Aperçu sur la notion de dénomination d'un rapport numérique au Moyen Âge et à la Renaissance

Sabine Rommevaux

Methodos
Savoirs et textes

1 | 2001
La philosophie et ses textes

Aperçu sur la notion de dénomination d’un rapport numérique au Moyen Âge et à la Renaissance

Sabine Rommevaux

Éditeur
Savoirs textes langage - UMR 8163

Édition électronique
URL : http://methodos.revues.org/51
DOI : 10.4000/methodos.51
ISBN : 978-2-8218-0442-5
ISSN : 1769-7379

Référence électronique
Sabine Rommevaux, « Aperçu sur la notion de dénomination d’un rapport numérique au Moyen Âge et à la Renaissance », *Methodos* [En ligne], 1 | 2001, mis en ligne le 09 avril 2004, consulté le 05 février 2017. URL : http://methodos.revues.org/51 ; DOI : 10.4000/methodos.51

Aperçu sur la notion de dénomination d’un rapport numérique au Moyen Âge et à la Renaissance

Sabine Rommevaux

1 Au Moyen Âge latin et jusqu’à la Renaissance, la théorie de la proportionnalité numérique est dominée par la notion de dénomination du rapport[1]. Cette notion trouve probablement son origine dans l’*Institutio arithmetica* de Boèce (début VI^e^ siècle), même si elle n’apparaît pas telle quelle dans ce texte. En effet Boèce, à la suite de Nicomaque (II^e^ siècle), introduit la notion de « nombre dénommant une partie » et expose la nomenclature des rapports numériques selon les cinq genres : rapports multiples, superparticuliers, superpartients, multiples superparticuliers et multiples superpartients. À partir de là, l’idée d’associer à tout rapport numérique, d’une part un nombre–la dénomination–, et d’autre part un nom issu de ce nombre pouvait assez naturellement faire son chemin[2].

2 La notion de dénomination d’un rapport apparaît dans des contextes différents : traités d’arithmétique pratique ayant un chapitre consacré aux rapports numériques, traités d’arithmétique théorique, éditions des *Éléments* d’Euclide (livre V consacré à la théorie de la proportionnalité des grandeurs et livre VII sur la proportionnalité numérique), etc. Nous ne retiendrons ici que deux types de textes, présentant deux approches différentes de la dénomination. D’une part, cette notion apparaît dans deux petits traités attribués à Jordanus et Campanus (XIII^e^ siècle) et consacrés à un problème de combinatoire relatif à six grandeurs en proportion[3]. Il s’agit pour les auteurs de donner une définition de la composition des rapports assimilée par eux à une multiplication, définition absente des *Éléments* d’Euclide. D’autre part, Campanus introduit la dénomination du rapport numérique dans sa recension des *Éléments* (environ 1260), plus précisément dans les définitions du livre VII. Il a tiré cette notion de l’*Arithmétique* de Jordanus (début du XIII^e^ siècle) et l’insère dans le traité euclidien. Ce faisant, il comble des lacunes dues à une

transmission textuelle défectueuse des *Éléments*. En effet, les notions fondamentales de la proportionnalité numérique euclidienne sont absentes de la version latine qu'il a utilisée, la version dite « Adélard II » et due probablement à Robert de Chester (XII^{e} siècle). Quant aux définitions de la proportionnalité, du livre VII pour les nombres, et du livre V pour les grandeurs, leur corruption rendait leur compréhension bien difficile[4]. L'introduction de la notion de dénomination du rapport permet d'établir la théorie de la proportionnalité numérique sur de nouvelles bases.

3 À la suite de Campanus, on retrouve la théorie de la dénomination dans certaines éditions des *Éléments*. Ainsi, Clavius, dans sa seconde édition (1589) lui consacre un long chapitre, à la suite de la définition V. 4 de la proportion comme similitude des rapports. Son exposé propose un panorama des usages de cette notion et a un intérêt historique évident, puisqu'il se fait l'écho des travaux de ses prédécesseurs. Toutefois, Clavius ne présente pas la théorie de la dénomination des rapports irrationnels introduite par Thomas Bradwardine (mort en 1349) dans le cadre de la mathématisation de la théorie du mouvement, et développée dans le même cadre par Nicole Oresme (1320 env.-1382).

I. Dénomination et composition des rapports

4 On trouve dans de nombreux traités d'arithmétique ou de théorie des proportions le problème suivant: étant données six grandeurs a, b, c, d, e et f, dénombrer et établir les relations du type $(x_1 : x_2) :: (x_3 : x_4) * (x_5 : x_6)$[5] déduites de la relation initiale (a : b) :: (c : d) * (e : f). Ce problème est apparu dans le contexte de l'astronomie puisque le fameux « théorème de Ménélaus », tel qu'il apparaît dans l'*Almageste* de Ptolémée[6], s'énonce en terme de six grandeurs en proportion. L'exercice de combinatoire qui en est issu a donné lieu à de nombreuses rédactions dans les mathématiques arabes et latines du X^{e} au XVI^{e} siècle[7]. Parmi elles figurent les deux textes de Campanus et Jordanus cités plus haut[8]. Ils s'ouvrent par une liste de définitions. Nous reprenons celles de Campanus, celles de Jordanus étant similaires :

> 1 : « Le rapport est la manière d'être de deux quantités de même genre l'une par rapport à l'autre. »
> 2 : « Lorsque de deux quantités de même genre l'une divise l'autre, ce qui en résulte est appelé dénomination du rapport de celle qui est divisée à celle qui divise. »
> 3 : « Le fait qu'un rapport soit produit ou composé à partir de deux rapports est le fait que la dénomination soit produite à partir des dénominations. »[9]

5 Ici, la dénomination d'un rapport (a : b) est définie comme le quotient de la division de a par b. Quant à la composition des rapports, elle est réduite à la multiplication des dénominations. On ne peut manquer de rapprocher cette définition 3 de la définition VI. 5 des *Éléments* d'Euclide :

> « Un rapport est dit être composé de rapports quand les valeurs des rapports, étant multipliées entre elles, produisent quelque chose. »[10]

6 Cette définition est notée en marge d'un manuscrit grec. On la retrouve dans la traduction latine médiévale anonyme issue du grec[11], dans la traduction faite à partir de l'arabe par Gérard de Crémone (XII^{e} siècle)[12], mais elle est absente de la tradition dite « adélardienne », donc en particulier de la version de Campanus. La plupart des historiens des sciences la jugent interpolée en raison d'incohérences stylistiques[13]. Cette interpolation a été motivée par l'absence, dans les *Éléments*, de définition de la

composition des rapports, dont cependant il est fait usage en particulier dans lespropositions VI, 23 et VIII, 5, pour les nombres et les segments de droites[14]. Dans un autre contexte, celui du commentaire à *Sphère et Cylindre* d’Archimède, Eutocius (VI^{e} siècle) se propose de donner une démonstration de la propriété d’insertion d’un moyen terme : (a : b) :: (a : c) * (c : b). Pour ce faire, il a besoin d’une définition de la composition des rapports. Il reprend alors l’énoncé de la définition VI. 5 des *Éléments* et introduit la notion de « valeur » ou « pélikotès » d’un rapport, nombre qui, d’une part donne son nom au rapport et d’autre part, multiplié par le terme conséquent, donne le terme antécédent [15].

7 Mais revenons au traité de Campanus sur les six grandeurs en proportion. Les définitions de la dénomination et de la composition sont à l’œuvre dans la démonstration des propriétés suivantes :

> Proposition 1 : « Si la dénomination du rapport[16] de deux extrêmes quelconques est multipliée par le second <extrême>, sera produit le premier <extrême>. »[17]

8 Ceci résulte directement de la définition 2. Et nous retrouvons ici la définition de la « pélikotès » vue précédemment.

> Proposition 2 : « Si entre deux <extrêmes> quelconques est interposé un médian qui détermine quelque rapport à chacun des deux <extrêmes>, <le rapport> du premier au troisième est composé à partir des rapports du premier au médian et du médian au troisième. »[18]

9 Il s’agit de la propriété d’insertion (a : c) :: (a : b) * (b : c). Le schéma de la démonstration proposée par Campanus est le suivant :

10 On appelled, eet f les dénominations de(a : b), (b : c)et(a : c).

11 On afc = aetec = bdonc(f : e) :: (a : b) :: (d : 1).

12 Soit f = ed donc (a : c) :: (a : b) * (b : c).

13 On remarque que les dénominations sont considérées comme des quantités, au même titre que a, b ou c. L’arrière plan arithmétisant, même s’il n’est pas explicité, semble bien présent.

14 Il est intéressant de regarder enfin la démonstration de la proposition 4 :

> « Si quelque rapport est composé à partir de deux <rapports>, son inverse est composé à partir des inverses. »[19]

15 C’est à dire que si(a : b) :: (c: d) * (e : f)alors en inversant(b : a) :: (d : c) * (f : e). Le schéma de la démonstration est le suivant :

16 On détermine g, h et k tels que (c : d) :: (g : h) et (e : f) :: (h : k).

17 Alors (a : b) :: (g : h) * (h : k) :: (g : k).

18 En inversant (b : a) :: (k : g).

19 Or (k : g) :: (k : h) * (h : g).

20 Donc (b : a) :: (d : c) * (f : e).

21 Dans cette preuve, la notion de dénomination n’apparaît plus et dans la suite du traité il n’en sera plus fait usage, la propriété fondamentale alors utilisée étant celle de l’insertion d’un terme médian. En conclusion, dans le cadre de ce petit traité, la notion de dénomination est introduite afin de définir la composition des rapports comme une multiplication et la propriété de l’insertion ayant été démontrée dans ce cadre conceptuel, le reste du traité s’inscrit dans la théorie euclidienne traditionnelle des

proportions. Les démarches de Campanus et de Jordanus sont ici proches de celle d'Eutocius.

II. Dénomination et proportionnalité numérique

22 Nous retrouvons la notion de dénomination des rapports dans un autre contexte, celui de la proportionnalité numérique du livre VII des *Éléments* d'Euclide. Dans la version dite «Adélard II», il manque, au début du livre VII, les définitions des notions fondamentales de partie, parties et multiple et la définition de la proportionnalité numérique y est pour le moins obscure[20]. Campanus a utilisé cette version pour sa recension des *Éléments.* Soucieux de compléter logiquement le traité euclidien tel qu'il l'a reçu *via* les traductions arabo-latines,il va puiser dans l'*Arithmétique* de Jordanus les définitions qui manquent et les ajoute à son texte[21]. Ce faisant, il introduit la notion de dénomination du rapport. Ainsi, on trouve au début du livre VII de la recension de Campanus, à la place de la définition euclidienne de la proportionnalité[22]:

> « Sont dits semblables ou l'un le même que l'autre, des rapports qui reçoivent la même dénomination, et plus grand, celui qui en <reçoit> une plus grande, et plus petit, celui qui en <reçoit> une plus petite. »[23]

23 Auparavant, il avait défini la dénomination d'un rapport (définition VII, 20 correspondant à la définition II. 8 de l'*Arithmétique* de Jordanus) :

> « Est dite dénomination d'un rapport, précisément d'un plus petit nombre à un plus grand, la partie ou les parties qui, dans le plus grand, consistent dans ce plus petit. Et <d'un rapport> d'un plus grand à un plus petit, le multiple ou le multiple et la partie ou les parties selon lesquelles le plus grand excède <le plus petit>. »[24]

24 C'est-à-dire, que pour un rapport donné (A : B), si A est plus petit que B, alors la dénomination de (A : B) est la partie ou les parties que A est de B. Par exemple, la dénomination du rapport (6 : 8) est 3/4. Et si A est plus grand que B, la dénomination est le nombre de fois que B est dans A (notons-le *n*) et la partie ou les parties de B qu'est le reste A-*n*B. Prenons par exemple le rapport (29 : 8); sa dénomination est 3 + 5/8 puisque 8 est dans 29 trois fois, et que le reste 5 = 29-3×8 est cinq huitièmes parties de 8. Campanus ne donne que de très rares exemples numériques de dénominations de rapports, et seulement pour des rapports multiples. On en trouve dans son commentaire aux définitions V. 10 et 11 des rapports doublés et triplés[25]: soient A, B, C en proportion continue, (A : B) :: (B : C), alors (A : C) est dit rapport doublé du rapport (A : B) et soient A, B, C, D en proportion continue, (A : B) :: (B : C) :: (C : D), alors (A : D) est dit rapport triplé de (A : B). Il explique que la dénomination du rapport doublé (resp. triplé) est le carré (resp. cube) de la dénomination du rapport initial. Il donne alors plusieurs exemples numériques. Ainsi, il considère les quatre nombres en proportion continue 3, 9, 27 et 81, (27 : 3) est le rapport doublé de (9 : 3) et sa dénomination 9 est le carré de la dénomination de (9 : 3) qui est 3 ; (81 : 3) est le rapport triplé de (9 : 3) et sa dénomination 27 est le cube de 3.

25 La définition VII. 20 de Campanus de « dénomination d'un rapport » est à rapprocher de sa définition VII. 13 de « nombre dénommant une partie » :

> « Dénommant est le nombre selon lequel une partie est prise dans son tout. »[26]

26 à compléter par la définition VII. 14 :

> « Sont dites semblables, des parties qui sont dénommées par le même nombre. »[27]

27 Ainsi, une partie étant donnée, on détermine le nombre de fois que cette partie est dans son tout, par exemple 2 dans 6. Le nombre obtenu, ici 3, permet de donner un nom à la partie : 2 est la *troisième* partie de 6. Campanus emprunte ces deux définitions à l' *Arithmétique* de Jordanus[28]mais la notion de «nombre dénommant une partie» provient de l'*Institutio arithmetica* de Boèce[29].

28 La notion de dénomination d'un rapport est introduite par Campanus dans les définitions du livre VII comme notion fondamentale de sa théorie de la proportionnalité numérique. Elle lui sert à définir l'égalité des rapports de nombres. Toutefois, elle n'apparaîtra plus dans le reste du traité, en particulier dans les preuves des propositions du livre VII. Les notions fondamentales mises en œuvre seront celles de partie, parties et multiple. En effet, l'égalité des rapports peut s'énoncer en ces termes :

29 1) soient A, B, C et D quatre nombres, tels que A > B et C > D, alors (A : B) :: (C : D) si B est contenu autant de fois dans A que D dans C et si les restes (A-*n*B et C-*n*D) sont la même partie ou les mêmes parties de B et D respectivement.

30 2) soient A, B, C et D tels que A < B et C < D, alors (A : B) :: (C : D) si A est la (ou les) même(s) partie(s) de B que C de D.

III. Dénomination des rapports irrationnels

31 À propos de la théorie du mouvement, Nicole Oresme, dans son *De proportionibus proportionum* (environ 1360), développe une théorie de la proportionnalité qui mériterait une étude approfondie[30]. Nous en donnons ici un aperçu rapide, laissant de côté sa théorie des «rapports de rapports», pour nous attacher à sa conception de la dénomination des rapports rationnels et irrationnels. Cette conception trouve probablement son point de départ dans un traité de Thomas Bradwardine sur le même sujet, le *Tractatus de proportionibus* (1328). Au chapitre I, à la suite de la définition du rapport (*proportio*), Bradwardine précise :

> « Et celui-ci (le rapport) est double; en effet rationnel, et du premier rang de la proportionnalité, est celui qui est immédiatement dénommé par quelque nombre, comme le rapport double, triple, etc. Et occupe le second rang celui qui est appelé irrationnel, qui n'est pas immédiatement dénommé par quelque nombre, mais seulement médiatement–puisqu'immédiatement dénommé par quelque rapport, qui est immédiatement dénommé par un nombre, comme la moitié du rapport double, qui est le rapport du diamètre au côté, et la moitié du rapport sesquioctave [31] qui constitue la moitié du ton. »[32]

32 Bradwardine n'est pas plus explicite à ce sujet dans le reste de son traité et tout le problème est de donner une interprétation de cette dénomination médiate du rapport irrationnel[33]. Il faut noter que lorsque Bradwardine parle ici de la « moitié » du rapport double, il considère le rapport, qui composé par lui-même, donne le rapport double (2 : 1), c'est-à-dire le rapport (A : B) tel que $(A : B)^2$ :: (2 : 1). Or ce rapport est obtenu en considérant C, médian géométrique entre 1 et 2, c'est-à-dire tel que (2 : C) :: (C : 1), car alors $(2 : C)^2$: : (2 : 1). Stillman Drake suggère de relier la notion de dénomination médiate à celle de médian géométrique[34]. Un rapport irrationnel (X : Y) serait médiatement dénommé par un rapport rationnel (A : B) s'il est obtenu en insérant *n-1* termes médians $A_1, ..., A_{n-1}$ entre A et B, c'est-à-dire que (X : Y) :: ($A : A_1$), avec ($A : A_1$) :: ($A_1 : A_2$) ... :: (A_{n-1}

: B), d'où $(X : Y)^n :: (A : A_1)^n :: (A : B)$ [35]. Quant au rapport rationnel, il serait immédiatement dénommé par un nombre car dénommé sans l'intermédiaire de médians.

33 Oresme reprend les définitions de Bradwardine mais développe sa théorie de la dénomination. Le point de départ en est l'insertion de termes médians dans un rapport rationnel, comme nous venons de le voir pour Bradwardine. Oresme, à la suite de Bradwardine, utilise un vocabulaire additif pour dire la composition des rapports. Ainsi, lorsqu'un terme médian A_1 est interposé entre A et B, le rapport $(A : B) :: (A : A_1)^2$ est dit « double » du rapport $(A : A_1)$, le rapport $(A : A_1)$ est dit « moitié » du rapport $(A : B)$ et le terme médian A_1 divise le rapport $(A : B)$ en deux « parties » égales, $(A : A_1)$ et $(A_1 : B)$. Plus généralement, si *n-1* termes médians sont interposés, $(A : A_1)^n :: (A : B)$, et le rapport $(A : A_1)$ est dite la *n*-ième « partie » du rapport $(A : B)$, le rapport $(A : B)$ est le « multiple » (d'ordre n) de $(A : A_1)$ et les termes médians divisent le rapport $(A : B)$ en *n* parties égales[36] . Parlant de la composition des rapports comme d'une addition, Oresme parle donc de «partie», de « multiple » et même de « parties » d'un rapport. Poursuivant le parallélisme avec les quantités[37], il parle de rapports commensurables ou incommensurables, selon qu'ils ont ou non une « partie » commune. On peut finalement résumer la situation ainsi[38] :

34 1) Un rapport R est une « partie » d'un rapport S, ou S est un « multiple » de R, si $S :: R^n$. Et dans ce cas, S et R sont commensurables. Par exemple le rapport (2 : 1) est la troisième partie du rapport (8 : 1).

35 2) Un rapport R est des «parties» d'un rapport S, précisément

m n-ième parties de S[39], s'il existe un rapport T, *m*-ième partie de R ($T^m :: R$) et *n*-ième partie de S ($T^n :: S$). Et dans ce cas, S et R sont commensurables, puisqu'ils ont une mesure commune, le rapport T. Par exemple, le rapport (9 : 1) est deux troisièmes parties de (27 : 1), car (3 : 1) est une deuxième partie ou la «moitié» de (9 : 1) et que (3 : 1) est la troisième partie de (27 : 1). Notons que (27 : 1) n'est pas un multiple de (9 : 1).

36 3) Si R n'est ni une partie, ni des parties, ni un multiple de S, alors R et S sont incommensurables. Par exemple, les rapports (2 : 1) et (3 : 1) sont incommensurables.

37 Nicole Oresme considère alors trois types de rapports, les rapports rationnels, les rapports irrationnels commensurables à un rapport rationnel, les rapports irrationnels qui sont incommensurables à tout rapport rationnel. Les rapports rationnels sont immédiatement dénommés par un nombre, éventuellement fractionnaire, et les rapports irrationnels, commensurables à un rapport rationnel, sont médiatement dénommés par un nombre :

> « Tout rapport rationnel est immédiatement dénommé par quelque nombre, soit avec une fraction, ou des fractions, soit sans fraction. [...] Et le rapport irrationnel est dit être dénommé médiatement par quelque nombre, quand celui-ci est une partie aliquote ou des parties de quelque rapport rationnel, ou quand il est commensurable à quelque <rapport> rationnel, ce qui est la même chose, comme le rapport du diamètre au côté est la moitié du rapport double .»[40]

38 Oresme n'est pas plus explicite que Bradwardine sur ce nombre qui dénomme médiatement le rapport irrationnel commensurable à un rapport rationnel. Toutefois il parle à plusieurs reprises du rapport rationnel qui dénomme le rapport irrationnel, et du

numérateur et du dénominateur, voire de la dénomination de la partie ou des parties que le rapport irrationnel est du rapport rationnel[41].

IV. L'exposé de Clavius sur la dénomination d'un rapport numérique

39 Un des traités les plus complets sur la théorie de la dénomination d'un rapport numérique se trouve dans la seconde édition, de 1589, du commentaire de Clavius aux *Éléments* d'Euclide, précisément à la suite des définitions 3 et 4 du livre V[42]. Ce long développement –représentant presque la moitié du commentaire au livre V tout entier–, pourrait trouver sa place dans un traité d'arithmétique. Il s'organise en trois parties. Dans la première partie, Clavius expose longuement la classification des rapports en les cinq genres. Dans la dernière partie, il traite de trois types de médiétés : l'arithmétique, la géométrique et l'harmonique[43]. La seconde partie est consacrée à la notion de dénomination d'un rapport. Il faut noter que Clavius ne fait aucune référence à la théorie de la dénomination des rapports irrationnels.

40 On peut s'interroger sur l'opportunité d'un tel développement à la suite des définitions du rapport et de la proportion : le livre V concerne en effet les grandeurs desquelles les entiers ne font en principe pas partie[44]. Toutefois, dès le Moyen Âge, on assiste à une arithmétisation du livre V[45]. Clavius justifie l'insertion de ce long commentaire par son intérêt pour la physique et en particulier pour l'étude de la proportionnalité du mouvement discutée par les philosophes à la suite d'Aristote[46]. Et cette justification est à relier au souci de Clavius de défendre la place des mathématiques dans l'enseignement et plus généralement dans l'organisation des savoirs[47]. Toutefois, en insérant ce long commentaire sur la classification des rapports, Clavius se place aussi dans une tradition de commentateurs qui remonte au moins à Campanus. Revenons à l'énoncé de la définition V, 3 du rapport. Dans l'édition de Clavius, sa formulation est la suivante : « Le rapport est une certaine manière d'être mutuellement, selon la quantité, de deux grandeurs de même genre »[48]. Elle diffère légèrement de celle de Campanus : « Le rapport est la manière d'être de deux quantités, quels que soient leurs genres, une manière d'être certaine de l'une à l'autre »[49]. Dans le commentaire qui suit[50], Campanus précise tout d'abord que le rapport ne se trouve pas seulement dans les quantités mais aussi dans les sons, les poids ou les puissances, et plus généralement dans toutes les choses qui sont susceptibles de comparaison selon la taille. Il en déduit alors que la condition d'homogénéité est nécessaire. Enfin, Campanus commente l'expression « certa habitudo ». Il remarque qu'il faut entendre par là, non pas que la relation est connue (« nota vel scita ») mais seulement qu'elle est déterminée (« determinata »). En effet, si pour les quantités discrètes, à savoir les nombres, ou pour les quantités continues commensurables, le rapport est connu, il ne l'est pas pour les quantités continues incommensurables. Il ajoute enfin que les genres des rapports entre des quantités continues sont beaucoup plus nombreux que ceux des rapports entre nombres[51]. Jacques Peletier du Mans (XVIe siècle), dans son édition des Éléments[52], est plus explicite que Campanus. À propos de « quaedam habitudo », il précise « quod quinque sint habitudinum species ». Ainsi, certains commentateurs des Éléments reprennent à cet endroit du livre V la classification des rapports en rapports rationnels et irrationnels, et ajoutent pour la plupart la classification des rapports rationnels en les cinq genres

introduits par Boèce, à la suite de Nicomaque, dans son Institutio arithmetica[53]. On trouve, par exemple, un tel développement dans le commentaire d'Oronce Finé (XVIe siècle)[54]. Par ailleurs, de telles classifications figurent aussi dans des traités d'arithmétique, comme dans la Summa de Arithmetica Geometrica Proportioni et Proportionalita de Pacioli (XVe siècle)[55]ou l'Arithme-tica practica d'Oronce Finé[56].

1) Définition et détermination de la dénomination

41 Clavius ne reprend pas la définition de la dénomination de Campanus au début de son livre VII. Elle apparaît dans son commentaire à la définition V. 4, où elle est définie comme étant «ce nombre qui exprime nettement et au grand jour la manière d'être d'une quantité à une autre.» [57]Deux exemples permettent immédiatement de préciser cette définition peu explicite. Ainsi la dénomination du rapport octuple est 8, car la plus grande grandeur[58] contient la plus petite 8 fois; et celle du rapport sesquiquinte (par exemple 12 à 10) est 1 et 1/5 puisque ce nombre exprime que la plus grande grandeur contient la plus petite une fois plus la cinquième partie de cette même petite grandeur. Clavius fait ensuite le lien entre la dénomination et la «quantité» du rapport dont il est question au livre VI, faisant ici référence à la définition VI. 5 qui figure dans son édition. Enfin il donne l'expression de la dénomination pour chacun des cinq genres du rapport de plus grande inégalité (rapport (a : b) avec a > b) et explique comment à partir d'elle déterminer le nom du rapport. Il reprend alors la nomenclature introduite dans le monde latin par Boèce, et largement reprise durant tout le Moyen Âge et la Renaissance. Ainsi, la dénomination d'un rapport superparticulier est «l'unité avec la partie aliquote, que la plus grande quantité doit contenir en plus de la plus petite»[59], c'est-à-dire que si on a (a : b) avec a = b + (1/k)b alors la dénomination est 1 + 1/k et le nom du rapport est formé du préfixe *sesqui* suivit du nom de la partie (on a les rapports sesquialtère, sesquitierce, etc.). Et un rapport superpartient, de dénomination 1 + h/k (avec h et k premiers entre eux), sera dit super-h-partient des k-ièmes parties. Par exemple le rapport (5 : 3) est le rapport superbipartient des troisièmes.Par ailleurs, les dénominations des rapports de plus petite inégalité s'obtiennent en inversant les dénominations des rapports de plus grande inégalité correspondantes. Il conclut en disant que les dénominations des rapports de plus grande inégalité «désignent en fait et en nom» les rapports, ce qui n'est pas le cas pour les rapports de plus petite inégalité qu'elles «désignent seulement en fait mais pas en mot, ou en nom»[60], puisque le nom d'un tel rapport est obtenu à partir de celui du rapport de plus grande inégalité correspondant, précédé du préfixe «sous».

42 Ceci étant posé, il s'agit dans la pratique de déterminer la dénomination. Pour cela il suffit de diviser le nombre antécédent du rapport par le conséquent et de réduire si nécessaire la fraction obtenue comme Clavius l'a par ailleurs expliqué dans son *Arithmétique* afin d'obtenir une expression de la forme n + h/k [61]. Enfin, Clavius fait nettement la différence entre la dénomination d'un rapport correspondant à la « pélikotès » grecque et le rapport exprimé en ses plus petits termes : le «pythmen», et pour lui, seule la dénomination permet de connaître l'essence du rapport [62]:

> « Et bien qu'un rapport quelconque puisse être exprimé par ses plus petits nombres comme nous l'avons dit, cependant la connaissance de la dénomination de ce même rapport est absolument nécessaire, afin que nous connaissions la manière d'être d'un nombre à l'autre. En effet même si quelqu'un dit que le rapport du nombre 1700 à 400 est celui du nombre 17 et 4, je ne concevrai toutefois pas clairement quel est ce rapport, tant que je n'aurai pas connaissance de sa dénomination qui est 4

1/4. En effet celle-ci indique clairement que le plus grand nombre contient le plus petit quatre fois et en plus sa quatrième partie »

2) Comparaison des rapports à l'aide des dénominations

43 La dénomination des rapports permet leur comparaison. Ainsi deux rapports sont semblables si leurs dénominations sont égales et un premier rapport est plus grand (respectivement plus petit) qu'un second si la dénomination du premier rapport est plus grande (respectivement plus petite) que celle du second[63]. Clavius cherche alors à déterminer le plus grand et le plus petit rapport d'un genre donné[64]. Parmi les rapports multiples, le plus petit est le rapport double et il n'y en a pas de plus grand. En revanche, parmi les rapports superparticuliers (dont la dénomination est de la forme $1 + 1/k$), il n'y en a pas de plus petit mais un plus grand, le rapport sesquialtère(3 : 2). Et pour les autres genres du rapport, on n'en peut donner ni de plus petit ni de plus grand, à moins de spécifier certains paramètres. Ainsi, parmi les superpartients de dénominations $1+ h/k$, si l'on fixe k, le plus petit rapport est obtenu quand h est égal à 2 : c'est le rapport superbipartient. Mais si l'on fixe h, le plus grand est obtenu pour k égal à 3 : c'est le rapport superpartient des troisièmes. Enfin, Clavius remarque que les rapports de plus grande inégalité sont tous plus grands que les rapports d'égalité, qui eux-mêmes sont plus grands que les rapports de plus petite inégalité. Et il ajoute « que le rapport de plus grande inégalité s'approche en décroissant toujours de plus en plus à l'infini du rapport d'égalité, mais cependant ne l'atteint jamais; et qu'au contraire le rapport de plus petite inégalité s'approche en croissant toujours de plus en plus à l'infini de ce même rapport d'égalité, mais cependant ne l'atteint jamais .»[65]. Il donne alors une description approximative de ces deux suites adjacentes :

> « En effet n'importe quel rapport multiple étant proposé, il en est donné un plus petit puis un plus petit jusqu'au double, qui est le plus petit de tous les multiples. Ensuite un plus petit que celui-ci est donné, à savoir un <rapport> superparticulier, ou un <rapport> superpartient quelconque, et comme dans ce genre, il ne peut en être donné le plus petit, et que tout rapport de ce genre est plus grand qu'un rapport d'égalité, il est clairement établi que le rapport de plus grande inégalité ne peut pas atteindre le rapport d'égalité, même s'il s'approche de lui en décroissant à l'infini. De nouveau puisque tout rapport de plus petite inégalité est plus petit que le rapport d'égalité, et qu'on ne peut cependant trouver en ce genre un rapport qui soit le plus grand, il est aussi manifeste, que le rapport de plus petite inégalité ne peut pas atteindre le rapport d'égalité bien qu'il soit possible qu'il s'en approche en croissant à l'infini .»[66]

44 Ainsi, dans le cas des rapports de plus grande inégalité, on a les inégalités suivantes :

45 $n > n\text{-}1 > ... > 2 > 1 + h/k > 1$ avec h fixé inférieur àk(éventuellementh = 1), et l'on fait croîtrekà l'infini. Notons que le phénomène de convergence n'est pas souligné de manière primordiale. Ce qui est mis en avant, c'est l'impossibilité de l'égalité.

3) Rapport doublé, rapport triplé, etc.

46 On retrouve la notion de dénomination dans le commentaire à la définition V, 10 du rapport doublé («duplicata») et triplé («triplicata»). Clavius y explique qu'un rapport rationnel quelconque étant donné, sa dénomination multipliée par elle-même donne la dénomination du rapport doublé, et si la dénomination est de nouveau multipliée par le

produit obtenu, on aura la dénomination du rapport triplé, et ainsi de suite[67]. Puis loin, il ajoute encore

> « C'est pourquoi la duplication, la triplication et la quadruplication d'un rapport quelconque dont on s'occupe dans cette définition, ne sont rien d'autre que la multiplication des dénominations des rapports intermédiaires entre eux. En effet de cette multiplication est engendrée la dénomination du rapport qu'ont les termes extrêmes entre eux, qui pour cette raison est dit <rapport> doublé, ou triplé, ou quadruplé, etc. de ce rapport dont la dénomination a été multipliée, dans la mesure où précisément la dénomination a été posée deux fois, ou trois fois, ou quatre fois, etc., et a été ainsi multipliée, comme nous l'avons exposé .»[68]

47 Clavius insiste particulièrement sur cet aspect multiplicatif de la composition, illustrant ses propos à l'aide de très nombreux exemples. Son insistance est à relier à sa critique de certains mathématiciens qui utilisent les expressions « ratio dupla, tripla » à la place de «ratio duplicata, triplicata». Selon Clavius, ces mathématiciens interprètent faussement la définition d'Euclide, voulant que dans la progression continue (a, b, c) le rapport (a : c) soit double de celui de (a : b), c'est-à-dire 2(a : b), alors qu'Euclide a voulu dire ici que (a : c) :: (a : b) * (a : b)[69]. Il semble que Clavius condamne injustement ces mathématiciens. Certes, il existe une tradition dans laquelle est utilisé, à propos de la composition des rapports, un ensemble d'expressions relatives à la «conjonction» des rapports–Boèce emploie le terme « conjungere » dans son *Institutio arithmetica* (II, 2)–ou même à l'addition–dans le *De institutione musica* Boèce utilise le verbe « addere »[70]. Comme nous l'avons vu plus haut, ce langage additif de la composition a été repris par Bradwardine puis Oresme et est à l'origine de leur conception des dénominations des rapports irrationnels. Cependant il est hâtif d'en conclure, comme le fait Clavius, que ces mathématiciens confondaient la composition des rapports avec l'addition des rapports (qui d'ailleurs n'est pas définie, ni utilisée dans la théorie générale des proportions), ni la duplication d'un rapport avec le double de celui-ci. Certes, l'utilisation d'un langage additif n'est pas innocent et a pu conduire certains mathématiciens à des considérations qui peuvent paraître étranges à celui qui conçoit la composition des rapports comme une multiplication. Ainsi, Federico Commandino (XVI^{e} siècle), dans son commentaire aux *Éléments*,demandait que dans les définitions des rapports doublés et triplés, les rapports soient de plus grande inégalité :

> « Les dixième et onzième définitions requièrent nécessairement des termes inégaux, le premier d'entre eux étant le plus grand. En effet s'ils étaient égaux, le rapport du premier au second serait le même que celui ‹du premier› au troisième. Mais si le premier était le plus petit, le premier ne pourrait pas avoir au troisième un rapport double (c'est-à-dire, doublé), à proprement parler, de celui qu'il a au deuxième, puisque le rapport du premier au deuxième est plus grand que celui <du premier> au troisième, d'après <la proposition> 8 de ce <livre> .»[71]

48 De même que dans les nombres, le double de *a* est plus grand que *a*, Commandino demande ici que le rapport double (ou selon la terminologie euclidienne, doublé) (a : c) soit plus grand que (a : b), ce qui est bien sûr faux pour des rapports de plus petite inégalité.

49 La connotation additive de la composition des rapports a d'autres conséquences chez Pedro Nuñez. Ainsi ce dernier explique qu'il ne peut pas y avoir de rapport entre des rapports de genres différents. En effet, d'après la définition V. 4 des *Éléments*, deux grandeurs ont un rapport l'une à l'autre si l'une d'elles, multipliée, excède l'autre. Or un rapport d'égalité, de dénomination 1,multiplié autant de fois que l'on veut–et Nuñez entend ici composé avec lui-

même autant de fois que l'on veut–ne peut pas excéder un rapport de plus grande inégalité de dénomination strictement supérieure à 1. Donc il ne peut pas exister de rapport entre ces types de rapports.

> « Même s'il en est ainsi, à savoir que n'importe quel rapport de plus grande inégalité est plus grand que n'importe quel rapport des deux autres genres, il ne peut y avoir aucun rapport entre des rapports de genres différents, parce que le rapport d'égalité ou de plus petite inégalité, même s'il est multiplié, ne peut pas dépasser le rapport de plus grande inégalité ni devenir un rapport de dénomination aussi grande. Et le rapport de plus petite inégalité ne peut pas non plus dépasser le rapport d'égalité même s'il est multiplié, ni arriver à sa quantité, de la même manière que nous l'avons dit à propos de l'angle de contingence : en supposant qu'il soit une quantité et plus petit que l'angle rectilinéaire, il n'a pas de rapport avec lui. »[72]

Conclusion

50 Au XIII^e siècle, on trouve, dans deux contextes différents, deux définitions différentes de la «dénomination d'un rapport numérique». Cette notion apparaît, dans les définitions, comme notion fondamentale permettant dans un cas de définir la composition des rapports, et dans l'autre cas d'asseoir sur de nouvelles bases conceptuelles la théorie des proportions du livre VII des *Éléments* là où elle est maltraitée par la transmission et par conséquent perçue comme défaillante par les médiévaux. Ce rôle fondationnel est primordial. En effet, même si dans le commentaire de Campanus aux définitions V. 10 et 11 un usage calculatoire de la dénomination est souligné par l'auteur, elle n'est pas perçue comme un outil. Par ailleurs, dans la recension des *Éléments* de Campanus, elle n'apparaît pas dans les démonstrations. Et dans les traités sur les six grandeurs en proportion, elle n'apparaît que dans les premières propositions qui mettent en place les outils classiques de la théorie euclidienne des proportions utilisés ensuite. Enfin, il faut souligner que si l'usage qui est fait de la dénomination dans les preuves de ces premières propositions pourrait ouvrir la voie à une assimilation du rapport et de sa dénomination, une différence très nette est encore faite entre les deux notions.

51 Grâce au succès de l'*Arithmétique* de Boèce puis de la recension des *Éléments* de Campanus au Moyen Âge et à la Renaissance, la théorie de la dénomination se répand largement. Le commentaire de Clavius aux *Éléments* fournit un bon exemple de l'usage qui a été fait de cette notion. Il se situe à une époque charnière, produit d'une longue tradition de commentaires et de traités sur la théorie des proportions dans lesquels la notion de dénomination a joué un rôle important, et à l'orée du XVII^e siècle, qui verra l'entrée des rapports dans le champ des quantités et bien plus tard l'avènement des réels. Mais même si l'introduction de la notion de dénomination dans le commentaire du livre V est le signe d'une arithmétisation de la théorie des proportions, il est pratiquement impossible de déceler dans le commentaire de Clavius les germes des lectures nouvelles du livre V faites par les mathématiciens du XVII^e siècle qui assimilent le rapport à une quantité et unifient les théories des livres V et VII. En effet, Clavius fait encore une différence très nette entre le rapport lui-même qui est une relation entre deux quantités et sa dénomination, qui certes est un nombre, mais a aussi la fonction de nommer les rapports sur laquelle il insiste. Nous sommes loin d'une assimilation du rapport à une quantité *via* sa dénomination. Il nous semble qu'il pourrait encore faire sienne la réflexion de son aîné,

Pedro Nuñez, qui, après avoir remarqué que (1 : 4) :: (1 : 2) * (1 : 2), mais que (1 : 2) > (1 : 4), ajoute :

52 « Et le fait que dans les rapports, la partie soit plus grande que le tout ne doit pas surprendre, parce que l'essence du rapport est une relation ou une comparaison, qui n'est pas à proprement parler une quantité, et qui ne contient pas de quantité, car elle n'est pas discrète comme est le nombre, et elle ne contient pas non plus d'extension parce qu'elle n'est pas une chose étendue comme la ligne, la surface et le corps »[73]

BIBLIOGRAPHIE

Bartolozzi M.-Franci R., « La teoria delle proporzioni nella matematica dell'abaco da Leonardo Pisano a Luca Pacioli » , *Bolletino di Storia delle Scienze Mathematiche* 10, fasc. 1, 1990, p. 3-28.

Boèce, *Institution arithmétique*, Guillaumin Jean-Yves éd., Paris, Les Belles Lettres, 1995.

Bradwardine Thomas, Crosby H.L. éd. et trad. : *Thomas Bradwardine, His «Tractatus de proportionibus»*, Madison, Wisconsin, 1955.

Busard H.L.L., « Die Traktate *De proportione* von Jordanus Nemorarius und Campanus », *Centaurus* 15, 3-4, 1971, p. 193-227.

–*The Latin Translation of the Arabic Version of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Gerard of Cremona* , Leyde, New Rhine Publishers, 1983.

–*The Medieval Latin Translation of Euclid's Elements Made Directly from the Greek*, Stuttgart, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden GmbH, 1987.

–éd., *Jordanus de Nemore*, De elementis artis, *A medieval treatise on number theory*, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 1991.

–et Folkerts M., *Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's* Elements, *the So-called Adelard II Version*, Birkhäuser Verlag, Bâle/Boston/Berlin, 1992.

Campanus, *Euclidis megarensis geometricorum elementorum libri XV*, Paris, in officina Henrici Stephani, 1516.

Clavius Christoph, *Opera mathematica*, Moguntiae (Mayence), sumptibus A. Hierat, Excudebat R. Eltz, 1611-12, 5 vol.; vol. 1 : *Les Éléments* d'Euclide.

–« Modus quo disciplinae mathematicae in scholis Societatis possent promoveri », in *Monumenta Paedagogica Societatis Jesu quae Primam Rationem Studiorum anno 1586 praecessere*, A. Avrial, Matriti, 1901.

Commandino Federico, *Euclidis elementorum libri XV una cum scholiis a Federico Commandino urbinate in latinum conversi*, 2d ed., Pesaro, 1619.

Drake Stillman, « Bradwardine's function, mediete denomination, and multiple continua », *Physis* 12, 1970, fasc. 1, p. 51-68.

Euclide, *Les Éléments*, Traduction française et commentaires de Bernard Vitrac, Paris, PUF, Bibliothèque d’histoire des sciences, 1994; volume II. Livres V et VI : Proportions et similitude. Livres VII à IX : Arithmétique.

Finé Oronce, *Arithmetica practica, libris quatuor absoluta*, Paris, 1535.

–*Orontii Finei, ... In sex priores libros geometricorum elementorum Euclidis*, Paris, apud S. Colinaeum, 1536.

Heiberg I. L., *Claudii Ptolemaei opera*,Leipzig, B. G. Teubner, 1898; vol. I*, Syntaxis Mathematica.*

Koelblen Sabine, « Une pratique de la composition des raisons dans un exercice de combinatoire », *Revue d’histoire des sciences* 47/2, 1994, p. 209-247.

Mugler Charles, *Archimède*, Tome 4, *Commentaire d’Eutocius et Fragments*, Paris, «Les Belles Lettres», 1972.

Murdoch John, « The Medieval Language of Proportions: Elements of the Interaction with Greek Foundations and the Development of New Mathematical Techniques » , in A.C. Crombie (éd.), *Scientific Change*, 1963, Londres, p. 240-251.

Molland A. G., « An Examination of Bradwardine’s Geometry », *Archive for History of Exact Sciences* 19, 1978.

Nuñez Pedro, *Libro de algebra en arithmetica y geometria*, Antwerpen, en la casa de los herederos d’A Birkman, 1567.

Oresme Nicole, Edward Grant éd. et trad. : *De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes*, Madison, University of Wisconsin Press, 1966.

Pacioli Luca, *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, Venise, Paganini, 1494.

Peletier du Mans Jacques, *Jacobi Peletarii Crenomana in Euclidis Elementa geometrica demonstrationum sex,* Lugduni, apud J. Tornaesium et G. Gazeium, 1557.

Romano Antonella, « À propos des mathématiques jésuites : notes et réflexions sur l’ouvrage d’Albert Krayer, *Mathematik in Studienplan der Jesuiten* », *Revue d’Histoire des Sciences* 46/2-3, 1993, p. 281-292.

–*La Contre-Réforme mathématique*, École française de Rome, 1999.

Rommevaux Sabine, « La proportionnalité numérique dans le livre VII des *Éléments* de Campanus », *Revue d’histoire des mathématiques* 5, 1999, p. 83-126.

Sylla E., « Compounding ratios, Bradwardine, Oresme, and the first edition of Newton’s *Principia* » , in Mendelsohn E. (éd.), *Transformation and Tradition in the Sciences*, *Essays in honor of I. Bernard Cohen,* Cambridge University Press, 1984, p. 11-43.

Vitrac Bernard, « ‘Umar al Hayyam et Eutocius : Les antécédents grecs du troisième chapitre du commentaire sur certaines prémisses problématiques du Livre d’Euclide », *fahrang, Quaterly Journal of Humanities and Cultural Studies* 12, n° 29-32, 2000, p. 51-105.

NOTES

1. Murdoch, 1963, p. 258.

2. John Murdoch suggère que la notion de dénomination proviendrait de la notion grecque de «pythmen» présente en particulier dans l’*Arithmétique* de Nicomaque et rendue par Boèce par l’expression latine «radix proportionum» (Murdoch, 1963, p. 257). Or le «pythmen» désigne les plus petits termes dans un rapport donné et non la dénomination du rapport qui correspond à la notion grecque de «pélikotès» proposée par Eutocius, par exemple. Voir plus loin le paragraphe I et les explications de Clavius dans le paragraphe IV. 1.

3. Murdoch, 1963, p. 263 s.; Koelblen, 1994.

4. Murdoch, 1963, p. 251-261; Rommevaux, 1999, p. 92 s.

5. Nous noterons (a : b) le rapport de a à b et (a : b) * (c : d) la composition des deux rapports.

6. Proposition du chapitre XI du livre I (Heiberg, 1898, I, p. 68 s.).

7. Voir Koelblen, 1994.

8. Ces deux textes ont été édités par Busard (1971).

9. «Proportio est duarum quantitatum eiusdem generis ad invicem habitudo. Cum duarum quantitatum eiusdem generis una dividit aliam quod exit dicitur denominatio proportionis divise ad dividentem. Proportionem produci aut componi ex proportionibus est denominationem produci ex denominationibus.» (Busard, 1971, p. 213).

10. Euclide, Vitrac trad., 1994, II, p. 150.

11. Busard, 1987.

12. Busard, 1983, c. 137.

13. Voir Euclide, Vitrac com., 1994, II, p. 150.

14. Il y est démontré que (a : b) * (c : d) :: (ac : bd), les deux produits ac et bd étant à interpréter comme les rectangles décrits sur a, c et b, d, dans le cas des droites. Dans la démonstration de VI, 23, Euclide utilise sans justification la règle : (K : M) :: (K : L) * (L : M), où K, L et M sont des droites (Euclide, Vitrac com., 1994, II, p. 150).

15. «Il faut donc se rappeler d'abord ce qu'on entend par l'affirmation qu'un rapport est composé d'autres rapports. D'après les *Éléments* (sc. il y a composition de rapports), si les quantités (*pèlikotétès*) des rapports multipliées entre elles produisent une quantité, le terme quantité désignant évidemment le nombre qui donne son nom au rapport donné, [...] ce qui revient à dire que le nom de la quantité désigne le nombre dont le produit par le terme conséquent du rapport donne le terme antécédent.» (Mugler, 1972, p. 82). Voir l'analyse par Bernard Vitrac de la notion de *pèlikotès* dans les mathématiques grecques, dans Vitrac (2000).

16. Campanus utilise le terme «proportio» pour désigner ici le rapport.

17. «Si denominatio proportionis quorumlibet duorum extremorum ducatur in secundum producetur primum.» (Busard, 1971, p. 213).

18. «Duobus quibuslibet interposito medio, cuius ad utrumque eorum duorum fit aliqua proportio, componetur primi ad tertium ex primi ad medium et medii ad tertium proportionibus» (Busard, 1971, p. 213).

19. «Si qua proportio componitur ex duabus, eius conversa componitur ex conversis» (Busard, 1971, p. 214).

20. Elle s'énonce ainsi : « Numeri proporcionales sunt quorum primus in secundo tanquam tertius in quarto aut in primo secundus tanquam in tercio quartus», que l'on peut rendre par : « Des nombres sont en proportion quand le premier est dans le second de la même manière que le troisième dans le quatrième ou le second dans le premier de la même manière que le quatrième dans le troisième» (Busard; Folkerts, 1992, vol. I, p. 187).

21. Pour une étude du travail de Campanus sur le traité euclidien à propos de la proportionnalité numérique, voir Rommevaux (1999).

22. La définition euclidienne est la suivante (Déf. VII, 21) : « Des nombres sont en proportion quand le premier, du deuxième, et le troisième, du quatrième, sont équimultiples ou la même partie, ou les mêmes parties» (Euclide, Vitrac trad., 1994, II, p. 262).

23. «Similes sive una alii eadem dicuntur proportiones, quae eandem denominationem recipiunt. Maior vero, quae maiorem. Minor autem, quae minorem» (Campanus, 1516, p. 169).

24. «Denominatio dicitur proportionis minoris quidem numeri ad maiorem, pars, vel partes ipsius minoris quae in maiore sunt. Maioris autem ad minorem, totum vel totum et pars vel partes, prout maior superfluit» (Campanus, 1516, p. 169).

25. Campanus, 1516, p. 107-109.

26. «Denominans, est numerus secundum quem pars sumitur in suo toto» (Campanus, 1516, p. 168).

27. «Similes dicuntur partes, quae ab eodem numero denominantur» (Campanus, 1516, p. 168).

28. Dans l'*Arithmétique* de Jordanus, ce sont les définitions 9 et 10 du livre I (Busard, 1991, p. 64).

29. Par exemple, il y est dit que «dans 3, il n'y a qu'une seule partie, le tiers, qui tire évidemment sa dénomination de 3» (Boèce, 1995, I, 14, 1).

30. E. Grant, dans son introduction à l'édition du traité d'Oresme, propose une analyse de cette théorie (Oresme, 1966).

31. Rapport de 9 à 8.

32. «Et haec est duplex; nam rationalis, et in primo gradu proportionalitas, est illa quae immediate denominatur ab aliquo numero : sicut proportio dupla, et tripla, et sic de aliis. Secundum vero gradum illa tenet quae irrationalis vocatur, quae non immediate denominatur ab aliquo numero, sed mediate tantum (quia immediate denominatur ab aliqua proportione, quae immediate denominatur a numero : sicut medietas duplae proportionis, quae est proportio diametri ad costam, et medietas sesquioctavae proportionis, quae toni medietatem constituit)» (Bradwardine, 1955, p. 66).

33. John Murdoch propose trois interprétations de cette dénomination des rapports irrationnels. Selon lui, Bradwardine considère des rapports irrationnels C/D de la forme $(A/B)^{m/n}$ où A/B est un rapport rationnel et m et n des entiers. Alors le rapport C/D tire sa dénomination de celle de A/B et/ou de celle de m/n. Ainsi les trois interprétations proposées par Murdoch sont les suivantes : 1) C/D est immédiatement dénommé par le rapport A/B et médiatement dénommé par d, la dénomination de A/B. 2) C/D est immédiatement dénommé par m/n et médiatement dénommé par d, dénomination de A/B. 3) C/D est immédiatement dénommé par A/B et médiatement dénommé par m/n. John Murdoch remarque que ces trois interprétations sont incompatibles avec le critère d'égalité des rapports comme égalité des dénominations (Murdoch, 1963, p. 259 s.). Toutefois il nous semble que ce faisant, J. Murdoch modernise et surinterprète le texte de Bradwardine qu'il analyse en ayant à l'esprit la théorie développée par Oresme, comme nous le verrons plus loin.

34. Voir l'analyse de Drake, 1970, p. 61-65. Voir aussi le commentaire de Molland, qui examine la théorie de la dénomination des rapports irrationnels dans un autre texte de Bradwardine, la *Geometria speculativa* (Molland, 1978, p. 150-160).

35. Bradwardine démontre cette propriété dans les cas de l'insertion d'un ou de deux termes médians. Le rapport (A : B) est alors dit respectivement rapport doublé et triplé (ou double et triple) du rapport ($A : A_1$) selon la définition V. 10 et 11 des *Éléments* de Campanus. Bradwardine reprend ensuite la généralisation proposée par Campanus dans son commentaire à la définition V. 11.

36. Oresme le dit explicitement dans le cas de l'insertion de deux termes médians entre B et C qui constituent le rapport A : «Quod si inter B et C duo media assignantur tunc A proportio esset divisa in tres partes vel in tres proportiones» (Oresme, 1966, p. 160).

37. Oresme assimile le rapport à une quantité continue : «Quelibet proportio est sicut quantitas continuas in hoc, quod in infinitum est divisibilis sicut quantitas continua et in 2 equalia, et in 3, et in 4, etc.» (Oresme, 1966, p. 158).

38. Voir le commentaire de Grant dans Oresme, 1966, p. 26. Oresme ne donne pas explicitement de telles définitions mais suggère seulement le parallélisme avec les quantités.

39. En termes modernes, on pourrait introduire les exposants rationnels et écrire $R = S^{m/n}$. Mais Oresme n'introduit pas de tels exposants dans son traité, puisque son vocabulaire est additif.

40. «Omnis proportio rationalis immediate denominatur ab aliquo numero, aut cum fractione aut fractionibus aut sine fractione. [...] Proportio vero, irrationalis dicitur mediate denominari ab aliquo numero, quando ipsa est pars aliquota aut partes alicuius proportionis rationalis, aut quando est commensurabilis alicui rationali, quod est idem, sicut proportio dyametri ad costum est medietas duple proportionis» (Oresme, 1966, p. 160).

41. Par exemple : «Et ita irrationalis continebit rationalem a qua denominabitur, semel vel pluries, et aliquam vel aliquas eius partes. Et istius partis seu partium unus erit numerus denominator et alter numerator» (Oresme, 1966, p. 294 s.).

42. La première édition de 1574 ne comporte que le petit commentaire qui suit immédiatement la définition V. 4 et ne contient aucun des développements dont nous allons discuter ici.

43. Soient x et y deux nombres, $(x + y)/2$ est le médian arithmétique entre x et y, $\sqrt{(xy)}$ est le médian géométrique et $(2xy)/(x + y)$ est le médian harmonique.

44. Voir Euclide, 1994, Vitrac com., p. 507 s.

45. Voir à ce propos Murdoch, 1963, p. 270 s.

46. «Operae pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionum apud Mathematicos, et quaenam sint praecipuae proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc praecipue utilitatem, ut ea, quae his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit, et tum ea, quae à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quae à Philosophis cum Aristotele de proportione motuum disputantur, intelligi» (Clavius, 1611, p.167).

47. Clavius, professeur au Collège Romain, contribua de manière significative à la mise en place de l'enseignement des mathématiques dans les collèges jésuites (Romano, 1999, p. 85-152). Son opinion sur le rôle et la place des mathématiques est exposée dans un texte célèbre (Clavius, 1901) que Clavius adressa aux rédacteurs de la première version de la *Ratio Studiorum* (1586), réglement des études des collèges jésuites. On trouve des extraits significatifs de cette version dans l'article de A. Romano (1993).

48. «Ratio est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quaedam secundum quantitatem habitudo» (Clavius, 1611, p. 167).

49. «Proportio, est habitudo duarum quantaecunque sint eiusdem generis quantitatum, certa alterius ad alteram habitudo» (Campanus, 1516, p. 103).

50. Campanus, 1516, p. 103 s.

51. En effet, les rapports rationnels entre des quantités continues commensurables sont égaux à des rapports de nombres, mais ce n'est pas le cas des rapports irrationnels entre des quantités incommensurables, qui ne s'expriment pas simplement en terme de nombres.

52. Peletier, 1557, fol. 57v.

53. Boèce, 1995, p. 46 s.

54. Finé, 1536. Notons que la notion de dénomination est totalement absente de ce commentaire.

55. La *Summa* de Pacioli fait partie d'un ensemble de traités consacrés aux «mathématiques de l'abaque», parmi lesquels le plus connu est le *Liber abaci* de Leonard Fibonacci. Parmi ces traités, celui de Pacioli, publié à Venise en 1494, est certainement le plus diffusé. Il fournit un panorama des «mathématiques de l'abaque» enseignées dans des écoles fréquentées par des artisans, des architectes, des peintres, des cartographes, etc. Le livre I de la *Summa* est divisé en neuf parties. La neuvième partie (fol. 67v - 98v) est consacrée à la théorie des proportions. Elle est subdivisée en seize chapitres. Dans le premier chapitre, à la suite de la définition du rapport, on trouve une classification confuse et répétitive des rapports. La théorie de la dénomination est développée au chapitre 3. Pacioli fait alors référence aux définitions relatives à la dénomination ajoutées par

Campanus dans son édition des *Éléments* d'Euclide, au livre VII. D'autre part il traite de l'usage des dénominations pour la composition des rapports. Voir Pacioli, 1494; Bartolozzi; Franci, 1990.

56. On trouve dans cet ouvrage, au livre 4 consacré à la théorie des proportions, à peu près les mêmes développements que dans son commentaire aux *Éléments* d'Euclide (Finé, 1535).

57. «Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distincte, et aperte habitudinem unius quantitatis ad alteram» (Clavius, 1611, p. 176). Remarquons que Clavius utilise «denominator» plutôt que «denominatio».

58. Clavius parle plutôt de quantité.

59. «Unitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet ultra minorem comprehendere» (Clavius, 1611, p. 176).

60. «Denominatores proportionum maioris inaequalitatis re, et nomine ipsas proportiones maioris inaequalitatis denominare; denominatores vero proportionum minoris inaequalitatis re tantum, non autem et verbo, sive nomine» (Clavius, 1611, p. 178).

61. «Denominator porro proportionis inter duos quosuis numeros ita reperietur. Dividatur numerus antecedens, qui nimirum ad alium refertur, per consequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, si qua adsit, ad minimos numeros, ut in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator» (Clavius, 1611, p. 179).

62. «Quanquam autem proportio quaelibet exprimi possit per minimos eius numeros, ut diximus : per necessaria tamen et cognitio denominatorum eiusdem proportionis, ut habitudinem unius numeri ad alterum cognoscamus. Nam etiamsi alicui proportionem numeri 1700 ad 400 dicat esse eam, quae est numeri 17 ad 4, non intelligam tamen plane, quaenam sit illa proportio, nisi eius denominatorem cognovero, qui est 4 1/4. Hic enim manifeste declarat, maiorem numerum continere minorem quater et insuper quartam eius partem» (Clavius, 1611, p. 179).

63. On trouve ces définitions dans l'édition de Campanus au début du livre VII, mais aussi dans de nombreux traités d'arithmétique comme ceux de Pacioli ou Nuñez (Campanus, 1516, p. 168;Pacioli, 1494, fol. 77r; Nuñez, 1567, fol. 77r - 78r).

64. Clavius, 1611, p. 180 s.

65. «Proportionem maioris inaequalitatis decrescendo appropinquare semper magis ac magis in infinitum proportioni aequalitatis, nunquam tamen ad eam pervenire : E contrario vero proportionem minoris inaequalitatis crescendo semper magis ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem aequalitatis, nunquam tamen eam attingere» (Clavius, 1611, p. 181).

66. «Nam qualibet proportione multiplici proposita datur minor, ac minor, usque ad duplam, quae omnium multiplicium est minima. Deinde hac datur minor, nimirum superparticularis, vel superpartiens quaecunque, in qua cum minima non possit dari, omnisque proportio eiusmodi maior sit proportione aequalitatis, liquido constat, proportionem maioris inaequalitatis ad aequalitatis proportionem non posse pervenire, etiamsi in infinitum decrescendo ad ipsam accedat. Rursus cum omnis proportio minoris inaequalitatis minor sit proportione aequalitatis, non possit autem in ea reperiri maxima, manifestum quoque est, proportionem minoris inaequalitatis attingere non posse proportionem aequalitatis, licet in infinitum crescendo ad eam accedat» (Clavius, 1611, p. 181).

67. Clavius, 1611, p. 217.

68. «Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, etc., proportionis cuiuslibet, de qua in hac definitione agitur nihil aliud est, quam multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter se. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter se habent, quae propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus est, duplicata dicitur, vel triplicata, vel quadruplicata, etc. prout videlicet denominator bis positus est, vel ter, vel quater, etc., atque sic multiplicatus fuit, ut exposuimus» (Clavius, 1611, p. 217).

69. Clavius, 1611, p. 217 s.

70. Cette terminologie additive pourrait trouver son origine, dès l'Antiquité grecque, dans l'application de la théorie des proportions à la musique. Les rapports sont associés à des intervalles musicaux. Ainsi, l'octave est composée d'une quinte et d'une quarte comme le rapport double, associé à l'octave, est composé du rapport sesquialtère (3 : 2) associé à la quinte et du rapport sesquitièrce (4 : 3) associé à la quarte. Voir Sylla, 1984, p. 19 s.; Euclide, Vitrac, 1994, p. 63; Vitrac, 2000, p. 56.

71. «Decima et undecima diffinitio terminos requirunt necessario inequales, et primum ipsorum maiorem. Nam si aequales sint eadem est primi ad secundum, et ad tertium proportio. Si vero primus sit minor, non potest primus ad tertium duplam proportionem habere proprie eius, quam habet ad secundam, cum primi ad secundum maior sit proportio, quam ad tertium ex 8 huius» (Commandino, 1569).

72. «Pero aun que assi sea, que qualquier proporcion de mayor desigualdad es mayor que qualquier proporcion de los otros dos generos, ninguna proporcion puede aver entre las proporciones de diversos generos, porque la proporcion de ygualdad, o de menor desigualdad por mas que se multiplique ny puede exceder la proporcion de mayor desigualdad, ny hazer proporcion de tanta denominacion. Ny la proporcion de menor desigualdad por mas que se multiplique puede exceder la proporcion de ygualdad, ny llegar a su quantitad, assi como avemos dicho del angulo de la contingencia, que puesto que sea quantitad y menor que el angulo rectilineo, no tiene con el proporcion» (Nuñez, 1567, fol. 78r).

73. «Y no es de maravillar ser la parte mayor que el todo en las proporciones, porque el ser de la proporcion es un respecto o comparacion, el qual no es propriamente quantidad, ny tiene quantidad, porque no es discreta, como es el numero, ny tan poquo tiene extension, porque no es cosa extenda, como la linea, y la superficie, y el cuerpo» (Nuñez, 1567, fol. 80v).

RÉSUMÉS

La notion de dénomination d'un rapport domine la théorie de la proportionnalité au Moyen Âge et à la Renaissance. Elle apparaît dans des contextes différents, traités d'arithmétique, éditions des *Éléments*, traités sur la théorie des proportions, etc. L'exposé le plus complet sur cette notion se trouve dans le commentaire de Clavius à la définition 4 du livre V des *Éléments* d'Euclide. Clavius se fait ici l'écho des travaux de ses prédécesseurs en particulier de Jordanus et de Campanus, mais ne rapporte pas la théorie des rapports irrationnels initiée par Bradwardine et développée par Oresme.

The notion of the denomination of a ratio dominates the theory of proportionality in the Middle Ages and the Renaissance. It appears in different contexts, arithmetic treatises, editions of the *Elements*, treatises on the theory of proportions, etc. The most complete outlook on this notion can be found in Clavius' commentary at definition 4 of Book 5 of Euclid's *Elements*. Clavius echoes the works of his predecessors, particularly of Jordanus and Campanus, but does not relate the theory of irrational ratios initiated by Bradwardine and developped by Oresme.

INDEX

Mots-clés : Campanus, Clavius, Euclide, Jordanus, rapport numérique, proportionalité, théorie de la proportionalité, histoire des mathématiques
Keywords : Euclid, history of mathematics

AUTEUR

SABINE ROMMEVAUX

C.N.R.S., UMR 8519 « Savoirs et textes »