

Vers une nouvelle approche d'analyse multi-fréquentielle pour la TVRC par approximants de Padé

Christophe Rouzaud, Fabrice Gatuingt, Guillaume Hervé, Nadim Moussallam, Olivier Dorival

▶ **To cite this version:**

Christophe Rouzaud, Fabrice Gatuingt, Guillaume Hervé, Nadim Moussallam, Olivier Dorival. Vers une nouvelle approche d'analyse multi-fréquentielle pour la TVRC par approximants de Padé. 12e Colloque National en Calcul des Structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01407841

HAL Id: hal-01407841
https://hal.science/hal-01407841

Submitted on 2 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2015
12e Colloque National en Calcul des Structures
18-22 Mai 2015, Presqu'île de Giens (Var)

Vers une nouvelle approche d'analyse multi-fréquentielle pour la TVRC par approximants de Padé

C. Rouzaud[1,2,3], F. Gatuingt[1], G. Hervé[2], N. Moussallam[3], O. Dorival[4]

[1] *LMT (ENS Cachan, CNRS, Université Paris Saclay), 61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France, {christophe.rouzaud,fabrice.gatuingt}@ens-cachan.fr*
[2] *Université Paris-Est, RENON (IRC-ESTP, IFSTTAR), IRC-ESTP, 28 avenue du Président Wilson, 94234 Cachan, France, {crouzaud,gherve}@adm.estp.fr*
[3] *AREVA, 10, Rue Juliette Récamier, 69006 Lyon, France, nadim.moussallam@areva,*
[4] *Université de Toulouse; Institut Clément Ader (ICA); INSA, UPS, Mines Albi, ISAE 135 av. de Rangueil, 31077 Toulouse cedex, France, olivier.dorival@insa-toulouse.fr*

Résumé — La TVRC, initialement proposée par Ladevèze [6] offre une réduction substantielle de la taille des problèmes à résoudre lors d'un calcul de structure en vibration moyenne fréquence. Néanmoins cette méthode, de part son approche fréquentielle, perd de son efficacité lors d'une simulation numérique nécessitant une réponse sur une large bande de fréquence. Avec l'utilisation d'approximants de Padé, l'objectif est de réduire le nombre de fréquences auxquelles la solution complète doit être calculée, et d'interpoler la solution entre ces fréquences. Cette approche est d'autant facilitée par l'expression de la dépendance en fréquence sous la forme de fonctions scalaires en facteur des matrices globales.
Mots clés — approche fréquentielle, réduction de modèle, résolution multi-fréquentielle, approximants de Padé.

1 Approximants Padé pour la TVRC

Cette étude est consacrée à une approche complémentaire à la TVRC (Théorie Variationnelle des Rayons Complexes), basée sur les approximants de Padé, pour la reconstruction rapide de fonctions de réponse en fréquence. La réduction de modèle par les approximants de Padé s'appuie sur [7].

1.1 Les approximants de Padé

Un problème fréquentiel, de vibrations harmoniques à $f = \frac{\omega}{2\pi}$, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{A}}(\omega)\underline{X}(\omega) = \underline{B}(\omega) \tag{1}$$

où $\underline{\underline{A}}(\omega)$ et $\underline{B}(\omega)$ représentent respectivement les formes bilinéaires et linéaires des équations, $\underline{X}(\omega)$ contient les amplitudes des fonctions d'ondes dans le cadre de la TVRC.

Le calcul de la solution complète de l'Equation 1 en quelques points de fréquence seulement, couplé à une reconstruction d'une solution approchée entre ceux-ci, s'est révélée être une approche efficace [1, 4]. Ainsi, étant donnée une solution à une pulsation ω, le développement en série de Taylor autour ω donne la solution approchée de la forme $\underline{X}_T(\Delta\omega)$, T étant l'ordre de troncature du développement en série de Taylor. Cependant il a été montré que, pour une fonction contenant des pôles, une expansion en tant que rapport de deux séries de puissance permet une meilleure représentation, pour un ordre de troncature donné [2, 3, 5].

A partir d'une solution à ω_0, $\underline{X}(\omega_0)$, la solution aux alentours est alors recherchée sous la forme d'une fraction de développements en séries de Taylor, pour chaque composante X_j du vecteur solution.

$$X_j(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \frac{P_{Lj}(\Delta\omega)}{Q_{Mj}(\Delta\omega)} \tag{2}$$

$P_{Lj}(\Delta\omega)$ et $Q_{Mj}(\Delta\omega)$ sont deux séries de Taylor, tronquées à l'ordre L et M respectivement, et définies comme :

$$\begin{aligned} P_{Lj}(\Delta\omega) &= \sum_{i=0}^{L} p_{ij}(\Delta\omega)^i \\ Q_{Mj}(\Delta\omega) &= \sum_{i=0}^{M} q_{ij}(\Delta\omega)^i \end{aligned} \tag{3}$$

L'approximation de $X_j(\omega_0+\Delta\omega)$ est donnée par la détermination unique des coefficients p_{ij} et q_{ij}.

Basé sur la solution en une fréquence, $\underline{X}(\omega_0)$, cette méthode est définit dans la littérature comme l'approximation de Padé en un seul point, mais peut facilement être étendue à plusieurs points [1]. Le but étant d'estimer la combinaison d'une telle approche avec la TVRC, l'utilisation d'une approximation de Padé multi-points est considéré comme une extension naturelle de ce travail. La résolution de ce dernier système d'équations nécessite la détermination de la $(L+M)$ dérivées du vecteur solution $\underline{X}(\omega)$ en ω_0.

1.2 Dérivées successives du vecteur solution

Les $(L+M)$ dérivées successives de $\underline{X}$ à la pulsation ω peuvent être dérivées de l'Equation 1 par rapport à ω et être calculées par une formule de récurrence. Cela entraîne la résolution d'un système linéaire à plusieurs second membres, ce qui est d'un point de vue numérique très efficace (une seule décomposition de la matrice de coefficients à effectuer). À l'ordre i, l'expression devient :

$$\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \underline{\underline{A}}^{(i-k)}(\omega_0)\underline{X}^{(k)}(\omega_0) = \underline{B}^{(i)}(\omega_0), \text{ pour } i = 1,...,(L+M) \tag{4}$$

où les dérivées d'ordre zéro correspondent aux fonctions non différenciées. Extraire le terme d'ordre le plus élevé de la somme dans l'équation 4 conduit à l'expression récursive suivante de la dérivée de $\underline{X}$ d'ordre i en ω_0.

$$\underline{\underline{A}}(\omega_0)\underline{X}^{(i)}(\omega_0) = \underline{B}^{(i)}(\omega_0) - \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} \underline{\underline{A}}^{(i-k)}(\omega_0)\underline{X}^{(k)}(\omega_0), \text{ pour } i = 1,...,(L+M) \tag{5}$$

Cela implique que les dérivées successives de $\underline{X}$ nécessaires pour la détermination de l'approximation de Padé puissent être calculées de manière efficace en tant que solution d'un système d'équations de dimension N.

2 Procédure pour la reconstruction de la réponse en fréquence en utilisant les approximants de Padé

Les étapes de calcul de la solution approchée sur une plage de fréquence à l'aide des approximants de Padé peuvent être séparées en deux parties :

- À une fréquence ω_0 donnée, la solution ainsi que ses dérivées aux ordres successifs $(L+M)$ est calculée selon l'équation 5 $\rightarrow$ résolution de $(L+M+1)$ problèmes de dimension N.
- Reconstruction de la solution autour de ω_0 $\rightarrow$ résolution de N problèmes de dimensions $(L+M+1)$ pour déterminer les approximants de Padé correspondant à chaque degré de liberté. Puis, N évaluations de la fraction rationnelle (Equation 2) pour chaque $\Delta\omega$ où la solution à évaluer est approchée.

Compte tenu d'une discrétisation de l'espace des fréquences en intervalles associés à leur fréquence centrale, la procédure détaillée correspondant à un intervalle de fréquence est présenté dans l'algorithme du Tableau 1.

	Algorithme d'une résolution multi-fréquences via les approximants de Padé
1.	Calculer la matrice et le second membre en ω_0 découlant de l'Equation 1
2.	Résoudre l'Equation 1 pour obtenir la solution $\underline{X}(\omega_0)$
3.	Pour $k = 1$ à $L+M$
4.	Résoudre l'Equation 5 pour obtenir $\underline{X}^{(k)}(\omega_0)$
5.	fin
6.	Pour $k = 1$ à N
7.	Calcul des approximants de Padé
8.	Évaluer la solution multi-fréquences approchée autour de ω_0, Equation 2
9.	fin

TABLE 1 – Algorithme de reconstruction de la réponse sur une plage de fréquence à l'aide des approximants de Padé.

Trois points sont donc importants dans cette procédure. Un premier consiste à choisir les fréquences secondaires où la solution sera évaluée : discrétisation appropriée de l'espace des fréquences [7]. Ensuite, pour chaque fréquence grossière, l'ordre du polynôme d'expansions et de la plage de fréquence autour de ω_0 doivent être choisis en conséquence, ce qui soulève la question des valeurs de L et M [1]. Enfin, on doit évaluer les conditions de l'efficacité d'un tel un schéma d'approximation [1].

3 Analyse multi-fréquentielle sur un exemple simple

Cet exemple permet de comparer l'analyse multi-fréquence via les approximants de Padé par rapport à une résolution classique fréquence à fréquence.

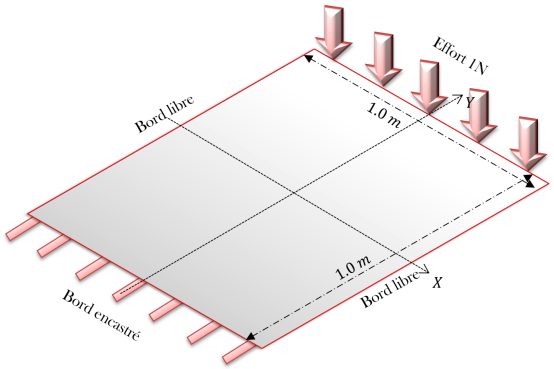


FIGURE 1 – Description de la géométrie et des conditions limites du test.

Le cas présenté est une plaque en acier en flexion de $0,7mm$ d'épaisseur (voir figure 1). Pour tester l'efficacité de l'approche multi-fréquentielle proposée, cette plaque est étudiée pour une plage de fréquence de 60 Hz entre 290 et 350 Hz. Dans cet exemple, le but est de comparer l'efficacité des approximants de Padé appliqués à la TVRC en terme de résultat mais également au niveau du temps de calcul. On a pu voir que l'application des approximants de Padé à la TVRC est efficace dés lors que l'ordre de ces approximants est suffisamment élevé pour pourvoir décrire la solution sur la plage fréquentielle. Néanmoins même si cette analyse ne nécessite d'inverser la matrice bilinéaire du système qu'une seule fois pour la fréquence centrale, celle-ci demande de calculer à chaque fréquence les dérivées successives de cette matrice ainsi que du second membre. On peut donc s'imaginer que ces dérivées peuvent impliquer un coût numérique important si elles ne sont pas écrites de manière récursive.

Les Figures 2 et 3 tracent la FRF calculée sur la plage de fréquences complètes, soit de 0 à 350 Hz. Ici nous avons choisi de prendre des ordres pour les approximants de Padé de $L = 4$ et $M = 5$ car ce jeu de paramètres présente le meilleur ratio erreur/temps de calcul au niveau de l'étude sur une bande réduite de fréquence. Une étude sur la discrétisation des analyses est présentée ici. Cette discrétisation est observable au travers des fréquences centrales choisies pour représenter la FRF solution. Sur la Figure 2, le choix des largeurs de bande est fixe (20 Hz) et défini *a priori*.

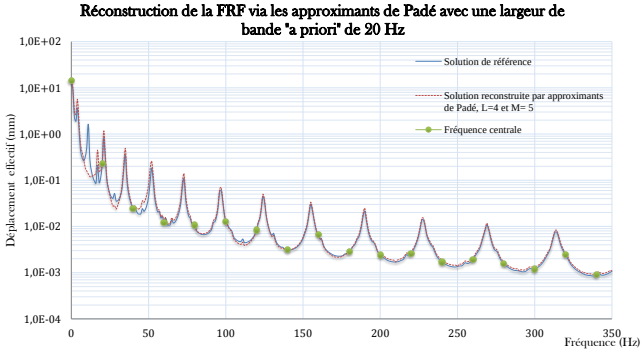


FIGURE 2 – FRF sur une large bande fréquentielle, avec 20 Hz de largeur de bande.

La Figure 3 présente cette fois une étude *a posteriori* où la largeur de bande est définie de façon à avoir une erreur sur la plage fréquentielle inférieure à 10 %. Cette largeur de bande commence donc à 3 Hz pour finir à 20 Hz.

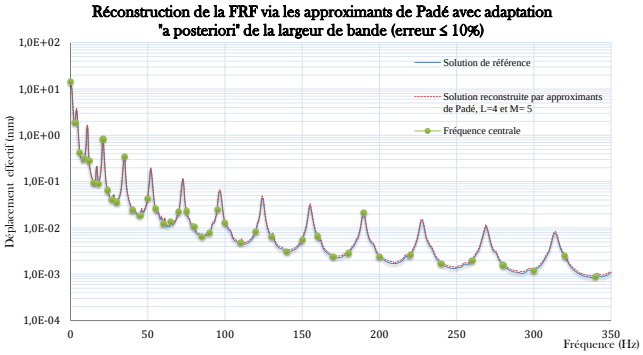


FIGURE 3 – FRF sur une large bande fréquentielle, avec un critère d'erreur de 10 %.

On peut conclure de cette étude que le choix de la discrétisation est dépendant du contenu fréquentiel que l'on cherche à représenter. Même si le choix d'une largeur de bande fixe *a priori* semble efficace dans notre exemple. On peut remarquer que celui peut induire tout de même des erreurs non négligeables lorsque le nombre de modes par bande de fréquence devient trop important.

Références

[1] P. Avery, C. Farhat, G. Reese. *Fast frequency sweep computations using a multi-point Padé-based reconstruction method and an efficient iterative solver*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley Online Library, 69, 13, 2848–2875, 2007.

[2] G.A. Baker Jr, P.R. Graves-Morris. *Padé approximants*, Cambridge University Press, 59, 122, 1996.

[3] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. *Méthode Asymptotique Numérique : une technique de résolution des équations non linéaires*, Hermes Science Publishing, Paris, Londres, 121–135, 2007.

[4] R. Djellouli, C. Farhat, R. Tezaur. *A fast method for solving acoustic scattering problems in frequency bands*, Journal of Computational Physics, Elsevier, 168, 2, 412–432, 2001.

[5] S.A. Orszag, C.M. Bender. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, Mac Graw Hill, 1978.

[6] P. Ladevèze, L. Arnaud, P. Rouch, C. Blanzé. *La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes pour le calcul des vibrations moyennes fréquences*, Revue européenne des éléments finis, Taylor & Francis, 9, 1-3, 67–88, 2000.

[7] R. Rumpler. *Efficient finite element approach for structural-acoustic applications including 3D modelling of sound absorbing porous materials*, Thèse de doctorat, Ecole Doctorale du Conservatoire National des Arts et Métiers, 2012.