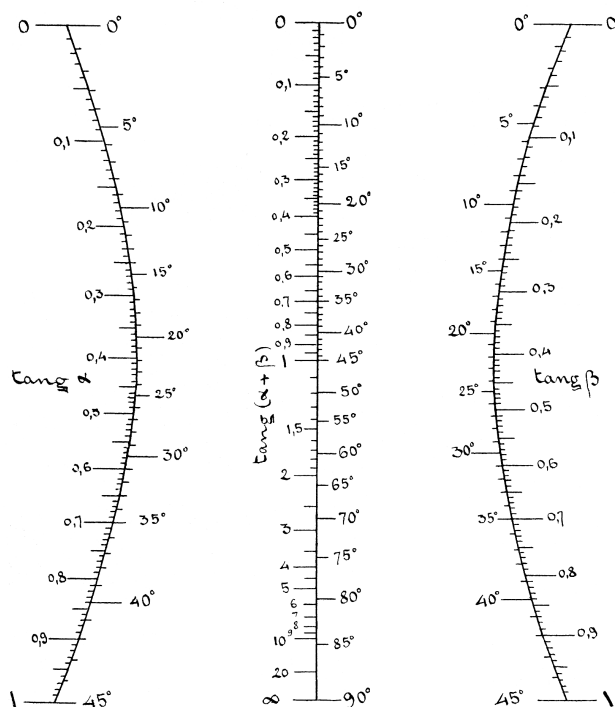


FIGURE 4.20. Abaque conique pour la relation $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ ([17], p. 249)

Poursuivant ses investigations sur la symétrie nomographique, Clark remarque que les trois formes canoniques de l'équation du 3^e ordre rentrent également dans un schéma général à symétrie complète par rapport aux trois variables :

$$f_1 f_2 f_3 + A(f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_1) + B(f_1 + f_2 + f_3) + C = 0.$$

Une multiplication par le facteur parasite $(f_1 - f_2)(f_2 - f_3)(f_3 - f_1)$ permet alors de mettre l'équation sous la forme d'un déterminant :

$$\begin{vmatrix} f_1 + A & f_1^2 - B & f_1^3 + C \\ f_2 + A & f_2^2 - B & f_2^3 + C \\ f_3 + A & f_3^2 - B & f_3^3 + C \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient par là un abaque dont les trois échelles sont portées par une même courbe du troisième degré. Ainsi, toute équation d'ordre 3, sans exception, est représentable par un abaque consistant en une cubique triplement cotée. Toute corde coupe la cubique en des points de cotes correspondantes. Un tel abaque est appelé « abaque cubique ». Par exemple, la figure 4.21 est un

abaque pour la multiplication $f_1 f_2 = \varphi_3$, porté par le folium de Descartes $x^3 + y^3 = axy$.

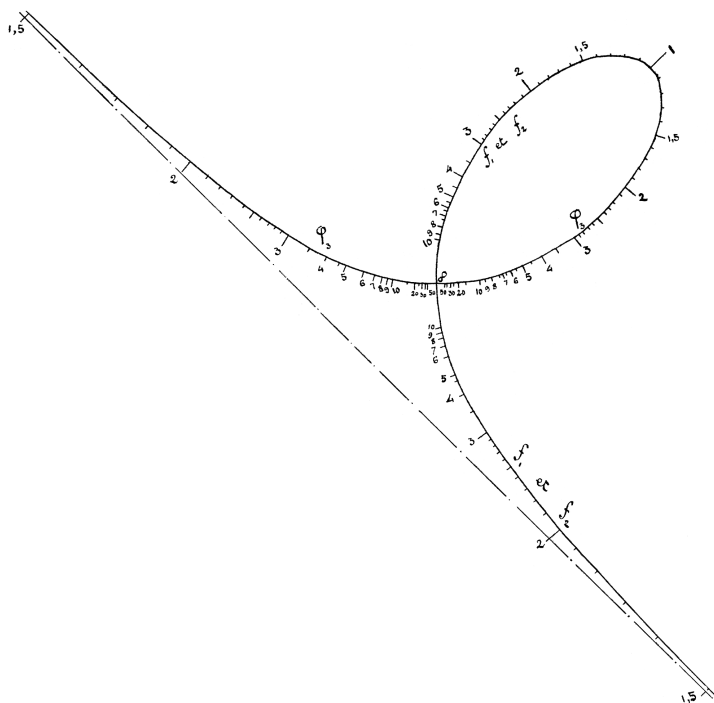


FIGURE 4.21. Abaque cubique pour la multiplication ([17], p. 453)

Dans le reste de l'article, Clark fournit de nombreux conseils pratiques pour la construction des abaques coniques et leur transformation par homographie, des indications sur l'application de la symétrie nomographique aux équations d'ordres 5 et 6, des indications pour représenter par des abaques coniques les relations à plus de trois variables en les dissociant en une suite de relations à trois variables (cf. § 4.2.1). Clark illustre ces différents points par des applications dues à son collègue Charles E. Wolff, qui, dès 1903, avait publié au Caire un recueil de dix abaques réalisés selon la nouvelle théorie [210]. Ces exemples concernent notamment la vitesse d'écoulement de l'eau dans les tuyaux, le rapport des pressions conjuguées dans un massif de terre et la puissance des machines à vapeur. Dans ce dernier cas, Wolff représente la relation à cinq variables

$$HP = \frac{d^2 s p N}{252.000}$$

par un abaque à triple alignement avec deux pivots, grâce à l'introduction de deux variables auxiliaires α et δ . L'abaque, élégant et ramassé dans un espace restreint, consiste en un cercle et une ellipse bitangentes aux extrémités d'un axe qui sert de troisième support ; parmi les sept échelles nécessaires, trois sont portées par le cercle, deux par l'ellipse et deux par la droite. Sur la figure 4.22, nous avons ajouté les droites d'alignement $s - d - \alpha$, $\alpha - p - \delta$ et $\delta - N - HP$ afin de mettre en évidence le mode de fonctionnement de cette table graphique.

Aussitôt après le Congrès de Cherbourg de 1905 et parallèlement à la publication de l'article de Clark en 1907-1908, d'Ocagne lance une rafale de papiers ([145], [147], [148], [149], [150]) pour commenter et reprendre à sa manière les résultats de son collègue du Caire. Il retrouve d'abord les résultats de Clark pour l'ordre 3 à partir de sa propre théorie et indique avoir déjà donné un exemple de nomogramme conique dans le *Traité* de 1899 ([136], p. 198). D'Ocagne précise ensuite la notion d'ordre nomographique de Soreau, notion liée à la forme apparente de l'équation, invariante par transformation projective, mais pas par anamorphose transcendante. Il introduit enfin les nouvelles notions de « point critique » et de « valeur critique » d'un nomogramme d'alignement : les points critiques sont les points de mutuelle rencontre des échelles qui le composent et les valeurs critiques sont les valeurs que prennent en ces points les variables utilisées pour coter les échelles. Ces notions sont importantes car, lorsque deux des variables d'une équation à trois variables prennent des valeurs critiques, le nomogramme ne permet pas de déterminer la valeur de la troisième. À partir des points critiques, d'Ocagne retrouve et organise d'une autre manière les résultats antérieurs de Soreau et de Clark sur les nomogrammes d'ordre 3 et 4.

Après l'étude complète de l'ordre 4 par Clark, c'est Soreau qui réalise celle des ordres 5 et 6 jusqu'à aboutir à une vaste synthèse dans son *Traité des abaques* de 1921 ([196], t. 1, p. 170-173). Contrairement aux ordres 3 et 4, une équation d'ordre 5 ou d'ordre 6 n'est pas toujours anamorphosable. Si elle l'est, elle comporte une seule anamorphose, qui est algébrique, et elle se ramène, pour l'ordre 5, à la forme canonique

$$\frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = f_3$$

et, pour l'ordre 6, à la forme canonique

$$\frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \frac{f_1 + f_3}{g_1 + g_3}.$$

Des recherches analogues, que nous ne détaillerons pas ici, se sont centrées à la même époque sur la possibilité de représenter des équations à quatre variables, soit par double alignement, soit par simple alignement

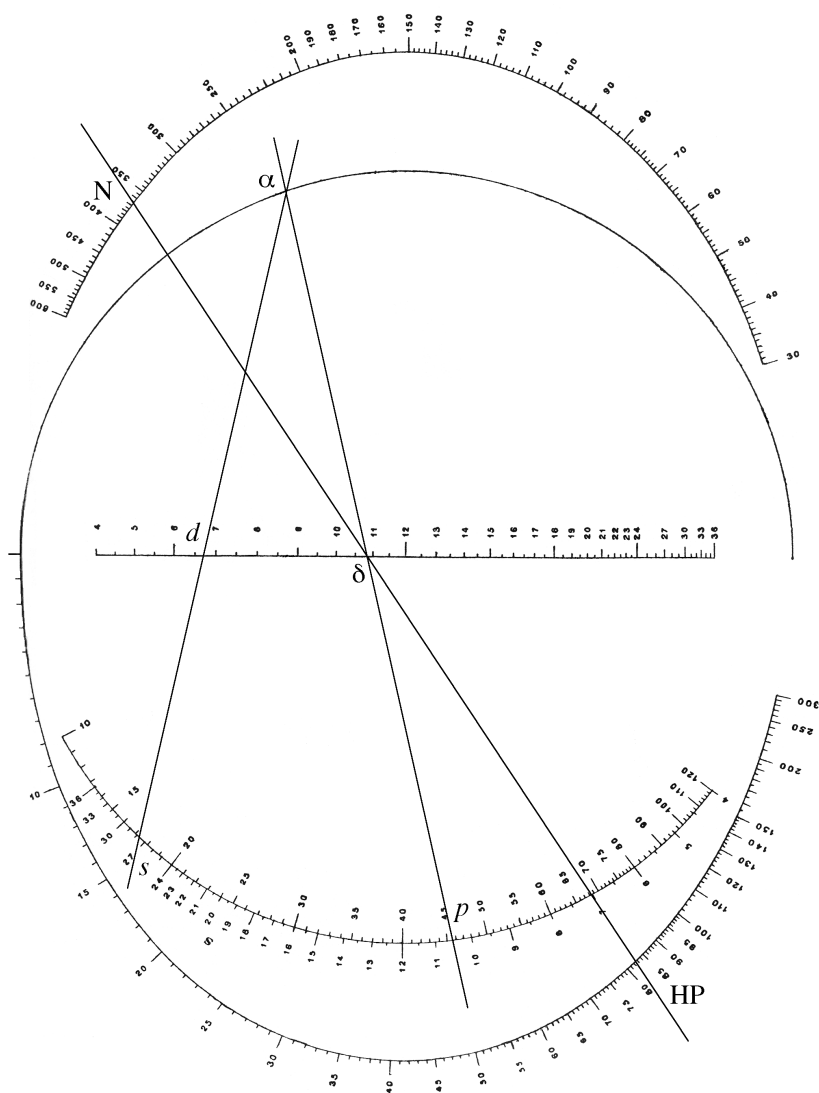


FIGURE 4.22. Abaque de Wolff pour la puissance d'une machine à vapeur ([17], p. 471)

avec l'introduction d'un réseau de points à deux cotes. Outre les inévitables d'Ocagne et Soreau, on peut mentionner la participation régulière à ces développements de Farid Boulad Bay (1872-1947), un ingénieur égyptien des chemins de fer, ancien élève de l'École des ponts et chaussées de Paris, qui est connu par ailleurs pour avoir construit la gare centrale du Caire. De fait, la

recherche de formes canoniques pour les équations à quatre et cinq variables est un thème qui est demeuré vivant jusqu'à nos jours, principalement dans les pays de l'Est. À ce propos, nous nous contenterons de faire référence à la mathématicienne roumaine Maria Mihoc, qui cherche actuellement des conditions pour que certains types d'équations à quatre ou cinq variables soient représentables, soit par des nomogrammes plans composés, soit par des nomogrammes dans l'espace à points coplanaires [114].

4.3. Constitution et diffusion d'une nouvelle discipline

Dans les sections précédentes, nous avons tenté de donner au lecteur un panorama aussi complet que possible de la phase initiale de la nomographie, celle qui va des premiers abaques de Pouchet, en 1795, jusqu'à l'année 1921, date commune de parution du *Traité des abaques* de Soreau et de la seconde édition du *Traité de nomographie* de d'Ocagne, deux gros ouvrages de synthèse qui marquent l'accession de ce domaine à une phase de maturité. Nous avons assisté à l'introduction progressive des concepts pertinents de la discipline, parcouru les principaux courants de recherche théorique qui se sont constitués en son sein, et pris la mesure de la variété des applications pratiques qui en ont découlé. Après 1921, la nomographie poursuit son expansion foudroyante : les publications dans les revues scientifiques se comptent par centaines, les abaques réalisés et utilisés dans les divers corps de métiers sont encore plus nombreux (cf. § 4.4.1). Nous avons déjà évoqué en passant quelques-uns de ces travaux plus récents et nous aurons l'occasion d'en mentionner d'autres plus loin, mais il n'était bien sûr pas possible, dans le cadre limité de ce chapitre, de rendre compte en détail de toute la production nomographique constatée jusqu'à nos jours. Nous allons donc, à présent, nous tourner vers des considérations d'une autre nature, qui ne consisteront plus tant à analyser le contenu mathématique de telle ou telle production individuelle qu'à envisager globalement, du point de vue épistémologique et sociologique, un corpus de savoir qui a pris sens à un moment donné et dont la société a largement reconnu l'utilité scientifique et économique. Pour commencer, il convient de s'interroger sur les éléments qui ont pu contribuer à faire de la nomographie une discipline à part entière, acceptée comme telle par tous, à savoir : un fondateur, une théorie unificatrice, des applications nombreuses répondant à un besoin, des traités de synthèse, la création d'enseignements, une reconnaissance par la communauté mathématique, l'inscription *a posteriori* de la discipline dans une tradition, une large diffusion internationale.

4.3.1. La synthèse militante de Maurice d'Ocagne

La naissance d'une discipline est un phénomène étrange : des îlots de savoirs et de techniques, non reliés entre eux, sont présents depuis longtemps en des lieux divers, imbriqués dans des contextes particuliers, plusieurs fois oubliés et réinventés, et puis soudain on assiste à une sorte de cristallisation qui structure ces connaissances éparses, les décontextualise et leur confère une fécondité insoupçonnée. Ce processus est, en général, associé à un personnage que l'histoire retient comme le fondateur de la discipline, voire son unique créateur, rejetant injustement dans l'oubli les apports partiels et balbutiants, mais néanmoins cruciaux, de ses prédécesseurs. Maurice d'Ocagne tient incontestablement ce rôle pour la nomographie, peut-être de manière encore plus nette que Carl Culmann pour la statique graphique (cf. § 5.2.1) ou Junius Massau pour l'intégration graphique (cf. § 7.1.3). Cependant, derrière l'action d'un individu particulier, qui sert de catalyseur et qui, s'il n'avait pas existé, aurait probablement été remplacé par un autre, il y a presque toujours la réalité d'un besoin fort de la société auquel la nouvelle discipline va apporter une réponse. Pour la nomographie, cet état de fait est reconnu par d'Ocagne lui-même : « Cette discipline spéciale est née du besoin qui s'impose à tous les techniciens d'échapper à la sujétion de calculs laborieux, fatigants et sujets à erreur » ([136], 2^e éd., p. v). La même nécessité impérieuse d'un renouvellement des techniques de calcul pour faire face au développement des constructions et des voies de communication accompagnant les révolutions industrielles, est d'ailleurs également à l'origine de la création des autres branches spécialisées du calcul graphique.

La brochure publiée par d'Ocagne en 1891 a servi de bréviaire à la nouvelle science. Son titre, à lui seul, est déjà tout un programme : *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. Règles pratiques. Exemples d'application* [123]. Dans ce titre, il y a d'abord le terme nouveau de « nomographie ». Cela n'a rien d'anodin : nommer, baptiser quelque chose en créant un nouveau mot plutôt qu'en employant une périphrase, c'est reconnaître à cette chose une existence autonome, mais c'est aussi en revendiquer implicitement la paternité :

Arrivé au terme de notre recherche, nous avons pensé qu'il y avait lieu de désigner, par une dénomination propre, le petit corps de doctrine spécial qu'elle avait mis en relief à nos yeux. Comme il s'agit, en somme, de la représentation graphique de la *loi* qui unit plusieurs quantités simultanément variables, loi dont ce qu'on appelle *équation* n'est que l'expression analytique, nous avons cru pouvoir adopter le terme de *nomographie* (νόμος, loi), inscrit en tête de cette étude ([123], p. 6).

La brochure de 1891 est effectivement le premier traité rassemblant les éléments de la science des abaques. D'Ocagne a su extraire l'essentiel d'une quantité considérable de savoirs graphiques qui s'étaient accumulés

sur le terrain lors de la construction des voies de communication et des opérations de nivellement. Réalisant une brillante synthèse des principaux écrits antérieurs – ceux de Lalanne, Lallemand, Massau et les siens propres – il a épuré les techniques en question pour leur donner une forme se prêtant à une diffusion auprès d'un large public. Dans un article publié la même année, d'Ocagne insiste fortement sur la cohérence du nouveau corpus de connaissances, assurée par l'existence d'un principe théorique unificateur :

L'étude comparative des diverses méthodes rapidement indiquées dans les lignes qui précèdent nous a amené à reconnaître, en dépit des différences caractéristiques de leur mode d'application et de la diversité des points de départ d'où les ont fait dériver leurs auteurs, que ces méthodes ne résultent, au fond, que de variantes dans la mise en œuvre d'un principe unique qui se trouve ainsi dominer l'ensemble du corps de doctrine auquel nous donnons le nom de *Nomographie*. Cette remarque nous a permis dès lors de faire de ces diverses méthodes un exposé systématique auquel s'attache un double intérêt : un intérêt philosophique tenant à la mise en lumière du principe qui gouverne cette branche spéciale de la science appliquée ; un intérêt pratique tenant d'une part à la plus grande facilité d'assimilation de méthodes qui exigeaient jusqu'ici chacune une étude particulière, de l'autre à la plus grande sûreté des applications pour lesquelles la théorie générale indique, dans chaque cas, la façon dont il faut faire intervenir les principes.

Ce nouveau corps de doctrine, dont l'utilité pour les hommes techniques n'a pas besoin, croyons-nous, d'être démontrée, offre pour les mathématiciens l'intérêt d'une vaste application, à un ordre de choses purement pratique, des théories de la géométrie analytique ([124], p. 608).

Le texte de 1891, d'une petite centaine de pages, est clair, concis, élégant, agréable à lire. Il comprend, sans développement inutile, ce que tout ingénieur devrait connaître à propos des abaques, autrement dit ce qui pourrait constituer la trame d'un enseignement élémentaire efficace. D'Ocagne, à peine âgé de 28 ans, s'y montre encore relativement modeste : c'est ainsi qu'il accorde nettement plus de place aux abaques hexagonaux de Lallemand – qui, ne l'oublions pas, était son supérieur hiérarchique au Service du nivellement – qu'à ses propres abaques à points isoplèthes. Par la suite, d'Ocagne prend de l'assurance et développe une stratégie systématique pour s'approprier le plus complètement possible la nouvelle discipline. Dans le grand *Traité de nomographie* de 1899 [136], et encore plus dans la seconde édition de ce traité en 1921, il accorde la place principale à ses nomogrammes d'alignement, présentant souvent les résultats des autres auteurs comme des cas particuliers ou des ébauches de sa propre théorie générale. La fonction de ce traité assez indigeste de près de 500 pages a sans doute été davantage de donner du poids à la nomographie et à son fondateur vis-à-vis de la communauté scientifique, que d'être réellement utile au praticien : en effet, rempli de développements théoriques ardues et d'exemples sophistiqués, il se situe très loin de la réalité quotidienne de l'ingénieur de terrain.

Après 1891, l'action militante de d'Ocagne se déploie tout d'abord sur le plan symbolique du vocabulaire. Au départ, il y a seulement le terme « nomographie », censé marquer le véritable point de départ de la science des abaques. Puis, comme on l'a rapporté plus haut (cf. § 4.2.1), d'Ocagne abandonne les dénominations utilisées par ses prédécesseurs, par exemple les mots « abaque » ou « isoplèthe » dus à Lalanne, pour les remplacer par des créations personnelles. Il agit de même lorsque l'un de ses concurrents crée un concept nouveau : nous avons vu notamment comment il a introduit les expressions « genre d'un nomogramme » ou « point critique » pour remplacer l'« ordre nomographique » défini auparavant par Soreau et utilisé par Clark (cf. § 4.2.3 et § 4.2.4). Cette volonté hégémonique n'a pas manqué de heurter ses collègues, comme l'illustre la réaction compréhensible de Soreau à la tentative d'imposer le terme « nomogramme » :

Le seul motif d'accueillir le mot *nomogramme* serait d'établir un lien de terminologie avec le mot *Nomographie*, proposé par M. d'Ocagne et accepté aujourd'hui. Est-il suffisant pour abandonner, au profit d'un néologisme lourd, ce mot abaque qui, par un passé deux fois millénaire, est si intimement attaché aux origines et au développement de l'art du calcul, et qui, dans son acception nouvelle, se trouve déjà consacré par de remarquables travaux ([195], p. 69).

Au-delà de la question emblématique du vocabulaire, les efforts de d'Ocagne ont porté en second lieu sur la création d'enseignements pour diffuser la nouvelle science en cours de constitution. Il va de soi qu'une discipline ne peut se développer et survivre durablement que si elle est transmise aux nouvelles générations. La rédaction de traités de synthèse participe déjà de cette intention en identifiant, en épurant et en structurant les connaissances utiles qui méritent d'être retenues, mais cela ne suffit pas : il faut aussi créer et expérimenter des enseignements réels, et les accompagner de documents pédagogiques pouvant servir de modèles à d'autres enseignants qui ne sont pas forcément des spécialistes de la discipline naissante. D'Ocagne s'y est attelé avec énergie tout au long de sa carrière. Dès 1894, lorsqu'il est chargé d'enseigner le calcul des déblais et remblais à l'École des ponts et chaussées, non seulement il fait intervenir les abaques à points isoplèthes pour renouveler la tradition issue de Lalanne et Davaine ([127], [131]), mais il commence même son cours par une leçon préliminaire très pédagogique sur les diagrammes cotés ou abaques, qui a été publiée en 1898 dans le *Journal de l'École polytechnique* [133]. Un peu plus tard, lorsqu'elles sortent sous forme de livre en 1904, ses *Leçons de topométrie et de cubature des terrasses* [144] comprennent également des notions sommaires de nomographie. À l'École polytechnique, autre lieu où il professe, son cours de géométrie pure et appliquée, qui paraît en 1917-1918, contient encore une fois un chapitre limpide sur la nomographie ([155], chap. XI). Enfin, le cours libre de calcul graphique

et nomographie, ouvert à la Sorbonne le 1^{er} mars 1907, a fait l'objet d'un livre très riche qui a connu trois éditions [151].

Les efforts d'enseignement de d'Ocagne font rapidement des émules en France et à l'étranger. En 1899, Ernest Pasquier relate dans *L'enseignement mathématique* les initiatives prises à l'université de Louvain, en Belgique : un cours d'abaques, en sept leçons d'une heure, a été créé dans l'institut préparatoire aux écoles d'ingénieurs de l'université, tandis qu'un cours plus complet d'une quinzaine d'heures de nomographie générale est en passe d'être établi en deuxième année de ces mêmes écoles d'ingénieurs ([168], p. 356-357). En quelques années seulement, plusieurs écoles supérieures suivent l'exemple de Louvain et inscrivent la nomographie à leur programme, soit en tant que cours autonome, soit au sein de divers cours déjà existants. Dans une note publiée en 1902, d'Ocagne fait un bilan des cours mis en place à cette date ([140], p. 81-82) :

FRANCE : *École polytechnique* (Cours de Géométrie descriptive, M. Haag). *École des ponts et chaussées* (Leçons sur la cubature des terrasses, M. d'Ocagne). *École des Mines de Saint-Étienne* (Cours de Mécanique appliquée, M. Jouguet). *École forestière de Nancy* (Cours de construction de routes, M. Petitcollot).

ALLEMAGNE : *École technique supérieure de Stuttgart* (Cours de Géométrie descriptive, M. Mehmke). *Université de Göttingen* (Cours de Statique graphique, M. Schilling).

BELGIQUE : *Université de Louvain* (Cours spécial de Nomographie, M. Suttor).

ITALIE : *École d'application des ingénieurs de Padoue* (Cours de Statique graphique, M. Favaro). *École d'application des ingénieurs de Bologne* (Cours de Statique graphique, M. Gorrieri).

PORTUGAL : *Académie polytechnique de Porto* (Cours de construction de routes et chemins de fer, M. Laranjeira).

Les créations de cours de nomographie continuent à se multiplier rapidement dans la première décennie du xx^e siècle. D'Ocagne a précisé, dans un autre texte, son point de vue quant à cette introduction de la nouvelle discipline dans l'enseignement [138]. Il insiste sur le fait qu'elle n'est pas seulement utile pour les ingénieurs, mais aussi, par exemple, pour les artilleurs et les marins. Son caractère d'universalité fait donc que, selon lui, cette théorie doit être rattachée à l'enseignement mathématique général et trouver place, comme application, au sein de la géométrie analytique dès la classe de mathématiques spéciales.

La volonté de rattacher la nomographie aux mathématiques, plutôt qu'aux sciences de l'ingénieur, apparaît comme une constante chez d'Ocagne. Il faut y voir une autre facette de son militantisme pour promouvoir la science des abaques. Toute sa vie, il a cherché la reconnaissance des mathématiciens, persuadé sans doute que cela conférerait de la valeur et de la noblesse au corps

de doctrine qu'il avait fondé. Il remporta un premier succès en 1889, lorsque la Commission internationale du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques adopta le mot « nomographie » pour désigner la division X3 de ce répertoire. Un peu plus tard, en 1893, il présenta une communication au Congrès international des mathématiciens de Chicago (cf. § 4.2.2), dans laquelle il commença à évoquer certains problèmes théoriques posés par la représentation graphique des équations. David Hilbert (1862-1943) étant présent à Chicago, ce fut peut-être le point de départ de la réflexion qui conduisit ce dernier, lors du Congrès de Paris en 1900, à formuler en termes nomographiques son treizième problème sur l'« impossibilité de la résolution de l'équation générale du septième degré au moyen de fonctions de deux arguments seulement » ([69], rééd. 1990, p. 34-35 ; cf. § 3.7.3). D'Ocagne trouva ainsi l'occasion de participer à un débat de haut niveau entre mathématiciens. Dans le même temps, en parallèle de la sortie de son *Traité* de 1899, il publia plusieurs articles développant une présentation plus abstraite de la nomographie, dépouillée de ses applications aux sciences de l'ingénieur et centrée sur les questions de mathématiques pures qu'elle soulève ([135], [137], [142]). Par la suite, il continua d'envoyer sans relâche des articles aux principales revues de mathématiques pour attirer l'attention de ses collègues sur les progrès théoriques de « sa » spécialité. Ce travail de fond a porté ses fruits puisque, dans l'article « Numerisches Rechnen » de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* [110], Rudolf Mehmke (1857-1944) consacre une trentaine de pages à la nomographie, en citant largement les contributions de d'Ocagne. Ce dernier, chargé ultérieurement de l'adaptation française de l'article [111], en profita pour l'enrichir de façon importante. Pour finir, l'entrée à l'Académie des sciences en 1922 fut certainement vécue par d'Ocagne comme une reconnaissance définitive de la nomographie et de son auteur par la communauté scientifique. Soucieux de passer à la postérité, d'Ocagne constitua même, vers la fin de sa vie, un fonds spécial d'archives nomographiques à l'École des ponts et chaussées, contenant les ouvrages, brochures, lettres et nomogrammes qu'il avait conservés pendant quarante ans [163].

4.3.2. Débat de priorité entre les créateurs de la nomographie

L'action militante permanente de d'Ocagne a fortement contribué à le faire apparaître comme l'unique créateur de la nomographie. De fait, à partir du début du xx^e siècle, nombreux sont les ouvrages français et étrangers qui ne citent quasiment que lui lorsqu'il est question d'abaques. Pourtant, d'autres ingénieurs pouvaient légitimement revendiquer une place importante dans la constitution de la nouvelle discipline : outre Massau et Lallemant, qui avaient fortement renouvelé la science des abaques dans les

années 1883-1885 en même temps que d'Ocagne, il y avait aussi Soreau, dont les contributions théoriques avaient été essentielles à partir de 1901. Si Massau disparut en 1909 avant que la discipline acquière une importance propre à susciter des conflits de priorité, par contre, une vive polémique eut lieu en 1922 entre Lallemand, Soreau et d'Ocagne au sujet des origines de la nomographie et sur la paternité de plusieurs notions nouvelles. Cette querelle s'exprima à travers sept articles au moins, parus entre le 9 janvier et le 15 novembre 1922 dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* et dans la *Revue générale des sciences* : deux textes de Lallemand ([93], [94]), quatre de d'Ocagne ([157], [158], [159], [160]) et un de Soreau [197]. La plupart des arguments échangés dans ces textes figuraient déjà dans les publications antérieures des uns et des autres, sous forme de remarques incidentes ou de notes de bas de page, mais l'examen des échanges de l'année 1922 présente pour nous l'avantage d'accéder en une seule fois à la totalité du débat.

Le 9 janvier, se penchant sur la genèse de la science des abaqes, Lallemand reconnaît à d'Ocagne le mérite d'avoir, en 1884, transformé les abaqes à trois faisceaux de droites en abaqes à points alignés, mais il note que ces nouveaux abaqes, comme les précédents, ne traduisent que des relations à trois variables. En revanche, Lallemand revendique d'avoir, dès 1883, « par l'emploi combiné de deux règles très simples, dites de l'*addition* et de la *multiplication graphiques*, réussi à créer, sous le nom d'*Abaques hexagonaux*, la première *méthode générale de représentation graphique d'une équation à un nombre quelconque de variables* » ([93], p. 83). D'après le directeur du Service du nivellement, ce n'est que postérieurement que d'Ocagne a étendu à plus de trois variables sa méthode des points alignés, grâce à deux artifices qui, en fait, avaient déjà été utilisés avant lui : en effet, il s'agissait, soit de remplacer une échelle de points cotés par un réseau de points à deux cotes, idée qui se rencontre dès 1869 dans un abaque à quatre variables (cf. figure 4.23) des ingénieurs suisses Émile-Oscar Ganguillet (1818-1894) et Wilhelm Rudolph Kutter (1818-1888) pour représenter la loi de l'écoulement de l'eau dans les canaux [51], soit de décomposer l'équation proposée en un enchaînement d'équations à trois variables dont les abaqes peuvent s'accoler deux à deux, solution déjà exploitée avec les abaqes hexagonaux. Dans la suite, Lallemand résume les résultats importants obtenus par la nomographie en les attribuant, pour l'essentiel, à Soreau, dont le traité, dit-il, « est le document le plus considérable et le plus complet publié sur la matière » ([93], p. 82). Au final, le rôle de d'Ocagne, fortement minoré, se trouve à peu près réduit à l'application des théories de Chasles à l'invention de la méthode des points alignés.

Le 16 janvier, d'Ocagne répond que de nombreux types très généraux d'équations à plus de trois variables sont facilement représentables par des nomogrammes à points alignés, alors qu'avec des abaqes hexagonaux, ce

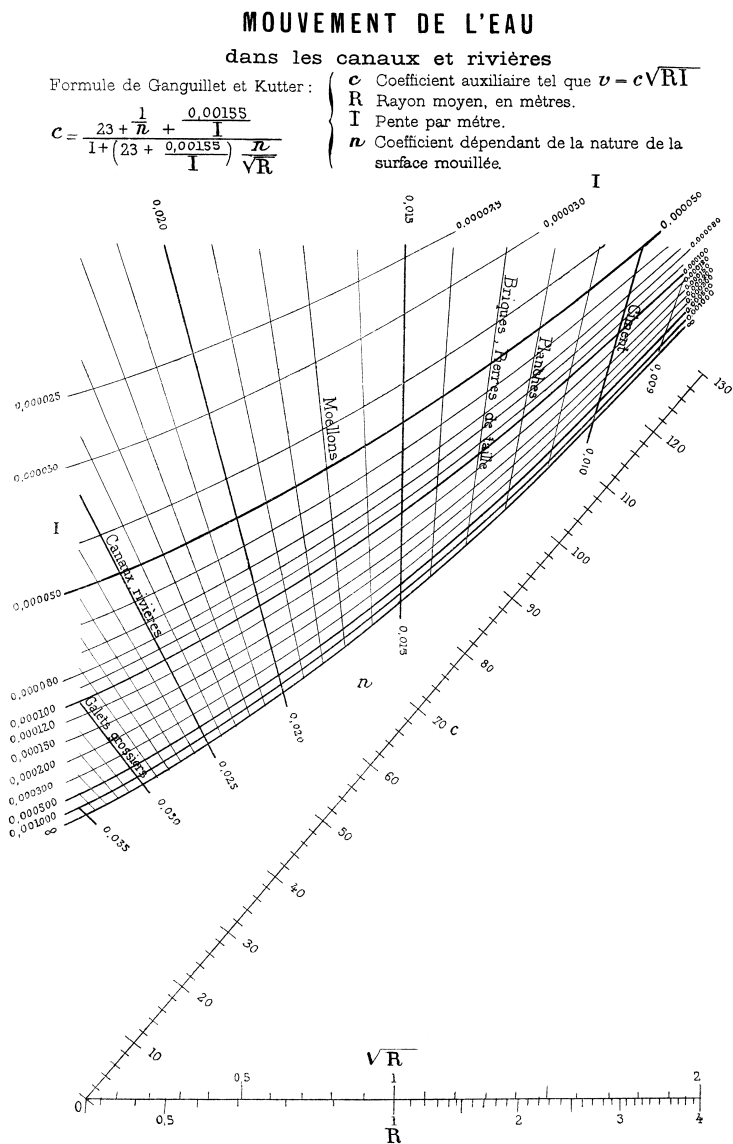


FIGURE 4.23. Abaque d'alignement de Ganguillet et Kutter, redessiné par Soreau ([191], p. 432)

n'est possible que dans des cas très particuliers. Pour appuyer son propos, il met en avant, comme exemples d'équations qui ne sont pas représentables par des abaques hexagonaux, « la presque totalité des équations à quatre

variables qui ont dû être traitées pendant la guerre à la Section de Nomographie pour le tir de l'artillerie, à la Section technique de l'Aéronautique pour la construction et l'emploi des avions, aux établissements Schneider pour l'autofrettage des bouches à feu et le calcul de trajectoires » ([157], p. 149). Enfin, à propos de la prétendue antériorité du graphique de Kutter et Ganguillet, il réplique qu'il ne s'agit que d'un exemple isolé dont personne n'a pu tirer de principe général pendant plus de vingt ans, avant que lui-même ne pense à faire appel au principe de dualité.

Le 30 janvier, Lallemand reprend l'étude comparée des abaques hexagonaux et des abaques à points alignés. Il passe en revue les différents types canoniques d'équations et, pour chacun d'eux, met en évidence assez honnêtement les avantages et les inconvénients pratiques de chacune des méthodes, en donnant assez souvent l'avantage aux points alignés. Pour répondre à l'argument de manque de généralité que lui adresse d'Ocagne, il fait remarquer que le cas générique de l'équation $f_{123} = 0$, représentée par des courbes de niveau en z_3 dans un damier formé d'horizontales et de verticales respectivement cotées en z_1 et z_2 , n'est finalement qu'un cas particulier d'abaque hexagonal, si l'on considère qu'il s'agit d'une échelle binaire cotée en z_1 et z_3 , accolée à une échelle linéaire en z_2 . De plus, il souligne que dans les cas les plus fréquents rencontrés dans la pratique, les échelles d'un abaque à points alignés sont coupées obliquement par l'index, alors que celles d'un abaque hexagonal le sont orthogonalement par les index correspondants, ce qui assure une meilleure précision de lecture et d'interpolation.

Le 6 février, tout en regrettant la poursuite de ce débat, d'Ocagne annonce qu'il répondra à Lallemand dans une publication ultérieure, qui parut effectivement le 30 avril. D'Ocagne y revient longuement, du point de vue théorique, sur les principes de représentation des équations à plus de trois variables. Il montre que les abaques hexagonaux ne permettent de traiter que certaines équations dissociables en une suite d'équations à trois variables. Autrement dit, il s'agit toujours de représentations composées résultant d'un enchaînement de nomogrammes à trois dimensions chacun. De plus, la liaison entre nomogrammes partiels s'y fait souvent au moyen de systèmes cotés surabondants correspondant à une même variable, ce qui fait que cette variable ne peut pas être prise pour inconnue, sauf à procéder par approximations successives et à rendre le procédé « purement illusoire » et « rigoureusement inutilisable ». À l'opposé, les nomogrammes à points alignés de d'Ocagne permettraient une véritable représentation plane d'une relation comprenant jusqu'à six dimensions, sans aucune dissociation en nomogrammes de dimension inférieure : en effet, on peut facilement réaliser un alignement entre trois échelles binaires correspondant chacune à deux variables. Au-delà de ces aspects théoriques, d'Ocagne joue de l'argument selon lequel l'arbitrage

en faveur des nomogrammes à points alignés aurait été rendu sans appel par les praticiens :

En fait, l'usage des abaques hexagonaux est pratiquement assez restreint, et la meilleure preuve à l'appui de ce dire est que les seuls exemples que l'on en puisse citer sont ceux qui ont été publiés par l'auteur même de la méthode. [...]

Or, alors qu'il semble bien qu'il n'ait guère été fait d'applications des abaques hexagonaux en dehors de celles que l'auteur du procédé a lui-même fait connaître, la méthode des points alignés est devenue d'un emploi tout à fait courant, journalier même, peut-on dire, entre les mains des techniciens de toute spécialité ([159], p. 238).

Le 5 septembre, Soreau intervient à son tour dans le débat, car il se sent lui aussi visé :

M. d'Ocagne s'ingénie à diminuer le rôle de Ch. Lallemant dans la représentation des équations par des abaques, et formule à mon endroit diverses critiques parvenues depuis à ma connaissance.

Nous pouvons, M. Lallemant et moi, juger ces critiques avec sérénité : en effet, n'ayant pas consacré notre existence à la Science des abaques, nous ne lui avons rien demandé d'autre que le plaisir d'y apporter notre contribution, et nous n'éprouvons nullement le besoin de défendre nos découvertes avec âpreté » ([197], p. 518).

Dans sa réponse, Soreau commence par rappeler avec force que c'est Lallemant qui a, le premier, constitué un corps de doctrine permettant de réaliser la représentation plane de relations à un nombre quelconque de variables. Il rejette comme arbitraires et artificielles les distinctions de d'Ocagne entre nomogrammes dissociés ou non, comprenant ou non des variables auxiliaires, faisant appel ou non à des systèmes cotés surabondants : en effet, de son point de vue, quels que soient les procédés techniques utilisés, un abaque représentant une équation à n variables est toujours un abaque à n dimensions. Par ailleurs, recourir à des procédés graphiques d'approximations successives ne lui semble nullement rédhibitoire, puisque cela reste toujours plus économique que d'effectuer les mêmes tâtonnements sous forme numérique. Soreau passe ensuite à des arguments d'une autre nature, reprochant à d'Ocagne de vouloir s'approprier tout ce qui touche à la science des abaques et de ne tolérer aucune incursion dans ce qu'il croit être son domaine. Pour bien remettre les choses à leur place, Soreau rappelle que les principales avancées théoriques de la nomographie sont dues à Saint-Robert, Massau, Lecornu, Gronwall, Clark et lui-même, et que « M. d'Ocagne n'a apporté à ces recherches aucune contribution, même légère » ([197], p. 523). La conclusion est sans appel : « Et c'est vraiment par trop négliger le mérite des uns et des autres que de voir en M. d'Ocagne le créateur de la Nomographie, y compris tous les développements qu'elle recevra jamais » (*ibid.*).

Dans un dernier article du 15 novembre, d'Ocagne répond à ces accusations, qu'il trouve injustes, en faisant notamment remarquer que les

recherches théoriques évoquées par Soreau n'ont présenté qu'un intérêt purement spéculatif, alors que lui, dans ses traités, a systématiquement proposé aux praticiens des résultats concrètement utilisables. Au final, les participants à cet intense débat de 1922 détiennent tous trois leur part de vérité, mais il est patent qu'ils développent leurs arguments selon des points de vue et des logiques différents, ce qui les amène de temps à autre à la limite de la mauvaise foi. Pour nous, ces échanges restent particulièrement instructifs, car ils nous révèlent la façon dont une discipline naissante, bien qu'issue d'un long cheminement collectif, a eu tendance à se personnaliser autour d'un seul individu et à rejeter dans l'ombre ses autres contributeurs.

4.3.3. Une histoire reconstruite *a posteriori*

Si les principaux personnages de la nomographie se sont quelque peu querellés à propos de leurs mérites respectifs, ils ont tous, en revanche, œuvré de concert à la reconstruction *a posteriori* d'une histoire de leur discipline sur la longue durée. En effet, leurs traités et autres publications de synthèse contiennent systématiquement de longues introductions à caractère historique et de nombreuses notes complémentaires de même nature, chaque auteur reprenant, en les enrichissant, les informations de ses prédécesseurs. On peut citer tout d'abord le mémoire de Lalanne de 1846, qui contient un chapitre entier intitulé « Résumé général et indication des travaux antérieurs qui se rattachent au sujet » ([83], p. 57-69), le sujet en question étant bien entendu celui des abaques à lignes concourantes. À la fin de sa carrière, Lalanne eut l'occasion d'approfondir cette étude dans le long résumé historique qu'il rédigea pour l'Exposition universelle de 1878 [88]. Quelques années plus tard, en 1885, dans le second volume de la version française de ses *Leçons de statique graphique*, Antonio Favaro (1847-1922), aidé par son traducteur Paul Terrier, fournit un nombre considérable de références sur l'histoire de la représentation graphique des fonctions à deux ou trois variables, ainsi que sur la géométrie anamorphique ([42], chap. v, vi et vii). Dans leurs grands traités, déjà cités plusieurs fois, d'Ocagne et Soreau incorporent eux aussi d'importantes informations historiques. Par ailleurs, dès que les auteurs allemands prennent connaissance des premiers travaux de d'Ocagne, ils se lancent à leur tour dans des recherches bibliographiques et découvrent de nouveaux travaux anciens susceptibles d'être considérés comme des anticipations des procédés nomographiques modernes : mentionnons surtout Mehmke, dont les efforts alimentent les nombreuses notes historiques de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* ([109], [110], [111]), et Paul Luckey (1884-1949), qui, dans deux articles de 1923 [98] et 1927 [99], repousse encore davantage les origines de la nomographie en remontant jusqu'à la science grecque antique et la science arabe médiévale.

À la suite de Luckey, d'Ocagne publie d'ailleurs un article intitulé « Le calcul nomographique avant la nomographie » [162] pour, comme à son habitude, synthétiser et reprendre à son compte les découvertes les plus récentes.

À travers ces recherches historiques, les fondateurs de la nomographie poursuivent deux objectifs en partie contradictoires. Il s'agit pour eux, d'une part, de trouver un maximum d'anticipations de la science des abaques pour donner après coup de la profondeur temporelle à leur discipline naissante, mais aussi, d'autre part, de minorer l'importance de tous les exemples anciens identifiés, en faisant bien remarquer que ce ne sont que des cas particuliers isolés n'ayant donné lieu à aucune théorie générale, afin de ne rien enlever à leurs mérites propres de créateurs du nouveau corps de doctrine.

Il n'est pas question de reprendre ici l'ensemble des références répertoriées dans les documents qui viennent d'être cités. Contentons-nous d'en mentionner quelques-unes qui semblent particulièrement importantes, en remontant progressivement dans le temps. Tout d'abord, Mehmke a pu rattacher à la méthode des points alignés de d'Ocagne deux exemples antérieurs à 1884 ([109], p. 56) : outre l'abaque d'hydraulique de Ganguillet et Kutter, daté de 1869 et déjà évoqué plus haut (cf. § 4.3.2), il y a aussi un exemple plus ancien, qu'August Ferdinand Möbius (1790-1868) a publié en 1841. Möbius fournit en fait deux solutions pour construire des tables graphiques de multiplication : la première repose sur le théorème des transversales de Menelaüs, la seconde provient de la remarque qu'on peut associer une parabole à une droite graduée (cf. figure 4.24) de sorte qu'une droite mobile passant par deux points de la parabole cotés par deux nombres, coupe la droite graduée en un point coté par le produit de ces deux nombres. En d'autres termes, tout revient à exploiter le fait que la droite qui joint les points d'ordonnées y_1 et y_2 de la parabole $y^2 = x$ coupe l'axe de cette parabole au point d'abscisse $-y_1 y_2$.

En ce qui concerne la représentation des surfaces au moyen de la projection de leurs courbes de niveau, Lalanne cite lui-même plusieurs précurseurs de ses lignes isoplèthes. Par exemple, en 1737, le géographe français Philippe Buache (1700-1773) avait présenté à l'Académie des sciences une carte de la Manche sur laquelle il avait tracé les lignes d'égale profondeur de la mer de 10 en 10 brasses ; cette idée de la représentation du relief du globe par des lignes de niveau fut exposée en détail dans son *Essai de géographie physique* publié en 1752. Une quarantaine d'années plus tard, Marc Bonifas, dit Ducarla (1738-1816), professeur établi à Genève, a utilisé le même procédé, cette fois pour des cartes terrestres, en marquant des nombres à côté des courbes de niveau équidistantes pour indiquer les hauteurs de ces courbes [30]. Dans le même ordre d'idées, on peut mentionner les lignes d'égale déclinaison de l'aiguille aimantée tracées par l'astronome anglais Edmond Halley (1656-1742) sur une mappemonde au début du xvii^e siècle, et le tracé des méridiens

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		2		2		2		2		2		2		2	
3			3		3		3		3		3		3		3
4				4		4		4		4		4		4	
5					5		5		5		5		5		5
6						6		6		6		6		6	
7							7		7		7		7		7
8								8		8		8		8	
9									9		9		9		9
10										10		10		10	
11											11		11		11
12												12		12	
13													13		13
14														14	
15															15
16															

FIGURE 4.24. Table de multiplication de Möbius ([115], pl. 1, fig. 2)

magnétiques, dont l'idée revient à Leonhard Euler (1707-1783) ([196], t. 1, p. 17). Favaro a même signalé deux exemples encore plus anciens d'utilisation de courbes cotées : l'un en 1557 dans l'*Astronomique discours* [5] de l'astronome écossais James Bassantin (ca. 1504-1568) pour des études sur le mouvement des astres, l'autre en 1665 dans l'*Art des fontaines* [47] du Père jésuite Jean François, qui rapporte que les Hollandais faisaient figurer des lignes d'égal niveau sur leurs cartes de dessèchement. Enfin, on a pu comparer à l'anamorphose de Lalanne la projection cylindrique de Gerardus Mercator (1512-1594), qui, grâce à une nouvelle échelle des latitudes, permet de remplacer les loxodromies de la sphère par des lignes droites. Pour ce qui est de l'application des lignes cotées au calcul, on a trouvé une anticipation des tables graphiques de Pouchet dans celles que George Margetts (1748-1808) publia en 1790 dans ses recueils *Horary Tables* [102] et *Longitude Tables* [103]. En suivant Luckey, d'Ocagne ajoute d'ailleurs que les abaques cartésiens particuliers de Margetts et Pouchet ont été précédés de

[...] beaucoup d'autres remontant même jusqu'aux origines de la science grecque et de la science arabe, tels que l'*Analemna* de Ptolémée, l'astrolabe plan et certains quadrants arabes dont divers succédanés se retrouvent chez les mathématiciens de l'Europe occidentale au temps de la Renaissance. Il est d'ailleurs très digne de remarque que ces exemples anciens de calcul nomographique se rapportent tous à l'astronomie et à ses applications, plus particulièrement à la gnomonique et à la navigation » ([162], p. 58-59).

Comme on l'a vu dans le chapitre 2, c'est effectivement un fait avéré que des procédés évoquant étrangement la nomographie moderne ont été exploités depuis fort longtemps pour la construction de cadrans solaires, cadrans lunaires, astrolabes et autres instruments astronomiques.

On a pu aussi rattacher à l'histoire de la nomographie l'ensemble des règles et cercles à calcul, qui apparaissent *a posteriori* comme des nomogrammes à échelles mobiles. La règle à calcul à échelles logarithmiques, instrument d'origine anglaise datant du xvii^e siècle, équivalent graphique des tables de logarithmes, a probablement été le nomogramme le plus célèbre et le plus utilisé jusque dans les années 1970, avant son remplacement par les calculatrices électroniques de poche. Nous ne reviendrons pas ici sur cet instrument bien connu du calcul graphique, dont l'histoire a été faite dans les ouvrages classiques de Florian Cajori ([12], [13]) et dans des travaux ultérieurs ([75], [200]).

En restant dans le domaine des instruments à systèmes cotés mobiles, Luckey ([98], p. 55) a retrouvé le *quadratum horarium generale* de Regiomontanus (1436-1476). Cet appareil fort complexe (cf. figure 4.25) comprend plusieurs échelles et faisceaux de droites cotées, et un fil à plomb fixé à l'extrémité d'un bras articulé permettant de placer le point de suspension de ce fil en un point donné d'un réseau à deux cotes. L'ensemble constitue une représentation graphique de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t,$$

dans laquelle les quatre variables sont la latitude géographique φ , la déclinaison solaire δ , le temps solaire t et la hauteur h du Soleil.

Nous ne poursuivrons pas davantage cette énumération de représentations graphiques qui précèdent chronologiquement ce qui nous est apparu depuis le début de ce chapitre comme étant la « nomographie » et qui, jointes à bien d'autres passées ici sous silence, permettraient d'écrire après coup une sorte de « préhistoire » de cette discipline, à l'instar de ce qu'ont tenté de faire ses fondateurs au début du xx^e siècle. L'intérêt de l'énumération est plutôt d'illustrer et de renforcer ce que nous suggérions plus haut, à savoir, d'une part, qu'une collection d'exemples et d'applications isolés, aussi nombreux et ingénieux soient-ils, ne suffit pas à constituer en soi une discipline, mais également, d'autre part, qu'une discipline n'a aucune chance de naître s'il n'existe pas au préalable un riche terreau de pratiques dans lesquels les concepts et techniques nécessaires sont implicitement présents.

4.3.4. Diffusion internationale de la nomographie

Pour achever de parcourir les différentes facettes de ce processus de constitution de la nouvelle discipline, il nous reste à analyser les circonstances

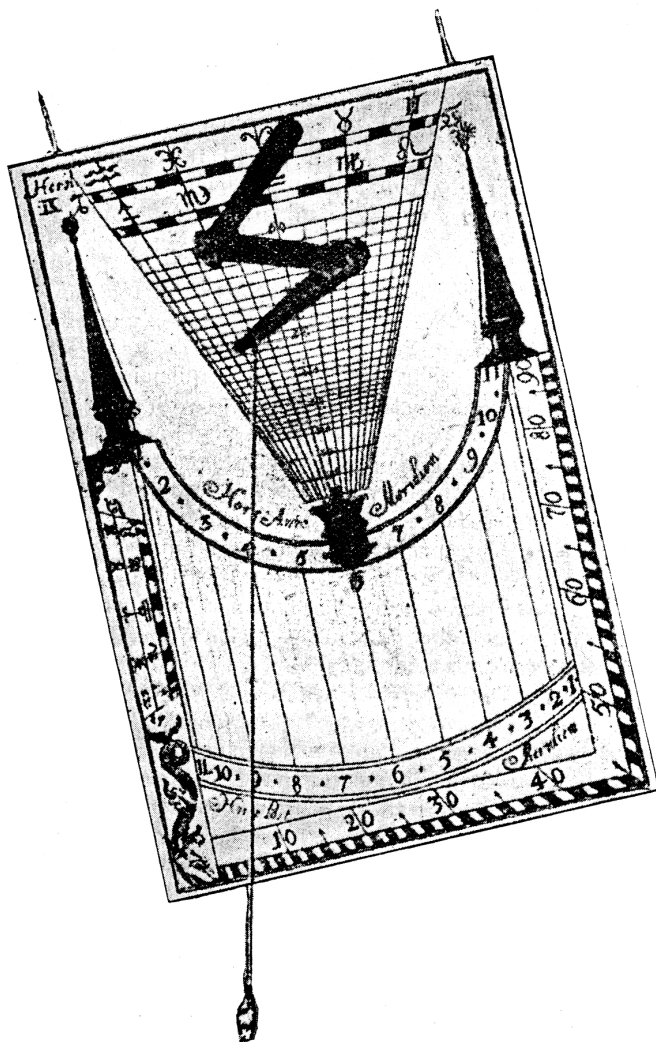


FIGURE 4.25. *Quadratum horarium generale* de Regiomontanus ([158], p. 62)

de sa diffusion internationale. Au départ, la nomographie est une science essentiellement française. D'ailleurs, pendant les premières années de son développement, les quelques auteurs non francophones qui lui apportent des contributions significatives, comme Clark, Gronwall ou Margoulis, font l'effort de publier leurs travaux en français. Toutefois, à l'issue de cette phase initiale, la science des abaques essaime rapidement dans des pays de plus en

plus nombreux. D'Ocagne, avec son militantisme infatigable, est naturellement le premier à se dépenser pour faire connaître sa création au-delà des frontières. Il expose les principes de la nomographie dans une communication au Congrès international de Chicago en 1893, dans des cycles de conférences à l'étranger (à Saint-Petersbourg en 1910, à Édimbourg en 1914, à Bruxelles en 1920), dans des publications en italien [141] et en allemand [143]. Par ailleurs, son ouvrage principal, le *Traité de nomographie* de 1899, fait l'objet de 59 traductions ou adaptations en 14 langues : allemand (17 dont 1 en Autriche), anglais (8 dont 5 aux États-Unis et 1 aux Indes anglaises), arabe (1 en Égypte), espagnol (2), finlandais (1), hollandais (3), hongrois (1), italien (4), japonais (3), norvégien (1), polonais (2), roumain (1), russe (14), tchèque (1) ([166], p. 386-387).

Cette répartition de langues est déjà intéressante en soi, avec l'allemand qui arrive en tête, suivi du russe. Pour la confirmer et la préciser, nous avons analysé les langues d'un corpus de 1488 publications sur la nomographie, rassemblé notamment à partir des bases de données *Zentralblatt MATH* et *MathSciNet*. Il convient de préciser que ces bases de données ne répertorient que les publications ayant un rapport avec les mathématiques. En particulier, sauf exception, elles ne dépouillent pas les articles parus dans les revues techniques et de sciences de l'ingénieur, ni dans les revues de sciences physiques, astronomiques, chimiques, biologiques, médicales ou économiques, qui, pourtant, ont toutes contenu et contiennent encore de nombreux travaux ayant trait à la nomographie. Il est donc probable que notre corpus ne recouvre qu'une petite partie de la littérature nomographique existante et que, par ailleurs, il privilégie les recherches théoriques sur les abaques au détriment des terrains d'intervention de ces derniers. Cependant, cet ensemble de références nous semble suffisamment important pour que le spectre linguistique qui s'en dégage puisse être considéré comme significatif.

Pour simplifier la présentation des résultats de l'enquête (cf. table 4.1 et figure 4.26), nous avons défini quatre grandes périodes. La première va de 1795 à 1921, soit des premiers abaques de Pouchet jusqu'aux grands traités de d'Ocagne et Soreau : c'est la phase initiale de constitution de la discipline. Deux autres coupures, l'une en 1945, l'autre en 1972, ont ensuite été retenues. La fin de la Seconde Guerre mondiale, en 1945, se traduit d'abord par une redéfinition des frontières politiques et des équilibres économiques en Europe, ce qui n'a pas manqué d'avoir des conséquences importantes sur l'activité scientifique et les langues de publication, mais c'est aussi le moment où entrent en service les premiers ordinateurs, qui ont commencé à faire basculer les pratiques de calcul de l'analogique vers le digital. Dans le même ordre d'idées, l'année 1972 a été choisie car elle voit apparaître les premières calculatrices électroniques de poche, suivies peu après par les

	1795-1921	1922-1945	1946-1972	1973-2009	Total
Français	153	77	24	18	272
Allemand	51	199	80	15	345
Italien	9	21	11	1	42
Espagnol	6	2	8	0	16
Néerlandais	0	15	3	0	18
Anglais	14	64	74	67	219
Russe	4	32	232	126	394
Roumain	0	0	45	8	53
Bulgare	0	0	25	17	42
Tchèque	4	8	18	2	32
Polonais	0	0	11	1	12
Hongrois	0	0	9	1	10
Slovaque	0	0	7	1	8
Autres langues	1	8	12	4	25
Total	242	426	559	261	1488

TABLE 4.1. Nombre de publications de nomographie par langue et par période

premiers ordinateurs personnels : elle représente donc une étape importante pour repérer un éventuel déclin du calcul graphique et, plus généralement, du calcul analogique. Cette dernière coupure coïncide aussi, plus ou moins, avec la montée en puissance de l'anglais comme langue de publication adoptée par des scientifiques du monde entier.

Pendant la période 1795-1921, le français domine sans surprise, conséquence du fait que la nomographie a été essentiellement créée par des ingénieurs français et qu'elle ne s'est pas encore beaucoup diffusée dans les pays non francophones. Jusqu'à la parution de la brochure de d'Ocagne en 1891, le français est même la langue quasi exclusive des publications, l'allemand n'entrant véritablement en jeu que dans le courant des années 1890.

Entre 1922 et 1945, l'allemand prend progressivement le dessus sur le français et devient la langue principale de la littérature nomographique. C'est incontestablement le reflet de la suprématie scientifique et économique de l'Allemagne durant ces années-là, ainsi que de son influence culturelle sur toute une partie de l'Europe, dans laquelle des chercheurs de nombreuses nationalités publient en allemand. En parallèle, des travaux sur la nomographie commencent à paraître avec un temps de retard en Angleterre et aux États-Unis et, encore plus tardivement, en Russie.

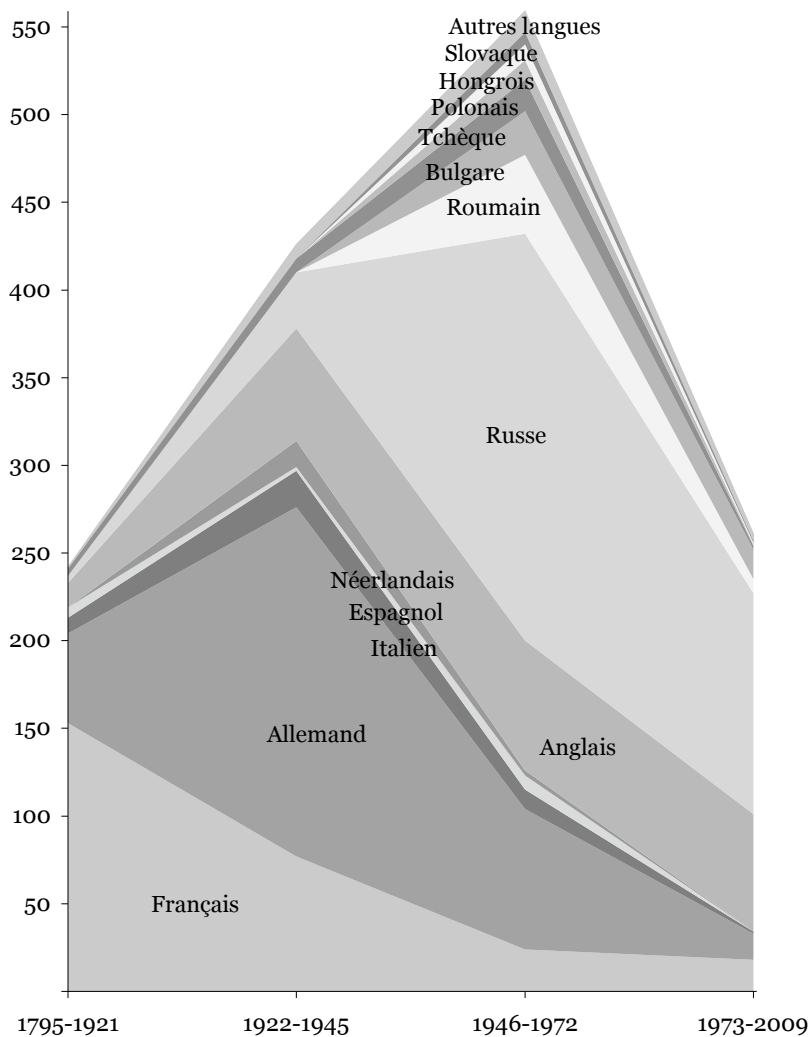


FIGURE 4.26. Les langues de la nomographie

Après la Seconde Guerre mondiale, pendant les années 1946-1972, on observe un changement profond de la situation. C'est le russe qui devient, de loin, la première langue de la science des abaques. Plus généralement, alors que cette spécialité tend à décliner à l'Ouest, elle devient un domaine de recherche extrêmement vivace dans les pays de l'Est, avec, à côté du géant russe, des écoles très dynamiques en Roumanie, en Bulgarie, en Tchécoslo-

vaquie, en Pologne et en Hongrie. Pour prendre véritablement la mesure du développement de la nomographie dans les pays de l'ex-bloc soviétique, il faudrait pouvoir comptabiliser aussi dans ce groupe les publications en allemand issues de l'Allemagne de l'Est, ainsi que les nombreuses publications en français et en anglais signées par des chercheurs de l'Est pour faire connaître leurs résultats à l'Ouest. On pourrait avancer l'hypothèse que la Russie et ses satellites ont trouvé dans la nomographie, plus généralement dans les méthodes graphiques, des techniques performantes de calcul à coût très faible, permettant de compenser, dans une certaine mesure, le retard qui était le leur dans l'équipement en calculateurs électroniques et autres instruments scientifiques de pointe.

La dernière période, qui va de 1973 à nos jours, fait surtout apparaître un déclin sensible des recherches théoriques sur la nomographie. La généralisation des calculatrices de poche et des ordinateurs à faible prix enlève inévitablement de l'attrait aux méthodes graphiques. De plus, les résultats déjà acquis sur les abaques étant largement suffisants pour traiter la quasi totalité des applications envisageables, les quelques courants de recherche qui subsistent se cantonnent à un registre purement spéculatif (anamorphose générale, problèmes abstraits de représentation des fonctions, abaques spatiaux à points coplanaires, etc.). Cela ne signifie pas que la nomographie n'est plus utilisée : on verra, au contraire, qu'elle reste extrêmement présente dans certains domaines comme la médecine (cf. § 4.4.2), mais cela traduit le fait qu'elle n'est plus guère une spécialité vivante au sein des mathématiques. Par ailleurs, pour ce qui est de la répartition des langues utilisées dans cette dernière période, on observe encore une prédominance des pays de l'Est. Les publications qui subsistent en anglais et en français ne doivent pas faire illusion : elles sont, en grande partie, produites par des chercheurs de l'Est (en général roumains pour ce qui est du français).

Après ce bref panorama linguistique, qui révèle déjà en lui-même des informations pertinentes sur la circulation mondiale des savoirs nomographiques, nous allons nous pencher plus spécifiquement sur le cas de quelques écoles nationales, en cherchant à analyser en priorité comment, dans la première moitié du ^{xx}e siècle, la nomographie a pu pénétrer et se développer, selon des modalités et des rythmes variés, dans des milieux d'ingénieurs et de scientifiques de cultures différentes.

Allemagne. L'Allemagne est le premier pays à emboîter le pas de la France pour l'emploi des tables graphiques. Dès 1846, l'abaque universel de Lalanne est traduit et publié en allemand [84]. Assez rapidement, des auteurs comme Gustav Herrmann (1838-1907) [64], Culmann ([20], 2^e éd., p. 76-85) ou Vogler ([206], [207]) retrouvent, relaient et appliquent les idées de Lalanne sur les abaques cartésiens et la géométrie anamorphique. De

même, peu après la publication de la brochure de d'Ocagne en 1891, Mehmke se charge de présenter à ses compatriotes les nouveaux abaques à points alignés ([109], [110]), en faisant référence à de nombreux auteurs allemands chez qui l'on rencontre des idées voisines de celles de d'Ocagne. Cela n'a rien de surprenant quand on se souvient de toutes les contributions que les savants allemands ont apportées à la géométrie projective et à la statique graphique dans la seconde moitié du XIX^e siècle (cf. § 5.2). Le travail de diffusion de Mehmke est prolongé par Schilling, qui publie en 1900, sous le titre *Über die Nomographie von M. d'Ocagne*, un résumé très clair, en une cinquantaine de pages, du *Traité* de d'Ocagne de 1899, qui en faisait près de 500. Ce petit ouvrage semble avoir eu du succès, puisqu'il connut deux autres éditions, en 1917 et 1922. À partir de là, les ingénieurs et mathématiciens appliqués allemands, qui avaient déjà développé des pratiques et des enseignements approfondis dans le domaine du calcul par le trait et de la statique graphique, y ont naturellement incorporé les nouveaux savoirs nomographiques, devenus facilement disponibles dans leur langue. Le nombre de publications en rapport avec les tables graphiques devient rapidement considérable, comme on l'a vu plus haut. Parmi les traités portant spécifiquement sur la nomographie, sont souvent cités ceux de Luckey, *Einführung in die Nomographie* [97] et sa version enrichie *Nomographie* [100], qui totalisent ensemble onze éditions à partir de 1918, celui de Hans Schwerdt (né en 1894), *Lehrbuch der Nomographie*, publié à Berlin en 1924 [186] et celui de Walther Meyer zur Capellen (1902-1985), *Leitfaden der Nomographie*, qui, en 1953, est probablement le dernier nouveau livre sur le sujet publié en Allemagne. Au-delà de ces ouvrages spécialisés, la plupart des traités de calcul graphique ou, plus généralement, de calcul numérique et de mathématiques pratiques, contiennent un chapitre assez conséquent sur la nomographie, comme, par exemple, ceux de Mehmke [112], de Carl Runge (1856-1927) [182] ou de Friedrich Willers (1883-1959) [209]. Dans un pays déjà fortement imprégné de calcul graphique (voir le chapitre 5 pour la statique graphique et le chapitre 6 pour l'intégration graphomécanique), la nomographie a donc été rapidement adoptée et pratiquée par la majorité des ingénieurs allemands, et a été facilement incorporée dans leur système de formation.

Italie. Dans ses *Leçons de statique graphique*, dont l'édition française très enrichie est parue en 1885, Favaro, professeur à l'université de Padoue, présente un historique très fouillé sur les abaques à entrecroisement et la géométrie anamorphique de Lalanne, dans lequel il ne cite que des auteurs français et allemands. Il ne semble donc pas qu'il y ait eu, avant cette date, des travaux originaux en Italie. Ce n'est qu'en 1895 qu'on repère un recueil de tables graphiques pour des problèmes de résistance des matériaux [55], dû à Domenico Gorrieri, de Bologne. En 1920, le même auteur écrit un petit

traité pratique de nomographie à destination des ingénieurs [56]. Sinon, en Italie, la nomographie s'est surtout développée dans le domaine de l'artillerie navale, avec de nombreux articles dans la *Rivista marittima*, repris ensuite sous formes de monographies publiées à Livourne. En 1900, Giuseppe Pesci, professeur ordinaire à l'*Accademia navale di Livorno*, emploie la méthode des points alignés de d'Ocagne pour construire des abaques destinés à résoudre les problèmes de trigonométrie sphérique [172]. Il collabore ensuite avec Gregorio Ronca (1859-1911), professeur d'artillerie dans le même établissement, qui est considéré en Italie comme le père de la balistique navale. Ils sortent ensemble un *Manuale del tiro* [180] et des abaques de tir [174]. Ce manuel contient un court traité que Pesci a publié également à part sous le titre *Cenni di nomografia* [173], traité qui a connu un certain succès et qui a notamment bénéficié de traductions en espagnol et en portugais. À peu près à la même époque, on peut mentionner un petit livre de Giuliano Ricci, *La Nomografia*, paru à Rome en 1901. De façon générale, en Italie, la tendance est à des traités assez courts, directement utilisables par les praticiens dans des contextes précis. La nomographie ne semble pas avoir connu dans ce pays des évolutions d'une ampleur comparable à ce qui s'est passé en France et en Allemagne.

Espagne. Les premières traces d'une implantation de la nomographie dans la péninsule ibérique peuvent être identifiées dans un traité de calcul graphique et de nomographie de Ramón Dorda López, publié en 1907 à Ségo-vie [29], et dans un ouvrage de l'ingénieur militaire Ricardo Seco de la Garza, paru la même année à Madrid [187]. Ce dernier ouvrage, contenant 121 nomogrammes et préfacé par d'Ocagne, connut trois éditions espagnoles et une version française, qui parut à Paris en 1912 sous le titre *Les nomogrammes de l'ingénieur* [189]. Pour couvrir toutes les formules intervenant de façon courante dans l'art militaire, l'auteur fait appel uniquement à des nomogrammes à points alignés, inspirés des traités de d'Ocagne de 1891 et 1899. Il manifeste ouvertement sa volonté de donner une version de la nomographie à la portée de tous les ingénieurs de terrain, « en faisant disparaître des Manuels toute formule un peu compliquée » ([189], p. 2), et il insiste sur l'utilité particulière que cette discipline présente pour les militaires : « Cette utilité augmente quand il s'agit des applications militaires de l'art de l'ingénieur, car en campagne (où l'on peut dire que le temps, c'est du sang et de l'or), on dispose rarement de l'espace et des moyens nécessaires pour résoudre des calculs laborieux ou comparer des solutions » ([189], p. 1). Notons que Seco de la Garza a publié un second ouvrage dans la même veine [188].

La nomographie connaît ensuite une rapide diffusion en Espagne grâce au laboratoire de mathématiques créé en 1915 à l'*Universidad Complutense de Madrid* par Julio Rey Pastor (1888-1962), dont la section « Trabajos gráfi-

cos y nomográficos » est dirigée par Sixto Cámara Tecedor (1878-1964). Rey Pastor inclut des chapitres de nomographie dans des traités d'enseignement destinés aux étudiants de mathématiques pures et de sciences de l'ingénieur, où la science des abaques est présentée comme une application de la géométrie analytique et de la géométrie projective. Cámara Tecedor, de son côté, utilise la nomographie comme outil dans des travaux de balistique publiés entre 1912 et 1917 : son article le plus important, portant sur l'étude graphique de la courbe balistique quelle que soit la résistance de l'air, fut même traduit en italien [14]. En 1920, Rey Pastor accepte un poste à l'université de Buenos Aires, ce qui a certainement contribué à une diffusion de la nomographie vers l'Amérique du Sud, où l'on constate effectivement quelques publications sur le sujet dans les années qui suivent. Par contre, la production nomographique semble se tarir quelque peu en Espagne après 1920. En effet, ce n'est qu'en 1953 qu'on y retrouve un ouvrage important, le *Tratado de nomografía* de Juan Carlos Belgrano Brémard, A. López Nieto et José Maria Urcelay, avec une préface de Rey Pastor, qui est devenu par la suite le classique espagnol [6]. Dans les années 1950, ces trois auteurs se distinguent également par des recherches originales, notamment la création des « abaques barycentriques et rhomboïdaux », ces derniers permettant de représenter assez simplement certaines équations à huit variables en disposant quatre échelles binaires en parallélogramme.

Angleterre. Le cours de Kämtz, avec le fameux appendice de Lalanne, a été traduit en anglais en 1845 sous le titre *A Complete Course in Meteorology* [70]. Une version anglaise de l'abaque universel a également été publiée en 1846 [85]. Pourtant, cela n'eut guère d'effet. Tandis que les grands travaux de chemin de fer entraînent un développement important des abaques en France et en Belgique, on n'observe rien d'analogue outre-Manche. À ce sujet, il est instructif d'examiner les trois rapports coordonnés dans les années 1890 par Henry Selby Hele Shaw (1854-1941), à la demande de la *British Association for the Advancement of Science*, sur le développement des méthodes graphiques dans les sciences de l'ingénieur ([60], [61], [62]). Dans le premier rapport, daté de 1890, sont certes cités des ouvrages comme ceux de Culmann ([20], 2^e éd.), Favaro [40] et Étienne-Jules Marey (1830-1904) [101], qui contiennent tous un exposé de la géométrie anamorphique de Lalanne, ou encore les tables graphiques de Vogler ([206], [207]), mais, en dépit de ces références, le calcul graphique apparaît comme étant simplement identifié à la statique graphique. En 1893, le second rapport révèle une meilleure prise de conscience du large champ d'application du calcul graphique, avec de longs développements sur les règles à calcul et sur l'emploi de courbes pour représenter des relations à deux variables, dépeint comme familier aux ingénieurs britanniques. Par contre, la phrase suivante semble exclure tout

ce qui relève de la nomographie proprement dite : « L'utilisation de trois dimensions, ou de la représentation de trois variables par les positions d'un point, implique le recours à des modèles ou à la stéréotomie, et n'est pas prise en considération lorsque l'on traite des méthodes graphiques »⁷. Le rapport contient cependant quelques pages sur les courbes cotées pour représenter une relation quelconque à trois variables à la manière d'une surface topographique, présentées comme une nouveauté encore peu répandue, avec ce commentaire : « Les auteurs français y font référence dans divers traités sous la dénomination de "courbes d'égal élément" »⁸. Du dernier rapport de 1894 se dégage la conclusion qu'en Angleterre, le calcul graphique se résume alors à deux tâches : tracé de courbes représentatives et interpolation pour les relations à deux variables, utilisation de diagrammes réciproques pour les structures. Rien n'a encore filtré des techniques de Massau, Lallemand et d'Ocagne. Signalons comme particulièrement significatif de ce retard un article de Russel Scott Scholefield, paru en 1903 dans les *Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers* [185], qui porte sur l'usage des échelles logarithmiques pour la construction des courbes et qui souligne l'intérêt de ramener des courbes à des lignes droites, avec l'exemple du produit $ab = c$, représenté grâce à la relation $\log a + \log b = \log c$. À la lecture de cet texte qui se prétend novateur, il est clair que même les idées de Lalanne, déjà vieilles d'un demi-siècle, peinent à être diffusées en Angleterre.

La situation commence à évoluer avec les articles du capitaine Robert Knox Hezlet (1879-1963) dans le *Journal of Royal Artillery* à partir de 1909. Cet expert en balistique publie d'abord un nomogramme pour une équation utile aux artilleurs [65]. En 1910, il écrit un long papier intitulé « The graphic representation of formulæ » [66], qu'il présente comme le produit de la lecture de deux livres de d'Ocagne : le *Traité* de 1899 et *Calcul graphique et nomographie*, qui vient juste de paraître en 1908. Pour traduire le mot « nomogramme », Hezlet crée « *nomogram* », et c'est apparemment la première fois que le mot apparaît dans la littérature en langue anglaise. Il est probable que cet article marque l'introduction en Grande-Bretagne des idées de d'Ocagne. Notre capitaine écrit ensuite un petit traité sur la nomographie en 1913 [67], contenant un résumé clair et concis de la théorie, et de nombreux exemples personnels. Il publie encore un article en 1920 [68], mais tout cela, confiné dans le milieu des artilleurs, ne suffit pas à populariser la nouvelle discipline à l'extérieur. À cet effet, il faut attendre deux textes académiques écrits par des universitaires. En 1920 paraît *A First Course in Nomography*

7. « The use of three dimensions, or of representation of three variables by the positions of a point, involves the use of models or stereotomy, and is excluded from consideration in treating of graphical methods » ([61], p. 374).

8. « They are referred to by the French writers in various treatises under the title of "courbes d'égal élément" » ([61], p. 384).

[10], de Selig Brodetsky (1888-1954). Né en Russie, émigré en Angleterre, Brodetsky parvient à suivre des études de mathématiques à *Trinity College*, à Cambridge, avant de conduire une carrière universitaire à Bristol, puis à Leeds. Après un article en 1918 [9], dans lequel il vante les avantages de la nomographie par rapport aux méthodes algébriques classiques pour résoudre les équations, il se lance dans la rédaction d'un traité plus complet, issu de l'expérience qu'il a acquise dans la confection de nomogrammes pour les différents départements technologiques de l'université de Leeds. Simple et très progressif, se restreignant aux nomogrammes d'alignement, l'ouvrage de Brodetsky se veut avant tout un outil directement utilisable par les ingénieurs. Cependant, c'est un autre traité, *The Nomogram* de Harold John Allcock et John Reginald Jones, qui devient le texte standard sur le sujet en Grande-Bretagne : paru en 1932, il connaît cinq éditions jusqu'en 1962. Il se présente comme le premier exposé de synthèse en Angleterre, et rend hommage à Soreau et d'Ocagne, considérés comme les fondateurs de la discipline. Faisant un usage systématique des déterminants et utilisant, à l'instar de Soreau, des coordonnées cartésiennes plutôt que parallèles, il dresse un catalogue de toutes les formes courantes d'équations et de nomogrammes, avec un nouveau type de classement, qui, cette fois, ne suit ni d'Ocagne, ni Soreau. Bien qu'il reste encore très en deçà des traités français, dans le souci évident de rester accessible aux ingénieurs, l'ouvrage d'Allcock et Jones adopte un niveau mathématique nettement supérieur à celui des traités anglais précédents.

États-Unis. La communauté mathématique américaine prend probablement connaissance de la nomographie en 1893 lorsque d'Ocagne présente une communication au Congrès international de Chicago. Sans surprise, le développement ultérieur de la discipline aux États-Unis suit à peu près le même cours qu'en Angleterre, dans la mesure où les ouvrages en langue anglaise sont en général disponibles à la fois dans les deux pays. En 1906, le mathématicien E. H. Moore, de l'université de Chicago, met en avant les potentialités interdisciplinaires de la nomographie pour rénover l'enseignement secondaire des mathématiques ([54], p. 320). En 1908, une série d'articles de John Bailey Peddle (1868-1933), professeur de construction des machines au Rose Polytechnic Institute, dans l'Indiana, paraît dans *The American Machinist* pour populariser les idées de d'Ocagne auprès des ingénieurs américains. Ces articles sont réimprimés sous la forme d'un petit livre qui connaît deux éditions, en 1910 et 1919 [170]. Le traitement mathématique du sujet y est simplifié autant que possible, avec un rejet dans le dernier chapitre de l'usage des déterminants. Les lecteurs souhaitant des approfondissements sont invités à se reporter aux ouvrages de d'Ocagne et Soreau. Le livre se présente comme un ensemble de conseils pratiques pour construire les types les plus

courants d'abaques (à lignes concourantes, à points alignés, hexagonaux), toujours présentés sur des exemples concrets familiers aux ingénieurs. Voici comment Peddle justifie son travail :

Bien que des ouvrages sur la nomographie aient été publiés dans de nombreuses langues étrangères, il ne semble pas que quoi que ce soit ait été écrit sur le sujet en anglais en dehors de quelques articles isolés dans des revues, qui ont seulement couvert des aspects partiels du domaine. Certes, les livres sur le calcul graphique ne sont pas rares en anglais, mais cela est en général considéré comme quelque chose de différent de la nomographie, bien qu'une ligne précise de démarcation soit assez difficile à tracer entre les deux sujets⁹.

D'après cette citation, ce que disait Hele Shaw pour l'Angleterre semble s'appliquer aussi aux États-Unis, tout au moins jusque vers 1910. La situation change véritablement à ce moment-là, avec les premières publications de Peddle dont on vient de parler, mais aussi avec l'invitation de Runge à la *Columbia University* de New York pour y donner un cours de calcul graphique d'octobre 1909 à janvier 1910. Ce cours, publié sous le titre *Graphical Methods* en 1912 [181], contient un chapitre sur la nomographie qui a joué un grand rôle dans la diffusion des savoirs allemands – et, indirectement, français – outre-Atlantique. L'année 1912 voit aussi la publication de l'article de Gronwall sur l'anamorphose générale, suivi peu après par celui de Kellogg, autant de travaux montrant l'intérêt des mathématiciens américains pour la nomographie et le haut niveau qu'ils ont rapidement atteint dans cette spécialité (cf. § 4.2.2). En revenant du côté des praticiens de terrain, on peut signaler un court article de 1915 d'un certain Richard C. Strachan, qui est régulièrement cité par la suite comme ayant eu une influence auprès des ingénieurs américains [198]. Il faut enfin mentionner l'impact significatif de la parution en 1918 du livre de Joseph Lipka (1883-1924), *Graphical and Mechanical Computation* [96], issu d'un cours professé au laboratoire de mathématiques du Massachusetts Institute of Technology et destiné à un public mixte de mathématiciens et d'ingénieurs. La partie de l'ouvrage portant sur la nomographie est centrée sur les nomogrammes d'alignement, appelés « *alignment charts* », avec d'Ocagne comme principale source citée. Plus complet que celui de Peddle, mais tout aussi pragmatique, cet exposé s'appuie sur beaucoup d'exemples et un minimum de théorie. Par la suite, Lipka a commencé, en collaboration avec Stanley R. Cummings, la publication d'un

9. « Although books on nomography have been published in many foreign languages, there does not appear to have been anything written on the subject in English outside of a few scattered magazine articles which have covered only restricted portions of the field. Books in English on graphical calculus and computation are by no means uncommon, but this is generally looked upon as something different from nomography, although a strict line of demarcation between the two subjects would be somewhat difficult to trace » ([170], 2^e éd., p. vii).

recueil d'abaques pour l'ingénieur. Un premier volume de 24 abaques, sur le thème de l'air et de la vapeur, est paru en 1924 [22], mais il n'y a pas eu de suite, sans doute en raison du décès de Lipka la même année. Quoi qu'il en soit, au début des années 1920, il est manifeste que la nomographie avait bien trouvé sa place aux États-Unis.

Russie. Le pionnier du développement de la nomographie en Russie est Nikolai Mikhailovich Gersevanov (1879-1976), souvent cité par d'Ocagne comme l'inventeur des « abaques à points équidistants », c'est-à-dire d'une méthode pour simplifier les abaques à entrecroisement par l'utilisation d'un compas lorsqu'au moins l'une des familles de lignes est un faisceau de cercles concentriques. Gersevanov, après des études à l'Institut des ingénieurs des voies de communication de Saint-Petersbourg, s'occupa, pendant une quinzaine d'années, de la construction des structures des ports de la Baltique. Il publia un premier traité de nomographie en 1906 [53], qui fut suivi de plusieurs autres. Il est probable qu'il ne fut pas étranger à l'invitation de d'Ocagne à Saint-Petersbourg pour un cycle de conférences en 1910. La nomographie continua à se développer au début de la période soviétique (on peut y rattacher les travaux de Margoulis : cf. § 4.1.6), mais c'est surtout pendant et après la Seconde Guerre mondiale qu'elle prit véritablement son envol. Citons seulement les importants traités de M. V. Pentkovski en 1949 [171] et de B. A. Nevski en 1951 [116]. En 1955, lorsque le Centre de calcul de l'Académie russe des sciences est fondé par l'académicien Anatoli Alekseevich Dorodnicyn (1910–1994), c'est à Vitali Arsenievich Ditkin (1910-1987) que l'on confie la direction du laboratoire des tables et nomogrammes, au sein duquel Georgi Sergeevich Khovanski (1921-1999) prend la tête du département de nomographie. Khovanski donne à cette discipline un essor considérable, en développant à la fois la théorie des méthodes nomographiques et leurs applications à des problèmes variés. Son équipe de chercheurs publie des centaines d'articles scientifiques et 17 collections de nomogrammes qui ont été largement exploités par les ingénieurs soviétiques. L'école nomographique russe, à laquelle, comme on l'a vu plus haut, il faut associer celles, également très vivaces, des pays de l'ex-bloc soviétique, se fit connaître à l'Ouest par de nombreuses traductions, par exemple la version française des *Éléments de nomographie* de Khovanski [74].

4.4. La place scientifique, économique et sociale de la nomographie

La section précédente a mis en évidence que la nomographie s'est constituée en discipline et s'est diffusée dans le monde entier pendant les dernières années du XIX^e siècle et les premières décennies du XX^e, à des vitesses variables selon les pays, mais, si l'on envisage le phénomène globalement, de

façon plutôt rapide. Jusqu'à vers les années 1970, cette discipline a ensuite connu une sorte d'âge d'or, une période de maturité pendant laquelle elle a irrigué de nombreux secteurs de la vie scientifique, économique et sociale, bien au-delà de son champ d'application d'origine (cf. § 4.4.1). Elle est enfin entrée dans une phase inévitable de déclin, provoquée, comme pour les autres spécialités du calcul graphique, par la généralisation de l'emploi des calculateurs électroniques. Cependant, la nomographie est demeurée vivante jusqu'à nos jours dans certains domaines qui ne sont pas forcément ceux auxquels on aurait pu s'attendre, en partie grâce à un renouveau provoqué paradoxalement par les ordinateurs eux-mêmes (cf. § 4.4.2). Notre dernière section se propose donc d'appréhender brièvement ces nouveaux aspects et rebondissements d'une discipline devenue désormais « science normale » (au sens classique de Thomas Kuhn) pour la communauté des ingénieurs et des mathématiciens appliqués.

4.4.1. L'âge d'or de la nomographie

Nous avons donné plus haut (cf. § 4.2.1) une liste d'applications des abaques à points alignés, telle que d'Ocagne la dressait en 1899. En 1907, soit à peine quelques années plus tard, d'Ocagne recense un nombre important de nouvelles applications qu'il classe en 14 rubriques ([146], p. 394-395) :

1. Physique générale
2. Électricité
3. Résistance des matériaux
4. Hydraulique
5. Constructions navales
6. Machines
7. Calculs nautiques
8. Géodésie
9. Topographie
10. Artillerie
11. Aviation
12. Assurances
13. Recherche des lois empiriques
14. Calcul graphique général

Si l'on excepte le cas un peu à part des assurances, cette liste reprend l'ensemble des domaines traditionnels d'intervention des ingénieurs civils et militaires. Cela donne déjà une bonne idée du champ très large d'activités humaines dans lequel la nomographie a été abondamment pratiquée pendant une grande partie du ^{xx}e siècle. Toutefois, l'inventaire le plus complet des applications des abaques, qui fait apparaître encore d'autres secteurs d'intervention et qui est le mieux à même de décrire cet âge d'or culminant vers le milieu du siècle, est celui qui a été réalisé précisément en 1950 par Douglas Payne Adams (né en 1909) sous le titre *An Index of Nomograms* [1].

Adams a rassemblé environ 700 références, issues du dépouillement de 97 périodiques américains et classées en 21 sections :

1. Mathematics
2. Physics
3. Chemical Engineering and Chemistry
4. Electricity, Electronics, Radio
5. Hydraulics and Power
6. Waterworks and Sewerage
7. Oil and Gas and By-Products
8. Illumination
9. Aeronautics
10. Heating, Piping, Ventilating, Air Conditioning, Insulation, Refrigeration
11. Building, Structures, Surveying, Soils, Cement
12. Highways, Railroads, Trucking
13. Machine Design
14. Machine Tools
15. Welding, Foundry, Sheet Metal
16. Metals
17. Mining
18. Paper
19. Textiles
20. Medicine
21. Food

Il ne nous semble pas utile de revenir encore sur le rôle joué par la nomographie dans les sciences de l'ingénieur. Par contre, nous allons étudier un peu plus en détail comment, au cours de cet âge d'or, la nomographie a essaimé, de manière plus inattendue, vers d'autres secteurs de la société dans lesquels elle a contribué, directement ou indirectement, à des progrès substantiels.

Pour commencer, c'est entre 1914 et les années 1930 que, selon l'historien Howard Gray Funkhouser [48], la nomographie a été adoptée par les statisticiens. Dès 1845, Lalanne indiquait que la méthode graphique qu'il avait utilisée pour représenter les données météorologiques de Kämtz pourrait également servir à la distribution géographique de données statistiques [82]; plus précisément, il envisageait de dresser des cartes sur lesquelles on exprimerait la répartition de la population par des courbes d'égale population spécifique cotées, les cotes indiquant le nombre d'habitants par unité d'aire. Ce n'est qu'en 1874 que Louis-Léger Vauthier (1815-1901), mettant en pratique la suggestion de Lalanne, dessina une carte avec des lignes d'égale densité pour visualiser la distribution de la population de Paris ([204]; [101], 2^e éd., p. 94-96). Cette technique de remplacement des tables à double entrée par des courbes d'égal élément fut une source de résultats fructueux pour Francis Galton (1822-1911) dans ses travaux de 1886 sur le concept de corrélation de deux variables statistiques [49]. Plus tard, en 1894, dans son étude des tables de naissances, Galton dessina les courbes d'égal taux

de natalité en fonction de l'âge du père et de celui de la mère, courbes qu'il appela « *isogens* » et qui lui permirent de mettre en évidence la loi selon laquelle ce taux ne dépend que de la somme des âges des deux parents [50]. Cependant, malgré ces quelques utilisations précoces des courbes d'égal élément, les abaques ne furent agréés par les statisticiens que plus tard, après la popularisation des travaux de d'Ocagne. Tout commence véritablement en 1914, lorsque le mathématicien britannique Karl Pearson (1857-1936), l'un des fondateurs de la statistique moderne, inclut trois abaques dans ses *Tables for Statisticians and Biometricians* [169]. Ensuite, c'est surtout pendant les années 1920 et 1930 que la plupart des formules usuelles de statistiques sont réduites à une représentation nomographique et que l'on conçoit même des règles à calcul spécialisées comprenant des échelles supplémentaires adaptées aux opérations statistiques les plus courantes. Dans un article paru en 1932 [57] dans *The Journal of Educational Psychology*, Harold D. Griffin donne une bibliographie commentée fort instructive de 73 publications de nomographie produites ou utilisées par les statisticiens. Le mouvement est lancé pour longtemps, puisqu'en 1961, dans un article intitulé *Nomographie et statistique* [203], Tran Van Quang analyse finement les avantages que présente encore l'utilisation de la nomographie en statistiques, malgré la concurrence nouvelle du calcul électronique.

Un autre secteur dans lequel la nomographie s'est implantée avec succès est celui des sciences chimiques, biologiques et médicales, ce qui n'est pas sans rapport, d'ailleurs, avec l'utilisation croissante des statistiques dans ces spécialités. En 1918, Horace Grove Deming (1885-1970), professeur associé de chimie à l'université de l'Illinois, publie *A Manual of Chemical Nomography* [26], destiné à fournir aux chimistes des solutions graphiques simples aux problèmes numériques qu'ils rencontrent quotidiennement dans leur travail, notamment lors du mélange de plusieurs ingrédients pour obtenir un produit de composition donnée. En ce qui concerne la médecine, un événement fondateur est la parution, en 1928, du livre intitulé *Blood : A Study in General Physiology*, fruit de longues années de recherches conduites par Lawrence Joseph Henderson (1878-1942), physiologiste à Harvard¹⁰. Henderson avait découvert que, dans le sang, il y a au moins sept composants principaux et quelques autres moins importants, tous en interaction chimique les uns avec les autres, mais il n'arrivait pas à décrire simplement l'ensemble de ces interactions. Dans un premier temps, il songea à des abaques à entrecroisement pour représenter séparément chacune des sept variables en fonction de deux quelconques des autres, ce qui le conduisit à réaliser 105 abaques à partir de ses données expérimentales. Il tenta ensuite de superposer plusieurs de ces

10. Nous suivons ici Thomas Leroy Hankins, qui a étudié ce livre de façon détaillée en le remplaçant dans l'histoire générale des représentations graphiques utilisées dans les sciences expérimentales [59].

abaques sur un même graphique, de façon à relier entre elles plus de trois variables : comme on s'en doute, il en sortit des réseaux de courbes surchargés et difficilement lisibles. Sans le savoir, Henderson revivait ainsi en accéléré la première période de l'histoire de la nomographie jusqu'à redécouvrir par lui-même les limites pratiques des abaques à entrecroisement. En 1921-1922, à l'occasion d'un voyage en Europe, il rendit visite à d'Ocagne à Paris, qui lui expliqua comment transformer ses abaques cartésiens confus et partiels en un unique nomogramme à points alignés (cf. figure 4.27) traduisant clairement l'équilibre global d'un système biologique complexe.

À la suite d'Henderson, l'utilisation des nomogrammes s'est répandue de manière importante en médecine, pour des recherches physico-chimiques sur le sang et la respiration, pour représenter tout ce qui peut être quantifié en fonction de mesures corporelles, pour des usages pharmacologiques et toxicologiques, etc. Depuis, les abaques sont très employés dans la recherche et dans l'enseignement, mais aussi au cabinet médical et à l'hôpital, pour le diagnostic des pathologies et le dosage des médicaments à administrer, notamment en situation d'urgence. De nombreux nomogrammes, devenus célèbres, portent le nom de leurs auteurs, comme, par exemple, le nomogramme de McLean-Hastings (1935) pour étudier la distribution du calcium et des protéines dans le sérum, le nomogramme d'Astrand (1960) pour estimer la consommation maximale d'oxygène d'un sujet à partir de la fréquence cardiaque mesurée lors d'un effort calibré, ou encore le nomogramme de Siggaard-Andersen (1962) pour diagnostiquer un désordre simple de l'équilibre acido-basique.

4.4.2. La nomographie aujourd'hui

Contrairement à ce qu'on aurait pu croire, les nomogrammes n'ont pas été balayés par les calculateurs électroniques. En effet, ces machines ont permis de concevoir et de construire de nouveaux nomogrammes plus facilement qu'auparavant, ce qui a, au moins dans un premier temps, relancé l'intérêt porté aux tables graphiques. La nomographie informatique a notamment été développée en Russie par Khovanski, qui déclarait dans les années 1970 : « Les recherches entreprises pour la mise en place d'une maintenance mathématique pour le tracé automatique et le calcul des abaques avec des calculatrices rendront ces derniers encore plus accessibles » ([74], p. 5). On comprend sans difficulté que les abaques voient leur fabrication considérablement simplifiée par le recours à des ordinateurs et à des tables traçantes, tandis qu'ils ne perdent rien de leurs avantages traditionnels en ce qui concerne leur utilisation : il reste souvent plus pratique, plus rapide et moins coûteux de lire d'un simple coup d'œil la solution d'une équation complexe sur un abaque, plutôt que d'introduire dans un logiciel les données

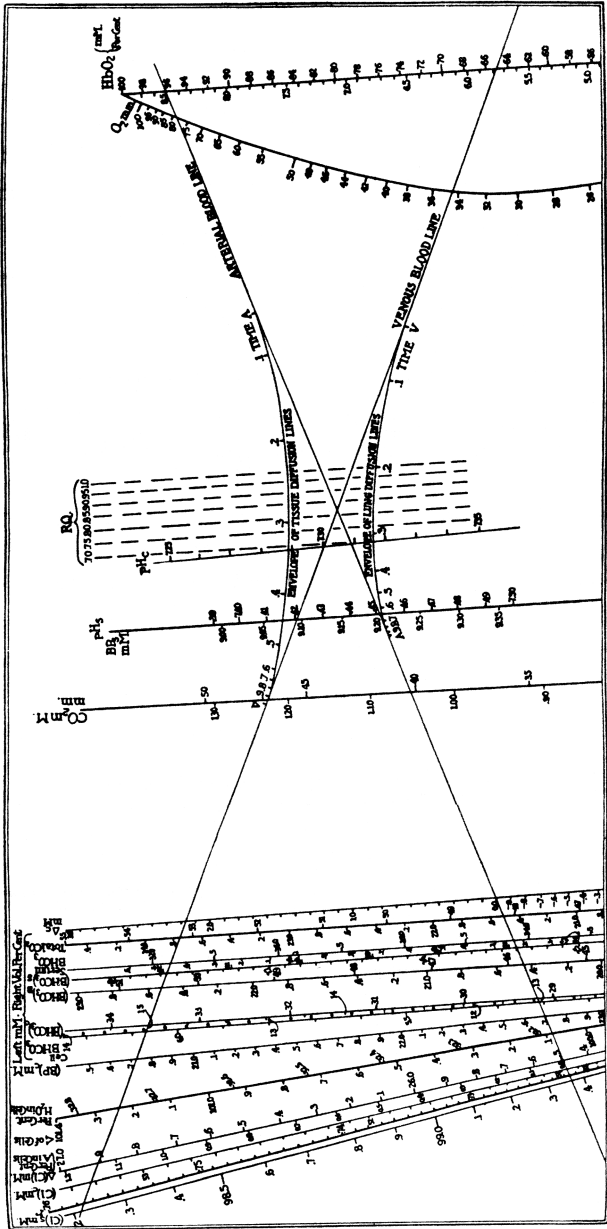


FIGURE 4.27. Nomogramme du sang de Henderson ([63], p. 148)

d'un problème, surtout lorsque l'opération doit se faire dans un atelier de fabrication, dans un cabinet médical ou sur le terrain.

De nos jours, malgré son inévitable reflux face à la concurrence des moyens modernes de calcul, la nomographie continue donc à être employée dans certains secteurs d'activité. On rencontre toujours des abaques dans des manuels techniques, des catalogues de pièces mécaniques ou des catalogues de composants électroniques. De leur côté, les médecins et les pharmaciens utilisent encore assez couramment des nomogrammes ou des règles à calcul spécialisées. D'ailleurs, la médecine est probablement le secteur dans lequel la nomographie reste la plus vivante. Contentons-nous de nous référer à un article intitulé « Nomograms and Medicine », publié en 2006 par Fernando J. Bianco, chef du service d'urologie de la *George Washington University*. Bien que cet article soit centré sur l'utilisation des nomogrammes dans le pronostic du cancer, on y trouve aussi des considérations plus générales :

Ces améliorations paradigmatiques dans le pronostic du cancer sont aisément reconnues par les médecins et transmises aux patients grâce à des instruments puissants appelés nomogrammes. [...]

Actuellement, il y a plus de 1700 publications en rapport avec les nomogrammes enregistrées dans Medline, dont 1100 sont apparues depuis les années 1990 avec l'avènement et l'évolution de l'ère digitale [...].

En résumé, les nomogrammes ont renforcé les patients et les médecins dans leur combat contre le cancer¹¹.

Ces propos se passent de tout commentaire. La nomographie, ce surprenant « calcul par les yeux »¹², n'appartient pas encore au passé.

11. « These paradigmatic improvements in cancer prognosis are easily recognised by physicians and conveyed to patients by powerful instruments called nomograms. [...] Today, there are >1700 publications related to nomograms registered in Medline, with 1100 of these coming from the 1990s with the advent and evolution of the digital age [...]. In summary, nomograms have empowered patients and physicians in their fight against cancer » ([8], p. 884-885).

12. Selon une belle définition [2] de l'ingénieur Robert d'Adhémar (1874-1906).

Bibliographie du chapitre 4

- [1] ADAMS (Douglas Payne), *An index of nomograms*, The Technology Press of Massachussetts Institute of Technology, New York : Wiley, London : Chapman & Hall, 1950.
- [2] ADHÉMAR (Robert d'), La nomographie, calcul par les yeux, *La Nature. Revue des sciences et de leurs applications aux arts et à l'industrie*, 28 (1900), p. 213-215.
- [3] ALLCOCK (Harold John) & JONES (John Reginald), *The Nomogram : the theory and practical construction of computational charts*, London : Pitman, 1932; 2^e éd., 1938; 3^e éd., 1941; 4^e éd. révisée par John George Leopold Michel, 1950; 5^e éd., 1962.
- [4] ALLIX (Georges-Jean-Baptiste-François), *Explication d'un nouveau système de tarifs, ou Nouvelle méthode pour trouver, en mesures métriques, sans aucun calcul, le poids des métaux en barres ou en feuilles, le cube des bois bruts ou équarris, le cube des pierres de taille...*, Paris : Bachelier, 1840.
- [5] BASSANTIN (James), *Astronomique discours*, Lyon : Jean de Tournes, 1804.
- [6] BELGRANO BRÉMARD (Juan Carlos), *Tratado de nomografia*, con la colaboración de A. López Nieto y José María Urcelay, prólogo Julio Rey Pastor, Madrid : Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento, 1953.
- [7] BERTRAND (Léopold), *Description et usage d'un abaque destiné à faciliter la solution des problèmes relatifs à la distribution des eaux*, Paris : Berger-Levrault, 1895.
- [8] BIANCO (Fernando J.), Nomograms and medicine, *European Urology*, 50 (2006), p. 884-886.
- [9] BRODETSKY (Selig), Nomography, *The Mathematical Gazette*, 9 (1918), p. 213-224.
- [10] BRODETSKY (Selig), *A First Course in Nomography*, London : Bell, 1920; 2^e éd., 1925.
- [11] BUACHE (Philippe), Essai de géographie physique, *Mémoires de l'Académie royale des sciences (1752)*, Paris : Imprimerie royale, 1756, p. 399-416 + pl. XIII-XIV.
- [12] CAJORI (Florian), *A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments*, New York : The Engineering News Publishing Company, 1909.
- [13] CAJORI (Florian), *On the History of Gunter's Scale and the Slide Rule during the Seventeenth Century*, Berkeley : University of California Press, 1920.
- [14] CÁMARA TECEDOR (Sixto), Estudio gráfico de la curva balística cualquiera que sea la ley de resistencia del aire. Método Pascal, *Revista de la Sociedad Matemática Española*, 4 (1916), p. 249-276. Trad. ital. par Mario Pascal, Studio grafico

- della curva balistica qualunque sia la legge di resistenza dell'aria (metodo di Pascal), *Giornale di matematiche di Battaglini* (3), 54 (1916), p. 223-248.
- [15] CAUCHY (Augustin-Louis), BEAUMONT (Élie de) & LAMÉ (Gabriel), Rapport sur un Mémoire de M. Léon Lalanne, qui a pour objet la substitution de plans topographiques à des tables numériques à double entrée, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 17 (1843), p. 492-494.
- [16] CHANCEL (Alphonse-Marius), *Étude et graphique de la formule de jauge de l'Union des yachts français*, Grenoble : Allier, 1894.
- [17] CLARK (John), Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre, *Revue de mécanique*, 21 (1907), p. 321-335, 576-585; 22 (1908), p. 238-263, 451-472.
- [18] COUSINERY (Barthélémy-Édouard), *Le Calcul par le trait, ses éléments et ses applications à la mesure des lignes, des surfaces et des cubes, à l'interpolation graphique et à la détermination, sur l'épure, de l'épaisseur des murs de soutènement et des murs de culées des voutes*, Paris : Carilian-Gœury & Dalmont, 1839.
- [19] COUSINERY (Barthélémy-Édouard), *Recueil de tables à l'usage des ingénieurs, faisant suite à l'ouvrage sous le même titre de R. Génieys, et formant le deuxième volume*, Paris : Carilian-Gœury & Dalmont, 1846.
- [20] CULMANN (Carl), *Die graphische Statik*, Zürich : Meyer & Zeller, 1864-1866; 2^e éd. refondue, vol. 1, 1875.
- [21] CULMANN (Carl), *Traité de statique graphique*, trad. de la 2^e éd. allemande par Georges Glasser, Jean Jacquier & Amédée Valat, Paris : Dunod, 1880.
- [22] CUMMINGS (Stanley R.) & LIPKA (Joseph), *Alignment Charts for the Engineer*, New York : Wiley, 1924.
- [23] DAVAINÉ (Emmanuel-Napoléon), Chemins de fer, routes et canaux. Tableau des sections et des largeurs des profils en travers, *Recueil des Mémoires de la Société royale des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille*, Paris : Carilian-Gœury, 1846.
- [24] DAVAINÉ (Emmanuel-Napoléon), Note explicative sur la construction et l'emploi d'un tableau graphique servant à calculer les surfaces de déblai et de remblai et les largeurs des profils, *Annales des Ponts et Chaussées* (2), 1^{er} semestre 1849, p. 356-362 + pl. 165.
- [25] DAVAINÉ (Emmanuel-Napoléon), Détermination des surfaces de déblai et de remblai et des largeurs de profils, pour la rédaction des projets de route. Réplique et explications, *Annales des Ponts et Chaussées* (2), 1^{er} semestre 1850, p. 171-174.
- [26] DEMING (Horace Grove), *A Manual of Chemical Nomography*, Champaign (Illinois) : The University Press, 1918.
- [27] DIDION (Isidore), Expérience sur la justesse comparée du tir des balles sphériques, plates et longues, *Journal de l'École Polytechnique*, 16 (1839), p. 51-74.
- [28] DOERFLER (Ron), GLUCHOFF (Alan), GUTHERY (Scott) & HAMBURG (Paul), *Calculating Curves : The Mathematics, History, and Aesthetic Appeal of T. H. Gronwall's Nomographic Work*, Chestnut Hill (MA) : Docent Press, 2012.

- [29] DORDA LÓPEZ (Ramón), *Elementos de cálculo gráfico y nomografía y sus aplicaciones prácticas*, Segovia : Rueda, 1907.
- [30] DUCARLA (Marc Bonifas, dit), *Expression des nivellemens, ou Méthode nouvelle pour marquer rigoureusement sur les cartes terrestres et marines les hauteurs et la configuration du terrain*, Paris : Cellot, 1782.
- [31] DUPLAIX (Marcelin), Sur des abaques des efforts tranchants et des moments de flexion développés dans les poutres à une travée par les surcharges du Règlement du 29 août 1891 sur les ponts métalliques, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 122 (1896), p. 128-131.
- [32] DUPLAIX (Marcelin), *Abaques des efforts tranchants et des moments de flexion développés dans les poutres à une travée par les surcharges du Règlement du 29 août 1891 sur les ponts métalliques*, 2 vol., Paris : Carré & Naud, 1899.
- [33] DUPORCQ (Ernest), Sur la théorie des abaques à alignements, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 127 (1898), p. 265-268.
- [34] DUPORCQ (Ernest), Sur la théorie des abaques à alignements, *Bulletin des sciences mathématiques* (2), 22 (1898), p. 287-291.
- [35] DURAND-CLAYE (Charles-Léon), PELLETAN (André) & LALLEMAND (Charles), *Lever des plans et nivellement*, Paris : Baudry, 1889; 2^e éd., Paris : Béranger, 1912.
- [36] DUTKIEWICZ (Jadwiga), *Mieczysław Warmus. Life and Academic Work*, Wolongong : Teresa Siminska, 2006.
- [37] EVESHAM (Harold Ainsley), *The History and Development of Nomography*, Ph. D. Thesis, University of London, 1982; rééd., Chestnut Hill (MA) : Docent Press, 2011.
- [38] EVESHAM (Harold Ainsley), Origins and development of nomography, *Annals of the History of Computing*, 8 (1986), p. 324-333.
- [39] EVESHAM (Harold Ainsley), Nomography, in *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Ivor Grattan-Guinness (éd.), London & New York : Routledge, 1994, vol. 1, p. 573-584.
- [40] FAVARO (Antonio), *Lezioni di statica grafica*, Padova : Sacchetto, 1877.
- [41] FAVARO (Antonio), *Leçons de statique graphique. Première partie. Géométrie de position*, trad. de l'italien par Paul Terrier, Paris : Gauthier-Villars, 1879.
- [42] FAVARO (Antonio), *Leçons de statique graphique. Deuxième partie. Calcul graphique*, trad. de l'italien par Paul Terrier, avec appendice et notes du traducteur, Paris : Gauthier-Villars, 1885.
- [43] FAVÉ (Louis-Eugène-Napoléon) & ROLLET DE L'ISLE (Maurice), *Abaque pour la détermination du point à la mer*, Paris : Imprimerie nationale, 1892.
- [44] FAVÉ (Louis-Eugène-Napoléon) & ROLLET DE L'ISLE (Maurice), Détermination graphique du point à la mer, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 118 (1894), p. 24-27.
- [45] FÈVRE (Jean-Baptiste-Simon), *Traité du mouvement de translation des locomotives et recherches sur le frottement de roulement*, Paris : Carilian-Gœury & Dalmont, 1844.

- [46] FONTENÉ (Georges), Formes réduites d'une relation triplement linéaire entre trois variables, *Nouvelles annales de mathématiques* (3), 19 (1900), p. 494-498.
- [47] FRANÇOIS (Jean), *L'art des fontaines, avec l'art de niveler*, 2^e éd., Rennes : Hallaudays, 1665.
- [48] FUNKHOUSER (Howard Gray), Historical development of the graphical representation of statistical data, *Osiris*, 3 (1937), p. 269-404.
- [49] GALTON (Francis), Regression towards mediocrity in hereditary stature, *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*, 15 (1886), p. 246-263.
- [50] GALTON (Francis), Results derived from the natality table of Körösi by employing the method of contours or isogens, *Journal of the Royal Statistical Society*, 57 (1894), p. 702-708.
- [51] GANGUILLET (Émile-Oscar) & KUTTER (Wilhelm Rudolph), Versuch zur Aufstellung einer neuen allgemeinen Formel für die gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen, gestützt auf die Resultate der in Frankreich vorgenommenen umfangreichen und sorgfältigen Untersuchungen und der in Nordamerika ausgeführten grossartigen Strommessungen, *Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins*, 21 (1869), p. 6-25, 46-59.
- [52] GÉNIEYS (Raymond), *Recueil de tables à l'usage des ingénieurs*, Paris : Carilian-Gœury, 1835.
- [53] GERSEVANOV (Nikolai Mikhailovich), *Les principes du calcul nomographique* (en russe), Saint-Pétersbourg, 1906; 2^e éd., 1908.
- [54] GLUCHOFF (Alan), Pure mathematics applied in early twentieth-century America : The case of T. H. Gronwall, consulting mathematician, *Historia Mathematica*, 32 (2005), p. 312-357.
- [55] GORRIERI (Domenico), *Nuova Tavola Grafica per calcolare le sezioni resistenti delle travi rettilinee sollecitate ad inflessione*, Bologna : Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1895.
- [56] GORRIERI (Domenico), *Elementi ed applicazioni pratiche di nomografia, ad uso degl'ingegneri, allievi ingegneri ed architetti*, Bologna : Cappelli, 1920.
- [57] GRIFFIN (Harold D.), How to construct a nomogram, *The Journal of Educational Psychology*, 23 (1932), p. 561-577.
- [58] GRONWALL (Thomas Hakon), Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés, *Journal de mathématiques pures et appliquées* (6), 8 (1912), p. 59-102.
- [59] HANKINS (Thomas Leroy), Blood, dirt, and nomograms. A particular history of graphs, *Isis*, 90 (1999), p. 50-80.
- [60] HELE SHAW (Henry Selby), First report of the Committee, consisting of Mr. W. H. Preece (Chairman), Professor H. S. Hele Shaw (Secretary), Messrs. B. Baker, W. Anderson, and G. Kapp, and Professors J. Perry and R. H. Smith, appointed to report on the development of graphic methods in mechanical science, in *Report of the Fifty-Ninth Meeting of the British Association for the Advancement of Science (BAAS) held at Newcastle-upon-Tyne in September 1889*, London : John Murray, 1890, p. 322-327.

- [61] HELE SHAW (Henry Selby), Second report on the development of graphic methods in mechanical science, in *Report of the Sixty-Second Meeting of the BAAS held at Edinburgh in August 1892*, London : John Murray, 1893, p. 373-531.
- [62] HELE SHAW (Henry Selby), The development of graphic methods in mechanical science. Third report, in *Report of the Sixty-Third Meeting of the BAAS held at Nottingham in September 1893*, London : John Murray, 1894, p. 573-613.
- [63] HENDERSON (Lawrence Joseph), *Blood : A Study in General Physiology*, New Haven (Connecticut) : Yale University Press, 1928.
- [64] HERRMANN (Gustav), *Das graphische Einmaleins oder die Rechentafel, ein Ersatz für den Rechenschieber*, Braunschweig : Vieweg, 1875.
- [65] HEZLET (Robert Knox), Scale for the graphic calculation of deflection and angle of sight, *The Journal of the Royal Artillery*, 36 (1909), n° 4, p. 190-192.
- [66] HEZLET (Robert Knox), The graphic representation of formulæ, *The Journal of the Royal Artillery*, 36 (1910), n° 10, p. 457-470.
- [67] HEZLET (Robert Knox), *Nomography or the Graphic Representation of Formulae*, Woolwich : The Royal Artillery Institution, 1913.
- [68] HEZLET (Robert Knox), What is a nomogram?, *The Journal of the Royal Artillery*, 45 (1920), n° 10, p. 330-333.
- [69] HILBERT (David), Mathematische Probleme, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1900, p. 253-297. Trad. fr. de Léonce Laugel, Sur les problèmes futurs des mathématiques, in *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, Ernest Duporcq (éd.), Paris : Gauthier-Villars, 1902, p. 58-114; rééd. Paris : Jacques Gabay, 1990.
- [70] KÄMTZ (Ludwig Friedrich), *Cours complet de météorologie, trad. de l'allemand et annoté par Charles Martins, avec un appendice contenant la représentation graphique des tableaux numériques, par Léon Lalanne*, Paris : Paulin, 1843. Trad. angl. par Charles Vincent Walker, *A Complete Course of Meteorology, with notes by Ch. Martins, and an appendix, containing the graphic representation of the numerical tables, by L. Lalanne*, London : Baillière, 1845.
- [71] KAPTEYN (Albert), Note sur une méthode de graduation, représentant des courbes par des lignes droites, *Revue universelle des mines, de la métallurgie, des travaux publics, des sciences et des arts appliqués à l'industrie*, 40 (1876), p. 136.
- [72] KELLOGG (Oliver Dimon), Nomograms with points in alignment, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 63 (1914), p. 159-173.
- [73] KERIMOV (Movlud Kerimovich), Brief history of the Dorodnitsyn Computing Center, Russian Academy of Sciences (dedicated to the 50th anniversary of its foundation), *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 46 (2006), p. 1086-1120.
- [74] KHOVANSKI (Georgi Sergeevich), *Éléments de nomographie*, trad. fr. de Djilali Embarek, Moscou : Mir, 1979.

- [75] KÜHN (Klaus) & KLEINE (Karl) (éds), *Dennert & Pape ARISTO 1872-1978*, München : W. Zuckschwerdt Verlag, 2004.
- [76] LALANNE (Léon-Louis), *Tables nouvelles pour abrégé divers calculs relatifs aux projets de routes, particulièrement les calculs des terrasses et des plans parcellaires, dressés par ordre du conseiller d'État directeur général des ponts et chaussées et des mines et précédées d'un mémoire sur leur construction et leur usage*, Paris : Imprimerie royale, 1839.
- [77] LALANNE (Léon-Louis), *Collection de tables pour abrégé les calculs relatifs à la rédaction des projets de routes et de chemins de toutes largeurs*, appendice n° 4 au tome I de la 4^e édition du *Cours de constructions* de feu M. J. Sganzin, entièrement refondue par M. Reibell, Paris : Carilian-Gœury et Dalmont, 1842.
- [78] LALANNE (Léon-Louis), Mémoire sur la substitution de plans topographiques à des tables numériques à double entrée, sur un nouveau mode de transformation des coordonnées, et sur ses applications à ce système de tables topographiques, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 16 (1843), p. 1162-1164.
- [79] LALANNE (Léon-Louis), *Chemins vicinaux : tables graphiques des superficies de déblai et de remblai pour les routes et chemins de 6 mètres de largeur*, Paris : Carilian-Gœury & Dalmont, 1843.
- [80] LALANNE (Léon-Louis), *Abaque, ou Compteur universel, donnant à vue à moins de 1/200 près les résultats de tous les calculs d'arithmétique, de géométrie et de mécanique pratique*, Paris : Carilian-Gœury & Dalmont, 1844; 2^e éd., Paris : Hachette, 1851; 3^e éd., 1863.
- [81] LALANNE (Léon-Louis), *Description et usage de l'abaque ou compteur universel, qui donne à vue les résultats de tous les calculs d'arithmétique, de géométrie, de mécanique pratique, etc.*, Paris : Dubochet, 1845.
- [82] LALANNE (Léon-Louis), Remarques à l'occasion du mémoire de M. Morlet sur les centres de figures; et réflexions sur la représentation graphique de divers éléments relatifs à la population, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 20 (1845), p. 438-441.
- [83] LALANNE (Léon-Louis), Sur les tables graphiques et sur la géométrie anamorphique appliquée à diverses questions qui se rattachent à l'art de l'ingénieur, *Annales des ponts et chaussées* (2), 11 (1846), p. 1-69 + pl. 98-101.
- [84] LALANNE (Léon-Louis), *Beschreibung und Gebrauchsanweisung des Abacus oder der allgemeinen Rechnungstafeln : welche augenblicklich alle arithmetischen, geometrischen und mechanischen Rechnungsergebnisse gibt*, Leipzig : Steinacker, 1846.
- [85] LALANNE (Léon-Louis), *Explanation and Use of the Abacus or French Universal Reckoner*, London : Joseph Thomas, 1846.
- [86] LALANNE (Léon-Louis), Détermination des surfaces de déblai et de remblai et des largeurs de profils, pour la rédaction des projets de route. Observations critiques sur le tableau graphique proposé par M. Davaine. Nouvelles applications de la géométrie anamorphique, *Annales des ponts et chaussées* (2), 1^{er} semestre 1850, p. 133-170 + pl. 176-177.

- [87] LALANNE (Léon-Louis), Tables graphiques et géométrie anamorphique ; réclamation de priorité, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 85 (1877), p. 1012-1014, 1242-1243.
- [88] LALANNE (Léon-Louis), *Méthodes graphiques pour l'expression des lois empiriques ou mathématiques à trois variables avec des applications à l'art de l'ingénieur et à la résolution des équations numériques d'un degré quelconque*, Paris : Imprimerie nationale, 1878 ; 2^e éd. revue et corrigée, 1880.
- [89] LALANNE (Léon-Louis), Sur un point de l'histoire des méthodes graphiques appliquées à l'art de l'ingénieur, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 98 (1884), p. 1466-1470.
- [90] LALLEMAND (Charles), *Les abaques hexagonaux. Nouvelle méthode générale de calcul graphique, avec de nombreux exemples d'application, notamment au calcul des profils en travers dans les projets de chemins de fer, de canaux, de routes, etc., à la poussée des terres, au calcul des intérêts composés, à plusieurs problèmes usuels de géométrie, au calcul des erreurs dans le nivellement, etc.*, Paris : Ministère des travaux publics, 1885.
- [91] LALLEMAND (Charles), Sur une nouvelle méthode générale de calcul graphique au moyen des abaques hexagonaux, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 102 (1886), p. 816-819.
- [92] LALLEMAND (Charles), *Nivellement de haute précision*, Paris : Baudry, 1889.
- [93] LALLEMAND (Charles), Sur la genèse et l'état actuel de la science des abaques, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 174 (1922), p. 82-88.
- [94] LALLEMAND (Charles), Sur les avantages comparés des abaques hexagonaux et des abaques à points alignés, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 174 (1922), p. 253-258.
- [95] LECORNU (Léon), Sur le problème de l'anamorphose, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 102 (1886), p. 813-816.
- [96] LIPKA (Joseph), *Graphical and Mechanical Computation*, New York : Wiley, 1918 ; 2^e éd., 1921.
- [97] LUCKEY (Paul), *Einführung in die Nomographie*, 2 vol., Leipzig : Teubner, 1918-1920 ; 2^e éd., 1925 ; 3^e éd., 1939 ; 4^e éd., 1942.
- [98] LUCKEY (Paul), Zur älteren Geschichte der Nomographie, *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*, 29 (1923), p. 54-59.
- [99] LUCKEY (Paul), Zur Geschichte der Nomographie, *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 58 (1927), p. 455-465.
- [100] LUCKEY (Paul), *Nomographie : Praktische Anleitung zum Entwerfen graphischer Rechentafeln mit durchgeführten Beispielen aus Wissenschaft und Technik* (= 2^e éd. enrichie de *Einführung in die Nomographie*), Leipzig : Teubner, 1927 ; 3^e éd., 1937 ; 4^e éd., 1940 ; 5^e éd., 1942 ; 6^e éd., 1949 ; 7^e éd., 1953 ; 8^e éd., 1954.
- [101] MAREY (Étienne-Jules) *La méthode graphique dans les sciences expérimentales, et principalement en physiologie et en médecine*, Paris : Masson, 1878 ; 2^e tirage augmenté d'un supplément sur le développement de la méthode graphique par la photographie, 1885.

- [102] MARGETTS (George), *Horary Tables, for shewing by inspection the apparent diurnal motion of the sun, moon and stars, the latitude of a ship and the azimuth, time or altitude corresponding with any celestial object*, London : the author, 1790.
- [103] MARGETTS (George), *Longitude Tables, for correcting the effect of parallax and refraction on the observ'd distance taken between the moon and the sun, or a fixed star, etc.*, London : Elmsby, 1790; 2^e éd. très augmentée, 1793.
- [104] MARGOULIS (Wladimir), Les abaques à transparent orienté, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 174 (1922), p. 1684-1686.
- [105] MARGOULIS (Wladimir), Sur la théorie générale de la représentation des équations au moyen d'éléments mobiles, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 176 (1923), p. 824-826.
- [106] MARGOULIS (Wladimir), *Les abaques à transparent orienté ou tournant. Théorie générale de la représentation plane des équations. Applications à l'art de l'ingénieur*, Paris : Gauthier-Villars, 1931.
- [107] MASSAU (Junius), Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications. Livre III. Calcul d'un projet de route, *Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand*, 7 (1884), p. 53-132 + pl. 4-8.
- [108] MASSAU (Junius), Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications. Livre IV. Application à la stabilité des constructions en maçonneries, *Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand*, 10 (1887), p. 1-535 + pl. 1-7.
- [109] MEHMKE (Rudolf), Beispiele graphischer Tafeln, mit Bemerkungen über die Methode der fluchtrechten Punkte, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 44 (1897), p. 56-62 + 3 pl.
- [110] MEHMKE (Rudolf), Numerisches Rechnen, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, t. 1, vol. 2, Wilhelm Franz Meyer (dir.), Leipzig : Teubner, 1902, p. 938-1079.
- [111] MEHMKE (Rudolf) & OCAGNE (Maurice d'), Calculs numériques, in *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Jules Molk (dir.), t. 1, vol. 4, Paris : Gauthier-Villars, 1909, p. 196-452; rééd., Paris : Gabay, 1993.
- [112] MEHMKE (Rudolf), *Leitfaden zum graphischen Rechnen*, Leipzig : Teubner, 1917; 2^e éd., Wien & Leipzig : Deuticke, 1924.
- [113] MEYER ZUR CAPELLEN (Walther), *Leitfaden der Nomographie*, Berlin : Springer, 1953.
- [114] MIHOC (Maria), Nomografic representations of some canonical forms, *Acta Universitatis Apulensis. Mathematics-Informatics*, 6 (2003), p. 17-22.
- [115] MÖBIUS (August Ferdinand), Geometrische Eigenschaften einer Factorentafel, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 22 (1841), p. 276-284 + pl. I.
- [116] NEVSKI (B. A.), *Manuel de nomographie* (en russe), Moscou & Leningrad, 1951.
- [117] OBENHEIM (Alexandre Magnus d'), *Balistique. Indication de quelques expériences propres à compléter la théorie du mouvement des projectiles de l'artillerie, précédée de l'analyse nécessaire*, Strasbourg : Levrault, 1814.

- [118] OBENHEIM (Alexandre Magnus d'), *Mémoire contenant la théorie, la description et l'usage de la planchette du canonier*, Strasbourg : Levraut, 1818.
- [119] OCAGNE (Maurice d'), Étude de deux systèmes simples de coordonnées tangentielles dans le plan : coordonnées parallèles et coordonnées axiales, *Nouvelles annales de mathématiques* (3), 3 (1884), p. 410-423, 456-470, 516-522, 545-561 ; 4 (1885), p. 110-130.
- [120] OCAGNE (Maurice d'), Procédé nouveau de calcul graphique, *Annales des Ponts et Chaussées* (6), 8 (1884), p. 531-540 + pl. 40.
- [121] OCAGNE (Maurice d'), *Coordonnées parallèles et axiales. Méthode de transformation géométrique et procédé nouveau de calcul graphique déduits de la considération des coordonnées parallèles*, Paris : Gauthier-Villars, 1885.
- [122] OCAGNE (Maurice d'), Méthode de calcul graphique fondée sur l'emploi des coordonnées parallèles, *Le génie civil*, 17 (1890), p. 343-344.
- [123] OCAGNE (Maurice d'), *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. Règles pratiques. Exemples d'application*, Paris : Gauthier-Villars, 1891.
- [124] OCAGNE (Maurice d'), La nomographie. Représentation graphique des lois à un nombre quelconque de variables, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 2 (1891), p. 604-608.
- [125] OCAGNE (Maurice d'), *Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques*, Paris : Gauthier-Villars, 1893 ; 2^e éd. entièrement refondue et considérablement augmentée, 1905 ; 3^e éd. avec une rédaction entièrement renouvelée et de nombreuses additions, 1928.
- [126] OCAGNE (Maurice d'), Problème d'algèbre relatif à la nomographie, *Nouvelles annales de mathématiques* (3), 12 (1893), p. 469-476.
- [127] OCAGNE (Maurice d'), Les abaques de déblai et de remblai construits au moyen de la méthode des points isoplèthes, *Annales des Ponts et Chaussées* (7), 7 (1894), p. 467-479 + pl. 478 bis.
- [128] OCAGNE (Maurice d'), Nomographie. Sur les équations représentables par trois systèmes rectilignes de points isoplèthes, in *Mathematical Papers Read at the International Mathematical Congress Held in Connection with the World's Columbian Exposition Chicago 1893*, Eliakim Hastings Moore et al. (éds), New York : Macmillan, 1896, p. 258-271.
- [129] OCAGNE (Maurice d'), Sur les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 123 (1896), p. 988-990.
- [130] OCAGNE (Maurice d'), Sur l'emploi des systèmes réguliers de points cotés dans la représentation des équations, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 123 (1896), p. 1254-1255.
- [131] OCAGNE (Maurice d'), Application générale de la nomographie au calcul des profils de remblai et de déblai, *Annales des Ponts et Chaussées* (7), 9 (1896), p. 406-481 + pl. 478 bis.

- [132] OCAGNE (Maurice d'), Théorie des équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés, *Acta Mathematica*, 21 (1897), p. 301-329.
- [133] OCAGNE (Maurice d'), Nomographie. Une leçon sur les diagrammes cotés ou abaqes, *Journal de l'École polytechnique* (2), 4 (1898), p. 205-225.
- [134] OCAGNE (Maurice d'), Sur quelques applications pratiques de la méthode des points cotés, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 9 (1898), p. 116-119.
- [135] OCAGNE (Maurice d'), Sur les questions de mathématiques pures que soulève l'étude de la nomographie, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* (2), 22 (1898), p. 177-180.
- [136] OCAGNE (Maurice d'), *Traité de nomographie. Théorie des abaqes, applications pratiques*, Paris : Gauthier-Villars, 1899; *Traité de nomographie. Étude générale de la représentation graphique cotée des équations à un nombre quelconque de variables, applications pratiques*, 2^e éd. entièrement refondue, avec de nombreux compléments, 1921.
- [137] OCAGNE (Maurice d'), Sur quelques principes élémentaires de nomographie, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* (2), 24 (1899), p. 286-304.
- [138] OCAGNE (Maurice d'), La nomographie dans l'enseignement, *L'enseignement mathématique*, 2 (1900), p. 207-210.
- [139] OCAGNE (Maurice d'), Sur les divers modes d'application de la méthode graphique à l'art du calcul. Calcul graphique et calcul nomographique, in *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, Ernest Duporcq (éd.), Paris : Gauthier-Villars, 1902, p. 419-424.
- [140] OCAGNE (Maurice d'), Sur quelques travaux récents relatifs à la nomographie, *Bulletin des sciences mathématiques* (2), 26 (1902), p. 67-83.
- [141] OCAGNE (Maurice d'), Sopra alcuni principi elementari di nomografia, *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario* (2), 4 (1902), p. 247-262.
- [142] OCAGNE (Maurice d'), Exposé synthétique des principes fondamentaux de la nomographie, *Journal de l'École polytechnique* (2), 8 (1903), p. 97-158. Réimpr., Paris : Gauthier-Villars, 1903.
- [143] OCAGNE (Maurice d'), Über einige elementare Grundgedanken der Nomographie, *Archiv der Mathematik und Physik* (3), 5 (1903), p. 70-84.
- [144] OCAGNE (Maurice d'), *Leçons sur la topométrie et la cubature des terrasses, comprenant des notions sommaires de nomographie, professées à l'École des ponts et chaussées*, Paris : Gauthier-Villars, 1904; 2^e éd., *Leçons sur la topométrie et la cubature des terrasses. Nouveau tirage, comprenant des notions sommaires de nomographie, des notions élémentaires sur la probabilité des erreurs, et une instruction sur l'usage de la règle à calcul*, 1910.
- [145] OCAGNE (Maurice d'), Sur un théorème de J. Clark, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 142 (1906), p. 988-990.
- [146] OCAGNE (Maurice d'), Les progrès récents de la méthode nomographique des points alignés, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 18 (1907), p. 392-395.

- [147] OCAGNE (Maurice d'), Sur les équations d'ordre nomographique 3 et 4, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 35 (1907), p. 173-195.
- [148] OCAGNE (Maurice d'), Sur la représentation par points alignés de l'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 144 (1907), p. 190-192.
- [149] OCAGNE (Maurice d'), Sur la représentation de l'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale par un nomogramme conique, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 144 (1907), p. 895-898.
- [150] OCAGNE (Maurice d'), Sur la représentation des équations d'ordre nomographique 4 à 3 et 4 variables, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 144 (1907), p. 1027-1030.
- [151] OCAGNE (Maurice d'), *Calcul graphique et nomographie*, Paris : Doin, 1908; 2^e éd. revue et corrigée, 1914; 3^e éd., 1924.
- [152] OCAGNE (Maurice d'), La technique du calcul considérée principalement au point de vue de la science de l'ingénieur, in *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici (Roma, 6-11 aprile 1908)*, Guido Castelnuovo (éd.), vol. 3, Roma : Accademia dei Lincei, 1909, p. 346-350.
- [153] OCAGNE (Maurice d'), Sur la représentation nomographique des équations à quatre variables, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 148 (1909), p. 1244-1247.
- [154] OCAGNE (Maurice d'), Sur la réduction des équations à trois variables aux formes canoniques que comporte la méthode des points alignés, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 155 (1912), p. 1140-1141.
- [155] OCAGNE (Maurice d'), *Cours de géométrie pure et appliquée de l'École polytechnique*, Paris : Gauthier-Villars, t. 1, 1917, t. 2, 1918, fasc. compl., 1924; rééd. en un seul vol., 1930.
- [156] OCAGNE (Maurice d'), Pratique courante de la méthode nomographique des points alignés à propos de ses applications de guerre, in *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens (Strasbourg, 22-30 septembre 1920)*, Henri Villat (éd.), Toulouse, 1921, p. 631-635.
- [157] OCAGNE (Maurice d'), Sur la réduction de la quatrième dimension à une représentation plane, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 174 (1922), p. 146-149.
- [158] OCAGNE (Maurice d'), Sur l'examen comparatif de diverses méthodes nomographiques, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 174 (1922), p. 355-356.
- [159] OCAGNE (Maurice d'), Coup d'œil sur les principes fondamentaux de la nomographie, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 33 (1922), p. 230-239.
- [160] OCAGNE (Maurice d'), À propos de l'histoire de la nomographie, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 33 (1922), p. 620-623.
- [161] OCAGNE (Maurice d'), Sur la classification d'ensemble de tous les procédés de calcul dérivés de la géométrie et de la mécanique, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 182 (1926), p. 191-194.

- [162] OCAGNE (Maurice d'), Le calcul nomographique avant la nomographie, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 46 (1926), p. 55-66.
- [163] OCAGNE (Maurice d'), Les archives nomographiques de l'École des ponts et chaussées, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 39 (1928), p. 625-626.
- [164] OCAGNE (Maurice d'), Résumé synthétique des principes fondamentaux de la nomographie, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 40 (1929), p. 325-329.
- [165] OCAGNE (Maurice d'), Bibliographie des travaux mathématiques et des publications sur l'histoire des sciences de M. Maurice d'Ocagne, *Journal de l'École polytechnique* (2), 34 (1935), p. 223-236.
- [166] OCAGNE (Maurice d'), *Histoire abrégée des sciences mathématiques*, Paris : Vuibert, 1955.
- [167] OTTO (Edward), *Nomografia*, Warszawa : Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1956; 2^e éd., 1964. Trad. angl. par Janina Smólska, Oxford : Pergamon Press, 1963.
- [168] PASQUIER (Ernest), De la nomographie et de la nécessité de l'introduire dans l'enseignement, *L'enseignement mathématique*, 1 (1899), p. 350-357.
- [169] PEARSON (Karl), *Tables for Statisticians and Biometricians*, Cambridge : Cambridge University Press, 1914.
- [170] PEDDLE (John Bailey), The construction of graphical charts, *The American Machinist*, 1908. Réimpr., *The Construction of Graphical Charts*, New York : McGraw-Hill, 1910; 2nd ed. revised and enlarged, 1919.
- [171] PENTKOVSKI (M. V.), *Nomographie* (en russe), Moscou & Leningrad, 1949.
- [172] PESCI (Giuseppe), Abbachi trigonometrici, *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario* (2), 2 (1900), p. 201-216; Costruzione elementare di due abbachi trigonometrici, *Supplemento al periodico di matematica*, 3 (1900), p. 81-86, 97-100.
- [173] PESCI (Giuseppe), *Cenni di nomografia*, Livorno : Giusti, 1900; 2^e éd., 1901.
- [174] PESCI (Giuseppe), *Abbachi per il tiro : Album annesso al Manuale del tiro, di g. Ronca*, Livorno : Fagiolini, 1902.
- [175] POUCHET (Louis-Ézéchiél), *Tableau des nouveaux poids, mesures et monnoies de la République française, suivis des rapports qu'ils ont avec les plus connus de l'Europe comparés entre eux, d'après la Métrologie de Pauton et au moyen des lignes proportionnelles*, Rouen : l'auteur, an III (1794).
- [176] POUCHET (Louis-Ézéchiél), *Échelles graphiques des nouveaux poids, mesures et monnoies de la République française, et des villes et pays les plus commerçants de l'Europe. Seconde édition augmentée d'un Traité sur les changes, et d'un d'Arithmétique linéaire*, Rouen : Guédra & Paris : Barois, an IV (1795).
- [177] POUCHET (Louis-Ézéchiél), *Arithmétique linéaire, ou Nouvelle méthode abrégée de calculer, que l'on peut pratiquer sans savoir lire ni écrire*, Rouen : Guédra, an IV (1795).

- [178] POUCHET (Louis-Ézéchiél), *Métrologie terrestre, ou Tables des nouveaux poids, mesures et monnoies de France. Nouvelle édition, considérablement augmentée*, Rouen : Guilbert & Herment, an V (1797).
- [179] RICCI Giuliano, *La nomografia*, Roma : Voghera, 1901.
- [180] RONCA (Gregorio), *Manuale del tiro, con un' appendice del prof. Pesci sulla « Nomografia »*, Livorno : Giusti, 1901.
- [181] RUNGE (Carl), *Graphical Methods*, New York : Columbia University Press, 1912.
- [182] RUNGE (Carl), *Graphische Methoden*, Leipzig : Teubner, 1915 ; 2^e éd., 1919 ; 3^e éd., 1928.
- [183] SAINT-ROBERT (Paul de), De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante. Caractère auquel on reconnaît qu'une telle résolution est possible. Graduation à la règle, *Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino* (2), 25 (1871), p. 53-62.
- [184] SCHILLING (Friedrich), *Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet*, Leipzig : Teubner, 1900 ; 2^e éd., 1917 ; 3^e éd., 1922.
- [185] SCHOLEFIELD (Russel Scott), The use of logarithmic scales in plotting curves, *Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 154 (1903), p. 287-291.
- [186] SCHWERDT (Hans), *Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage*, Berlin : Springer, 1924.
- [187] SECO DE LA GARZA (Ricardo), *Nomogramas del ingeniero, con 121 nomogramas en cartulina y un transparente celuloide*, Madrid : Orrier, 1907 ; 2^e éd., 1911 ; 3^e éd., 1916.
- [188] SECO DE LA GARZA (Ricardo), *Nomografia aplicada a las construcciones, resistencia de materiales, minas explosivas, levantamiento de planos topográficos, áreas y volúmenes*, Madrid : Orrier, 1910.
- [189] SECO DE LA GARZA (Ricardo), *Les nomogrammes de l'ingénieur*, Paris : Gauthier-Villars, 1912.
- [190] SLAUGHT (Herbert Ellsworth), The spring meeting of the Chicago section, *Bulletin of the American Mathematical Society* (2), 19 (1913), p. 441-462.
- [191] SOREAU (Rodolphe), Contribution à la théorie et aux applications de la nomographie, *Mémoires de la Société des ingénieurs civils de France*, 1901, p. 191-512. Réimpr., Paris : Béranger, 1902.
- [192] SOREAU (Rodolphe), Nouveaux types d'abaques. La capacité et la valence en nomographie, *Bulletin de la Société des ingénieurs civils de France*, 86 (1906), p. 821-880.
- [193] SOREAU (Rodolphe), Réduction de $F_{123} = 0$ à la forme $f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0$, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 155 (1912), p. 1065-1067.
- [194] SOREAU (Rodolphe), L'anamorphose et l'ordre nomographique, *Bulletin de la Société des ingénieurs civils de France*, 102 (1914), p. 471-529.

- [195] SOREAU (Rodolphe), Sur l'origine et le sens du mot « abaque », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 166 (1918), p. 67-69.
- [196] SOREAU (Rodolphe), *Nomographie ou Traité des abaques*, 2 vol., Paris : Chiron, 1921.
- [197] SOREAU (Rodolphe), Pour servir à l'histoire de la nomographie, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 33 (1922), p. 518-523.
- [198] STRACHAN (Richard C.), Nomographic solutions for formulas of various types, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 78 (1915), p. 1359 et suiv.
- [199] TERQUEM (Olry), *Mémorial de l'artillerie*, 3 (1830), p. 296-336.
- [200] THOMAS (Marc), *La règle à calcul, instrument de l'ère industrielle : le rôle de la France*, Thèse de doctorat de l'université de Nantes, 2014.
- [201] TOURNÈS (Dominique), Une discipline à la croisée de savoirs et d'intérêts multiples : la nomographie, in *Circulation Transmission Héritage, Actes du XVIII^e colloque inter-IREM Histoire et épistémologie des mathématiques (Université de Caen Basse-Normandie, 28-29 mai 2010)*, Pierre Ageron et Évelyne Barbin (éds), Caen : Université de Caen Basse-Normandie, 2011, p. 415-448.
- [202] TOURNÈS (Dominique), Mathematics of Nomography, in *Mathematik und Anwendungen*, Michael Foote, Michael Schmitz, Birgit Skorsetz, Renate Tobies (Hrsg.), Bad Berka : Thillm, 2014, p. 26-32.
- [203] VAN QUANG (Tran), Nomographie et statistique, *Revue de statistique appliquée*, 9 (1961), n° 3, p. 47-76.
- [204] VAUTHIER (Louis-Léger), Note sur une carte statistique figurant la répartition de la population de Paris, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 128 (1874), p. 264-267.
- [205] VERINE (Henri), Interdisciplinarité ou transdisciplinarité ? Le cas d'une méthode de calcul graphique : la nomographie et sa terminologie, in *Terminologie et interdisciplinarité*, Caroline de Schaetzen (éd.), Louvain-La-Neuve : Peeters, 1997, p. 73-91.
- [206] VOGLER (Christian August), *Sechs graphische Tafeln zum Schnellrechnen und zum Schnellquotiren mit Aneroid und Tachymeter nebst Gebrauchsanweisung*, Berlin : Ernst & Korn, 1877.
- [207] VOGLER (Christian August), *Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln und zu deren Gebrauch beim Schnellrechnen sowie beim Schnellquotiren mit Aneroid und Tachymeter für Ingenieure, Topographen und Alpenfreunde*, Berlin : Ernst & Korn, 1877.
- [208] WARMUS (Mieczysław), *Nomographic functions*, Warszawa : Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1959.
- [209] WILLERS (Friedrich Adolf), *Methoden der praktischen Analysis*, Berlin : de Gruyter, 1928; 2^e éd., 1950; 3^e éd., 1957, 4^e éd., 1971. Trad. angl. de Robert Thomas Beyer, *Practical Analysis. Graphical and Numerical Methods*, New York : Dover, 1948.
- [210] WOLFF (Charles E.), *Diagrams for Egyptian Engineers*, Le Caire, 1903.