



# Maillage adaptatif octree dans l'environnement X-FEM et level-sets -Application à la thermique

Raphaël Allais, Grégory Legrain, Patrice Cartraud

## ► To cite this version:

Raphaël Allais, Grégory Legrain, Patrice Cartraud. Maillage adaptatif octree dans l'environnement X-FEM et level-sets -Application à la thermique. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, LMT, May 2009, Giens, France. hal-01400583

**HAL Id: hal-01400583**

**<https://hal.science/hal-01400583>**

Submitted on 22 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Maillage adaptatif octree dans l'environnement X-FEM et level-sets - Application à la thermique

R. Allais, G. Legrain, P. Cartraud

Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM), UMR CNRS 6183  
Ecole Centrale de Nantes  
1 rue de la Noë - BP.92101 - 44321 NANTES CEDEX 3  
{raphael.allais, gregory.legrain, patrice.cartraud}@ec-nantes.fr

---

**Résumé** — La modélisation par la méthode X-Fem et level-sets permet de s’affranchir de maillages conformes, amenant à utiliser des maillages structurés (octree/quadtree), plus faciles à mettre en œuvre. L’objet de cette étude est donc la mise en place d’un algorithme de maillage octree adaptatif, avec un raffinement de type h. Les applications concernent des modèles bi-dimensionnels de thermique stationnaire (problèmes de conduction). Cet algorithme s’appuie sur un indicateur d’erreur basé sur la différence entre la solution courante et celle issue d’un maillage plus fin.

**Mots clés** — maillage adaptatif, erreur, X-Fem, octree, quadtree.

---

## 1 Introduction

La simulation numérique sur des domaines à géométrie complexe reste un thème de recherche actif. La méthode X-FEM [7], couplée à celle de la level-sets [8] est, dans ce contexte, très attractive. L’indépendance partielle entre maillage et géométrie permet en effet d’utiliser des maillages non-conformes, donc “simples”, tels que ceux basés sur les méthodes octree/quadtree.

Si certaines libertés peuvent être prises quant au maillage, il convient toutefois de maîtriser la taille des éléments. En effet, des erreurs sur l’approximation de la solution et sur la représentation de la géométrie (discrétisation de la level-sets) demeurent. Une attention particulière doit donc être apportée sur la mesure et le contrôle de ces erreurs. Pour cela, les algorithmes de maillage adaptatif peuvent être utilisés, comme dans le cas des éléments finis classique. L’intérêt du travail présenté ci-dessous est d’appliquer l’un d’eux à des modèles utilisant des formulations X-FEM. Concrètement, il s’agit d’utiliser une méthode de raffinement h ([4][2]) appliquée sur un maillage type quadtree.

L’étude s’appuie sur des cas bidimensionnels de thermique stationnaire (conduction) : on cherche à calculer un champ de température  $T$  et son flux thermique  $\vec{\Phi}$  dans un domaine  $\Omega$ , répondant à :

$$\begin{cases} \vec{\Phi} = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T & \text{(Loi de Fourier)} \\ \lambda \cdot \Delta T + r = 0 & \text{(Equation de la chaleur)} \end{cases}$$

(avec  $\lambda$ =coefficient de conduction,  $r$ =source volumique de chaleur) et à des conditions aux limites de type Neumann.

## 2 Modélisation

### 2.1 Formulation X-Fem

La méthode X-FEM (eXtended Finite Element Method, [7][1]) est une extension de la méthode des éléments-finis classique. En effet, l'espace d'approximation est élargi à un espace "plus riche", en ajoutant des fonctions d'enrichissement à la formulation classique. La solution recherchée appartient donc à l'espace des fonctions de la forme :

$$T^h(X) = \sum_{i=1}^n N_i(X) \cdot \left( T_i + \sum_{j=1}^m a_i^j \cdot \Phi_i^j(X) \right)$$

où  $\langle N_i \rangle$  représente la base des fonctions d'interpolation,  $T_i$  les degrés de liberté correspondants pour les éléments finis classiques,  $\langle \Phi_i^j \rangle$  est la base des fonctions d'enrichissement et  $a_i^j$  ses coefficients associés. La base d'enrichissement  $\langle \Phi_i^j \rangle$  est choisie en fonction du phénomène physique qu'elle est censée représenter. Elle peut notamment être constituée de fonctions discontinues et/ou à gradient discontinu, permettant de traduire les discontinuités de la solution (cas des trous, fissures) ou de leur gradient (cas des interfaces entre deux matériaux) (voir [9] et [6]). Cette méthode permet en particulier l'utilisation de maillages non-conformes. Elle est d'autant plus intéressante dans le cas de domaines à géométrie complexe, pour lesquels le maillage reste relativement simple.

### 2.2 Définition de la géométrie par Level-sets

Dans notre approche, la géométrie n'est pas traduite explicitement par le maillage, mais par un fonction level-sets [8]. Elle consiste en une forme continue de l'espace (de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ ) représentant la distance signée à une frontière (contour de trou, interface entre deux matériaux). L'iso-zéro correspond ainsi aux contours de l'interface souhaitée. Il est à noter que concrètement, la level-sets est elle-même discrétisée aux nœuds du maillage et interpolée en conséquence. De ce fait, la géométrie n'est pas entièrement indépendante du maillage et est décrite via les fonctions d'interpolations (linéaires dans notre cas).

### 2.3 Maillage Octree/Quadtree

Afin de profiter au maximum des possibilités offertes par la méthode X-FEM couplée aux level-sets, un maillage structuré de type octree/quadtree est utilisé. Le découpage 3D octree (respectivement quadtree en 2D) est une façon simple d'organiser l'espace physique par divisions successives du domaine. Le domaine initial (niveau "0") est un cube (resp. un carré en 2D) appelé "cellule". Ce cube peut alors être découpé en 8 sous-cellules (resp. 4 en 2D), chacune étant elle-même divisible en 8 autres, etc... Le niveau de chaque cellule correspond au nombre de subdivisions nécessaire pour l'obtenir.

La combinaison de ces cellules de différents niveaux permet la mise en place de maillages hiérarchiques simples à générer.

Une attention particulière doit cependant être portée aux cellules voisines de niveaux différents. En effet, le maillage qui en découle laisse apparaître des nœuds en milieu d'arête, dits "orphelins". Il convient d'imposer une liaison aux degrés de libertés de ces nœuds afin d'assurer la continuité de la solution entre ces éléments de niveaux différents. Dans le cas d'une interpolation  $\langle N_i \rangle$  linéaires, les degrés de liberté des nœuds orphelins sont imposés comme étant la moyenne de ceux des nœuds qui les encadrent :

$$T_{i_{orphan}} = \frac{1}{2} (T_{i_{parent1}} + T_{i_{parent2}})$$

Lorsque la zone concernée est enrichie, le problème est plus complexe car les fonctions  $N_i \cdot \Phi_i^j$  sont non-linéaires.

### 3 Maillage adaptatif

Le maillage adaptatif s'appuie sur une mesure locale des erreurs d'approximation de la solution. Le paragraphe suivant présente un estimateur de l'erreur, d'autres étant présentés notamment dans [3], [5] et [2].

#### 3.1 Estimateur d'erreur

L'erreur prise en compte ici est basée sur l'énergie, exprimée à partir du flux thermique  $\vec{\Phi}$ . Evaluer une erreur consiste à mesurer l'écart entre la solution approchée (notée  $\vec{\Phi}_h$ ) et la solution exacte ( $\vec{\Phi}_{ex}$ ), via une norme sur le domaine  $\omega$  :

$$||\vec{e}_{ex}||_{\omega} = ||\vec{\Phi}_h - \vec{\Phi}_{ex}||_{\omega}$$

où la norme est définie par :

$$||\bullet|| = \int_{\omega} \bullet \cdot F^{-1} \cdot \bullet \, d\omega$$

(F étant le tenseur de conductivité thermique).  $\vec{\Phi}_{ex}$  n'étant pas connue, l'erreur peut être estimée en la remplaçant par une solution approchée "de référence" (notée  $\vec{\Phi}_{ref}$ ), supposée plus proche de la solution exacte que  $\vec{\Phi}_h$  (au sens de la norme).

$$||\vec{e}||_{\omega} = ||\vec{\Phi}_h - \vec{\Phi}_{ref}||_{\omega}$$

Ici, comme proposé dans [2], la solution de référence est choisie comme étant la solution calculée sur un maillage deux fois plus fin (i.e. sur une grille octree raffinée d'un niveau sur l'ensemble du domaine).

Une estimation de l'erreur relative sur chaque élément  $\Omega_e$  peut ainsi être établie de la manière suivante :

$$\varepsilon_{\Omega_e} = \frac{||\vec{e}||_{\Omega_e}}{||\vec{\Phi}_{ex}||_{\Omega}}$$

D'un point de vue numérique, l'intégration doit se faire sur des champs issus de 2 maillages différents (et donc ayant des points d'intégration différents). Pour rendre cohérentes les approximations de ces deux champs, une projection  $\vec{\Phi}_{ref}^p$  de  $\vec{\Phi}_{ref}$  sur le maillage grossier est effectuée.

Remarque : Concernant les éléments coupés par l'iso-zéro de la level-sets, l'intégration numérique nécessite de les redécouper en sous-éléments, ayant chacun leurs propres points d'intégration. La projection peut donc se faire de la même manière.

### 3.2 Algorithme de remaillage

L'estimation de l'erreur relative, telle que vue ci-dessus, nous sert de critère de raffinement. Pour chaque élément, une valeur limite ( $\epsilon_{LIM}$ ) de l'erreur ( $\epsilon_{\Omega_e}$ ) est imposée, au delà de laquelle les éléments doivent être raffinés. Cette opération se répète tant qu'il reste des éléments à raffiner. Une illustration de la boucle de raffinement est présentée en figure 1.

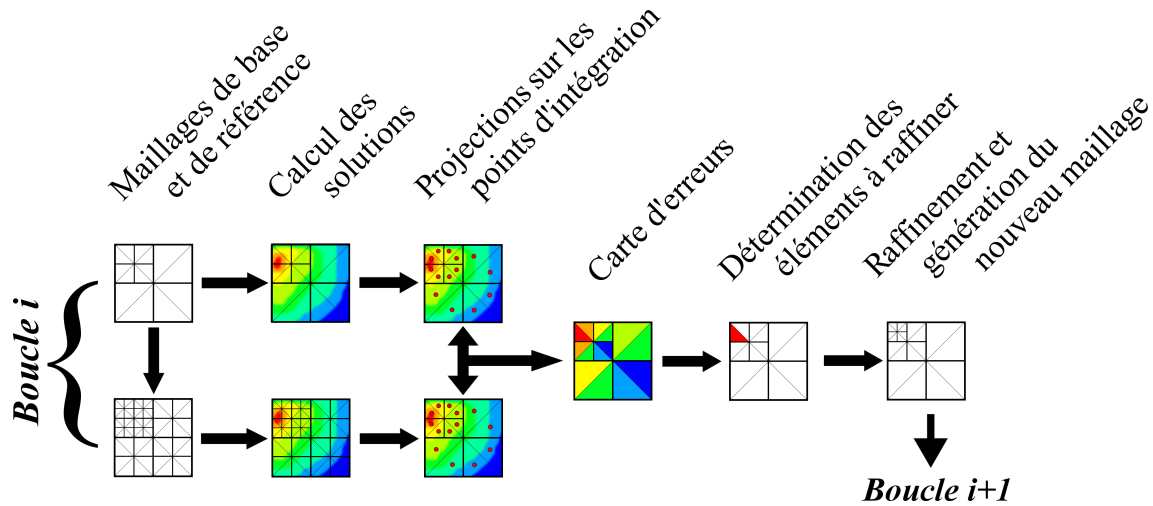


Figure 1 – Algorithme de remaillage

## 4 Applications

On présente deux applications de cette approche :

- une première en éléments finis classiques, afin de valider la méthode sur un exemple de la littérature,
- une seconde en modélisant un domaine troué, avec l'utilisation de la méthode X-Fem.

Chaque cas correspond à un domaine plan carré, dont les bords sont soumis à des conditions de Neumann, et où un point est soumis à une température imposée pour rendre la solution unique.

### 4.1 Etude éléments-finis classique

Ce premier problème consiste à vérifier la validité de l'algorithme dans le cadre d'éléments finis classique. Pour cela, le cas test étudié est celui proposé dans [10]. Il s'agit de résoudre un problème dont la solution en température est :

$$T(x,y) = 5x^2 \cdot (1-x)^2 \cdot (e^{10x^2} - 1) \cdot y^2 \cdot (1-y)^2 \cdot (e^{10y^2} - 1)$$

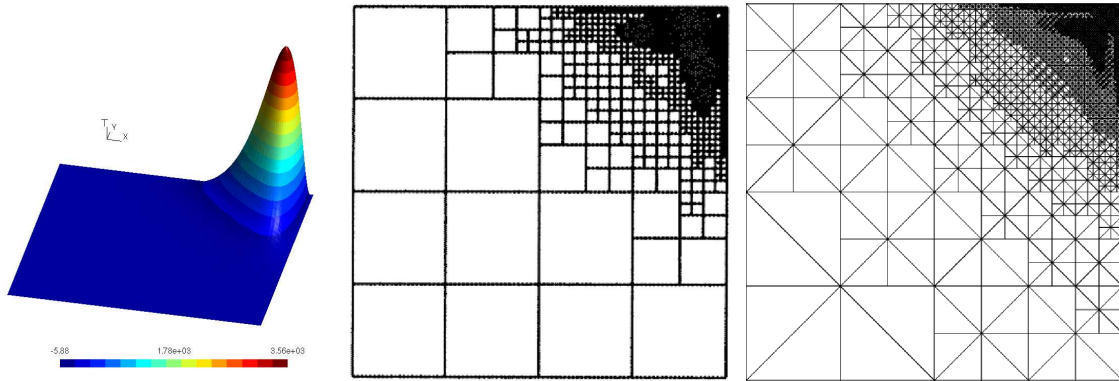


Figure 2 – Solution du problème (à gauche) et comparaison entre remaillage issu de [10] (au centre) et celui de notre algorithme (à droite)

Les raffinements obtenus sont illustrés en figure 2.

L'erreur choisie dans [10] est légèrement différente de la nôtre car basée sur le nombre d'éléments. De plus les éléments utilisés sont des type quadrangles (au lieu de triangles dans notre cas). Ainsi, seule une comparaison qualitative peut être effectuée. Comme le montre la figure 2, les deux raffinements concordent, se faisant dans les région où le gradient varie de manière importante. D'autre part, le critère sur la précision des résultats est respecté au bout d'un nombre faible d'itérations.

## 4.2 Modélisation X-FEM d'un trou

On considère maintenant un domaine troué, traité avec la méthode X-Fem. Des conditions aux limites de type flux sont imposées sur le contour intérieur du trou.

La solution en température et le maillage final obtenu sont présentés en figure 3.

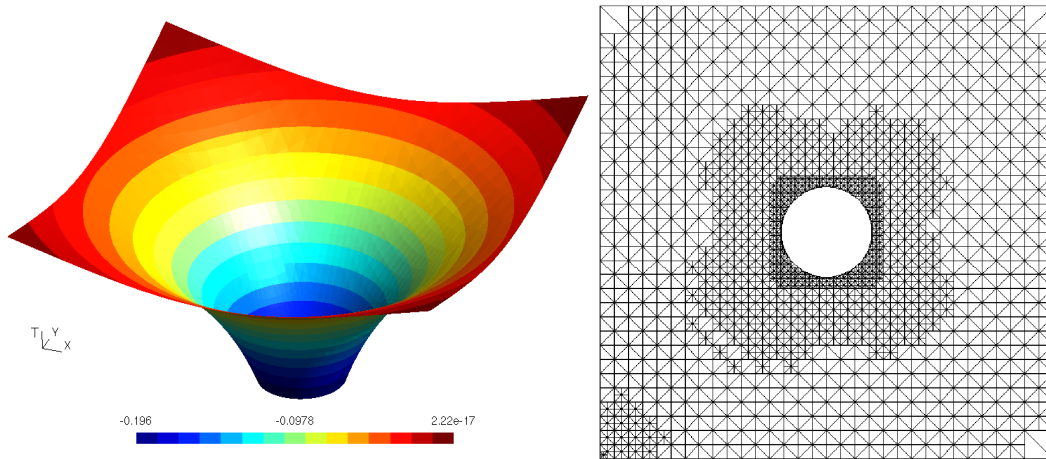


Figure 3 – Solution et remaillage du problème avec trou par methode X-Fem

Là encore, le critère sur l'erreur est respecté au bout de quelques itérations. On notera que,

comme dans l'exemple précédent, le raffinement se fait essentiellement dans les zones de fortes variations de gradients (au voisinage du trou). Les erreurs ici sont principalement dues à une mauvaise prise en compte des conditions aux limites sur le contour du trou (la level-set et sa normale étant linéaires par morceaux). Le raffinement dans l'angle correspond au point dont la température est imposée.

## 5 Conclusion

Cette étude aura permis de développer une méthode de maillage adaptatif de type h, dans l'environnement X-Fem et level-sets. Dans ce cadre, la génération d'un maillage de type octree/quadtrees est très facile à mettre en œuvre. Notons cependant que la gestion des nœuds orphelins dans la zone enrichie reste délicate. Actuellement, l'erreur sur un maillage donné est estimée à partir d'un calcul réalisé sur un maillage plus fin. Des travaux sont en cours pour utiliser des approches moins coûteuses.

## Références

- [1] I. Babuska, J.Y. Melenk : "The partition of unity finite element method". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997.
- [2] P. Cavin : "Méthode éléments finis avec raffinement spatial et temporel adaptatif et automatique : STAR-Method". Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2006
- [3] L. Chamoin : "Encadrement à posteriori de quantités locales dans les problèmes de visco-élasticité linéaire résolus par méthode des éléments finis". Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2007.
- [4] A.W. Craig, M. Ainsworth, J.Z. Zhu, O.C. Zienkiewicz : "h and h-p version error estimation and adaptive procedures from theory to practice". *Engineering with Computers*, vol. 5, 1989.
- [5] A. Huerta, P. Diez : "Error estimation including pollution assessment for nonlinear finite element analysis". *Finite elements in analysis and design*, 1989.
- [6] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, J.F. Remacle : "A computational approach to handle complex microstructure geometries". *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, 2003.
- [7] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko : "A finite element method for crack growth without remeshing". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999.
- [8] S. Osher, J.A. Sethian : "Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithm based on Hamilton-Jacobi formulation". *Journal of Computational Physics*, 1988.
- [9] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, T. Belytschko : "Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method". *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, 2001.
- [10] A. Tabarraei, N. Sukumar : "Adaptive Computations on Conforming quadtree meshes". *Finite elements in analysis and design*, p. 698, 1989.