



Polarisation des codes Note technique (Polar Codes, extrait des travaux de l'EPFL)

Jean-Pierre Cances

► To cite this version:

Jean-Pierre Cances. Polarisation des codes Note technique (Polar Codes, extrait des travaux de l'EPFL). [Rapport de recherche] Xlim UMR CNRS 7252. 2015. hal-01408473

HAL Id: hal-01408473

<https://hal.science/hal-01408473>

Submitted on 5 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

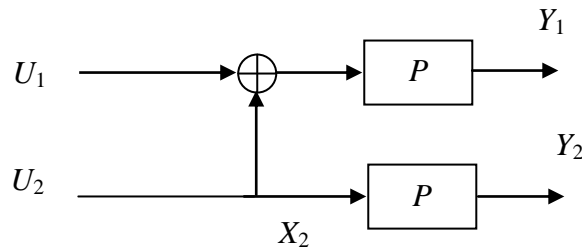
Polarisation des codes Note technique
(Polar Codes, extrait des travaux de l'EPFL)

JP Cances, Xlim, UMR 7252

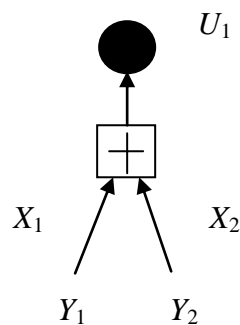
Cette note technique a pour objet de montrer comment l'algorithme de décodage itératif s'applique sur les codes polaires et elle s'inspire des travaux de R Urbanik à l'EPFL.

1- Polarisation :

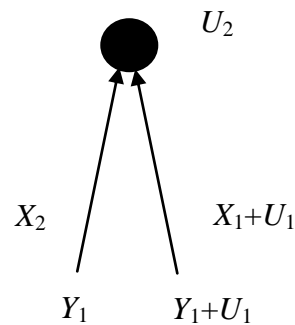
On considère le schéma suivant classique :



Pour la variable U_1 , on part des variables d'observation Y_1 et Y_2 : on a l'équation : $U_1 = X_1 + X_2$ alors que pour la variable U_2 on a les équations : $U_2 = X_2$; $U_2 = X_1 + U_1$. On a les représentations :



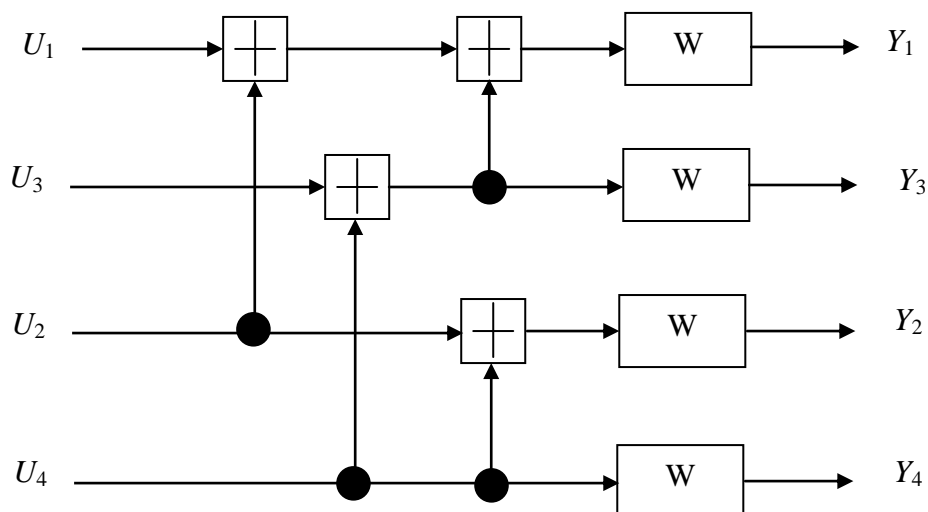
Parity-check node



Repetition code

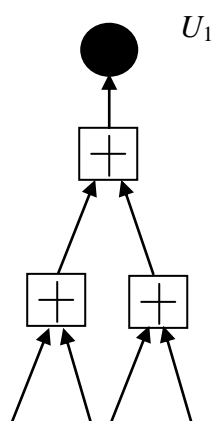
Lorsque le canal est un canal binaire à effacement (Binary Erasure Channel), on considère la probabilité d'effacement égale à ε . Dans ce cas la probabilité d'effacement pour la variable U_1 est égale à : $P_e(U_1) = 1 - (1 - \varepsilon)^2$, et, de même pour la variable U_2 la probabilité d'effacement est égale à : $P_e(U_2) = \varepsilon^2$.

Si on considère maintenant le schéma d'un code polaire à 4 entrées-4 sorties selon la figure suivante:

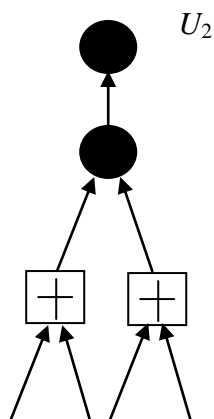


Pour le calcul de la variable W de polarisation des codes, on suppose que l'on part avec une probabilité P d'effacement égale à 0.5, dans ce cas, on a :

$$P_e(U_1) = 1 - (1 - 0.5)^2 = 1 - 0.5^2 = 1 - 0.0625 = 0.9375$$

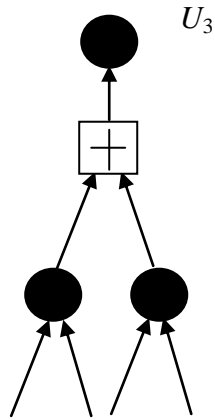


En ce qui concerne U_2 , on a le schéma :



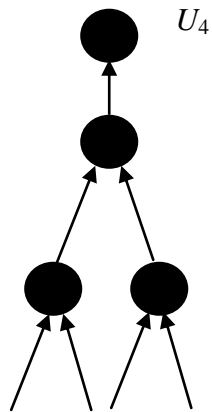
$$P_e(U_2) = 1 - (1 - 0.25)^2 = 1 - 0.75^2 = 1 - 0.5625 = 0.4375$$

En ce qui concerne U_3 , on a le schéma :



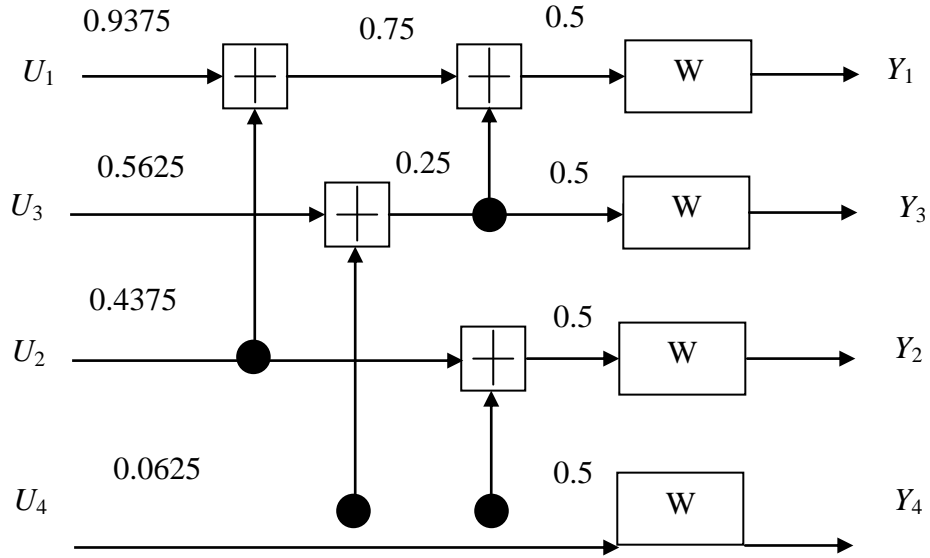
$$P_e(U_3) = (0.75)^2 = 0.5625$$

Et, enfin avec U_4 , on a le schéma :



$$P_e(U_3) = (0.25)^2 = 0.0625$$

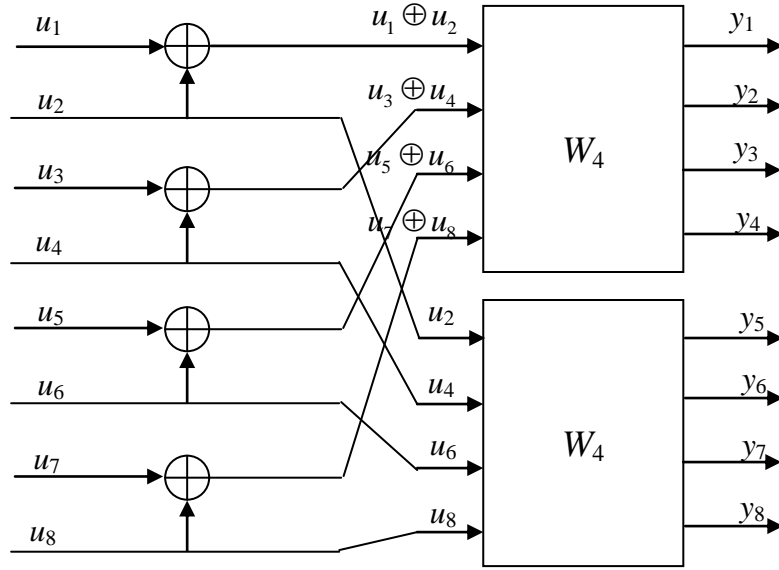
D'où finalement, le calcul des valeurs de polarisation :



2 Algorithme de décodage, cas général :

On traite, par exemple, le cas d'un bloc à huit entrées. On a le schéma du haut de la page suivante. On utilisera la notation suivante dans tout le paragraphe qui suit. La quantité suivante $W_N^{(i)}(y_1, \dots, y_N, u_1, \dots, u_{i-1} | u_i)$ désigne la vraisemblance (la probabilité) d'observer les symboles reçus y_1, y_2 jusqu'à y_N ainsi que les symboles source décodés \hat{u}_1 jusqu'à \hat{u}_{i-1} conditionnellement à ou pour une certaine valeur de u_i . On peut utiliser des calculs récurifs pour obtenir ces probabilités. Pour illustrer ce calcul, on peut se référer à l'exemple de la figure pour le canal W_8 :

$$W_8^{(5)}(y_1, \dots, y_8, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_4 | u_5) \\ = \sum_{u_6} \frac{1}{2} [W_4^{(3)}(y_1, \dots, y_4, (\hat{u}_1 \oplus \hat{u}_2), (\hat{u}_3 \oplus \hat{u}_4) | (u_5 \oplus u_6)) \cdot W_4^{(3)}(y_5, \dots, y_8, \hat{u}_2, \hat{u}_4 | u_6)]$$



Dans le cas de $W_8^{(5)}$ on doit marginaliser sur toutes les valeurs possibles de u_6 puisque cette valeur est nécessaire à la prochaine étape de calcul.

Remarque : Le facteur $\frac{1}{2}$ est dû aux probabilités à priori. Dans le canal W_8 tous les bits excepté u_5 ont la même probabilité à priori à savoir $\frac{1}{2}$ (soit au total $\frac{1}{2^7}$) alors que dans les deux canaux W_4 les deux quantités $u_5 \oplus u_6$ et u_6 sont fixées. Ainsi la probabilité à priori est égale à 0.5^3 dans chaque cas (ce qui fait en tout $\frac{1}{2^6}$).

De la même façon on peut calculer $W_8^{(6)}$; on n'a pas à marginaliser dans ce cas et on obtient le résultat :

$$\begin{aligned}
 & W_8^{(6)}(y_1, \dots, y_8, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_5 | u_6) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot W_4^{(3)}(y_1, \dots, y_4, (\hat{u}_1 \oplus \hat{u}_2), (\hat{u}_3 \oplus \hat{u}_4) | (u_5 \oplus u_6)) \cdot W_4^{(3)}(y_5, \dots, y_8, \hat{u}_2, \hat{u}_4 | u_6)
 \end{aligned}$$

De la même façon on déduit de façon plus générale les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 & W_{2N}^{(2i-1)}(y_1^{2N}, \hat{u}_1^{2i-2} | u_{2i-1}) \\
 &= \sum_{U_{2i}} \frac{1}{2} W_N^{(i)}(y_1^N, (\hat{u}_{1,o}^{2i-3} \oplus \hat{u}_{1,e}^{2i-2}) | (u_{2i-1} \oplus u_{2i})) \cdot W_N^{(i)}(y_{N+1}^{2N}, \hat{u}_{1,e}^{2i-2} | u_{2i}) \\
 & W_{2N}^{(2i)}(y_1^{2N}, \hat{u}_1^{2i-1} | u_{2i}) \\
 &= \sum_{U_{2i}} \frac{1}{2} W_N^{(i)}(y_1^N, (\hat{u}_{1,o}^{2i-3} \oplus \hat{u}_{1,e}^{2i-2}) | (u_{2i-1} \oplus u_{2i})) \cdot W_N^{(i)}(y_{N+1}^{2N}, \hat{u}_{1,e}^{2i-2} | u_{2i})
 \end{aligned}$$

Avec les notations suivantes :

- $y_a^b = y_a, \dots, y_b$
- l'indice e désigne tous les indices pairs
- l'indice o désigne tous les indices impairs

L'algorithme s'initialise avec les probabilités de transition obtenues directement d'après le modèle de canal utilisé à savoir : $W_1^{(1)}(y|u)$.

Pour le décodage on calcule pour chaque bit le rapport de vraisemblance :

$$L_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}) = \frac{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} | 1)}{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} | 0)}$$

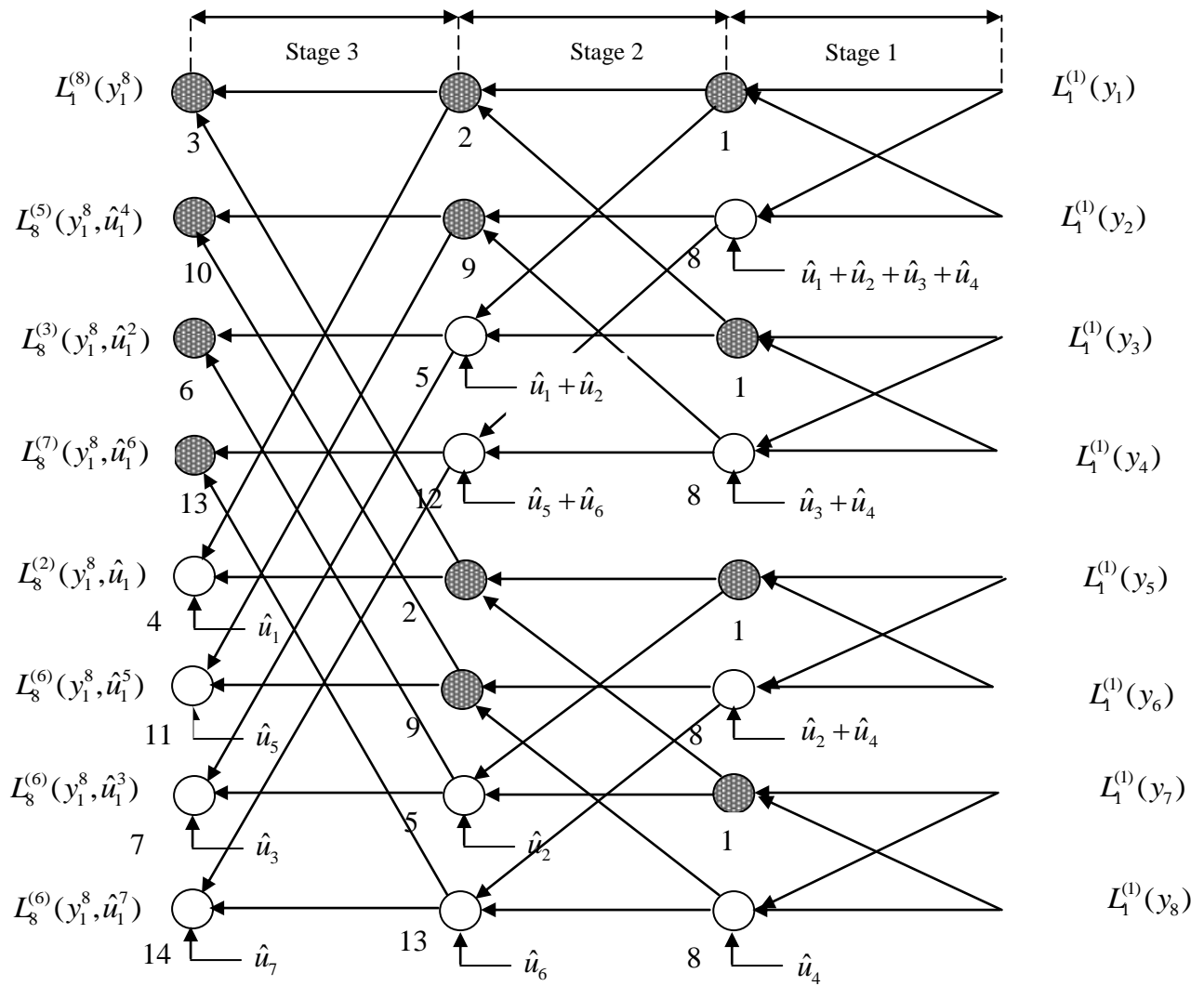
On aboutit alors aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} & L_N^{(2i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{2i-1}) \\ &= [L_{N/2}^{(i)}(y_1^{N/2}, \hat{u}_{1,o}^{2i-2} \oplus \hat{u}_{1,e}^{2i-2})]^{1-2\hat{u}_{2i-1}} \cdot L_{N/2}^{(i)}(y_{N/2+1}^N, \hat{u}_{1,e}^{2i-2}) \end{aligned}$$

Et :

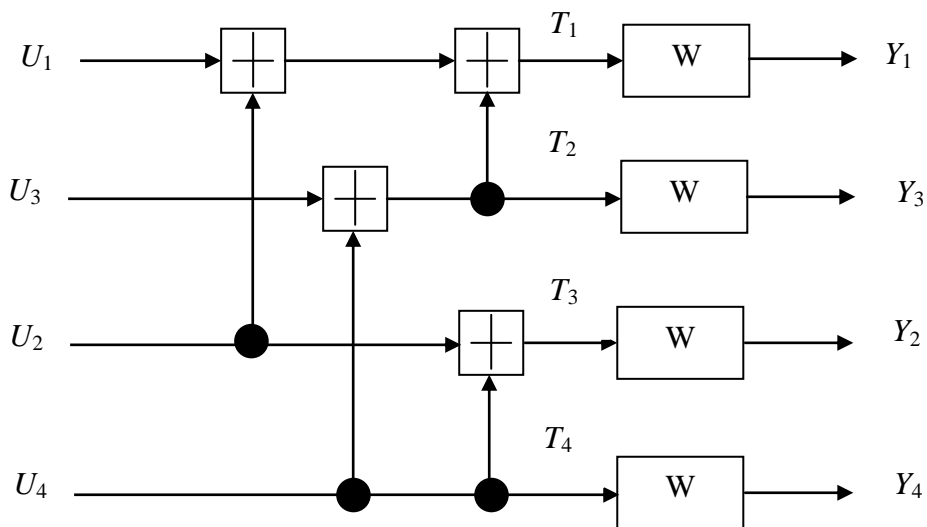
$$\begin{aligned} & L_N^{(2i-1)}(y_1^N, \hat{u}_1^{2i-2}) \\ &= \frac{L_{N/2}^{(i)}(y_1^{N/2}, \hat{u}_{1,o}^{2i-2} \oplus \hat{u}_{1,e}^{2i-2}) \cdot L_{N/2}^{(i)}(y_{N/2+1}^N, \hat{u}_{1,e}^{2i-2}) + 1}{L_{N/2}^{(i)}(y_1^{N/2}, \hat{u}_{1,o}^{2i-2} \oplus \hat{u}_{1,e}^{2i-2}) + L_{N/2}^{(i)}(y_{N/2+1}^N, \hat{u}_{1,e}^{2i-2})} \end{aligned}$$

La procédure de décodage pour un code polaire de taille $N = 8$ est illustrée sur la figure de la page suivant :



2 Algorithme de décodage, cas particuliers :

Considérons le cas simple suivant :



On suppose que les échantillons reçus sont : $[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4] = [0.23, 1.2, -2.45, -1.87]$ avec une variance de bruit $\sigma^2 = 0.8$; on peut commencer facilement par calculer :

$$\begin{aligned} L_1^{(i)}(T_i) &= \log\left[\frac{\text{Proba}(Y_i|T_i = +1)}{\text{Proba}(Y_i|T_i = 0)}\right] = \log\left[\frac{\text{Proba}(T_i = +1|Y_i).\text{Proba}(Y_i).\text{Proba}(T_i = 0)}{\text{Proba}(T_i = +1).\text{Proba}(T_i = 0|Y_i).\text{Proba}(Y_i)}\right] \\ &= \log\left[\frac{\text{Proba}(T_i = +1|Y_i).\text{Proba}(T_i = 0)}{\text{Proba}(T_i = 0|Y_i).\text{Proba}(T_i = +1)}\right] \end{aligned}$$

En supposant, au départ, que pour les probabilités à priori on ait les relations :

$$\text{Proba}(T_i = 0) = \text{Proba}(T_i = +1) = 1/2$$

Il reste alors :

$$\begin{aligned} L_1^{(i)}(T_i) &= \log\left[\frac{\text{Proba}(Y_i|T_i = +1)}{\text{Proba}(Y_i|T_i = 0)}\right] = \log\left[\frac{\text{Proba}(T_i = +1|Y_i)}{\text{Proba}(T_i = 0|Y_i)}\right] \\ &= \log\left[\frac{\exp[-(y_i - 1)^2 / 2\sigma^2]}{\exp[-(y_i + 1)^2 / 2\sigma^2]}\right] = 2.y_i / \sigma^2 \end{aligned}$$

Numériquement, il vient :

$$L_1^{(1)}(T_1) = \log\left(\frac{\exp[-(y_1 - 1)^2 / 2\sigma^2]}{\exp[-(y_1 + 1)^2 / 2\sigma^2]}\right) = \log\left(\frac{\exp[-(0.23 - 1)^2 / 2.0.8]}{\exp[-(0.23 + 1)^2 / 2.0.8]}\right) = \log(1.7771) = 0.5750$$

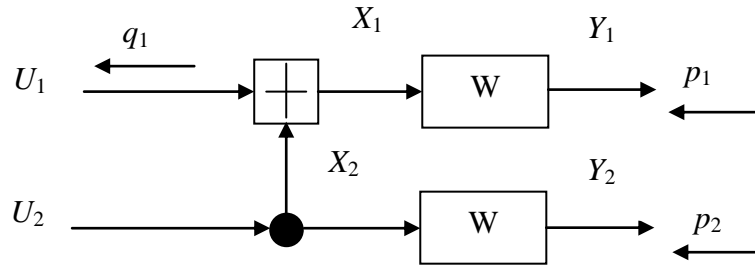
$$L_1^{(2)}(T_2) = \log\left(\frac{\exp[-(y_2 - 1)^2 / 2\sigma^2]}{\exp[-(y_2 + 1)^2 / 2\sigma^2]}\right) = \log\left(\frac{\exp[-(1.2 - 1)^2 / 2.0.8]}{\exp[-(1.2 + 1)^2 / 2.0.8]}\right) = \log(20.0855) = 3$$

$$L_1^{(3)}(T_3) = \log\left(\frac{\exp[-(y_3 - 1)^2 / 2\sigma^2]}{\exp[-(y_3 + 1)^2 / 2\sigma^2]}\right) = \log\left(\frac{\exp[-(-2.45 - 1)^2 / 2.0.8]}{\exp[-(-2.45 + 1)^2 / 2.0.8]}\right) = \log(0.022) = -3.8167$$

$$L_1^{(4)}(T_4) = \log\left(\frac{\exp[-(y_4 - 1)^2 / 2\sigma^2]}{\exp[-(y_4 + 1)^2 / 2\sigma^2]}\right) = \log\left(\frac{\exp[-(-1.87 - 1)^2 / 2.0.8]}{\exp[-(-1.87 + 1)^2 / 2.0.8]}\right) = \log(0.093) = -2.3752$$

Ensuite, sur cet exemple particulier, on se rappelle que les bits U_1 et U_3 sont frozen donc ils sont égaux à 0 et on les suppose parfaitement connus en réception. Pour appeler plus loin dans les calculs on a alors besoin de deux lemmes de base.

Lemme 1 : Soit le schéma ci-dessous :



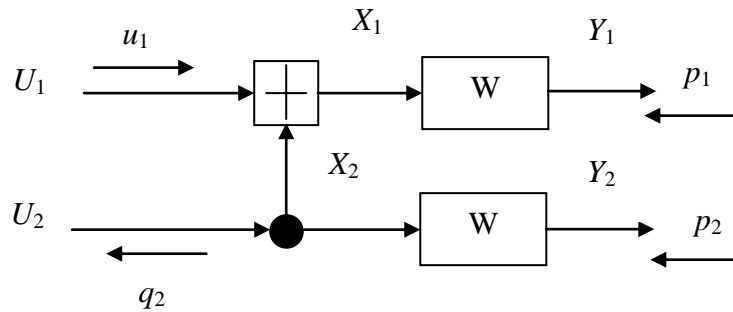
Si on dispose des deux probabilités suivantes : $p_1 = \text{Proba}(X_1 = +1|Y_1)$ et $p_2 = \text{Proba}(X_2 = +1|Y_2)$ alors on a :

$$q_1 = \text{Proba}(U_1 = +1|Y_1, Y_2) = p_1 + p_2 - 2 \cdot p_1 \cdot p_2$$

En effet :

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{Proba}(U_1 = +1|Y_1, Y_2) = \text{Proba}(X_1 \oplus X_2 = 1|Y_1, Y_2) \\ &= \text{Proba}(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0|Y_1, Y_2) + \text{Proba}(X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 1|Y_1, Y_2) \\ &= p_1 \cdot (1 - p_2) + p_2 \cdot (1 - p_1) \\ &= p_1 + p_2 - 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \end{aligned}$$

Lemme 2 : Soit le schéma ci-dessous :



Si on dispose des valeurs : $p_1 = \text{Proba}(x_1 = +1|y_1)$, $p_2 = \text{Proba}(x_2 = +1|y_2)$ et de la valeur de u_1 alors on a :

$$\begin{aligned} q_2 &= \text{Proba}(U_2 = +1|U_1, Y_1, Y_2) \\ &= \frac{p_1 p_2}{p_1 p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2)} \quad \text{si } U_1 = 0 \\ &= \frac{(1 - p_1) p_2}{(1 - p_1) p_2 + p_1 (1 - p_2)} \quad \text{si } U_1 = 1 \end{aligned}$$

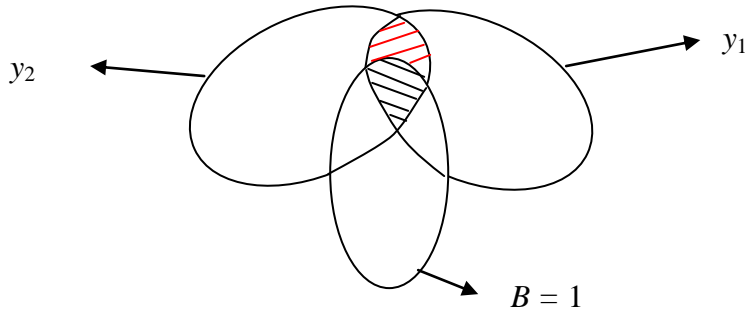
Ceci permet d'utiliser par exemple la propriété de connaissance des bits frozen.

Remarque : Ceci est une conséquence du théorème suivant.

Théorème : On transmet un même bit B aléatoire et uniformément distribué à travers deux canaux sans mémoire et on reçoit y_1 et y_2 respectivement. Si l'on note $r_i = \text{Proba}(B = +1|y_i)$, alors :

$$\text{Proba}(B = +1|y_1, y_2) = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 \cdot r_2 + (1 - r_1) \cdot (1 - r_2)}$$

Démonstration :



On a :

$$r_1 = \text{Proba}(B = +1|y_1) = \text{Proba}(B = +1, y_1) / \text{Proba}(y_1)$$

$$r_2 = \text{Proba}(B = +1|y_2) = \text{Proba}(B = +1, y_2) / \text{Proba}(y_2)$$

Il vient alors :

$$\text{Proba}(B = +1|y_1, y_2) = \frac{\text{Proba}(B = +1, y_1, y_2)}{\text{Proba}(y_1, y_2)}$$

Or, on a :

$$\text{Proba}(B = +1, y_1, y_2) = r_1 \cdot r_2 \quad (\text{zone hachurée en noir sur la figure})$$

Et :

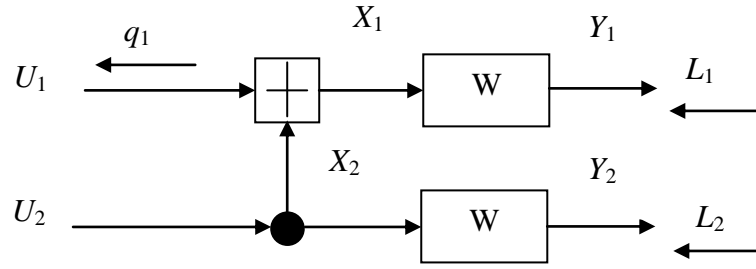
$$\begin{aligned} \text{Proba}(y_1, y_2) &= \text{Proba}(\text{zone noire hachurée}) + \text{Proba}(\text{zone rouge hachurée}) \\ &= r_1 \cdot r_2 + (1 - r_1) \cdot (1 - r_2) \end{aligned}$$

Et, finalement :

$$\text{Proba}(B = +1|y_1, y_2) = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 \cdot r_2 + (1 - r_1) \cdot (1 - r_2)} \quad \text{CQFD}$$

Au niveau des LLR's, on a alors deux types de calcul qui peuvent se produire :

-1) Soit la situation 1 ci-dessous :



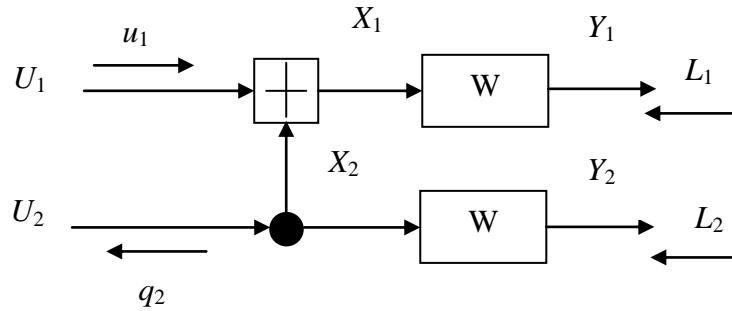
Les LLR's L_1 et L_2 sont supposés connus, on a alors :

$$p_1 = \text{Proba}(x_1 = +1|y_1) = \frac{e^{L_1}}{1 + e^{L_1}} \quad \text{et} \quad p_2 = \text{Proba}(x_2 = +1|y_2) = \frac{e^{L_2}}{1 + e^{L_2}}$$

On veut alors calculer :

$$L(q_1) = \log\left[\frac{\text{Proba}(U_1 = +1|Y_1, Y_2)}{\text{Proba}(U_1 = 0|Y_1, Y_2)}\right] = \log\left[\frac{p_1 + p_2 - 2 \cdot p_1 \cdot p_2}{1 - p_1 - p_2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2}\right] = \log\left[\frac{e^{L_1} + e^{L_2}}{1 + e^{L_1 + L_2}}\right]$$

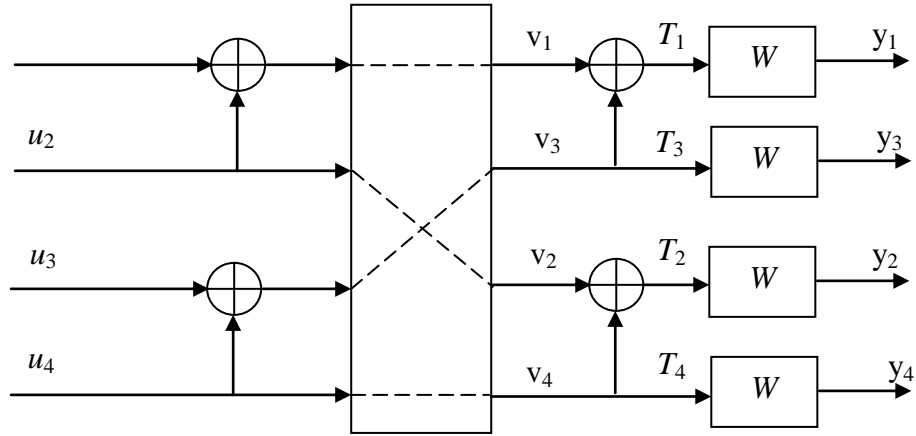
-2 Soit la situation 2 ci-dessous :



Les LLR's L_1 et L_2 sont supposés connus et u_1 est un frozen bit parfaitement connu égal à 0 par exemple. On veut calculer :

$$\begin{aligned} L(q_2) &= \log\left[\frac{\text{Proba}(U_2 = +1|U_1, Y_1, Y_2)}{\text{Proba}(U_2 = 0|U_1, Y_1, Y_2)}\right] = \log\left[\frac{e^{L_1 + L_2}}{1 + e^{L_1 + L_2}} / \frac{1}{1 + e^{L_1 + L_2}}\right] \\ &= L_1 + L_2 \quad \text{si } U_1 = 0 \\ L(q_2) &= \log\left[\frac{\text{Proba}(U_2 = +1|U_1, Y_1, Y_2)}{\text{Proba}(U_2 = 0|U_1, Y_1, Y_2)}\right] = \log\left[\frac{e^{L_2}}{e^{L_1} + e^{L_2}} / \frac{e^{L_1}}{e^{L_1} + e^{L_2}}\right] \\ &= L_2 - L_1 \quad \text{si } U_1 = 1 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant appliquer ces calculs au cas du code à 4 éléments dessiné page suivante :



Les frozen bits sont u_1 et u_3 tous deux égaux à 0. On commence par calculer tous les LLR's en sortie du canal. On a :

$$L_1^{(i)}(T_i) = \log \left[\frac{\text{Proba}(T_i = +1 | Y_i)}{\text{Proba}(T_i = 0 | Y_i)} \right] = 2 \frac{y_i}{\sigma^2}$$

Ensuite, on a :

$$L_2^{(1)}(v_1) = \log \left[\frac{\exp(L_1^{(1)}(T_1)) + \exp(L_1^{(3)}(T_3))}{1 + \exp(L_1^{(3)}(T_3) + L_1^{(1)}(T_1))} \right]$$

$$L_2^{(2)}(v_2) = \log \left[\frac{\exp(L_1^{(2)}(T_2)) + \exp(L_1^{(4)}(T_4))}{1 + \exp(L_1^{(2)}(T_2) + L_1^{(4)}(T_4))} \right]$$

Puis :

$$L_3^{(2)}(u_2) = L_2^{(1)}(v_1) + L_2^{(2)}(v_2)$$

$$L_3^{(4)}(u_4) = L_2^{(3)}(v_3) + L_2^{(4)}(v_4)$$

Avec : $L_2^{(3)}(v_3) = L_1^{(3)}(T_3)$ et $L_2^{(4)}(v_4) = L_1^{(4)}(T_4)$. Le décodage de u_2 est possible et donne alors une décision : \hat{u}_2 . Lorsque l'on a cette décision deux possibilités :

- Soit $\hat{u}_2 = 0$ et dans ce cas :

$$L_3^{(3)}(v_3) = L_1^{(1)}(T_1) + L_1^{(3)}(T_3)$$

$$L_4^{(4)}(u_4) = L_3^{(3)}(v_3) + L_3^{(4)}(v_4)$$

$$L_3^{(4)}(v_4) = L_1^{(2)}(T_2) + L_1^{(4)}(T_4)$$

D'où :

$$L_4^{(4)}(u_4) = L_3^{(3)}(v_3) + L_3^{(4)}(v_4) = L_1^{(1)}(T_1) + L_1^{(3)}(T_3) + L_1^{(2)}(T_2) + L_1^{(4)}(T_4)$$

$$L_4^{(4)}(u_4) = L_1^{(1)}(T_1) + L_1^{(2)}(T_2) + L_1^{(3)}(T_3) + L_1^{(4)}(T_4)$$

- Soit $\hat{u}_2 = 1$ et dans ce cas :

$$L_3^{(3)}(v_3) = -L_1^{(1)}(T_1) + L_1^{(3)}(T_3)$$

$$L_4^{(4)}(u_4) = L_3^{(3)}(v_3) + L_3^{(4)}(v_4)$$

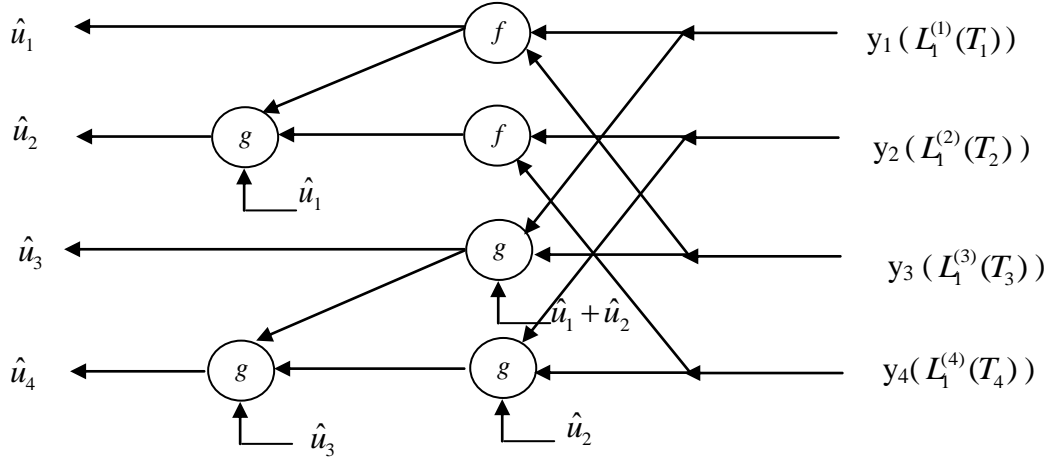
$$L_3^{(4)}(v_4) = -L_1^{(2)}(T_2) + L_1^{(4)}(T_4)$$

D'où :

$$L_4^{(4)}(u_4) = L_3^{(3)}(v_3) + L_3^{(4)}(v_4) = -L_1^{(1)}(T_1) + L_1^{(3)}(T_3) - L_1^{(2)}(T_2) + L_1^{(4)}(T_4)$$

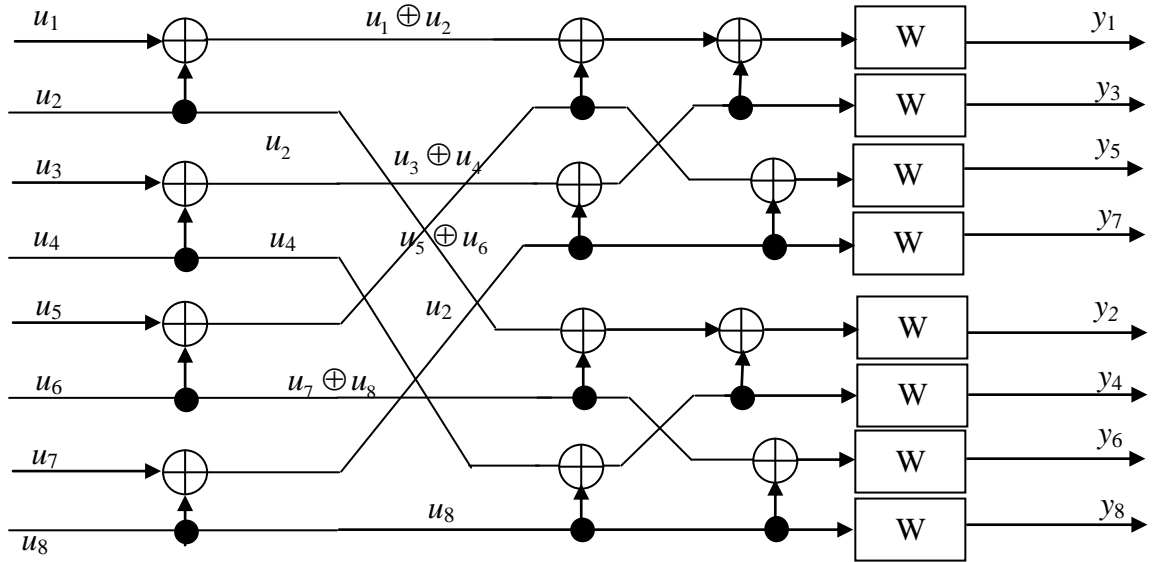
$$L_4^{(4)}(u_4) = -L_1^{(1)}(T_1) - L_1^{(2)}(T_2) + L_1^{(3)}(T_3) + L_1^{(4)}(T_4)$$

Le décodage peut alors se représenter sous la forme :

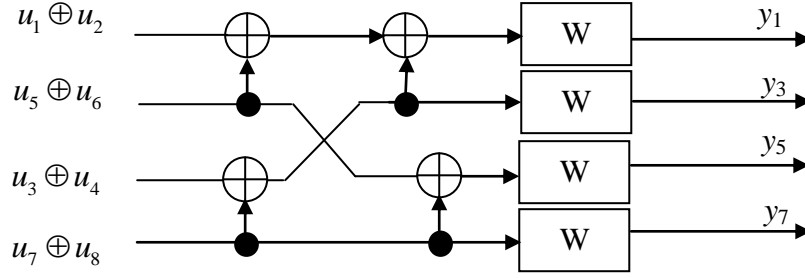


l'opérateur f correspond à l'opération : $f(a,b) = \log[\frac{a+b}{1+a.b}]$ et l'opérateur g correspond à : $g_{\hat{u}_s}(a,b) = (1 - 2\hat{u}_s). \log(a) + \log(b)$.

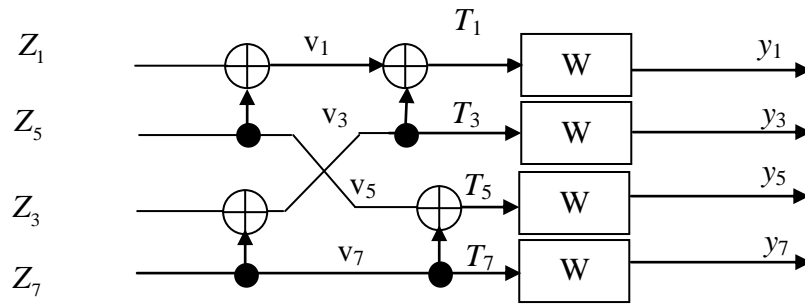
- On peut maintenant généraliser au cas $N = 8$, on a le schéma d'encodage suivant :



Les frozen bits sont u_1, u_2, u_3 et u_5 . On peut d'abord regarder le bloc du haut, il reste :



On pose : $Z_1 = u_1 \oplus u_2$, $Z_3 = u_3 \oplus u_4$, $Z_5 = u_5 \oplus u_6$ et $Z_7 = u_7 \oplus u_8$, la quantité Z_1 est connue et égale à 0. On a les calculs suivants :



On peut alors écrire les différentes équations :

$$L_1^{(i)}(T_i) = \log \left[\frac{\text{Proba}(T_i = +1 | Y_i)}{\text{Proba}(T_i = 0 | Y_i)} \right] = 2 \frac{y_i}{\sigma^2} \quad i = 1, 3, 5, 7$$

Puis :

$$L_2^{(1)}(v_1) = \log \left[\frac{\exp(L_1^{(1)}(T_1)) + \exp(L_1^{(3)}(T_3))}{1 + \exp(L_1^{(3)}(T_3) + L_1^{(1)}(T_1))} \right]$$

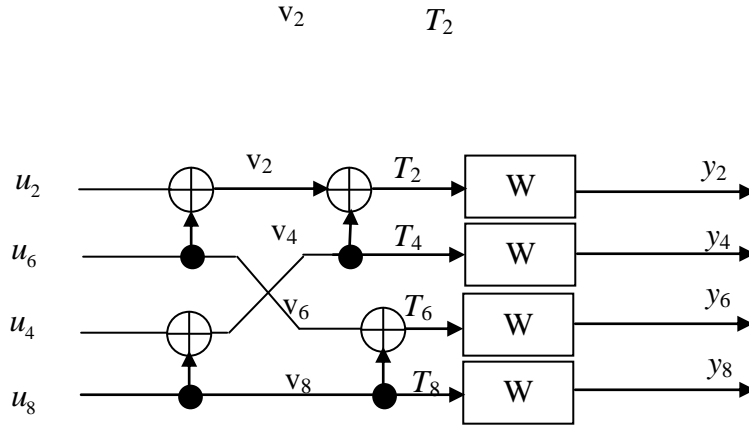
$$L_2^{(5)}(v_5) = \log \left[\frac{\exp(L_1^{(5)}(T_5)) + \exp(L_1^{(7)}(T_7))}{1 + \exp(L_1^{(5)}(T_5) + L_1^{(7)}(T_7))} \right]$$

Et enfin :

$$L_3^{(5)}(Z_5) = L_2^{(1)}(v_1) + L_2^{(5)}(v_5)$$

$$L_3^{(3)}(Z_3) = \log \left[\frac{\exp(L_1^{(7)}(T_7)) + \exp(L_1^{(3)}(T_3))}{1 + \exp(L_1^{(3)}(T_3) + L_1^{(7)}(T_7))} \right]$$

Maintenant, on peut regarder le bloc du bas.



On peut alors écrire les différentes équations :

$$L_1^{(i)}(T_i) = \log \left[\frac{\text{Proba}(T_i = +1 | Y_i)}{\text{Proba}(T_i = 0 | Y_i)} \right] = 2 \frac{y_i}{\sigma^2} \quad i = 2, 4, 6, 8$$

Puis :

$$L_2^{(2)}(v_2) = \log \left[\frac{\exp(L_1^{(2)}(T_2)) + \exp(L_1^{(4)}(T_4))}{1 + \exp(L_1^{(2)}(T_2) + L_1^{(4)}(T_4))} \right]$$

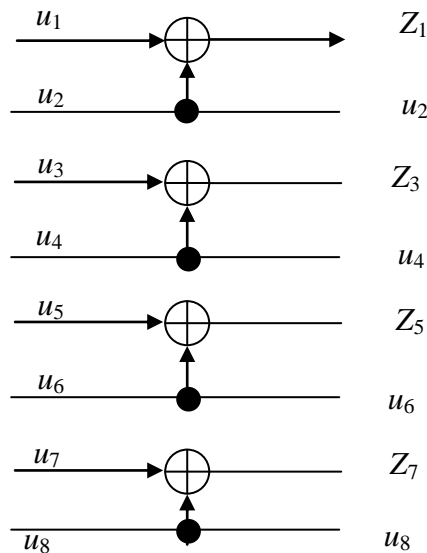
$$L_2^{(6)}(v_6) = \log \left[\frac{\exp(L_1^{(6)}(T_6)) + \exp(L_1^{(8)}(T_8))}{1 + \exp(L_1^{(6)}(T_6) + L_1^{(8)}(T_8))} \right]$$

Et enfin :

$$L_3^{(6)}(u_6) = L_2^{(2)}(v_2) + L_2^{(6)}(v_6)$$

$$L_3^{(4)}(u_4) = \log \left[\frac{\exp(L_1^{(8)}(T_8)) + \exp(L_1^{(4)}(T_4))}{1 + \exp(L_1^{(8)}(T_8) + L_1^{(4)}(T_4))} \right]$$

Quand on rassemble avec les blocs d'entrée :

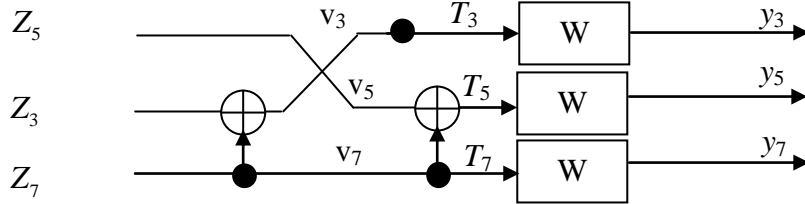


$$L_4^{(4)}(u_4) = L_3^{(3)}(Z_3) + L_3^{(4)}(u_4)$$

De même :

$$L_4^{(6)}(u_6) = L_3^{(5)}(Z_5) + L_3^{(6)}(u_6)$$

Pour calculer u_7 , il faut revenir au premier schéma :



On connaît $Z_3 = u_3 \oplus u_4$; il reste :

$$L_3^{(7)}(Z_7) = (1 - 2\hat{Z}_3).L_2^{(3)}(v_3) + L_2^{(7)}(v_7)$$

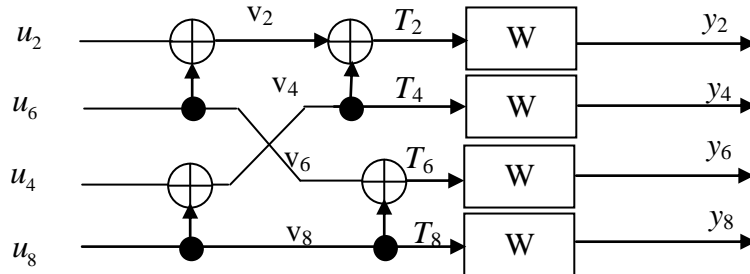
Avec :

$$L_2^{(7)}(v_7) = (1 - 2\hat{Z}_5).L_1^{(5)}(T_5) + L_1^{(7)}(T_7)$$

Et :

$$L_2^{(3)}(v_3) = (1 - 2\hat{Z}_5).L_1^{(1)}(T_1) + L_1^{(3)}(T_3)$$

On peut calculer u_8 en revenant au schéma du bas :



$$L_3^{(8)}(u_8) = (1 - 2\hat{u}_4).L_2^{(4)}(v_4) + L_2^{(8)}(v_8)$$

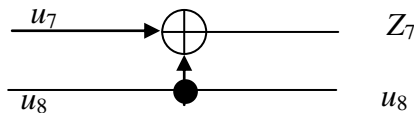
Avec :

$$L_2^{(8)}(v_8) = (1 - 2\hat{u}_6).L_1^{(6)}(T_6) + L_1^{(8)}(T_8)$$

Et :

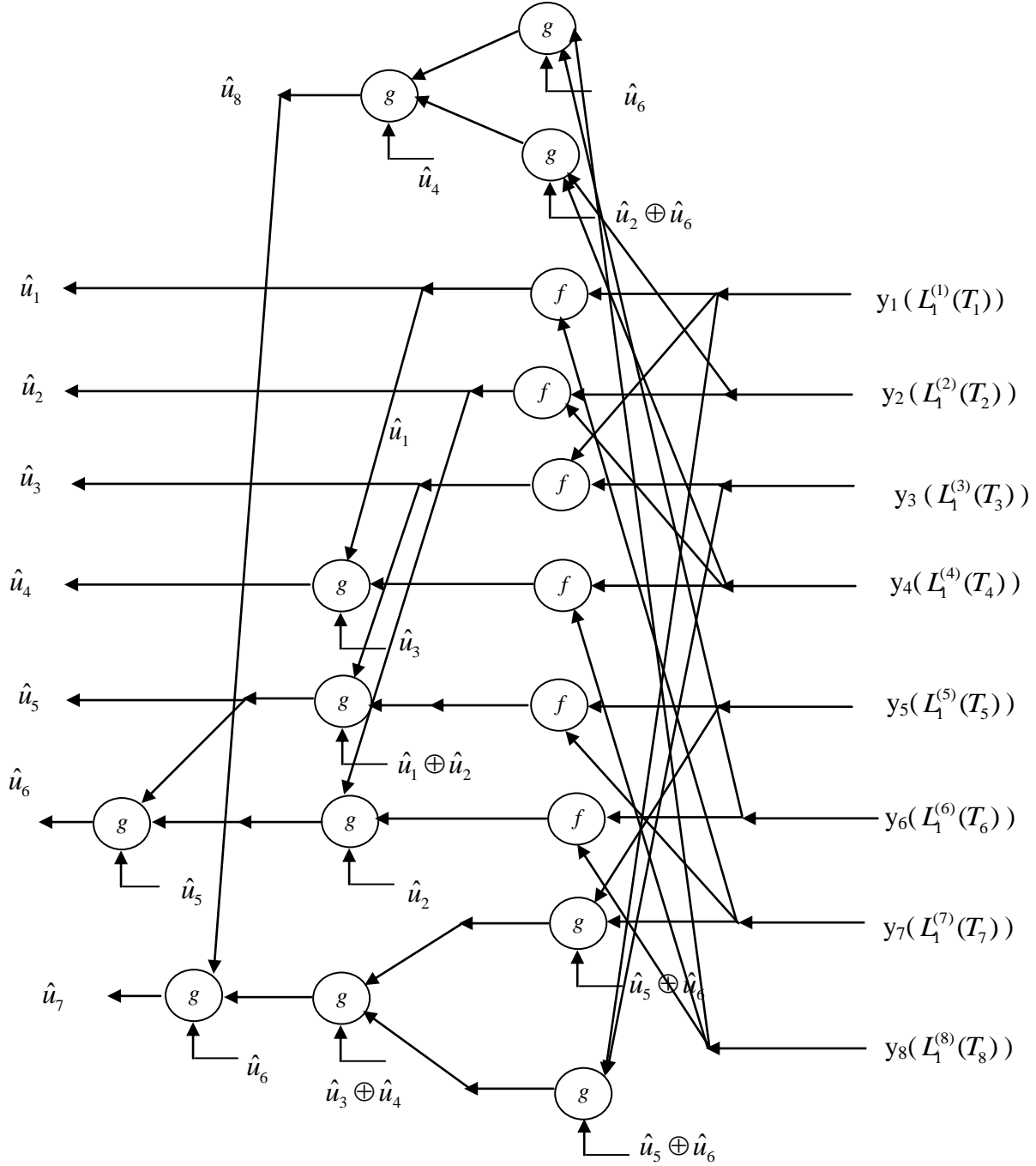
$$L_2^{(4)}(v_4) = (1 - 2(\hat{u}_2 \oplus \hat{u}_6)).L_1^{(2)}(T_2) + L_1^{(4)}(T_4)$$

On peut prendre alors une décision hard sur u_8 , ce qui donne pour terminer :



$$L_4^{(7)}(u_7) = (1 - 2\hat{u}_8).L_3^{(8)}(u_8) + L_3^{(7)}(Z_7)$$

Du point de vue du circuit de décodage, on a alors l'architecture suivante :



On retrouve alors l'architecture générale de décodage itératif.