

## Minimisation de quantiles – application en mécanique

Gilles Pujol, Rodolphe Le Riche, Xavier Bay, Olivier Roustant

► **To cite this version:**

Gilles Pujol, Rodolphe Le Riche, Xavier Bay, Olivier Roustant. Minimisation de quantiles – application en mécanique. 9e Colloque national en calcul des structures, May 2009, Giens, France. <hal-01422233>

**HAL Id: hal-01422233**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01422233>**

Submitted on 24 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Minimisation de quantiles – application en mécanique

G. Pujol<sup>1\*</sup>, R. Le Riche<sup>1,2</sup>, X. Bay<sup>1</sup> et O. Roustant<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ecole des Mines de Saint-Etienne  
Département G2I/3MI  
{leriche,bay,roustant}@emse.fr

<sup>2</sup> CNRS UMR 5146

---

**Résumé** — La conception d’un treillis en présence d’incertitudes gaussiennes est formulé au moyen des critères du quantile de son volume et de son taux de fiabilité. Les estimations de ces critères sont réalisées par simulation de Monte Carlo sur des méta-modèles de krigeage. Cet article discute en particulier le choix des entrées et sorties des méta-modèles en montrant leur influence sur la précision de l’approximation, et donc sur l’estimation des critères fiabilistes.

**Mots clés** — optimisation fiabiliste, optimisation robuste, quantiles, Monte Carlo, krigeage, méta-modèles.

---

## 1 Introduction

Intégrer les incertitudes dans le processus de conception est une pratique bien ancrée chez les ingénieurs. Cela va du dimensionnement de systèmes pour des valeurs critiques, de l’utilisation de coefficients de sécurité, aux techniques plus évoluées du calcul de fiabilité. Le but est de concevoir un système ayant *statistiquement* les meilleures performances, ces dernières étant susceptibles de varier à cause des incertitudes. Par exemple, on peut rechercher des performances faiblement sensibles aux incertitudes (critère de *robustesse des performances*). On peut aussi vouloir ne pas dépasser un seuil de performances minimales avec une probabilité donnée (critère de *fiabilité des performances*), ce qui s’exprime mathématiquement à travers le *quantile* de la performance.

Cet article est un premier pas vers la conception fiabiliste de structures au moyen d’un critère de quantile. Des rappels sur l’estimateur empirique du quantile, calculé par simulations de Monte Carlo, sont donnés. En pratique, les simulations de Monte Carlo sont souvent trop coûteuses pour être utilisées sur le vrai modèle, a fortiori lorsque l’estimation est imbriquée dans une procédure d’optimisation. On a alors recours à un méta-modèle de krigeage. La seconde partie de cet article discute les choix d’entrées et de sorties d’un méta-modèle de krigeage destiné à estimer quantiles et taux de fiabilité. L’exemple d’un treillis à deux barres sert de fil conducteur à la discussion.

## 2 Le cas test des deux barres

Le modèle des deux barres [3] décrit une structure composée de deux tubes creux de mêmes dimensions, chacun fixé au sol, et reliés entre-eux à leur sommet. Ce treillis est représenté sur la Figure 1.

---

\*Maintenant chez Michelin

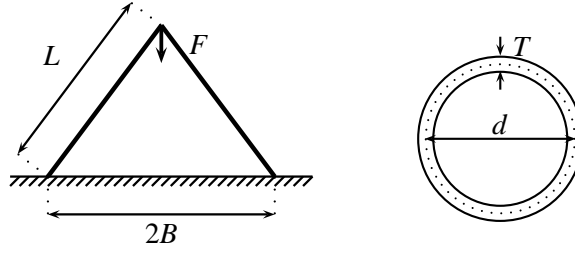


Figure 1 – Le cas test des deux barres. À gauche, la structure des deux barres, à droite, la section en coupe d’une barre.

Paramètre	Valeur nominale	Écart-type	(C.V.)
$d$	diamètre de la section des tubes (mm)	20 – 80	1 (< 5%)
$L$	longueur des tubes (mm)	800 – 1200	5 (< 1%)
$F$	force appliquée (N)	150000	30000 (20%)
$E$	module d’Young (N/mm <sup>2</sup> )	210000	21000 (10%)
$B$	demi-largeur de la structure (mm)	750	5 (< 1%)
$T$	épaisseur de la section des tubes (mm)	2,5	0,1 (4%)
$s_{\max}$	limite d’élasticité (N/mm <sup>2</sup> )	400	-

Tableau 1 – Paramètres du modèle des deux barres. Les perturbations autour des valeurs nominales sont gaussiennes, chaque paramètre indépendamment des autres (C.V. = coefficient de variation = écart-type / moyenne). Source : [2].

On applique une force  $F$  dirigée vers le bas sur le sommet de la structure. On cherche  $d$ , le diamètre de la section des tubes, et  $L$ , la longueur des tubes, de façon à minimiser le volume total  $V$ . La structure a deux modes de défaillance, selon que la contrainte normale  $s$  dépasse la limite d’élasticité  $s_{\max}$  ou la contrainte critique de flambage  $s_{\text{crit}}$  :

$$\min_{d,L} V \quad \text{tel que} \quad s \leq s_{\max} \quad \text{et} \quad s \leq s_{\text{crit}} \quad (1)$$

Le modèle est suffisamment simple pour que les grandeurs d’intérêt  $V$ ,  $s$  et  $s_{\text{crit}}$  s’écrivent analytiquement :

$$V = 2\pi T d L \quad s = \frac{FL}{2\pi T d \sqrt{L^2 - B^2}} \quad s_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 E (T^2 + d^2)}{8L^2}$$

Les variables du modèle et leurs valeurs sont résumées dans le tableau 1. L’optimum du problème déterministe (1) est  $d^* = 38 \text{ mm}$ ,  $L^* = 964 \text{ mm}$ , pour lesquels  $V^* = 0.5754 \text{ dm}^3$ ,  $s^* = 399.9931$ ,  $s_{\text{crit}}^* = 404.3131 \text{ N/mm}^2$ .

### 3 Formulation du problème de conception en présence d’incertitudes

En toute généralité, on note  $y$  le modèle numérique, et  $\theta$  le vecteur des paramètres de ce modèle. Dans les problèmes avec incertitude, les paramètres  $\theta$  dépendent de deux types de variables : les *variables de conception*, déterministes, regroupées dans le vecteur  $x$ , et les *variables de bruit*, aléatoires, regroupées dans le vecteur  $U$ . L’évaluation du modèle se note donc  $y(\theta(x,U))$ , ou plus simplement  $y(x,U)$ .

Dans le cas des deux barres, les paramètres du modèle sont  $\theta = (d, L, F, E, B, T)$ . Les variables de contrôle sont les valeurs nominales des paramètres  $d$  et  $L$ , notées  $x = (\bar{d}, \bar{L})$ . L’incertitude

concerne ici aussi bien des paramètres de contrôle que d'autres paramètres du modèle. On note  $U = (\varepsilon_d, \varepsilon_L, \varepsilon_F, \varepsilon_E, \varepsilon_B, \varepsilon_T)$  le vecteur aléatoire, de composantes gaussiennes indépendantes, de paramètres donnés dans le tableau 1. L'application  $\theta(x, U)$  est définie par

$$d = \bar{d} + \varepsilon_d, L = \bar{L} + \varepsilon_L, F = \varepsilon_F, E = \varepsilon_E, B = \varepsilon_B, T = \varepsilon_T . \quad (2)$$

Les statistiques les plus utilisées pour formuler des critères d'optimisation en présence d'incertitudes sont la moyenne, la variance ou, en optimisation fiabiliste, une distance au point critique (sur le seuil de satisfaction des contraintes) le plus probable (FORM, SORM) [1, 5]. Il nous semble cependant que la traduction la plus naturelle du problème (1) s'écrit

$$\min_{x=(d,L)} q_\alpha(x) \quad \text{tel que} \quad p(x) \geq \beta , \quad (3)$$

où  $q_\alpha$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  du volume et  $p$  le taux de fiabilité, i.e., la probabilité de respect des contraintes :

$$P(V(x, U) \leq q_\alpha(x)) = \alpha \quad \text{et} \quad p(x) = P( s(x, U) \leq s_{\max} \text{ et } s(x, U) \leq s_{\text{crit}}(x, U) ) .$$

## 4 Estimation de l'incertitude par des méthodes de Monte Carlo

Pour résoudre les problèmes de conception en présence d'incertitudes, l'approche la plus simple consiste à imbriquer l'estimation des critères probabilistes dans une boucle d'optimisation classique. Il ne s'agit pas ici de discuter de l'(in)efficacité de cette approche, mais de présenter quelques méthodes d'estimation généralistes, à base de tirages de Monte Carlo, pouvant être utilisées dans cette optique. L'intérêt de l'estimation par tirages de Monte Carlo est sa généralité et le fait qu'elle ne nécessite pas de modifier le simulateur  $y(\theta(x, U))$ .

**Estimateurs ponctuels.** Soient  $v^i, s^i, s_{\max}^i$  et  $s_{\text{crit}}^i$ , pour  $i = 1, n$ ,  $n$  tirages du volume, de la contrainte, de la contrainte maximale et de la contrainte de flambement obtenus pour un  $x$  donné. Les estimateurs empiriques du quantile et du taux de fiabilité sont [7]

$$\hat{q}_\alpha = v^{(\lfloor n\alpha \rfloor)} \quad \text{et} \quad \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(s^i \leq s_{\max}^i \text{ et } s^i \leq s_{\text{crit}}^i) , \quad (4)$$

où  $v^{(\lfloor n\alpha \rfloor)}$  désigne la  $\lfloor n\alpha \rfloor^{\text{e}}$  plus petite valeur parmi les  $v^i$  ( $\lfloor \cdot \rfloor$  étant la partie entière inférieure).

**Intervalles de confiance.** Pour le quantile  $q_\alpha$ , un intervalle de confiance est donné par la formule de Wilks :

$$P(q_\alpha \in [v^{(i_1)}, v^{(i_2)}]) = \sum_{k=i_1}^{i_2-1} C_n^k \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \quad (5)$$

Il s'agit donc de trouver les indices  $i_1$  et  $i_2$  les plus proches tels que la somme (5) soit supérieure ou égale au niveau de confiance,  $1 - \gamma$ . Dans notre exemple des deux barres, on prend  $\alpha = 0.9$ . Pour  $n = 100$ , l'intervalle  $[v^{(87)}, v^{(95)}]$  a une probabilité légèrement supérieure à 0.8.  $q_{90}$  est relativement facile à estimer, en particulier il est plus facile à estimer que la variance de  $V$ .

En ce qui concerne la probabilité  $p$ , et pour  $n$  grand (typiquement  $np$  et  $n(1-p)$  supérieurs à 5), on a l'intervalle

$$p \in \left[ \hat{p} - u_{\gamma/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + u_{\gamma/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \quad \text{avec proba } 1 - \gamma \quad (6)$$

où  $u_{\gamma/2}$  est le quantile d'ordre  $\gamma/2$  d'une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Par exemple, pour  $\gamma = 0.2$ ,  $u_{\gamma/2} \simeq -1.28$ . La difficulté à estimer le taux de fiabilité dépend de  $p$  puisque la variance de l'estimateur est proportionnelle à  $p(1-p)$ . Pour les hautes fiabilités qui nous concernent (supérieures à 90%),  $p$  est facile à estimer.

On note que le taux de fiabilité de la solution déterministe du problème des deux barres,  $x^* = (d^*, L^*) = (38, 964)$  est  $\hat{p}(d^*, L^*) = 0.429$ . Ce  $p$  a été estimé à partir de  $n = 500$  simulations de Monte Carlo. Ainsi le design déterministe rompt dans plus d'un cas sur deux !

## 5 Utilisation d'un méta-modèle de krigeage

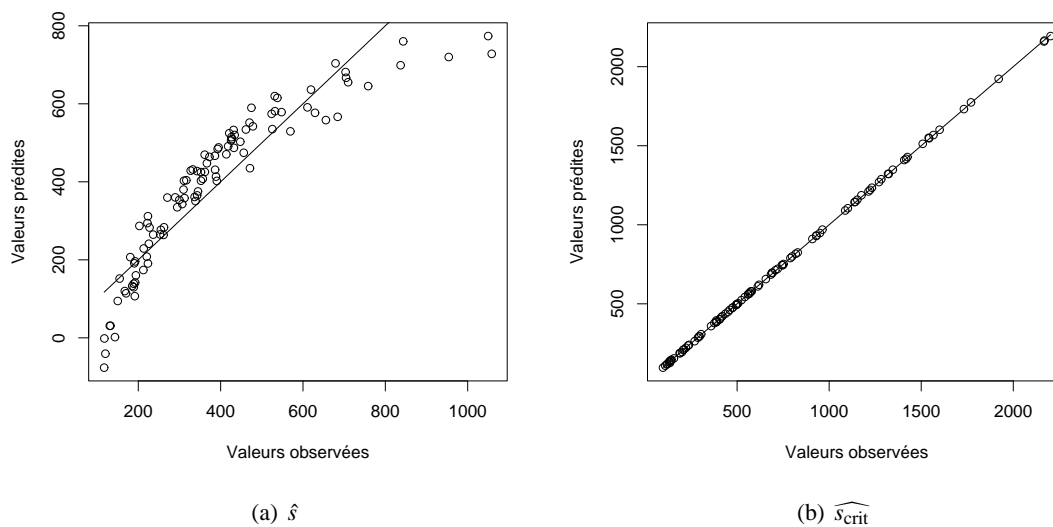


Figure 2 – Validation des méta-modèles sur une base de test.

Le coût des estimations par méthodes de Monte Carlo ( $N \times n$ , où  $N$  est le nombre de pas de l'optimiseur dans l'espace des  $x$ ) ainsi que le bruit qui en résulte les rend difficilement utilisables dans une boucle d'optimisation. Le problème du bruit peut être traité par une stratégie de *Common Random Numbers* (CRN, cf. [4]) ou par l'utilisation d'un optimiseur acceptant du bruit dans les critères à optimiser (par exemple un algorithme évolutionnaire, cf. [1]). Le problème du coût de simulations peut être traité de manière non-intrusive (i.e., sans altérer le simulateur) en construisant un modèle approché, appelé méta-modèle.

**Entrées : sur quel espace construire le méta-modèle ?** Le méta-modèle est parfois construit à chaque pas de l'optimiseur (i.e., à chaque  $x$ ) en approchant l'application  $u \mapsto y(x, u)$  (ou les applications fonctions coûts et contraintes). D'autre fois, le méta-modèle est construit dans l'espace complet des  $(x, u)$ , e.g. les méthodes de Taguchi. Un des arguments de cet article, illustré par le problème des deux barres, est qu'il est souvent préférable de construire le méta-modèle dans l'espace des paramètres physiques  $\theta$ , et ce pour deux raisons :

1. L'espace des  $\theta$  est typiquement de plus petite dimension. Dans l'exemple des deux barres, il est de dimension 6 alors que  $(x, u)$  est dans un espace de dimension  $2 + 6 = 8$ .
2. Un bon échantillonnage dans l'espace des  $(x, u)$  ne se traduit pas par un bon échantillonnage dans l'espace des variables physiques  $\theta$ . Or cet échantillonnage nourrit le méta-modèle et en

conditionne la précision. Dans l'exemple de  $d$  et  $L$ , si on simule uniformément dans le carré  $(x, u)$ , la loi de  $\theta = x + u$  est triangulaire. Il y aura donc une surabondance de simulations autour des paramètres nominaux.

Nous avons construit les méta-modèles  $\hat{V} \approx \theta \mapsto V(\theta)$ ,  $\hat{s} \approx \theta \mapsto s(\theta)$  et  $\widehat{s_{\text{crit}}} \approx \theta \mapsto s_{\text{crit}}(\theta)$  par krigeage (cf. [6]). Un plan d'expériences initial de type Hypercube Latin (LHS) de 60 points (en dimension 6) a été généré. Ce plan a été optimisé pour avoir de bonnes propriétés de remplissage de l'espace, au sens d'un critère maximin. La validation de ces trois méta-modèles a été réalisée sur une base de 100 tests. On observe que  $\hat{V}$  et  $\widehat{s_{\text{crit}}}$  sont précis, contrairement à  $\hat{s}$ . Ceci est illustré sur la Figure 2 pour  $\hat{s}$  et  $\widehat{s_{\text{crit}}}$ .

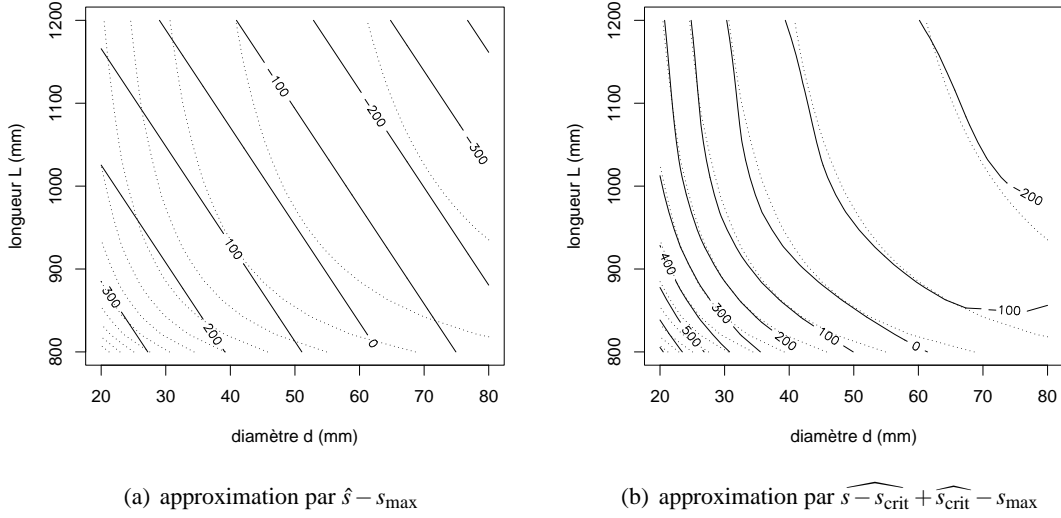


Figure 3 – Lignes de niveau des approximations de la contrainte  $(s - s_{\text{max}})$  dans l'espace  $(d, L)$  (les autres composantes de  $\theta$  sont à leur valeur nominale). Les approximations sont en traits pleins, les vraies valeurs en pointillés.

**Sorties : profiter des simulations multi-réponses.** Les deux contraintes du problème des deux barres sont fonctions de  $s$ . La mauvaise approximation de  $s$  par  $\hat{s}$  dégrade l'estimation de la fiabilité au moyen des méta-modèles. Il est possible d'améliorer l'approximation des simulateurs multi-réponses en combinant linéairement les sorties. Dans le cas des deux barres, ces sorties sont  $V$ ,  $s$  et  $s_{\text{crit}}$ . Nous avons observé que l'approximation de  $s - s_{\text{crit}}$ , notée  $\widehat{s - s_{\text{crit}}}$ , était de bien meilleure qualité que celle de  $s$ . Les deux contraintes ont donc été approchées par

$$\widehat{s - s_{\text{crit}}} + \widehat{s_{\text{crit}}} - s_{\text{max}} \leq 0 \quad (7)$$

$$\widehat{s - s_{\text{crit}}} \leq 0 \quad (8)$$

La comparaison entre les Figures 3(a) et 3(b) montre l'amélioration d'approximation obtenue. Cette amélioration s'explique d'une part par le fait que les approximations  $\widehat{s - s_{\text{crit}}}$  et  $\widehat{s_{\text{crit}}}$  sont de bonne qualité, et d'autre part par le fait qu'elles sont négativement corrélées à cause du changement de signe de  $s_{\text{crit}}$ . Ainsi, la variance de la somme est plus faible que la somme des variances.

Les méta-modèles de  $\hat{V}$ , et des contraintes (7) et (8) sont maintenant utilisés pour estimer les quantiles et les taux de fiabilité du problème des deux barres. Ces critères sont calculés sur les méta-modèles par la méthode de Monte Carlo avec des échantillons de taille  $n = 100$ , avec la stratégie d'échantillonnage CRN pour ne pas avoir de bruit d'estimation. Ces estimations sont

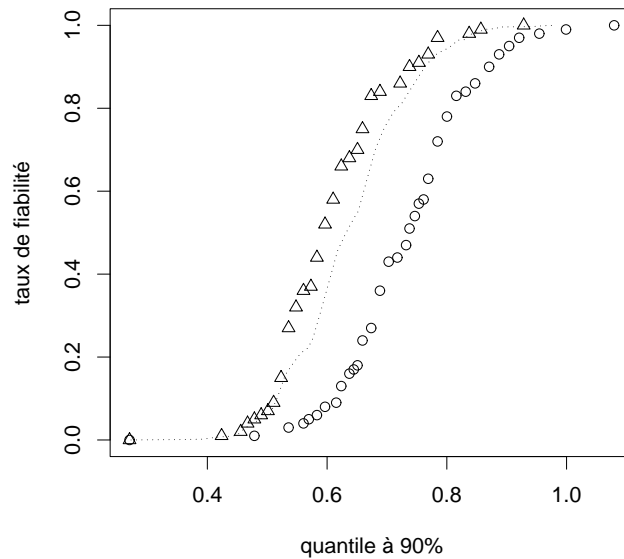


Figure 4 – Front de Pareto quantile – taux de fiabilité réel (en pointillé), estimé avec les contraintes  $\hat{s} - s_{\max} \leq 0$  et  $\hat{s} - \widehat{s}_{\text{crit}} \leq 0$  (ronds), et avec les contraintes (7)–(8) (triangles).

réalisées pour tous les points  $x$  sur une grille régulière. La Figure 4 représente le front de Pareto quantile – taux de fiabilité. On voit que la stratégie de méta-modélisation choisie respecte assez fidèlement le front de Pareto, et donc permet de choisir un bon compromis du problème de conception fiabiliste. À l’inverse, on constate que l’approche de méta-modélisation naturelle, qui consiste à approximer directement les sorties du modèle, conduit à une sous-évaluation du taux de fiabilité.

## Références

- [1] H.-G. Beyer et B. Sendhoff Robust optimization - A comprehensive survey, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 196, pp. 3190 – 3218, 2007.
- [2] B. Huang B. et X. Du, Analytical robustness assessment for robust design, *Journal of Structural & Multidisciplinary Optimization*, vol. 34, pp. 123–137, 2007.
- [3] R. Jin, X. Du et W. Chen, The Use of Metamodeling Techniques for Optimization Under Uncertainty, *Journal of Structural & Multidisciplinary Optimization*, vol. 25, pp. 99–116, 2003.
- [4] A. J. Keane et P. B. Nair, Design in the presence of uncertainty, *Computational Approaches for Aerospace Design*, chap. 8, Wiley, 2005.
- [5] R. E. Melchers, *Structural reliability analysis and prediction*, Wiley, 2nd edition, 1999.
- [6] T. J. Santner, B. J. Williams et W. I. Notz, *The design and analysis of computer experiments*, Springer, 2003.
- [7] G. Saporta G., *Probabilités, analyse des données et statistiques*, Technip, 1990.