REMARQUES SUR LES MOYENNES DES FONCTIONS DE PILTZ SUR LES ENTIERS FRIABLES

SARY DRAPPEAU

ABSTRACT. We study the mean value of generalized divisor functions $\tau_\kappa(n)$ over integers without large prime factors (here $\kappa > 0$). We relate this problem to the computation of the ratio $\Psi(x^{1/\kappa}, y)^\kappa / \Psi(x, y)$, involving the y -smooth numbers counting function. We establish an inverse theorem, giving limitations on the range in (x, y) in which this ratio can be asymptotically estimated uniformly in κ .

1. INTRODUCTION

Un entier n est dit y -friable si son plus grand facteur premier $P(n)$ est inférieur ou égal à y , avec la convention $P(1) = 1$. On note

$$S(x, y) := \{n \leq x : P(n) \leq y\}, \quad \Psi(x, y) := |S(x, y)|.$$

Nous nous intéressons ici aux valeurs moyennes

$$(1.1) \quad \mathcal{M}_f(x, y) := \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} f(n)$$

d'une fonction multiplicative f sur les entiers friables. Ces moyennes ont été étudiées dans la série de travaux [TW03, HTW08, TW08a, TW08b] ainsi que dans [BT05b], et jouent un rôle important dans la compréhension du cas $y = x$, par le biais de la factorisation de chaque entier $n = ab$ avec $P(a) \leq y$ et $p|b \Rightarrow p > y$ (voir par exemple [GS01]).

Notons $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n . Dans l'article [Dra15], faisant suite aux travaux de Fouvry–Tenenbaum [FT90], il est établi que

$$(1.2) \quad \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ n > 1}} \tau(n-1) \sim \log x \quad \left(2 \leq y \leq x, \frac{\log \log x}{\log y} \rightarrow \infty\right).$$

Bien sûr, la fonction $n \mapsto \tau(n-1)$ n'est pas multiplicative ; ce problème est donc de nature très différente, et *a priori* plus délicate, que l'étude de

$$\mathcal{M}_\tau(x, y) = \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} \tau(n).$$

On pourrait donc naïvement s'étonner que le comportement asymptotique de $\mathcal{M}_\tau(x, y)$ n'est en revanche connu que dans un domaine du type

$$(H_\varepsilon) \quad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x,$$

voir par exemple [Smi93]¹. Ce domaine est plus restreint que (1.2) ; l'objectif de la présente note est d'éclaircir les raisons de cette discrépance.

Étant donné $\kappa > 0$, nous considérons la fonction de Piltz τ_κ , définie par la série génératrice

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\tau_\kappa(n)}{n^s} = \zeta(s)^\kappa \quad (\Re s > 1).$$

Date: 1st July 2016.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11N25; Secondary 11N37.

¹L'estimation générale du Théorème 2.5 de [BT05b], appliquée au cas $f = \tau$, ne fournit pas un équivalent asymptotique.

C'est une fonction multiplicative, avec $\tau_\kappa(p) = \kappa$ pour p premier. Pour $\kappa = 2$, nous retrouvons $\tau_2 = \tau$. Nous avons également besoin de la notation suivante : lorsque $2 \leq y \leq x$, l'on note $\alpha(x, y)$ l'unique solution réelle positive à l'équation

$$(1.3) \quad \log x = \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1}.$$

Enfin, on pose

$$(1.4) \quad u := \frac{\log x}{\log y}, \quad \phi_2(s, y) := \sum_{p \leq y} \frac{(\log p)^2 p^s}{(p^s - 1)^2} \quad (2 \leq y \leq x, \Re(s) > 0).$$

Notre première observation est que dans le cas $f = \tau_\kappa$, la valeur moyenne (1.1) peut être comparée de façon simple à $\Psi(x^{1/\kappa}, y)^\kappa$.

Théorème 1. *Pour $\kappa > 0$ et $2 \leq y \leq x$, on a*

$$(1.5) \quad \sum_{n \in S(x, y)} \tau_\kappa(n) = A_\kappa(x, y) \Psi(x^{1/\kappa}, y)^\kappa \left\{ 1 + O_\kappa\left(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y}\right) \right\}$$

avec

$$A_\kappa(x, y) = \kappa^{-\frac{1}{2}} (\beta \sqrt{2\pi \phi_2(\beta, y)})^{\kappa-1} \quad (\beta = \alpha(x^{1/\kappa}, y)).$$

Lorsque $\min\{y, u\} \rightarrow \infty$, on a l'approximation explicite

$$(1.6) \quad A_\kappa(x, y) \sim \kappa^{\kappa/2-1} \left(2\pi u \left(1 + \frac{\log x}{\kappa y} \right) \right)^{(1-\kappa)/2} \left(\log \left(1 + \frac{\kappa y}{\log x} \right) \right)^{1-\kappa}.$$

Dans le cas $\kappa = 2$, le problème s'interprète comme le comptage des points $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, à coordonnées y -friables, situés sous l'hyperbole $mn = x$. Le résultat précédent met en valeur la pertinence de comparer le nombre total au nombre de points dans le carré $\max\{m, n\} \leq x^{\frac{1}{2}}$, plutôt qu'au nombre de points sur la droite $n = 1$.

L'estimation (1.5), dont la preuve est très simple, permet d'ouvrir la voie à des estimations semi-asymptotiques [BT05b, Théorème 2.4], c'est-à-dire des estimations uniformes du rapport $\mathcal{M}_{\tau_\kappa}(x/d, y)/\mathcal{M}_{\tau_\kappa}(x, y)$ pour $1 \leq d \leq x$. Nous nous contentons d'illustrer cela par l'exemple

$$\mathcal{M}_{\tau_\kappa}(x/2, y) \sim 2^{-\beta} \mathcal{M}_{\tau_\kappa}(x, y) \quad (\beta = \alpha(x^{1/\kappa}, y), x \rightarrow \infty),$$

qui découle immédiatement des formules (1.5), (1.6) et du Théorème III.5.22 de [Ten15]. Il est utile de noter que

$$\beta = o(1) \Leftrightarrow y \leq (\log x)^{1+o(1)}, \quad \beta = 1 + o(1) \Leftrightarrow \log y / \log_2 x \rightarrow \infty.$$

Dans le cas d'une fonction multiplicative f plus générale, il est connu [BT05a, p.542] que les valeurs $f(p^2)$ (resp. $f(p^\nu)$) influent de façon essentielle sur l'ordre de grandeur de la valeur moyenne (1.1) dès lors que $y \leq (\log x)^{2+o(1)}$ (resp. $y \leq (\log x)^{\nu/(\nu-1)+o(1)}$). De plus, dans les cas les plus favorables, une méthode de convolution permet facilement de se ramener à $f = \tau_\kappa$. Ce sont les raisons pour lesquelles nous ne tentons pas ici d'énoncer un résultat pour une fonction multiplicative générique f .

Notre second résultat concerne l'évaluation du rapport

$$(1.7) \quad \frac{\Psi(x^{1/\kappa}, y)^\kappa}{\Psi(x, y)}.$$

Nous posons

$$\phi_0(s, y) := \log \zeta(s, y) = - \sum_{p \leq y} \log(1 - p^{-s}) \quad (\Re(s) > 0).$$

Notons que $\phi_0(\alpha(x, y), y) \sim u + \log \log y$ lorsque $\min\{\frac{y}{\log x}, u\} \rightarrow \infty$.

Théorème 2. *Soit $\kappa > 0$. Alors on a*

$$\frac{\Psi(x^{1/\kappa}, y)^\kappa}{\Psi(x, y)} = B_\kappa(x, y) \exp \left\{ \int_1^\kappa \phi_0(\alpha(x^{1/\lambda}, y), y) d\lambda \right\} \left\{ 1 + O_\kappa \left(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y} \right) \right\},$$

avec

$$B_\kappa(x, y) = \frac{\alpha \sqrt{2\pi \phi_2(\alpha, y)}}{(\beta \sqrt{2\pi \phi_2(\beta, y)})^\kappa} \quad (\beta = \alpha(x^{1/\kappa}, y)).$$

En particulier, on a

$$(1.8) \quad B_\kappa(x, y) \sim \begin{cases} (2\pi u)^{(1-\kappa)/2} \kappa^{\kappa/2}, & (y/\log x \rightarrow \infty), \\ (2\pi y/\log y)^{(1-\kappa)/2}, & (y/\log x \rightarrow 0). \end{cases}$$

Lorsque $(\log x)^{1+\varepsilon} \leq y \leq x$, une forme forte de la formule de Mertens (cf. [HT86, p.289]) permet d'écrire

$$(1.9) \quad \begin{aligned} & \int_1^\kappa \phi_0(\alpha(x^{1/\lambda}, y), y) d\lambda \\ &= (\kappa - 1) \log(e^\gamma \log y) + \int_1^\kappa \Xi\left(\frac{u}{\lambda}\right) d\lambda + O_{\kappa, \varepsilon} \left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{u}{e^{(\log y)^{3/5-\varepsilon}}} \right). \end{aligned}$$

Ici, $\xi(t)$ dénote l'unique solution non nulle de $e^\xi = 1 + t\xi$ lorsque $t \neq 1$, avec $\xi(1) = 0$, tandis que

$$\Xi(u) := \int_1^u t \xi'(t) dt.$$

Le second terme d'erreur dans (1.9) provient de la région sans zéros de ζ due à Korobov et Vinogradov [IK04, Corollary 8.30]. Il n'est uniformément borné que dans un domaine essentiellement du type (H_ε) . Cela suggère une limitation à l'estimation du rapport (1.7) en dehors du domaine (H_ε) et constitue la motivation à ce qui suit.

Notre troisième résultat concerne un théorème inverse. Hildebrand [Hil84] a démontré que la validité, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, de l'estimation

$$\Psi(x, y) = x \rho(u) e^{O_\varepsilon(y^\varepsilon)} \quad (y \geq (\log x)^{2+\varepsilon}),$$

est équivalente à l'hypothèse de Riemann. Ici, $\rho(u)$ est la fonction de Dickman (cf. [Ten15, Section III.5.3]). Sa méthode repose de façon essentielle sur une certaine équation fonctionnelle vérifiée par $\Psi(x, y)$ (voir également [Hil86]).

Compte tenu du Théorème 2, il est naturel de s'attendre à ce qu'un phénomène analogue se produise dans le cas du rapport (1.7).

Conjecture 1. *Soit $\kappa \neq 1$ fixé. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, l'on ait*

$$(1.10) \quad \frac{\Psi(x^{1/\kappa}, y)^\kappa}{\Psi(x, y)} = \frac{\rho(u/\kappa)^\kappa}{\rho(u)} \exp\{O_\varepsilon(y^\varepsilon)\} \quad ((\log x)^{2+\varepsilon} \leq y \leq x).$$

Alors l'hypothèse de Riemann est vraie.

La quantité au membre de gauche de (1.10) ne semble pas être facilement abordable par la méthode de Hildebrand [Hil84]. Si l'on autorise κ à varier sur un intervalle non vide sans que cela n'altère la constante implicite dans (1.10), nous obtenons par une autre méthode le résultat suivant.

Théorème 3. *Soit $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}_+^\times$ un ouvert non vide. Si l'estimation (1.10) est vraie uniformément pour $\kappa \in \mathcal{I}$, alors $\zeta(s) \neq 0$ lorsque $\Re(s) > \frac{3}{4}$.*

Nous précisons que notre approche est différente de celle de [Hil84], et consiste à raisonner directement à partir de l'estimation du Théorème 2. En particulier, nous n'utilisons pas l'identité de Hildebrand [Hil86].

Nous concluons en remarquant que le Théorème 3 fournit une autre démonstration de la version affaiblie suivante de [Hil84, Theorem 1] :

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0, \quad \Psi(x, y) = x\rho(u)e^{O_\varepsilon(y^\varepsilon)} \quad \text{pour } (\log x)^{2+\varepsilon} \leq y) \\ \implies \quad \zeta(s) \neq 0 \quad (\Re(s) > \tfrac{3}{4}). \end{aligned}$$

Remerciements. L'auteur remercie R. de la Bretèche pour des remarques sur une version préliminaire.

Notations et rappels. Nous rappelons quelques définitions de [HT86]. La série de Dirichlet associée aux entiers y -friables est notée

$$\zeta(s, y) := \sum_{P(n) \leq y} n^{-s} = \prod_{p \leq y} (1 - p^{-s})^{-1} \quad (\Re(s) > 0).$$

Nous rappelons la définition (1.3) du *point-selle* $\alpha(x, y)$. Nous définissons également

$$\phi_1(s, y) = \frac{d}{ds} \phi_0(s, y) = - \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^s - 1} \quad (\Re(s) > 0).$$

Nous rappelons que $\phi_2(s, y)$, la dérivée seconde de $\phi_0(s, y)$, est définie en (1.4). Avec l'abréviation $\alpha = \alpha(x, y)$, le résultat principal de [HT86] est l'estimation

$$(1.11) \quad \Psi(x, y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y)}{\alpha \sqrt{2\pi \phi_2(\alpha, y)}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y}\right) \right\} \quad (2 \leq y \leq x).$$

Nous rappelons enfin l'estimation [HT86, Lemma 4]

$$(-1)^j \phi_j(\alpha, y) \asymp u(\log y)^j, \quad (\log x \ll y \leq x, \quad j \in \{1, 2\}).$$

2. DÉMONSTRATION DES RÉSULTATS

2.1. Démonstration du Théorème 1. Le Théorème 1 découle aisément des calculs de [HT86], une fois la remarque faite que

$$x^s \zeta(s, y)^\kappa = (x^{s/\kappa} \zeta(s, y))^\kappa \quad (x, y \geq 2, \Re(s) > 0).$$

Ainsi, le rôle du point-selle est joué par la quantité $\beta(x, y) = \alpha(x^{1/\kappa}, y)$. Des calculs semblables à ceux de [HT86] fournissent alors

$$\sum_{n \in S(x, y)} \tau_\kappa(n) = \left\{ 1 + O_\kappa\left(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y}\right) \right\} \frac{x^\beta \zeta(\beta, y)^\kappa}{\beta \sqrt{2\kappa\pi \phi_2(\beta, y)}}.$$

La comparaison de cette estimation avec (1.11) fournit le résultat annoncé (1.5). L'approximation (1.6) est déduite en utilisant [HT86, Corollary 1].

2.2. Démonstration du Théorème 2. Notons temporairement $\beta(\kappa) = \beta_{x, y}(\kappa) = \alpha(x^{1/\kappa}, y)$. C'est une fonction dérivable de $\kappa > 0$. Nous avons de plus

$$(2.1) \quad \kappa \phi_0(\beta(\kappa), y) + \beta(\kappa) \log x - \phi_0(\beta(1), y) - \beta(1) \log x = \int_1^\kappa \phi_0(\beta(\lambda), y) d\lambda \quad (\kappa > 0).$$

Cette identité est aisément vérifiable en dérivant par rapport à κ , puis en utilisant la définition du point-selle (1.3). Le résultat annoncé est alors une conséquence simple de (2.1) et de [HT86, Theorem 1]. L'estimation (1.8) est une conséquence de [HT86, Corollary 1].

2.3. Démonstration du Théorème 3. Dans cette section, il sera utile d'abrégier

$$\alpha_y(u) := \alpha(y^u, y).$$

C'est une fonction dérivable de u ; on note que pour $y \gg \log x$,

$$\alpha'_y(u) = -\frac{\log y}{\phi_2(\alpha_y(u), y)} \ll \frac{1}{u \log y}.$$

En utilisant le Théorème 2, l'hypothèse (1.10) est réécrite sous la forme

$$(2.2) \quad \int_1^\kappa \phi_0(\alpha_y(u/\lambda), y) d\lambda = \int_1^\kappa \Xi(u/\lambda) d\lambda + O(y^\varepsilon) \quad (1 \leq u \leq y^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \kappa \in \mathcal{I}).$$

Nous voyons ceci comme une majoration de la différence $\phi_0(\alpha_y(u/\lambda), y) - \Xi(u/\lambda)$ en moyenne sur λ . La première étape est d'en déduire une majoration valable pour λ fixé, autrement dit, retirer la moyenne sur λ . Cela utilise l'hypothèse supplémentaire sur $\mathcal{I}$, et c'est la raison pour laquelle nous obtenons *in fine* la valeur $\frac{3}{4}$ (plutôt que $\frac{1}{2}$). Nous montrons dans un premier temps que le Théorème 3 découle de la proposition suivante.

Proposition 1. Soit $\delta \in [0, \frac{1}{2}[$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, l'on ait

$$(2.3) \quad \phi_0(\alpha_y(u), y) = \Xi(u) + O(y^{\delta+\varepsilon}) \quad ((\log x)^{2+\varepsilon} \leq y \leq x).$$

Alors on a $\zeta(s) \neq 0$ pour $\Re(s) > \frac{1}{2} + \delta$.

Démonstration que la Proposition 1 implique le Théorème 3. Soit $\kappa \in \mathcal{I}$, et $(\eta, \eta_0) \in \mathbf{R}^2$ des paramètres vérifiant $0 < |\eta| < \eta_0$. Lorsque η_0 est suffisamment petit, on peut appliquer l'hypothèse (2.2) avec x remplacé par $x^{1/(1+\eta)}$ et κ remplacé par $\kappa/(1+\eta)$, ce qui fournit par soustraction

$$\int_1^{1+\eta} \phi_0(\alpha_y(u/\lambda), y) d\lambda = \int_1^{1+\eta} \Xi(u/\lambda) d\lambda + O(y^\varepsilon).$$

Soit $F(\eta)$ l'intégrale du membre de gauche. C'est une fonction $\mathcal{C}^2$ de η , qui vérifie de plus

$$F'(0) = \phi_0(\alpha_y(u), y), \quad F''(\eta) = -\frac{u}{(1+\eta)^2} \alpha'_y\left(\frac{u}{1+\eta}\right) \phi_1\left(\alpha_y\left(\frac{u}{1+\eta}\right), y\right) \ll u.$$

Les propriétés analogues sont vraies pour l'intégrale du membre de droite. En prenant les taux d'accroissement entre $\eta = 0$ et $\eta = \eta_0 u^{-\frac{1}{2}}$, nous obtenons, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\phi_0(\alpha_y(u), y) = \Xi(u) + O(u^{\frac{1}{2}} y^\varepsilon) \quad (1 \leq u \leq y^{\frac{1}{2}-\varepsilon}).$$

Nous sommes donc en mesure d'appliquer la Proposition 1 avec $\delta = \frac{1}{4}$, ce qui fournit la conclusion annoncée. $\square$

La seconde étape consiste à extraire de l'hypothèse implicite (2.3) une estimation asymptotique de $\phi_0(\beta, y)$ pour chaque $\beta \in]\frac{1}{2}, 1[$. Nous montrons dans un deuxième temps que la Proposition 1 est une conséquence du lemme suivant, qui fait intervenir la fonction

$$L(w) := \text{li}(w) - \frac{w}{\log w} \quad (w > 1)$$

avec $\text{li}(w) := \int_2^w dt/(\log t)$.

Lemme 1. Soit $(\vartheta, \delta) \in \mathbf{R}^2$ avec $0 < \delta < \vartheta < 1$, et $F : [2, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$ une fonction satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) F est continue par morceaux, continue à droite, et $F(y) \asymp y^\vartheta$,
- (ii) on a

$$(2.4) \quad L(F(y)) = \int_2^y \frac{F(z)}{\log F(z)} \frac{dz}{z \log z} + O(y^\delta) \quad (y \geq 2).$$

Alors on a

$$(2.5) \quad F(y) = y^\vartheta + O(y^\delta (\log y)^2) \quad (y \geq 2).$$

Démonstration que le Lemme 1 implique la Proposition 1. Soit $\beta \in]\frac{1}{2}, 1 - \delta[$ fixé. On définit

$$F(y) := \exp \left\{ \xi \left(\frac{-\phi_1(\beta, y)}{\log y} \right) \right\} \quad (y \geq 2).$$

Cela signifie que par définition,

$$\frac{F(y) - 1}{\log F(y)} = -\frac{\phi_1(\beta, y)}{\log y}.$$

On remarque que l'on a

$$F(y) \sim \frac{-\phi_1(\beta, y)}{\log y} \log \left(\frac{-\phi_1(\beta, y)}{\log y} \right) \asymp y^{1-\beta}$$

lorsque $y \rightarrow \infty$. Cela valide l'hypothèse (i) avec $\vartheta = 1 - \beta$. L'hypothèse (ii), quant à elle, découle de la relation (2.3). En effet, on a d'une part

$$\Xi(u) = \text{li}(e^{\xi(u)}) + O(\xi(u)) \quad (u \geq 2).$$

D'autre part, une intégration par parties fournit

$$\phi_0(\beta, y) = O_\beta(1) - \frac{\phi_1(\beta, y)}{\log y} - \int_2^y \frac{\phi_1(\beta, t)}{\log t} \frac{dt}{t \log t} \quad (y \geq 2).$$

Les hypothèses du Lemme 1 étant vérifiées, on obtient pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$(2.6) \quad F(y) = y^{1-\beta} + O(y^{\delta+\varepsilon}).$$

D'autre part, par définition de F , on a

$$\frac{F(y) - 1}{\log F(y)} = \frac{1}{\log y} \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\beta - 1} = \frac{1}{\log y} \left(\sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\beta} + O_\beta(1) \right).$$

Ainsi la relation (2.6) implique

$$\sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\beta} = \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} + O_{\beta, \varepsilon}(y^{\delta+\varepsilon}) \quad (y \geq 2).$$

Le choix $\beta = \frac{1}{2} + \varepsilon$ implique alors $\sum_{p \leq y} \log p = y + O(y^{\frac{1}{2}+\delta+\varepsilon})$, ce qui est classiquement équivalent à l'assertion que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\Re(s) > \frac{1}{2} + \delta$. $\square$

Démonstration du Lemme 1. Soient $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}$ avec $10 \leq y_1 \leq y_2 \leq 2y_1$. On note que $y_1 \asymp y_2$. Pour $w \geq F(y_1)$, on pose

$$A_{y_1}(w) := \int_{F(y_1)}^w \frac{dt}{(\log t)^2} = L(w) - L(F(y_1)).$$

On calcule de deux façons la quantité

$$(2.7) \quad \mathcal{B}(y_1, y_2) := \frac{A_{y_1}(F(y_2)) \log F(y_2)}{F(y_2)} + \int_{F(y_1)}^{F(y_2)} \frac{\log w - 1}{w^2} A_{y_1}(w) dw.$$

D'une part, une intégration par parties fournit immédiatement

$$\mathcal{B}(y_1, y_2) = \log \log F(y_2) - \log \log F(y_1).$$

D'autre part, notre hypothèse (2.4) implique, pour tout $y' \in [y_1, y_2]$,

$$(2.8) \quad A_{y_1}(F(y')) = \int_{y_1}^{y'} \frac{F(z)}{\log F(z)} \frac{dz}{z \log z} + O(y_2^\delta).$$

Pour $w \in [F(y_1), F(y_2)]$, on définit $y_w := \inf\{y \geq 2 : F(y) \geq w\}$. Notre hypothèse (i) implique ainsi $F(y_w) \geq w$, et $F(y_w - 1) < w$. On en déduit que $|F(y_w) - w| \ll (\log y_2)^2 y_2^\delta$, ce qui implique

$$A_{y_1}(w) = \int_{y_1}^{y_w} \frac{F(z)}{\log F(z)} \frac{dz}{z \log z} + O(y_2^\delta)$$

d'après (2.8). Nous reportons cette estimation dans l'intégrale du membre de droite de (2.7). La contribution du terme d'erreur est encore une fois $O(y_2^{\delta-\vartheta} \log y_2)$. Par ailleurs, notre hypothèse (2.8) implique, pour tout $z \in [y_1, y_2]$,

$$\begin{cases} F(z) > w \implies z \geq y_w + O(y_2^{\delta+1-\vartheta} (\log y_2)^2), \\ F(z) \leq w \implies z \leq y_w + O(y_2^{\delta+1-\vartheta} (\log y_2)^2). \end{cases}$$

On a donc

$$\int_{F(y_1)}^{F(y_2)} \left(\int_{y_1}^{y_w} \mathbf{1}_{F(z) > w} dz + \int_{y_w}^{y_1} \mathbf{1}_{F(z) \leq w} dz \right) dw \ll y_2^{1+\delta} (\log y_2)^2.$$

Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \int_{F(y_1)}^{F(y_2)} \frac{\log w - 1}{w^2} \int_{y_1}^{y_w} \frac{F(z)}{\log F(z)} \frac{dz}{z \log z} dw \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{F(z)}{\log F(z)} \int_{F(z)}^{F(y_2)} \frac{\log w - 1}{w^2} dw \frac{dz}{z \log z} + O(y_2^{\delta-\vartheta} \log y_2). \end{aligned}$$

Enfin, on remarque que

$$\begin{aligned} & \frac{\log F(y_2)}{F(y_2)} \int_{y_1}^{y_2} \frac{F(z)}{\log F(z)} \frac{dz}{z \log z} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{F(z)}{\log F(z)} \int_{F(z)}^{F(y_2)} \frac{\log w - 1}{w^2} dw \frac{dz}{z \log z} \\ &= \log \log y_2 - \log \log y_1. \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(y_1, y_2) &= \log \log F(y_2) - \log \log F(y_1) \\ &= \log \log y_2 - \log \log y_1 + O(y_2^{\delta-\vartheta} \log y_2) \quad (10 \leq y_1 \leq y_2 \leq 2y_1). \end{aligned}$$

En sommant cela convenablement et par l'hypothèse (i), nous obtenons l'estimation

$$\log \log F(y) = \log \log y + \log \vartheta + O(y^{\delta-\vartheta} \log y) \quad (y \geq 10)$$

dont la relation annoncée (2.5) est une conséquence. $\square$

REFERENCES

- [BT05a] R. de la Bretèche and G. Tenenbaum, *Entiers friables: inégalité de Turán-Kubilius et applications*, Invent. Math. **159** (2005), no. 3, 531–588.
- [BT05b] ———, *Propriétés statistiques des entiers friables*, Ramanujan J. **9** (2005), no. 1-2, 139–202.
- [Dra15] S. Drapeau, *Théorèmes de type Fouvry-Iwaniec pour les entiers friables*, Compos. Math. **151** (2015), no. 5, 828–862.
- [FT90] É. Fouvry and G. Tenenbaum, *Diviseurs de Titchmarsh des entiers sans grand facteur premier*, Analytic number theory (Tokyo, 1988), Lecture Notes in Math., vol. 1434, Springer, Berlin, 1990, pp. 86–102.
- [GS01] A. Granville and K. Soundararajan, *The spectrum of multiplicative functions*, Ann. of Math. (2) **153** (2001), no. 2, 407–470.
- [Hil84] A. Hildebrand, *Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis*, Mathematika **31** (1984), no. 2, 258–271 (1985).
- [Hil86] ———, *On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$* , J. Number Theory **22** (1986), no. 3, 289–307.
- [HT86] A. Hildebrand and G. Tenenbaum, *On integers free of large prime factors*, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), no. 1, 265–290.
- [HTW08] G. Hanrot, G. Tenenbaum, and J. Wu, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. II*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), no. 1, 107–135.
- [IK04] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [Smi93] H. Smida, *Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier*, Acta Arith. **63** (1993), no. 1, 21–50.
- [Ten15] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 4^e ed., Échelles, Belin, 2015, (English translation: Graduate Studies in Mathematics 163, Amer. Math. Soc. 2015).

- [TW03] G. Tenenbaum and J. Wu, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables*, J. Reine Angew. Math. **564** (2003), 119–166.
- [TW08a] ———, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. III*, Compos. Math. **144** (2008), no. 2, 339–376.
- [TW08b] ———, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. IV*, Anatomy of integers, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 129–141.

AIX MARSEILLE UNIVERSITÉ, CNRS, CENTRALE MARSEILLE, I2M UMR 7373, 13453 MARSEILLE, FRANCE
E-mail address: `sary-aurelien.drappeau@univ-amu.fr`