Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands p-adique

Gabriel Dospinescu, Arthur-César Le Bras

REVÊTEMENTS DU DEMI-PLAN DE DRINFELD ET CORRESPONDANCE DE LANGLANDS p-ADIQUE

par

Gabriel Dospinescu & Arthur-César Le Bras

Résumé. — Nous décrivons le complexe de de Rham des revêtements du demi-plan de Drinfeld pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Cette description, conjecturée par Breuil et Strauch, fournit une réalisation géométrique de la correspondance de Langlands locale p-adique pour certaines représentations de de Rham de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$.

Abstract. — We describe the de Rham complex of the étale coverings of Drinfeld's p-adic upper half-plane for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Conjectured by Breuil and Strauch, this description gives a geometric realization of the p-adic local Langlands correspondence for certain two-dimensional de Rham representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$.

Table des matières

1. Introduction

La correspondance de Langlands locale "classique" pour GL_n entretient un lien étroit avec la cohomologie du demi-espace de Drinfeld de dimension $n-1$ et de ses revêtements : la *théorie de Lubin-Tate non abélienne* de Carayol [**9**] prédit que la correspondance pour les représentations supercuspidales se réalise dans la cohomologie étale ℓ-adique de la tour de Drinfeld [**30**] (ou de Lubin-Tate, selon les goûts, cf. [**34**] [**35**]) et la mise en forme de ce principe joue un rôle crucial dans la preuve d'Harris et Taylor [**48**] de la correspondance.

Par contraste, l'existence de la correspondance de Langlands p-adique, qui n'est à l'heure actuelle formulée et prouvée que pour le groupe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, repose [**16**] sur la théorie de Fontaine [**39**] des (φ, Γ)-modules. Elle n'a donc à première vue aucune relation avec la géométrie des revêtements du demi-plan de Drinfeld (1). Pourtant, le cas classique laisse espérer que celle-ci puisse expliquer la structure des représentations de G associées aux représentations galoisiennes de de Rham non triangulines. Cet article se propose de montrer que c'est effectivement le cas. Les résultats obtenus ont été directement inspirés par une conjecture non publiée de Breuil et Strauch [**8**], qui donnait un sens précis à cet espoir, en décrivant le complexe de de Rham de ces revêtements (2) en termes de la correspondance de Langlands p-adique (3). Les résultats obtenus, que nous décrivons plus en détail dans la suite de cette introduction, indiquent que le problème analogue pour $\mathrm{GL}_2(F)$ (F

---

1. Pour certaines représentations galoisiennes, on sait cependant que la correspondance se réalise dans la cohomologie complétée de la tour des courbes modulaires [**31**] ; ceci joue d'ailleurs un rôle capital dans cet article.
2. Plus précisément, la conjecture était faite pour le premier revêtement.
3. La conjecture de Breuil-Strauch et les résultats de ce travail ne disent rien sur les représentations de de Rham triangulines : pour une explication, voir la remarque 1.5.

étant une extension non triviale de $\mathbf{Q}_p$) ne sera pas une mince affaire, mais suggèrent des pistes de recherche intéressantes...

1.1. Les résultats principaux. — Nous aurons besoin de quelques préliminaires pour énoncer notre premier résultat principal. Soit D l'unique algèbre de quaternions ramifiée sur $\mathbf{Q}_p$ (à isomorphisme près), $\mathcal{O}_D$ son unique ordre maximal et soit ϖ_D une uniformisante de D. Soit $\breve{\mathcal{M}}_n$ l'espace rigide analytique sur $\widehat{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$, fibre générique du schéma formel classifiant les déformations par quasi-isogénie $\mathcal{O}_D$-équivariante d'un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial de dimension 2 et hauteur 4 sur $\overline{\mathbf{F}_p}$, avec structure de niveau $1+p^n\mathcal{O}_D$. Les espaces $\breve{\mathcal{M}}_n$ forment une tour d'espaces analytiques, les morphismes de transition $\breve{\mathcal{M}}_{n+1}\to\breve{\mathcal{M}}_n$ étant finis étales. Chacun [(4)] de ces espaces est muni d'actions qui commutent des groupes $G=\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et D^*, compatible avec les morphismes de transition $\breve{\mathcal{M}}_{n+1}\to\breve{\mathcal{M}}_n$. De plus, les espaces $\breve{\mathcal{M}}_n$ sont munis de données de descente canoniques à la Weil, qui ne sont pas effectives, mais qui le deviennent sur le quotient [(5)] de $\breve{\mathcal{M}}_n$ par $p^{\mathbf{Z}}$. On note Σ_n le modèle de $p^{\mathbf{Z}}\backslash\breve{\mathcal{M}}_n$ sur $\mathbf{Q}_p$ qui s'en déduit. L'espace rigide analytique Σ_n est un revêtement étale de Σ_0, de groupe de Galois le quotient

$$\mathrm{Gal}(\Sigma_n/\Sigma_0)=\mathcal{O}_D^*/(1+p^n\mathcal{O}_D).$$

Soit Ω le demi-plan de Drinfeld, un espace rigide sur $\mathbf{Q}_p$ dont les $\mathbf{C}_p$-points sont

$$\Omega(\mathbf{C}_p)=\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)-\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p).$$

Il admet une action de G, via l'action naturelle de G sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$, donnée par $g.z=\frac{az+b}{cz+d}$ si $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in G$, où z est "la" variable sur $\mathbf{P}^1$. L'espace Σ_0 n'est pas bien mystérieux : il s'agit simplement de deux copies de Ω, avec action triviale de $\mathcal{O}_D^*$, l'élément ϖ_D permutant les deux copies. L'action de $g\in G$ est l'action naturelle sur Ω et échange ou non les deux copies de Ω selon que le déterminant de g est impair ou pair. La géométrie des revêtements Σ_n et l'action de $G\times D^*$ sur Σ_n sont par contre bien plus compliquées.

Fixons maintenant une représentation lisse supercuspidale π de G, de caractère central trivial (pour simplifier) et notons

$$\rho=\mathrm{JL}(\pi)$$

la représentation lisse irréductible (de dimension finie) de D^* qui lui est attachée par la correspondance de Jacquet-Langlands locale. Il existe une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$ telle que ces représentations soient définies sur L. Il est sous-entendu dans la suite que le corps des coefficients de toutes les représentations qui apparaissent est L ; en particulier, si X est un espace rigide sur $\mathbf{Q}_p$ et $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X, on notera simplement $\mathcal{F}(X)$ pour $H^0(X,\mathcal{F})\otimes_{\mathbf{Q}_p}L$.

Soit $\mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}(G)$ la catégorie des représentations de G sur des L-espaces de Banach Π, qui ont un réseau ouvert, borné et G-invariant, dont la réduction modulo p est lisse admissible au sens usuel (i.e. le sous-espace des vecteurs invariants par un sous-groupe ouvert compact arbitraire de

4. L'action "horizontale", i.e. sur chaque étage de la tour, est celle de G, le groupe D^* agissant "verticalement" sur la tour". Puisque $1+p^n\mathcal{O}_D$ est distingué dans D^*, l'action par correspondances de Hecke de D^* sur la tour préserve chaque $\breve{\mathcal{M}}_n$.

5. On voit p comme élément du centre de G.

G est fini). Si $\Pi \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}(G)$, on note Π^{an} (resp. Π^{lisse}) le sous-espace de Π formé des vecteurs localement analytiques (resp. localement constants), i.e. des vecteurs dont l'application orbite [6] est localement analytique (resp. localement constante). Les espaces Π^{an} et Π^{lisse} sont stables sous l'action de G et Π^{an} est dense dans Π [**68**] (alors que Π^{lisse} est la plupart du temps nul).

Définition 1.1. — On note $\mathcal{V}(\pi)$ l'ensemble des représentations absolument irréductibles $\Pi \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}(G)$ telles que $\Pi^{\mathrm{lisse}} \simeq \pi$.

La correspondance de Langlands locale p-adique pour G fournit une description complète de $\mathcal{V}(\pi)$ (voir la discussion suivant la remarque 1.3).

Le théorème suivant, qui est le premier résultat principal de ce texte, fournit une description géométrique de la représentation localement analytique $\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$ quand $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$. Alternativement, on peut le voir comme une description de la $G \times D^*$ représentation $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ en termes de la correspondance de Jacquet-Langlands et surtout de la correspondance de Langlands p-adique.

Théorème 1.2. — *Soit π une représentation supercuspidale de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, à caractère central trivial, et soit $\rho = \mathrm{JL}(\pi)$ comme ci-dessus. Pour tout $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$ et pour tout n assez grand (il suffit que ρ soit triviale sur $1 + p^n\mathcal{O}_D$), il existe un isomorphisme de G-modules topologiques [7], unique à scalaire près*
$$(\mathcal{O}(\Sigma_n)^{\rho})^* \simeq \Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}.$$

Remarque 1.3. — a) Au lieu de partir de π, on aurait pu plus généralement partir d'une représentation localement algébrique de la forme $\pi \otimes \mathrm{Sym}^k$, avec π supercuspidale [8]. Tous les résultats de ce texte s'étendent sans difficulté, à condition de considérer des fibrés vectoriels différents sur Σ_n : voir la remarque 11.12. De même, l'hypothèse que le caractère central de π est trivial n'est pas essentielle, contrairement à l'hypothèse que π est supercuspidale (voir la remarque 1.5 pour plus de détails concernant ce dernier point).

b) Une conséquence importante du théorème 1.2 est que $(\mathcal{O}(\Sigma_n)^{\rho})^*$ est une G-représentation localement analytique admissible, au sens de Schneider et Teitelbaum [**68**]. Le caractère localement analytique s'établit sans trop de mal, mais l'admissibilité semble nettement plus délicate. Qu'en est-il pour $\mathrm{GL}_2(F)$, ou même $\mathrm{GL}_n(F)$? Notre méthode ne fournit aucune approche pour ce problème. On peut espérer que la théorie des D-modules p-adiques permette de dire quelque chose de l'admissibilité de ces représentations indépendamment de la correspondance de Langlands p-adique (le cas du premier revêtement de la tour de Drinfeld pour $\mathrm{GL}_2(F)$-ce qui correspond à $\Sigma_{1/2}$ avec nos notations...-est traité dans [**60**] et dans [**58**] pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

Le théorème 1.2 affirme en particulier que le quotient $\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$ ne dépend pas du choix de $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$. Pour comprendre ce que cela signifie, il convient d'expliciter davantage l'ensemble $\mathcal{V}(\pi)$. La correspondance de Langlands "classique" [9] pour G combinée avec une recette de Fontaine [**40**]

6. Si $v \in \Pi$ est un tel vecteur, son application orbite est $G \to \Pi$, $g \mapsto g.v$.
7. Si V est un L-espace vectoriel localement convexe, on note V^* son dual topologique. On pose aussi $\sigma^{\rho} = \mathrm{Hom}_{D^*}(\rho, \sigma)$ pour toute L-représentation σ de $G \times D^*$.
8. Côté Galois, cela revient à passer des poids de Hodge-Tate $0, 1$ aux poids $0, k+1$, comme on le verra plus bas.
9. Normalisée à la Tate.

permet d'associer à π un $(\varphi, \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p))$-module $M(\pi)$, libre de rang 2 sur $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$, ainsi qu'un L-espace vectoriel de dimension 2

$$M_{\mathrm{dR}}(\pi) = (\overline{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M(\pi))^{\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}}.$$

Un des résultats principaux de [**22**] (qui utilise la compatibilité entre les correspondances de Langlands "classique" et p-adique [**31**]) montre que le foncteur de Colmez [**16**] induit une bijection

$$\Pi \to V(\Pi)$$

entre $\mathcal{V}(\pi)$ et l'ensemble des L-représentations absolument irréductibles V de dimension 2 de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, potentiellement cristallines à poids de Hodge-Tate $0, 1$ et telles que

$$D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M(\pi).$$

On a $\det V(\Pi) = \chi_{\mathrm{cyc}}$ pour tout $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$, car le caractère central de π est trivial (aussi innocente qu'elle puisse paraître, cette assertion est en fait la partie la plus technique de [**22**]...). En combinant cela avec le théorème de Colmez-Fontaine [**21**], on en déduit une bijection canonique

$$\mathcal{V}(\pi) \simeq \mathrm{Proj}(M_{\mathrm{dR}}(\pi)), \quad \Pi \mapsto \mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V(\Pi))),$$

en considérant $\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V(\Pi)))$ comme une L-droite de $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$ via l'isomorphisme $D_{\mathrm{dR}}(V(\Pi)) \simeq M_{\mathrm{dR}}(\pi)$ induit par [(10)] $D_{\mathrm{pst}}(V(\Pi)) \simeq M(\pi)$. Notons $\mathcal{L} \to \Pi_{\mathcal{L}}$ l'inverse de cette bijection. Ainsi, $\mathcal{L}$ est la filtration de Hodge sur $D_{\mathrm{dR}}(V(\Pi_{\mathcal{L}}))$.

Ce qu'implique donc le théorème 1.2, c'est que la G-représentation $\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}}/\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{lisse}}$ ne dépend pas de la filtration de Hodge $\mathcal{L}$ sur $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$. Ce résultat d'indépendance est surprenant et n'a rien de gratuit : la représentation Π^{an} permet de récupérer Π, et donc la filtration de Hodge sur $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$, grâce au résultat principal de [**23**], tandis que le quotient par les vecteurs lisses ne dépend que de $M(\pi)$. Autrement dit, les représentations Π^{an} pour $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$ sont des extensions

$$0 \to \pi \to \Pi^{\mathrm{an}} \to \Pi(\pi, 0) \to 0$$

d'une représentation $\Pi(\pi, 0)$ qui ne dépend que de $M(\pi)$, par π. La filtration de Hodge encode cette extension. Nous verrons plus loin comment récupérer cette filtration.

Ce qui précède n'est cependant que de la poudre aux yeux : la *preuve* du théorème 1.2 utilise de manière essentielle cette indépendance, qui avait été démontrée par voie très détournée par Colmez [**16**] (voir aussi le travail en cours de Colmez [**20**] pour une preuve nettement plus simple ; nous en donnons une aussi dans cet article). En effet, elle nous permet de choisir un $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$ convenable, et ainsi d'utiliser des méthodes globales pour montrer l'existence d'un morphisme non nul entre les deux objets du théorème. Nous montrons ensuite par voie locale que tout tel morphisme est un isomorphisme, et qu'il est unique à scalaire près : c'est le coeur technique de l'article, voir la section suivante pour plus de détails.

10. Ce dernier isomorphisme est unique à scalaire près, dont tout est "canonique à scalaire près" dans ce qui précède, et l'identification $\mathcal{V}(\pi) \simeq \mathrm{Proj}(M_{\mathrm{dR}}(\pi))$ est canonique tout court....

La description géométrique de $\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$ étant acquise grâce au théorème 1.2, nous voulons maintenant décrire Π^{an} géométriquement, et récupérer ainsi la filtration de Hodge. C'est ici qu'intervient le complexe de de Rham de Σ_n.

L'espace Σ_n est Stein, ce qui fournit une suite exacte d'espaces de Fréchet avec action de $D^* \times G$

$$0 \to H^0_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n) \to \mathcal{O}(\Sigma_n) \to \Omega^1(\Sigma_n) \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n) \to 0.$$

En passant aux composantes $\rho := \mathrm{JL}(\pi)$-isotypiques, on obtient une suite exacte de G-représentations sur des espaces de Fréchet

$$0 \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho \to 0.$$

Théorème 1.4. — *Il existe un isomorphisme canonique (à scalaire près) de G-modules topologiques*

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho \simeq M^*_{\mathrm{dR}} \otimes_L \pi^*,$$

tel que pour toute L-droite $\mathcal{L}$ de M_{dR}, l'image inverse de $\mathcal{L}^\perp \otimes_L \pi^* \subset H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$ dans $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho$ est isomorphe à $(\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathcal{L}})^*$ et la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho \to (\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathcal{L}})^* \to \mathcal{L}^\perp \otimes_L \pi^* \simeq \pi^* \to 0$$

qui s'en déduit est duale de celle fournie par le théorème 1.2.

Ce théorème, qui est le deuxième résultat principal de l'article, donne donc une recette géométrique simple pour construire Π^{an} à partir de la donnée de $M(\pi)$ (ou de façon équivalente, de π) et de la filtration de Hodge, à partir du complexe de de Rham. C'était l'objet de la conjecture originale de Breuil-Strauch **[8]** (qui était toutefois formulée de manière un peu différente, voir la remarque 11.13).

Remarque 1.5. — Si π est une représentation de la série principale, et $\Pi \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}(G)$ contient π, on ne dispose pas d'une telle description géométrique de Π^{an} : la situation est bien sûr similaire à celle de la correspondance de Langlands locale classique, où les représentations de la série principale n'apparaissent pas dans la cohomologie ℓ-adique à supports de la tour de Drinfeld. Si π est un twist de la Steinberg, les premiers travaux de Breuil **[6]** sur la correspondance de Langlands p-adique fournissent une description partielle de Π^{an} utilisant le demi-plan Ω, mais la situation est plus compliquée : il ne suffit pas de copier les énoncés précédents avec ρ triviale. Cela s'explique en partie par le fait que dans ce cas la cohomologie de de Rham est non triviale aussi en degré 0, cf. le paragraphe 12.2.

Toutefois, dans ces deux cas, la représentation galoisienne attachée à une telle Π est trianguline, et on dispose donc d'une description très précise des vecteurs localement analytiques **[19]** **[55]**.

Remarque 1.6. — Remplaçons Σ_n par le premier revêtement $\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D}$ et considérons comme dans l'énoncé du théorème le dual de l'image inverse de $\mathcal{L}^\perp \otimes_L \pi^* \subset H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D})^\rho$ dans $\Omega^1(\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D})^\rho$, pour ρ représentation lisse irréductible non triviale de D^*, triviale sur $1+\varpi_D\mathcal{O}_D$. Dans un travail récent **[58]** et dans une formulation un peu différente, Lue Pan montre que le complété unitaire universel de cette représentation est admissible et que sa réduction modulo π_L coïncide avec la réduction modulo π_L de $V(\Pi_{\mathcal{L}})$ par la correspondance de Langlands semi-simple "modulo p". Sa preuve exploite la géométrie d'un modèle formel explicite de $\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D}$.

1.2. Survol de la preuve. — Comme nous l'avons déjà précisé, la preuve du théorème 1.2 combine des arguments globaux et locaux. La plupart des ingrédients apparaissant dans sa preuve sont aussi utilisés pour démontrer le théorème 1.4, donc nous allons nous concentrer uniquement sur la preuve du théorème 1.2 dans la suite.

Commençons par la partie globale. Le but est de construire dans un premier temps un morphisme non nul, G-équivariant et continu, de $(\Omega^1(\Sigma_n)^\rho)^*$ dans Π^{an}, pour un *certain* (11) $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$. Considérons une algèbre de quaternions B sur $\mathbf{Q}$ ramifiée en p et déployée à l'infini. Elle donne naissance à une tour de courbes de Shimura $(\mathrm{Sh}_K)_K$ indexée par les sous-groupes ouverts compacts K de $B^*(\mathbf{A}_f)$ (on voit B^* comme un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$ dans la suite). Fixons un sous-groupe ouvert compact suffisamment petit K^p de $B^*(\mathbf{A}_f^p)$ et considérons $K = (1+p^n\mathcal{O}_D)K^p \subset B^*(\mathbf{A}_f)$. Le théorème d'uniformisation de Cerednik-Drinfeld (plus quelques contorsions topologiques) permet d'obtenir un isomorphisme

$$\Omega^1(\mathrm{Sh}_K)^\rho \simeq \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}((\Omega^1(\Sigma_n)^\rho)^*, \mathrm{LA}(X(K^p))), \tag{1}$$

où

$$X(K^p) = \bar{B}^*(\mathbf{Q})\backslash \bar{B}^*(\mathbf{A}_f)/K^p,$$

$\bar{B}$ étant l'algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}$ ayant les mêmes invariants que B aux places différentes de p et ∞, et des invariants échangés en ces places ($\bar{B}$ est donc compacte modulo centre à l'infini). L'espace $X(K^p)$ est une variété analytique, au sens naïf du terme, compacte, avec une action localement analytique de G. L'espace $\mathrm{LA}(X(K^p))$ des fonctions localement analytiques sur $X(K^p)$ à valeurs dans L est muni d'une action de l'algèbre de Hecke hors p, et cette action commute à l'action de G.

Ce qui précède n'utilise pas le fait qu'on travaille avec $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, mais à partir de maintenant nous allons pleinement exploiter ce qu'on connaît sur ce groupe. Le point clé est de comprendre les espaces Hecke-propres dans $\mathrm{LA}(X(K^p))$. Comme $\bar{B}$ est déployée en p, cela se fait en reprenant mot à mot les arguments qui ont permis à Emerton [**31**] de comprendre la cohomologie complétée de la tour des courbes modulaires. En fait, en globalisant convenablement (12) la représentation π nous pouvons nous placer dans une situation relativement simple - mais qui demande quand même toute la force de la correspondance de Langlands locale p-adique ! Ainsi, en regardant les espaces $\mathfrak{p}$-propres des deux côtés de l'isomorphisme (1) pour un idéal maximal convenable $\mathfrak{p}$ de l'algèbre de Hecke sphérique et en utilisant la version (13) du théorème de compatibilité local-global d'Emerton pour comprendre l'espace propre $\mathrm{LA}(X(K^p))[\mathfrak{p}]$, on obtient un morphisme G-équivariant non nul continu $(\Omega^1(\Sigma_n)^\rho)^* \to \Pi^{\mathrm{an}}$, pour un certain $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$, ce qui induit par dualité un morphisme $(\Pi^{\mathrm{an}})^* \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho$. On vérifie sans mal que ce morphisme se restreint en un morphisme non nul G-équivariant continu

$$\Phi : (\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}})^* \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho.$$

11. Ce genre de stratégie avait été employée par Emerton [**31**] pour démontrer la compatibilité entre les correspondances de Langlands locale p-adique et classique pour G.

12. De telle sorte que la représentation galoisienne associée à la forme automorphe globalisant π soit irréductible en réduction mod p et en restriction à $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$

13. Notons que l'on a besoin d'une version forte de cette compatibilité.

D'après les résultats de Colmez évoqués plus haut, le membre de gauche, tout comme le membre de droite, ne dépend que de M (ou, de façon équivalente, de π, ou de ρ), et pas du choix de $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$: on notera désormais $\Pi(\pi, 0) = \Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$.

La suite de la preuve, qui représente la partie la plus technique de l'article, consiste à montrer que Φ est un isomorphisme, et qu'il est unique à scalaire près. L'argument est un peu acrobatique. Nous commençons par munir $\Pi(\pi, 0)^*$ d'une structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module telle que Φ soit $\mathcal{O}(\Omega)$-linéaire. Cela se fait en exploitant la construction explicite de Π via les (φ, Γ)-modules, et la comprehension de l'action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_2$ de G sur Π^{an}. Pour motiver un peu la construction, notons que l'opérateur $\partial : \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ de multiplication par $z \in \mathcal{O}(\Omega)$ encode la structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module de $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$, et est uniquement caractérisé par l'égalité d'opérateurs sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$

$$a^+ - 1 = u^+ \circ \partial,$$

où a^+ (respectivement u^+) désigne l'action infinitésimale de $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (respectivement $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$) sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$. Notons que l'opérateur u^+ agit comme $-\frac{d}{dz}$.

Le point est alors de refaire ces constructions du côté des (φ, Γ)-modules (tout cela est fortement inspiré d'un travail en cours de Colmez [**20**]). On démontre ainsi l'existence d'un automorphisme ∂ du L-espace vectoriel topologique $\Pi(\pi, 0)^*$ uniquement caractérisé par le fait que

$$a^+ - 1 = u^+ \circ \partial.$$

L'existence de ∂ est un théorème délicat de Colmez [**20**], dont on donne une nouvelle preuve. La notation ∂ peut paraître pour le moins étrange, sachant qu'il s'agit d'un opérateur de "multiplication par z" : elle vient du fait que ∂ encode la connexion sur le (φ, Γ)-module (sur l'anneau de Robba) attaché à $V(\Pi)$. Au vu des remarques précédentes, le théorème suivant ne devrait pas surprendre le lecteur, mais nous insistons sur le fait qu'il requiert un certain nombre d'estimées pas totalement triviales et qu'il joue un rôle décisif dans la preuve des résultats principaux de l'article.

Théorème 1.7. — *Pour tout $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$ il existe une unique structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module sur $\Pi(\pi, 0)^*$ qui étend sa structure de L-espace vectoriel, et telle que $z \in \mathcal{O}(\Omega)$ agit comme ∂.*

Un ingrédient crucial dans la preuve de ce théorème est la dualité de Morita ([**65**], par exemple), i.e. l'isomorphisme de G-modules topologiques

$$\Omega^1(\Omega) \simeq (\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^*, \quad \mu \in (\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^* \mapsto \omega_f = \left(\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \frac{1}{z - x} \mu(x) \right) dz.$$

Ici z est "la" variable sur $\mathbf{P}^1$, $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}$ est la Steinberg localement analytique, quotient de l'espace $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))$ des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ par les fonctions constantes. La structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module du théorème précédent est alors donnée par

$$\left(\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \frac{1}{z - x} \mu(x) \right) \cdot l = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} (\partial - x)^{-1}(l) \mu(x),$$

pour tout $l \in (\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}})^*$.

Un résultat frappant que l'on obtient, comme corollaire du résultat final, est que $\Pi(\pi,0)^*$ est localement libre de rang $\dim_L(\rho)$ comme $\mathcal{O}(\Omega)$-module. Cela semble très délicat à démontrer, et même à deviner, en utilisant seulement la théorie des (φ,Γ)-modules, qui sert à construire $\Pi(\pi,0)$ et l'opérateur ∂.

Une fois le théorème 1.7 démontré, nous montrons que $\Phi : \Pi(\pi,0)^* \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ est surjectif. Cela se fait en deux étapes : nous montrons d'abord que Φ est d'image dense, et ensuite qu'il est surjectif. La densité de l'image de Φ vient de l'irréductibilité du fibré G-équivariant sur Ω dont les sections globales sont $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$, résultat qui se démontre en utilisant les résultats de Kohlhaase [**54**], qui permettent de "transférer le problème" sur la tour de Lubin-Tate : via ce transfert, l'irréductibilité se ramène à l'irréductibilité du fibré D^*-équivariant $\rho^* \otimes \mathcal{O}_{\check{\mathbf{P}}^1}$, qui est nettement plus facile à établir [14].

Expliquons enfin rapidement l'argument pour l'injectivité de Φ. On note $\mathcal{O}(k)(\Sigma_n)$ la représentation de G sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ obtenue en tordant l'action naturelle comme suit [15]

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) *_k f = (a-cz)^{-k} \cdot \left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) .f\right).$$

Puisque Σ_n est étale sur Σ_0, on a une trivialisation $\Omega^1(\Sigma_n) \simeq \mathcal{O}(\Sigma_n)dz$, qui induit un isomorphisme de G-représentations

$$\Omega^1(\Sigma_n) \simeq \mathcal{O}(2)(\Sigma_n) \otimes \det.$$

On peut faire les mêmes constructions purement à partir des (φ,Γ)-modules, ce qui permet de définir une représentation $\Pi(\pi,2)^*$ en faisant agir G sur $\Pi(\pi,0)^*$ par

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) * v := \det g \cdot (a-c\partial)^{-2} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) .v.$$

Le morphisme Φ étant $\mathcal{O}(\Omega)$-linéaire, G-équivariant et surjectif, il induit un morphisme G-équivariant continu et surjectif $\Phi : \Pi(\pi,2)^* \to \Omega^1(\Sigma_n)$, et il suffit de démontrer que ce morphisme est injectif. Cela se fait en plusieurs étapes. D'abord, nous utilisons encore une fois l'uniformisation de Cerednik-Drinfeld et un argument avec la suite spectrale de Hochschild-Serre comme dans [**47**] et [**36**] pour montrer que $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$ admet deux copies de π^* comme quotient. Ensuite, la "théorie du modèle de Kirillov" de Colmez permet [16] de montrer que le conoyau de $u^+ : \Pi(\pi,0)^* \to \Pi(\pi,2)^*$ est canoniquement (à scalaire près) isomorphe à $M^*_{\mathrm{dR}} \otimes \pi^*$. On déduit de ce qui précède que le morphisme

$$\Phi : \Pi(\pi,2)^*/u^+(\Pi(\pi,0))^* \to \Omega^1(\Sigma_n)/d(\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho)$$

est forcément un isomorphisme, ce qui fournit au passage un isomorphisme [17]

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho \simeq M^*_{\mathrm{dR}} \otimes \pi^*.$$

---

14. Mais qui utilise de manière cruciale le fait que ρ est irréductible et *lisse*.
15. Comme $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ est un $\mathcal{O}(\Omega) \simeq \mathcal{O}(\Sigma_0)^{D^*}$ (l'isomorphisme étant donné par le plongement diagonal de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Sigma_0)$), et comme $(a-cz)^{-k} \in \mathcal{O}(\Omega)$, la formule précédente a un sens.
16. Cela fait bon usage d'anneaux de Fontaine, de l'équation différentielle attachée par Berger à une représentation de de Rham, ainsi que des résultats de [**26**] et [**16**, chap VI].
17. Une méthode plus naturelle serait d'utiliser la cohomologie d'Hyodo-Kato d'un modèle de Σ_n, mais cela pose un certain nombre de problèmes...

De cela on déduit assez facilement l'injectivité de Φ, en prouvant qu'il n'existe pas de sous-espace G-stable dans $\cap_{n\geq 0}(u^+)^n(\Pi(\pi,2)^*)$. Ce dernier espace est en fait nul (cela découle de **[20]** ou **[29]** et utilise de manière cruciale le fait que les représentations auxquelles on travaille ne sont pas triangulines), ce qui joue un rôle important dans la preuve du théorème 1.10 ci-dessous.

Ce qui précède montre que l'application $u^+ : \Pi(\pi,0)^* \to \Pi(\pi,0)^*$ induit une suite exacte de G-modules de Fréchet

$$0 \to \Pi(\pi,0)^* \to \Pi(\pi,2)^* \to M_{\mathrm{dR}}^* \otimes_L \pi^* \to 0$$

et que l'isomorphisme $\Pi(\pi,0)^* \simeq \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ induit un isomorphisme de G-modules topologiques

$$\Omega^1(\Sigma_n)^\rho \simeq \Pi(\pi,2)^*.$$

Le théorème 1.4 s'en déduit en suivant soigneusement ces identifications.

Remarque 1.8. — Colmez a démontré **[20]** que la représentation $\Pi(\pi,0)$ est (topologiquement) irréductible, ce qui fournit une preuve directe de l'injectivité. Nous avons toutefois besoin de tous les ingrédients ci-dessus pour la preuve du théorème 1.4.

1.3. Compléments. — Nombre des objets construits à l'aide des (φ,Γ)-modules mentionnés précédemment trouvent donc une interprétation géométrique, à l'exception notable du faisceau G-équivariant $U \to tN_{\mathrm{rig}} \boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ construit par Colmez [18], dont l'espace des sections globales contient $\Pi(\pi,0)^*$ et qui joue un rôle capital dans la théorie. Dans la dernière section de cet article, nous proposons une interprétation géométrique naturelle de ce faisceau, qui prolonge naturellement la conjecture de Breuil-Strauch. Le lecteur est renvoyé à 12.3 pour un énoncé précis. Contentons-nous pour finir cette partie de citer deux autres conséquences de nos résultats.

Soit $D(\Gamma)$ l'algèbre des distributions sur Γ à valeurs dans L. Si V est une représentation de de Rham de $\mathcal{G}_K := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$, avec K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on note $H^1_e(\mathcal{G}_K, V)$ l'image de l'exponentielle de Bloch-Kato. Soit maintenant $V \in \mathcal{V}(\pi)$. On dispose d'applications naturelles

$$\int_{1+p^n\mathbf{Z}_p} : H^1(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}, D(\Gamma) \otimes_L V) \to H^1(\mathcal{G}_{F_n}, V),$$

où $F_n = \mathbf{Q}_p(\mu_{p^n})$.

Théorème 1.9. — *Il existe un isomorphisme de $D(\Gamma)$-modules libres de rang 2*

$$(\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=1} \simeq \{\mu \in H^1(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}, D(\Gamma) \otimes_L V) \mid \int_{1+p^n\mathbf{Z}_p} \mu \in H^1_e(\mathcal{G}_{F_n}, V) \quad \forall n \geq 0\}.$$

Enfin, la trivialisation $\Omega^1(\Sigma_n) = \mathcal{O}(\Sigma_n)dz$ permet de définir une application $\frac{d}{dz} : \mathcal{O}(\Sigma_n) \to \mathcal{O}(\Sigma_n)$. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{O}(\Sigma_n)$ est infiniment primitivable si f est dans l'image de $(\frac{d}{dz})^{\circ k}$ pour tout k. En d'autres termes, f est infiniment primitivable si $f \in \cap_{k\geq 0}(u^+)^k(\mathcal{O}(\Sigma_n))$.

Théorème 1.10. — *Soit $f \in \mathcal{O}(\Sigma_n)$ une fonction infiniment primitivable sur Σ_n. Alors $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

18. Pour une définition, voir le § 8.1.

Remarque 1.11. — Dans un article ultérieur **[25]** nous discuterons le lien entre $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ et la courbe de Fargues-Fontaine : soit $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho_\infty$ le sous-espace de $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ des fonctions f telles que

$$\lim_{v_p(b)\to-\infty} \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f = 0.$$

Géométriquement, $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho_\infty$ est le sous-espace de $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ formé des fonctions qui "s'annulent au point ∞ du bord". Soient

$$\tilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \bigcap_{n\geq 0} \varphi^n(\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}), \quad \mathcal{H}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}}).$$

On démontre alors **[25]** qu'il existe un isomorphisme de représentations de $B = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & \mathbf{Q}_p^* \end{pmatrix}$

$$\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho_\infty \simeq (\tilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M(\pi))^{\mathcal{H}_{\mathbf{Q}_p}} \otimes \delta,$$

où $\delta : B \to \mathbf{Q}_p^*$ est le caractère $\delta\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \frac{a}{d}$. Précisons simplement que l'action de $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur le terme de droite se fait à travers l'action naturelle de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}}/\mathbf{Q}_p)$, via l'isomorphisme $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \Gamma$ induit par le caractère cyclotomique. L'action de $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ correspond à l'action du Frobenius sur $(\tilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M(\pi))^{\mathcal{H}_{\mathbf{Q}_p}}$. Notons aussi que tous les objets dans l'énoncé précédent ont un sens pour $\mathrm{GL}_2(F)$. On peut naturellement se demander si c'est plus qu'une coïncidence...

1.4. Plan de l'article. — L'enchaînement des chapitres de ce texte suit essentiellement le cheminement de la preuve esquissée ci-dessus, dont nous reprenons les notations. La construction du morphisme $\Phi : (\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}})^* \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ est l'objet de la section 5. Les deux chapitres précédents contiennent des résultats préliminaires à cette construction : description de la tour de Drinfeld et propriétés de l'action des groupes G et D^* sur la tour (section 3) ; théorème d'uniformisation p-adique (section 4), rappels sur les formes automorphes sur les algèbres de quaternions (section 4) et enfin le calcul de la π-partie de la cohomologie de Rham à supports compacts des revêtements de Drinfeld qui sera utile plus tard. La preuve du théorème de compatibilité local-global (d'après Emerton) est repoussée en appendice. Le chapitre 6 est constitué de quelques rappels standard sur la théorie des (φ, Γ)-modules, tandis que le chapitre 7 contient des rappels, moins standard et fondamentaux pour la suite, sur la correspondance de Langlands p-adique : en particulier, la description de l'action infinitésimale de G sur les vecteurs localement analytiques et la théorie du modèle de Kirillov de Colmez. Ces résultats sont pleinement utilisés dans la section 8 pour construire $\Pi(\pi, 0)$, puis dans la section 9 pour munir $\Pi(\pi, 0)^*$ d'un opérateur ∂ et d'une structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module. La démonstration de la surjectivité de Φ est alors possible et exposée dans le chapitre 10. La fin de la preuve des théorèmes principaux est l'objet du chapitre 11 et fait encore appel aux résultats du chapitre 7. Enfin, la section 12 contient quelques corollaires et une question.

1.5. Remerciements.— Nous tenons à remercier chaleureusement Christophe Breuil, qui nous a expliqué sa conjecture avec Matthias Strauch et a suivi nos progrès avec intérêt et attention. Il est évident que cet article n'aurait jamais vu le jour sans les articles monumentaux **[16, 31]** de Pierre Colmez et Matthew Emerton. Nous remercions Pierre Colmez et Laurent Fargues pour des longues et fréquentes discussions, ainsi que pour leurs suggestions et encouragements : en particulier la prépublication [**20**] et une remarque de Fargues ont joué un rôle décisif dans l'élaboration de ce travail. Pour des discussions utiles, nous tenons également à remercier Konstantin Ardakov, Elmar Grosse-Klönne, Vincent Pilloni, Peter Scholze, Matthias Strauch, Jared Weinstein, et tout spécialement Benjamin Schraen. G.D. voudrait remercier l'IHES (en particulier Ahmed Abbes et Benjamin Schraen) et le M.S.R.I. pour les excellentes conditions de travail, ainsi que l'A.N.R Percolator pour le financement.

2. Notations et conventions

(1) On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$ et on note $\mathbf{C}_p$ son complété. Toutes les extensions de $\mathbf{Q}_p$ considérées dans la suite seront à l'intérieur de $\mathbf{C}_p$. On note $\mathbf{Q}_{p^2}$ l'unique extension non ramifiée quadratique de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\breve{\mathbf{Q}}_p$ le complété de l'extension maximale non ramifiée $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ de $\mathbf{Q}_p$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Pour $n \geq 1$, on note $F_n = \mathbf{Q}_p(\mu_{p^n})$ et $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}}$ le complété de la réunion des F_n. On pose, enfin,

$$\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p), \quad \mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}}), \quad \Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}}/\mathbf{Q}_p).$$

(2) Dans tout le texte, $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On note $G_0 = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et $G_n = 1 + p^n\mathrm{M}_2(\mathbf{Z}_p)$, pour tout $n \geq 1$. On note aussi B le sous-groupe de Borel (supérieur) de G et $P = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ le *mirabolique*. Enfin, on pose $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2 = \mathrm{Lie}(G)$ et on considère la base de $\mathfrak{g}$ donnée par

$$a^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad a^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad u^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

On note $h = a^+ - a^- \in U(\mathfrak{g})$.

(3) On fait la convention importante que *toutes les actions de G seront à gauche.* En particulier, si G agit sur un espace rigide analytique (ou un schéma) X, on transforme l'action naturelle à droite de G sur les sections globales d'un fibré G-équivariant sur X en une action à gauche (via l'anti-involution $g \to g^{-1}$ de G).

(4) On note D l'unique algèbre de quaternions non déployée sur $\mathbf{Q}_p$ (à isomorphisme près), $\mathcal{O}_D$ son unique ordre maximal, $D_0 = \mathcal{O}_D^*$, et $D_n = 1 + p^n\mathcal{O}_D$, pour tout $n \geq 1$. Fixons, une fois pour toutes, un plongement de $\mathbf{Q}_{p^2}$ dans D. Soit ϖ_D une uniformisante de $\mathcal{O}_D$ telle que

$$\mathcal{O}_D = \mathbf{Z}_{p^2}[\varpi_D], \quad \varpi_D^2 = p, \quad \text{et} \quad \varpi_D x = \sigma(x)\varpi_D, \quad \forall x \in \mathbf{Q}_{p^2},$$

où σ est le Frobenius de $\mathbf{Q}_{p^2}$.

(5) La représentation supercuspidale π, de caractère central trivial et définie sur une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$ (qui grandira selon les besoins...) sera fixée une fois pour toutes. La représentation irréductible de D^* attachée à π par la correspondance de Jacquet-Langlands locale sera notée $\rho = \mathrm{JL}(\pi)$. Noter que ρ est aussi à caractère central trivial.

(6) Si X est un espace rigide analytique sur $\mathbf{Q}_p$, on note $\mathcal{O}(X) = L \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^0(X, \mathcal{O}_X)$ et $\Omega^1(X) = L \otimes_{\mathbf{Q}_p} H^0(X, \Omega^1_X)$. Même convention pour $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ (on n'utilisera la cohomologie de de Rham que pour des espaces rigides analytiques lisses et de Stein).

(7) Soit X est une variété analytique p-adique avec action localement analytique de G. Si V est un $\mathbf{Z}_p$-module topologique, on note $\mathcal{C}^0(X,V)$ (resp. $\mathrm{LC}(X,V)$) l'ensemble des fonctions continues (resp. localement constantes) $\phi : X \to V$. On note simplement $\mathcal{C}^0(X)$ (resp. $\mathrm{LC}(X)$, resp. $\mathrm{LA}(X)$) au lieu de $\mathcal{C}^0(X,L)$ (resp. $\mathrm{LC}(X,L)$, resp. les fonctions localement analytiques $\phi : X \to L$). Tous ces espaces de fonctions sont munis d'actions naturelles (à gauche) de G.

(8) Si H est un groupe de Lie p-adique, on écrit $D(H)$ pour l'algèbre des distributions sur H à valeurs dans L. C'est le dual topologique fort de $\mathrm{LA}(H)$.

(9) Si $\mathcal{B}$ est une L-représentation de Banach de G, on note $\mathcal{B}^{\mathrm{an}}$ (resp. $\mathcal{B}^{\mathrm{alg}}$, resp. $\mathcal{B}^{\mathrm{lisse}}$) le sous-espace de $\mathcal{B}$ formé des vecteurs v tels que l'application $G \to \mathcal{B}$, $g \mapsto g.v$ soit localement analytique (resp. localement polynomiale, resp. localement constante). Si $\mathrm{Alg}(G)$ est l'ensemble des (classes d'isomorphisme de) représentations algébriques irréductibles de G définies sur L, alors $\mathcal{B}_{\mathrm{alg}}$ est l'image du morphisme naturel (injectif)

$$\bigoplus_{W \in \mathrm{Alg}(G)} W \otimes_L \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, \mathcal{B}^{\mathrm{an}}) \to \mathcal{B}^{\mathrm{an}},$$

où $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, alors que $\mathcal{B}^{\mathrm{lisse}}$ est le sous-espace $(\mathcal{B}^{\mathrm{an}})^{\mathfrak{g}=0}$ de $\mathcal{B}^{\mathrm{an}}$ des vecteurs tués par tout élément de $\mathfrak{g}$. Enfin, si K_p est un sous-groupe ouvert compact de G, on note $\mathcal{B}_{K_p-\mathrm{alg}}$ l'image du morphisme

$$\bigoplus_{W \in \mathrm{Alg}(G)} W \otimes_L \mathrm{Hom}_{K_p}(W, \mathcal{B}) \to \mathcal{B}.$$

3. Revêtements du demi-plan de Drinfeld et fibrés vectoriels

Nous rappelons dans ce chapitre un certain nombre de résultats relativement standard sur la tour de Drinfeld et nous établissons le caractère localement analytique de l'action de G sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)$, ainsi que le caractère lisse de la G-représentation $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)$. Le lecteur pourra consulter [**4, 24, 30, 35, 61**] pour plus de détails concernant la tour de Drinfeld.

3.1. L'espace de Drinfeld et ses revêtements. — Soit S un $\breve{\mathbf{Z}}_p$-schéma. Un $\mathcal{O}_D$*-module formel spécial sur* S est un groupe formel p-divisible X sur S, de dimension 2 et hauteur 4, muni d'une action de $\mathcal{O}_D$ telle que l'action induite de $\mathbf{Z}_{p^2}$ sur l'algèbre de Lie de X fait de celle-ci un $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_{p^2}$-module localement libre de rang 1. Il existe une unique classe de $\mathcal{O}_D$-isogénie de $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux sur $\bar{\mathbf{F}}_p$. Fixons un tel $\mathcal{O}_D$-module formel spécial $\mathbf{X}$. Le foncteur des déformations de $\mathbf{X}$ par quasi-isogénies $\mathcal{O}_D$-équivariantes [(19)] est représentable [**61**] par un schéma formel p-adique sur $\breve{\mathbf{Z}}_p$. On note $\breve{\mathcal{M}}_0$ la fibre générique rigide de ce schéma formel. Un théorème fondamental de Drinfeld [**30**] fournit un isomorphisme

$$\breve{\mathcal{M}}_0 \simeq \breve{\Omega} \times \mathbf{Z},$$

19. Il s'agit du foncteur qui à S un $\breve{\mathbf{Z}}_p$-schéma sur lequel p est nilpotent associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (X, ρ), avec X un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial sur S et ρ une quasi-isogénie $\mathcal{O}_D$-équivariante entre $\mathbf{X}_{\bar{S}}$ et $X_{\bar{S}}$; ici $\bar{S}$ est le sous-schéma fermé de S défini par $p = 0$.

où $\breve{\Omega} = \Omega\hat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\breve{\mathbf{Q}}_p$ et Ω est le demi-plan de Drinfeld, un espace rigide sur $\mathbf{Q}_p$ dont les $\mathbf{C}_p$-points sont

$$\Omega(\mathbf{C}_p) = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p) - \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p).$$

L'espace $\breve{\mathcal{M}}_0$ est muni d'une action à gauche de G donnée par

$$g.(X,\rho) = (X, \rho\circ g^{-1}),$$

qui correspond par l'isomorphisme de Drinfeld à l'action usuelle par homographies de G sur le demi-plan et au décalage par $-v_p(\det g)$ sur $\mathbf{Z}$, ainsi que d'une donnée de descente à la Weil [20], qui correspond via l'isomorphisme de Drinfeld au composé de la donnée de descente canonique et du décalage par 1. Elle n'est donc pas effective, mais pour tout entier $t>0$, cette donnée de descente sur le quotient $p^{t\mathbf{Z}}\backslash\breve{\mathcal{M}}_0$ de $\breve{\mathcal{M}}_0$ par l'action de l'élément p^t du centre de G devient effective. En prenant $t=1$, on obtient un modèle Σ_0 de $p^{\mathbf{Z}}\backslash\breve{\mathcal{M}}_0$ sur $\mathbf{Q}_p$.

Soit X^{un} le groupe p-divisible rigide universel sur $\breve{\mathcal{M}}_0$. Si $n\geq 1$, on définit

$$\breve{\mathcal{M}}_n = X^{\mathrm{un}}[p^n] - X^{\mathrm{un}}[\varpi_D^{2n-1}].$$

C'est un revêtement étale galoisien de $\breve{\mathcal{M}}_0$ de groupe de Galois $\mathcal{O}_D^*/(1+p^n\mathcal{O}_D)$. Une fois encore, son quotient par l'action de $p^{t\mathbf{Z}}$ descend à $\mathbf{Q}_p$ pour tout $t>0$. Pour $t=1$, cela fournit un modèle Σ_n de $p^{\mathbf{Z}}\backslash\breve{\mathcal{M}}_n$ sur $\mathbf{Q}_p$. Il est muni d'actions à gauche de G et à droite de D^*, qui commutent.

3.2. Quelques rappels sur les espaces Stein. — Nous renvoyons le lecteur à [**44, 45, 52, 64**] pour les preuves des résultats énoncés dans ce paragraphe.

Soit K un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, et soit X un espace rigide Stein sur K. Rappelons que cela veut dire que X admet un recouvrement croissant admissible $(X_n)_{n\geq 0}$ par des ouverts affinoïdes tels que $\mathcal{O}(X_{n+1})\to\mathcal{O}(X_n)$ soit d'image dense pour tout n. Dans ce cas, la flèche naturelle $\mathcal{O}(X)\to\varprojlim_n\mathcal{O}(X_n)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques, ce qui fait que $\mathcal{O}(X)$ est naturellement un K-espace de Fréchet. Le théorème de Kiehl [**52**] montre que les faisceaux cohérents sur X n'ont pas de cohomologie en dégré >0.

Supposons en outre que X est lisse. D'après le théorème de Kiehl mentionné ci-dessus, la cohomologie de de Rham de X se calcule comme la cohomologie du complexe des sections globales du complexe de de Rham de X. De plus, les différentielles $d_X^k:\Omega^k(X)\to\Omega^{k+1}(X)$ sont des morphismes stricts d'image fermée. En particulier, les groupes de cohomologie de de Rham de X sont des espaces de Fréchet (voir [**44**, cor.3.2] pour tout ceci). Si $d=\dim X$, alors $H_c^k(X,\mathcal{F})=0$ pour tout fibré $\mathcal{F}$ sur X et tout $k<d$. On définit alors $H_{\mathrm{dR,c}}^{k+d}(X)$ comme le k-ème groupe de cohomologie du complexe

$$\cdots\to H_c^d(X,\Omega^k)\to H_c^d(X,\Omega^{k+1})\to\dots$$

La dualité de Serre pour les variétés Stein [**12**] montre que ce complexe est dual du complexe des sections globales du complexe de de Rham de X, tordu par $\Omega^d(X)$. Cela permet de montrer [**45**, th. 4.11] que si X est pure de dimension d, alors pour tout k on a des isomorphismes canoniques

$$H_{\mathrm{dR}}^k(X)\simeq H_{\mathrm{dR,c}}^{2d-k}(X)^* \quad \text{et} \quad H_{\mathrm{dR,c}}^k(X) = H_{\mathrm{dR}}^{2d-k}(X)^*,$$

20. Pour mémoire, une donnée de descente à la Weil sur un schéma X sur $\breve{\mathbf{Z}}_p$ est un isomorphisme de schémas $X\to\sigma_*X = X\otimes_{\breve{\mathbf{Z}}_p,\sigma}\breve{\mathbf{Z}}_p$ sur $\breve{\mathbf{Z}}_p$, où σ est le Frobenius.

les duaux étant topologiques (comme toujours dans cet article). La preuve de [**44**, cor.3.2] montre que pour tout i l'espace vectoriel topologique $H^k_{\mathrm{dR}}(X)$ est isomorphe à la limite inverse d'une suite $(V_n)_n$ d'espaces de dimension finie sur K. En particulier $H^k_{\mathrm{dR}}(X)$ est un Fréchet réflexif et son dual topologique $H^{2d-k}_{\mathrm{dR,c}}(X)$ est la limite inductive des V_n^*. On en déduit que $H^k_{\mathrm{dR}}(X)$ est aussi le dual algébrique de $H^{2d-k}_{\mathrm{dR,c}}(X)$. Puisque Ω est un espace Stein [21], il en est de même de Σ_0 et puisque Σ_n est un revêtement étale fini de Σ_0, on obtient la

Proposition 3.1. — *Pour tout $n \geq 0$, l'espace rigide Σ_n est un espace Stein.*

Notons τ_n la composée du morphisme $\Sigma_n \to \Sigma_0$ et de la rétraction de Σ_0 sur l'arbre de Bruhat-Tits, dont on fixe l'origine en le réseau standard et B_i la boule centrée en l'origine de rayon i dans l'arbre. Alors la famille des $U_i = \tau_n^{-1}(B_i)$ (n est sous-entendu dans la notation) forme un recouvrement de Stein de Σ_n. De plus, U_i est stable par l'action de $G_i = 1 + p^i M_2(\mathbf{Z}_p)$ pour tout $i \geq 1$.

3.3. Le caractère localement analytique de $\mathcal{O}(\Sigma_n)^*$. — Soit $n \geq 0$ et $k \in \mathbf{Z}$. On note $\mathcal{O}(k)(\Sigma_n)$ l'espace des fonctions rigides analytiques sur Σ_n, muni de l'action de G

$$g.f = \frac{1}{(a-cz)^k} \cdot (g.f), \quad \text{si} \quad g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$$

où $g.f$ (dans le terme à droite) est l'action naturelle de $g \in G$ sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ déduite de l'action de G sur Σ_n. On a utilisé la structure naturelle de $\mathcal{O}(\Omega)$-module de $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ pour donner un sens à la multiplication par $\frac{1}{(a-cz)^k} \in \mathcal{O}(\Omega)$. Comme Σ_n est Stein, $\mathcal{O}(k)(\Sigma_n)$ est l'espace des sections globales d'un fibré G-équivariant sur Σ_n, noté $\mathcal{O}(k)$.

Notons qu'en tout niveau le faisceau $\mathcal{O}(2) \otimes \det$ est simplement le faisceau des différentielles Ω^1 : on le voit facilement en niveau 0 et en niveau plus grand le faisceau Ω^1 est simplement le tiré en arrière du faisceau Ω^1 en niveau 0, puisque le revêtement est étale.

Théorème 3.2. — *L'action de G sur $\mathcal{O}(k)(\Sigma_n)^*$ est localement analytique, pour tout $k \in \mathbf{Z}$. De manière équivalente, $\mathcal{O}(k)(\Sigma_n)$ est un $D(G)$-module séparément continu pour tout k. En particulier, $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)$ est un $D(G)$-module séparément continu.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ est un $D(G)$-module séparément continu, le reste s'en déduit facilement.

Soit $g_1, ..., g_4$ une famille génératrice minimale de $G_2 = 1 + p^2 M_2(\mathbf{Z}_p)$. Notons pour $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_4) \in \mathbf{N}^4$

$$b^\alpha = (g_1 - 1)^{\alpha_1} ... (g_4 - 1)^{\alpha_4} \in \mathbf{Z}_p[G_2].$$

Les éléments de $D(G_2)$ (l'algèbre de distributions sur G_2 à valeurs dans L) s'écrivent de manière unique

$$\lambda = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^4} a_\alpha b^\alpha$$

avec $a_\alpha \in L$ et $\lim_{\alpha \to \infty} v_p(\alpha) + r|\alpha| = \infty$ pour tout $r > 0$, où $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_4$. On veut montrer que $a_\alpha b^\alpha f$ tend vers 0 dans $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ pour toute telle suite $(a_\alpha)_\alpha$ et tout $f \in \mathcal{O}(\Sigma_n)$. Considérons

21. Voir la discussion suivant la proposition 3.1 pour une explication de ce fait standard.

le recouvrement de Stein $(U_i)_{i\geq 0}$ de Σ_n introduit après la proposition 3.1, chaque U_i étant stable sous l'action de G_i. Comme $\mathcal{O}(\Sigma_n) = \varprojlim_i \mathcal{O}(U_i)$, il suffit de démontrer que pour chaque i fixé $a_\alpha b^\alpha f$ tend vers 0 dans $\mathcal{O}(U_i)$ pour tout $f \in \mathcal{O}(\Sigma_n)$ (noter que $b^\alpha f \in \mathcal{O}(\Sigma_n) \subset \mathcal{O}(U_i)$ pour tout α). Comme

$$D(G_2) = \bigoplus_{g\in G_i\backslash G_2} D(G_i)\delta_g,$$

et $G_i \setminus G_2$ est fini on se ramène (en travaillant séparément avec chaque $\delta_g f = g.f$) à démontrer que $\mathcal{O}(U_i)$ est un $D(G_i)$-module topologique (ce qui a un sens, puisque G_i agit sur U_i).

Soit b_i^α l'analogue de b^α pour G_i (i.e. $b_i^\alpha = (g_{i,1}-1)^{\alpha_1}...(g_{i,4}-1)^{\alpha_4}$, où $g_{i,j}$ forment une famille génératrice minimale de G_i) et soit $D_h(G_i)$ le complété de $D(G_i)$ pour

$$||\lambda := \sum_\alpha a_\alpha b_i^\alpha||_h = \sup_\alpha |a_\alpha| p^{-\frac{|\alpha|}{p^h}}.$$

Nous allons montrer que l'on peut trouver h tel que l'action de G_i sur $\mathcal{O}(U_i)$ s'étende en une structure de $D_h(G_i)$-module topologique, ce qui suffira pour conclure.

Soit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G_i)$ et soit $\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_4$ une base de $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{X}^\alpha = \mathfrak{X}_1{}^{\alpha_1}...X_4^{\alpha_4} \in U(\mathfrak{g})$. D'après un résultat de Frommer [**42**, 1.4, lemma 3, corollaries 1, 2, 3], $D_h(G_i)$ est un module libre de type fini (à gauche et à droite) sur l'adhérence $U_h(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ dans $D_h(G_i)$, et a une base formée d'éléments de $\mathbf{Z}_p[G_i]$. De plus, les éléments de $U_h(\mathfrak{g})$ s'écrivent de manière unique $\lambda = \sum_\alpha a_\alpha \mathfrak{X}^\alpha$, avec $v_p(a_\alpha) - c_h|\alpha| \to \infty$, où $c_h > p^{h-1}$ ne dépend que de h.

Lemme 3.3. — *L'action de G_i sur $\mathcal{O}(U_i)$ est différentiable : pour tout $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$ et $f \in \mathcal{O}(U_i)$ la limite*

$$\mathfrak{X}.f = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{p^n\mathfrak{X}}.f - f}{p^n}$$

existe dans $\mathcal{O}(U_i)$. Cela munit $\mathcal{O}(U_i)$ d'une structure de $\mathfrak{g}$-module, et $f \mapsto \mathfrak{X}.f$ sont des endomorphismes continus du L-Banach $\mathcal{O}(U_i)$ (muni de la norme spectrale).

Démonstration. — Le morphisme étale fini $\Sigma_n \to \Sigma_0$ induit un morphisme étale fini G_i-équivariant $\pi : U_i \to U_{0,i}$, où $U_{0,i}$ est l'analogue de U_i en niveau 0. Le lemme précédent se vérifie sans aucun mal sur $\mathcal{O}(U_{0,i})$, qui est donc muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-module. Notons $\partial_\mathfrak{X}$ la dérivation continue de $\mathcal{O}(U_{0,i})$ attachée à $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$. Comme $\pi : U_i \to U_{0,i}$ est fini étale, cette dérivation s'étend de manière unique en une dérivation continue de $\mathcal{O}(U_i)$, que nous notons encore $\partial_\mathfrak{X}$. Nous allons montrer que pour tout $f \in \mathcal{O}(U_i)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{p^n\mathfrak{X}}.f - f}{p^n} = \partial_\mathfrak{X} f,$$

le lemme s'en déduisant sans mal. Notons $g_n = e^{p^n\mathfrak{X}} \in G_i$, $f_n = g_n.f \in \mathcal{O}(U_i)$, et soit $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + ... + a_0$ le polynôme minimal de f sur $\mathcal{O}(U_{0,i})$. Comme $g_n.P(f_n) = g_n.(P(f)) = 0$, on obtient

$$P(f_n) - P(f) + (g_n.P - P)(f_n) = 0$$

On divise cette relation par p^n et on fait $n \to \infty$, en utilisant le fait que $\lim_{n\to\infty} \frac{g_n.P-P}{p^n} = \partial_\mathfrak{X}(P)$ puisque les a_i sont dans $\mathcal{O}(U_{0,i})$ et $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (cela découle de la continuité de l'action de G_i, qui se déduit grâce au théorème d'Elkik - voir [**73**, lemma 2.3] - de l'énoncé analogue en niveau 0 et du fait que $\Sigma_n \to \Sigma_0$ est un revêtement fini étale). Comme de plus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(f_n)-P(f)}{f_n - f} = P'(f) \neq 0,$$

on en déduit que $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n - f}{p^n}$ existe et

$$P'(f) \lim_{n\to\infty} \frac{f_n - f}{p^n} + \partial_{\mathfrak{X}}(P)f = 0.$$

Mais en appliquant $\partial_{\mathfrak{X}}$ à la relation $P(f) = 0$ on obtient aussi

$$P'(f)\partial_{\mathfrak{X}}(f) + \partial_{\mathfrak{X}}(P)(f) = 0.$$

En comparant les deux formules et en utilisant le fait que $P'(f) \neq 0$ (puisque le revêtement est étale), le résultat s'en déduit. □

Revenons à la preuve du théorème 3.2. on dispose de quatre connexions continues $\partial_{\mathfrak{X}_j}$ sur le Banach $\mathcal{O}(U_i)$. Elles sont toutes C-lipschitziennes pour un certain $C > 0$. Ainsi, la norme de l'opérateur continu $\mathfrak{X}^\alpha$ sur $\mathcal{O}(U_i)$ (déduit de la structure de $U(\mathfrak{g})$-module donnée par le lemme) est majorée par C^α pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^4$. Donc, si $p^{h/2} > C$, alors $\sum_\alpha a_\alpha \mathfrak{X}^\alpha$ converge faiblement dans $\mathcal{O}(U_i)$, ce qui permet de conclure que pour h assez grand $D_h(G_i)$ agit continument sur $\mathcal{O}(U_i)$. Cela permet de conclure. □

Remarque 3.4. — Le même argument s'applique aux revêtements du demi-espace de Drinfeld en toute dimension, en utilisant [**69**], Prop. 1.

3.4. Numérologie et lissité de $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)$.
— Rappelons que l'on utilise la base

$$a^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad a^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad u^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Soit z "la" coordonnée sur Ω. La trivialisation $\Omega^1(\Sigma_n) = \mathcal{O}(\Sigma_n)dz$ induit une application

$$\frac{d}{dz} : \mathcal{O}(\Sigma_n) \to \mathcal{O}(\Sigma_n), \quad df = \frac{df}{dz}dz \quad \forall f \in \mathcal{O}(\Sigma_n).$$

L'énoncé peu appétissant suivant sera utilisé très souvent dans la suite.

Lemme 3.5. — *Soit $\partial : \mathcal{O}(\Sigma_n) \to \mathcal{O}(\Sigma_n)$ l'opérateur*[22] *de multiplication par z. On a les formules suivantes pour l'action de l'algèbre de Lie :*

a) Sur $\mathcal{O}(k)(\Sigma_n)$

$$a^+ = u^+\partial + 1 - k, \quad a^- = -\partial u^+, \quad u^- = -\partial^2 u^+ + k\partial.$$

b) Sur $\mathcal{O}(k)(\Sigma_n)^*$

$$a^+ = \partial u^+ + k - 1, \quad a^- = -u^+\partial, \quad u^- = -k\partial - u^+\partial^2.$$

c) Sur $\Omega^1(\Sigma_n)^*$

$$a^+ = \partial u^+, \quad a^- = -\partial u^+, \quad u^- = -\partial^2 u^+.$$

22. Le lecteur trouvera certainement étrange d'appeler cet opérateur ∂. Nous verrons plus loin qu'il est relié à une connexion ∂ sur les (φ, Γ)-modules.

De plus, on a $\partial u^+ - u^+\partial = 1$ *sur tous ces espaces, et* $u^+ = -\frac{d}{dz}$ *sur* $\mathcal{O}(\Sigma_n)$.

Démonstration. — L'égalité $\partial u^+ - u^+\partial = 1$ est immédiate, car u^+ est une connexion telle que $u^+(z) = -1$. Le b) découle directement de a) (ne pas oublier que $\langle Xl, v\rangle = -\langle l, Xv\rangle$, si $X \in \mathfrak{gl}_2$, $l \in \mathcal{O}(k)(\Sigma_n)^*$ et $v \in \mathcal{O}(k)(\Sigma_n)$). Le c) découle de b), du fait que $\Omega^1(\Sigma_n)^* \simeq \mathcal{O}(2)(\Sigma_n)^* \otimes \det^{-1}$ et de l'égalité $2\partial + u^+\partial^2 = \partial^2 u^+$ (appliquer deux fois l'identité $\partial u^+ - u^+\partial = 1$).

Il reste donc à démontrer le a), et il suffit de le faire pour $k = 0$. Si $n = 0$, il s'agit d'un exercice amusant [(23)] laissé au lecteur. Dans le cas général, on utilise le fait que Σ_n est un revêtement étale de Σ_0. Toutes les égalités ci-dessus sont des égalités entre des dérivations continues sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)$, qui sont valides sur $\mathcal{O}(\Sigma_0)$; elles sont donc valables sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ tout entier. L'égalité $u^+ = -\frac{d}{dz}$ sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ se démontre de la même manière. □

Une conséquence facile du lemme précédent est la proposition suivante. Nous remercions Pierre Colmez pour l'argument simple et élégant ci-dessous.

Proposition 3.6. — *La G-représentation* $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)$ *est lisse.*

Démonstration. — Puisque $u^+ = -\frac{d}{dz}$ sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ et que $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)$ est le dual de $\Omega^1(\Sigma_n)/d(\mathcal{O}(\Sigma_n))$, on voit qu'il suffit de montrer la lissité de $(\Omega^1(\Sigma_n)^*)^{u^+=0}$. Mais $\Omega^1(\Sigma_n)^*$ est une G-représentation localement analytique (théorème 3.2) et le point c) du lemme précédent montre que tout élément de $\Omega^1(\Sigma_n)^*$ tué par u^+ est en fait tué par $\mathfrak{gl}_2$, et donc il est lisse. Cela permet de conclure. □

4. Uniformisation p-adique et cohomologie de de Rham

On fixe dans la suite un entier n tel que $\rho = \mathrm{JL}(\pi)$ se factorise par $D^*/(1 + p^n\mathcal{O}_D)$. Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant. Sa démonstration devrait s'adapter assez facilement à d'autres situations.

Théorème 4.1. — *On a*

$$\dim_L \mathrm{Hom}_G(H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^\vee}, \pi) = 2.$$

De manière équivalente,

$$\dim_L \mathrm{Hom}_G(\pi^*, H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^{\rho}) = 2.$$

La preuve de ce résultat se fait par voie globale : elle utilise le théorème d'uniformisation de Cerednik-Drinfeld des courbes de Shimura par les revêtements de Drinfeld et est directement inspirée du calcul de la cohomologie ℓ-adique de certains espaces de Rapoport-Zink par Harris [**47**] et Fargues [**36**]. Nous allons voir plus loin que l'on a en fait un isomorphisme [(24)]

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^{\rho} \simeq \pi^* \oplus \pi^*,$$

23. ou pas... Se rappeler que l'action de G sur $\mathcal{O}(\Omega)$ est donnée par

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) f\right)(z) = f\left(\frac{dz - b}{a - cz}\right).$$

24. On en construira en fait un raisonnablement canonique.

mais cela demande plus de travail : l'argument global utilisé permet de démontrer facilement qu'il n'y a pas d'autre représentation de la série discrète (ainsi que beaucoup de séries principales) parmi les sous-quotients de $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^\vee}$, mais il ne semble pas facile d'exclure la présence de n'importe quelle série principale avec ce genre d'argument (dans le cas ℓ-adique, ce genre de difficulté est contourné en utilisant l'isomorphisme de Faltings-Fargues [**34, 35**] ; cela semble plus délicat dans notre situation).

Remarque 4.2. — a) La cohomologie de de Rham de Ω vue comme représentation de G (même en dimension quelconque) a été calculée par Schneider et Stuhler [**64**]. Leur preuve ne s'adapte pas en niveau supérieur, mais a la vertu de ne pas faire appel à la théorie automorphe.

b) Pour le revêtement de la tour de Drinfeld de niveau $1+\varpi_D\mathcal{O}_D$, le calcul de la cohomologie de de Rham est nettement plus simple grâce à l'existence d'un modèle formel explicite [**75**]. En particulier, pour ce revêtement le théorème précédent admet une preuve purement locale, qui fournit d'ailleurs un isomorphisme $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho \simeq \pi^*\oplus\pi^*$.

4.1. Formes modulaires quaternioniques classiques et p-adiques. — Soit $\bar{B}$ une algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}$, non ramifiée en p et ramifiée à l'infini. On regarde $\bar{B}^*$ comme un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$ (donc $\bar{B}^*(R)=(R\otimes_{\mathbf{Q}}\bar{B})^*$ pour toute $\mathbf{Q}$-algèbre R). On fixe une identification $\bar{B}^*(\mathbf{Q}_p)\simeq G$, ainsi qu'un sous-groupe ouvert compact K^p de $\bar{B}^*(\mathbf{A}_f^p)$. On suppose que $K^p=\prod_{\ell\neq p}K_\ell$, où K_ℓ est un sous-groupe ouvert compact de $\bar{B}^*(\mathbf{Q}_\ell)$, et on suppose qu'il existe au moins un premier ℓ_0 tel que K_{ℓ_0} soit sans torsion.

Définition 4.3. — On note

$$X=X(K^p)=\bar{B}^*(\mathbf{Q})\backslash\bar{B}^*(\mathbf{A}_f)/K^p$$

et, si K_p est un sous-groupe ouvert compact de G, on note

$$X(K_p)=\bar{B}^*(\mathbf{Q})\backslash\bar{B}^*(\mathbf{A}_f)/K^pK_p.$$

L'espace X est la limite projective des ensembles finis $X(K_p)$. Il est muni d'une action naturelle (à droite) de G. L'espace $\mathcal{C}^0(X)$ est l'espace des formes automorphes p-adiques pour le groupe $\bar{B}^*$. On va voir tout de suite que c'est un espace vectoriel topologique tout à fait raisonnable. Le résultat suivant est standard et nous laissons sa preuve au lecteur.

Lemme 4.4. — *L'ensemble $\bar{B}^*(\mathbf{Q})\backslash\bar{B}^*(\mathbf{A}_f^p)/K^p$ est fini. Ecrivons*

$$\bar{B}^*(\mathbf{A}_f^p)/K^p=\coprod_{i=1}^r\bar{B}^*(\mathbf{Q})y_i,$$

et notons Γ_i le stabilisateur de y_i dans $\bar{B}^*(\mathbf{Q})$, vu comme un sous-groupe de $G\simeq\bar{B}^*(\mathbf{Q}_p)$. Alors Γ_i est discret cocompact dans G et on a un isomorphisme de G-modules topologiques

$$X=\coprod_{i=1}^r\Gamma_i\backslash G.$$

En particulier X est une variété analytique p-adique compacte et l'action de G y est localement analytique.

Venons-en maintenant au lien avec les formes automorphes classiques (l'argument est tout à fait similaire à celui de [**74**, § 1]). Rappelons que $\mathrm{Alg}(G)$ désigne l'ensemble des (classes d'isomorphisme de) L-représentations algébriques irréductibles de G. Fixons $W \in \mathrm{Alg}(G)$ et notons $\mathcal{A}_{K_p}(W)$ l'espace des fonctions continues $f : X \to W$ telles que $f(xk) = k^{-1}.f(x)$ pour tous $x \in X$ et $k \in K_p$ (on peut y penser comme l'espace des formes automorphes p-adiques de poids W et de niveau $K^p K_p$).

Lemme 4.5. — *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{K_p}(W^*, \mathcal{C}^0(X)) \simeq \mathcal{A}_{K_p}(W).$$

Démonstration. — On a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_{K_p}(W^*, \mathcal{C}^0(X)) \simeq ((W^*)^* \otimes_L \mathcal{C}^0(X))^{K_p} \simeq (W \otimes_L \mathcal{C}^0(X))^{K_p} \simeq \mathcal{C}^0(X, W)^{K_p}.$$

En suivant les actions de K_p, on voit que le dernier espace est précisément $\mathcal{A}_{K_p}(W)$, ce qui permet de conclure (notons que l'inverse de cet isomorphisme envoie simplement $f \in \mathcal{A}_{K_p}(W)$ sur $\phi_f \in \mathrm{Hom}_{K_p}(W^*, \mathcal{C}^0(X))$ défini par $\phi_f(l)(x) = l(f(x))$ si $l \in W^*$ et $x \in X$). □

Fixons une fois pour toutes un isomorphisme $\iota : \overline{\mathbf{Q}_p} \simeq \mathbf{C}$, ce qui induit un plongement $L \to \mathbf{C}$ (en se rappelant que l'on a fixé un plongement de L dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$). Alors $W_\infty = W \otimes_L \mathbf{C}$ devient, via l'isomorphisme ι, une $\mathbf{C}$-représentation de $\bar{B}^*(\mathbf{C})$, et donc de $\bar{B}^*(\mathbf{R})$ aussi.

On note $\mathrm{Aut}(K^p K_p)$ l'espace des fonctions lisses à valeurs complexes sur $\bar{B}^* \backslash \bar{B}^*(\mathbf{A})/K_p K^p$ (ce sont les formes automorphes classiques de $\bar{B}^*(\mathbf{A})$, de niveau $K^p K_p$). Cet espace admet une action naturelle de $\bar{B}^*(\mathbf{R})$, via l'action à droite de ce groupe sur $\bar{B}^* \backslash \bar{B}^*(\mathbf{A})/K_p K^p$.

Lemme 4.6. — *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{A}_{K_p}(W) \otimes_{L,\iota} \mathbf{C} \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{B}^*(\mathbf{R})}(W_\infty^*, \mathrm{Aut}(K^p K_p)).$$

Démonstration. — Nous allons nous contenter de décrire la flèche en question. Si $f \in \mathcal{A}_{K_p}(W)$, on l'envoie sur $\phi_f \in \mathrm{Hom}_{\bar{B}^*(\mathbf{R})}(W_\infty^*, \mathrm{Aut}(K^p K_p))$ défini par

$$\phi_f(l)(g) = l(g_\infty^{-1} \cdot (g_p . f(g^\infty) \otimes 1)),$$

si $g = (g_q)_q = g_\infty \cdot g^\infty \in \bar{B}^*(\mathbf{A})$ et $l \in W_\infty^*$. Un exercice standard montre que $f \mapsto \phi_f$ est un isomorphisme. □

Observons maintenant que l'on a une action de $\mathbf{A}_f^*/\mathbf{Q}^*$ sur X et, donc aussi sur les espaces $\mathcal{C}^0(X)$ et $\mathcal{A}_{K_p}(W)$. Si M est un espace muni d'une action d'un groupe H et si ψ est un caractère de H, on note $M[\psi]$ le sous-espace de M sur lequel H agit par ψ. L'isomorphisme construit dans la preuve du lemme 4.5 induit alors des isomorphismes $\mathrm{Hom}_{K_p}(W^*, \mathcal{C}^0(X)[\psi]) \simeq \mathcal{A}_{K_p}(W)[\psi]$ pour tout caractère $\psi : \mathbf{A}_f^*/\mathbf{Q}^* \to L^*$. De même, on a une action de $\mathbf{A}_f^*/\mathbf{Q}^*$ sur $\mathrm{Hom}_{\bar{B}^*(\mathbf{R})}(W_\infty^*, \mathrm{Aut}(K^p K_p))$, et l'isomorphisme construit dans la preuve du lemme 4.6 commute à cette action.

La discussion précédente entraîne alors directement le résultat suivant (il suffit de remplacer W par W^* dans ce qui précède).

Lemme 4.7. — *Soit $W \in \mathrm{Alg}(G)$ de caractère central ω_W. Soit $\psi : \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to L^*$ un caractère continu tel que $\psi = \omega_W$ sur un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Q}_p^*$. Posons* [25]

$$\psi_\iota : \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to \mathbf{C}^*, \quad \psi_\iota(x) = \iota(\omega_W^{-1}(x_p)\psi(x^\infty))\omega_W(x_\infty).$$

On a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{K_p}(W, \mathcal{C}^0(X)[\psi]) \otimes_{L,\iota} \mathbf{C} \simeq \bigoplus_\pi \pi_f^{K_p K^p},$$

la somme directe portant sur les représentations automorphes $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ de $\bar{B}^*(\mathbf{A})$ de caractère central ψ_ι et telles que $\pi_\infty \simeq W_\infty$. Ainsi,

$$\mathcal{C}^0(X)[\psi]_{K_p-alg} \otimes_{L,\iota} \mathbf{C} \simeq \bigoplus_{W \in \mathrm{Alg}(G)} \bigoplus_\pi W_\infty \otimes \pi_f^{K_p K^p}.$$

Rappelons que si B est une algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}$, dont on note $S(B)$ l'ensemble (fini) des places de ramification, la correspondance de Jacquet-Langlands globale met en bijection naturelle $\pi \mapsto \pi'$ les représentations automorphes (de dimension infinie) sur $B^*(\mathbf{A})$ et les représentations automorphes sur $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ telles que π'_v est dans la série discrète pour toute place $v \in S(B)$.

4.2. La π-partie de la cohomologie de de Rham à supports de Σ_n. — Soit B une algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}$, ramifiée à l'infini et de discriminant $p\ell$, où ℓ est un nombre premier différent de p fixé [26]. Fixons un sous-groupe compact ouvert $K = K_p.K^p$ de $B^*(\mathbf{A}_f)$, avec $K_p = 1+p^n\mathcal{O}_D$. A ces données correspond une courbe de Shimura Sh_K sur $\mathbf{Q}$, classifiant des surfaces abéliennes avec action de $\mathcal{O}_B$ et structure de niveau K. Les $\mathbf{C}$-points de cette courbe sont donnés par

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbf{C}) = B^*(\mathbf{Q})\backslash(X \times B^*(\mathbf{A}_f))/K,$$

où $B^*(\mathbf{Q})$ agit sur $X = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ via le plongement $B^*(\mathbf{Q}) \to B^*(\mathbf{R}) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ et l'action naturelle de ce dernier groupe sur X.

Nous allons voir dans la suite Sh_K comme une courbe sur $\mathbf{Q}_p$, i.e. nous allons écrire Sh_K au lieu de $\mathrm{Sh}_K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p$. Le théorème d'uniformisation s'énonce alors ainsi [27] (pour une démonstration, cf. [**5**, Theorem 3.1]).

***Théorème 4.8* (Cerednik-Drinfeld).** — *Si K^p est suffisamment petit, il existe un isomorphisme d'espaces analytiques rigides sur $\breve{\mathbf{Q}}_p$, compatible avec les données de descente à la Weil*

$$\bar{B}^*(\mathbf{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}}_n \times \bar{B}^*(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right) \simeq (\mathrm{Sh}_K \otimes_{\mathbf{Q}_p} \breve{\mathbf{Q}}_p)^{\mathrm{an}},$$

où $\bar{B}$ désigne l'algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}$ isomorphe à B hors de $\{p, \infty\}$, non ramifiée en p et ramifiée en ∞.

25. Notons que $\omega_W(x) = x^k$ pour un certain entier k, donc $\omega_W(x_\infty)$ a un sens.
26. Ceci simplement pour fixer les idées et appliquer tels quels les résultats du paragraphe 5.1.
27. Rappelons que $\breve{\mathcal{M}}_n$ est l'espace de Rapoport-Zink de niveau $1+p^n\mathcal{O}_D$ attaché à un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial sur $\overline{\mathbf{F}_p}$, cf. l'introduction.

On se place maintenant dans le cadre de la partie 4.1, et on utilise les notations du lemme 4.4 (avec un sous-groupe $K^p \subset \bar{B}^*(\mathbf{A}_f^p)$ suffisamment petit). Le choix des y_i induit un isomorphisme

$$\coprod_{i=1}^{r} \Gamma_i \backslash \breve{\mathcal{M}}_n \simeq \bar{B}^*(\mathbf{Q}) \backslash \left(\breve{\mathcal{M}}_n \times \bar{B}^*(\mathbf{A}_f^p)/K^p \right),$$

Soit N tel que $p^N \in \Gamma_i$ pour tout i, soit $\breve{\mathcal{M}}_{n,N} = p^{N\mathbf{Z}} \backslash \breve{\mathcal{M}}_n$ et soit $\Sigma_{n,N}$ la descente à $\mathbf{Q}_p$ de $p^{N\mathbf{Z}} \backslash \breve{\mathcal{M}}_n$, via la donnée de descente à la Weil. La suite exacte de Hochschild-Serre ([**64**, par. 5]) pour le revêtement galoisien $\breve{\mathcal{M}}_{n,N} \to \Gamma_i \backslash \breve{\mathcal{M}}_{n,N}$ et la compatibilité de l'isomorphisme de Cerednik-Drinfeld avec la donnée de descente à la Weil fournissent une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \prod_{i=1}^{r} H^p(\Gamma_i, H^q_{\mathrm{dR}}(\Sigma_{n,N})) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_K).$$

Puisque $H^k_{\mathrm{dR}}(\Sigma_{n,N})$ est le dual algébrique de $H^{2-k}_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_{n,N})$, la suite spectrale précédente se réécrit

$$E_2^{p,q} = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Ext}^p_{\Gamma_i}(H^{2-q}_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_{n,N}), 1) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_K).$$

Le groupe Γ_i étant discret et les G-représentations $H^{2-q}_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_{n,N})$ étant lisses (cela est trivial si $q = 0$ ou $q = 2$, et découle de la proposition 3.6 si $q = 1$), la réciprocité de Frobenius (lisse) permet d'écrire

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{Ext}^p_{\Gamma_i}(H^{2-q}_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_{n,N}), 1) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Ext}^p_{G}(H^{2-q}_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_{n,N}), \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{G} 1).$$

Enfin, en remarquant que par définition

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{G} 1 = \mathrm{LC}(X(K^p)),$$

on obtient une suite spectrale

$$E_2^{p,q}(K^p) = \mathrm{Ext}^p_{G}(H^{2-q}_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_{n,N}), \mathrm{LC}(X(K^p))) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_K).$$

On vérifie que cette suite spectrale ne dépend pas du choix des représentants y_i ([**36**, prop. 4.3.11]). Le groupe D^* agit sur les groupes $E_2^{p,q}(K^p)$ ainsi que sur l'aboutissement de la suite spectrale, puisque le sous-groupe $1 + p^n\mathcal{O}_D$ est distingué dans D^* et la suite spectrale est D^*-équivariante et $\bar{B}^*(\mathbf{A}_f^p)$-équivariante (cela se vérifie comme dans [**36**, lemme 4.3.13-4.3.14]).

Regardons maintenant la composante ρ-isotypique de la suite spectrale obtenue. Notons que $H^k_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_{n,N})^{\rho^\vee} = H^k_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^\vee}$ puisque le caractère central de ρ est trivial. Comme ρ est non triviale, $H^k_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_{n,N})^{\rho^\vee}$ est nul sauf pour $k = 1$. La suite spectrale dégénère donc trivialement et donne un isomorphisme $\bar{B}^*(\mathbf{A}_f^p)$-équivariant :

$$\mathrm{Hom}_G(H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^\vee}, \mathrm{LC}(X(K^p))) \simeq H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_K)^{\rho}. \tag{2}$$

Cet isomorphisme est compatible au changement de niveau K^p, et on obtient ainsi un isomorphisme

$$\varinjlim_{K^p} \mathrm{Hom}_G(H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^\vee}, \mathrm{LC}(X(K^p))) \simeq \varinjlim_{K^p} H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_K)^{\rho}. \tag{3}$$

Du théorème 5.5, on déduit (28) en particulier l'existence d'une forme modulaire quaternionique f de poids 2 pour le groupe $\bar{B}^*$, telle que si $\pi(f)$ est la représentation automorphe de $\bar{B}^*(\mathbf{A})$, $\pi(f)_p = \pi$. Rappelons que $B^*(\mathbf{A}_f^p) \simeq \bar{B}^*(\mathbf{A}_f^p)$ et que l'on peut donc voir $\pi(f)^p$ alternativement comme une représentation de l'un ou l'autre groupe. On a alors d'une part (en utilisant le lemme 4.7 pour W triviale)

$$\varinjlim_{K^p} \mathrm{LC}(X(K^p))[\pi(f)^p] \simeq \pi$$

et (en utilisant des théorèmes de comparaison standard)

$$\varinjlim_{K^p} H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_K)[\pi(f)^p] \simeq E \otimes \rho,$$

où E est de dimension 2. La composante $\pi(f)^p$-isotypique de l'égalité (3) s'écrit donc

$$\mathrm{Hom}_G(H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^\vee}, \pi) = E.$$

On en déduit le théorème 4.1.

5. Construction d'un morphisme G-équivariant

L'objectif de cette section est la preuve du théorème suivant :

Théorème 5.1. — *Il existe* $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$ *et un morphisme G-équivariant continu non nul*

$$\Phi : (\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}})^* \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho.$$

Nous verrons plus tard que le terme de gauche ne dépend pas du choix de $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$, que Φ est automatiquement un isomorphisme et qu'il est unique à scalaire près, mais cela coûtera nettement plus cher. Tout comme le calcul de la cohomologie de de Rham dans le paragraphe précédent, l'argument repose sur le théorème d'uniformisation p-adique et un ingrédient global, mais contrairement au chapitre précédent (qui s'applique tel quel à toute extension finie de $\mathbf{Q}_p$), le résultat de compatibilité local-global 5.4, dû à Emerton, est pour l'instant connu uniquement pour G.

5.1. Compatibilité local-global (d'après Emerton). — Nous rappelons dans ce paragraphe un résultat de compatibilité local-global pour l'algèbre de quaternions $\bar{B}$. Comme celle-ci est *déployée* en p, il suffit de copier l'argument d'Emerton [**31**]. Aucune idée nouvelle n'est donc requise. Cependant, comme les arguments n'ont jamais été écrits *stricto sensu* pour ces algèbres de quaternions, et comme ce contexte permet pas mal de simplifications, nous avons choisi de les rédiger, pour la commodité du lecteur, dans un appendice.

Nous allons nous placer encore une fois dans le contexte de la section 4.1 et utiliser les notations introduites dans cette section. On fixe un ensemble fini $\Sigma = \Sigma(K^p)$ de nombres premiers contenant p et les places où $K^p = \prod_{\ell \neq p} K_\ell$ est ramifié. Si $\ell \notin \Sigma$, on note $\mathcal{H}(K_\ell \backslash \bar{B}(\mathbf{Q}_\ell)/K_\ell, \mathcal{O}_L)$ l'algèbre

28. Notons que pour le calcul de la cohomologie de de Rham, on a besoin d'un énoncé bien plus faible que le théorème 5.5, puisqu'on n'a besoin d'aucune condition sur la représentation résiduelle. Comme π est supercuspidale, il suffirait, pour $p > 2$, de choisir pour f une forme donnée par l'induite automorphe d'un caractère de Hecke d'un corps quadratique imaginaire.

de Hecke sphérique correspondante. Cette algèbre est isomorphe à $\mathcal{O}_L[T_\ell, S_\ell^{\pm 1}]$ (T_ℓ resp. S_ℓ étant la fonction caractéristique de $K_\ell \left(\begin{smallmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) K_\ell$ (resp. $K_\ell \left(\begin{smallmatrix} \ell & 0 \\ 0 & \ell \end{smallmatrix}\right) K_\ell$)) et agit par des opérateurs continus sur $\mathcal{C}^0(X(K_p), M)$ et $\mathcal{C}^0(X, M)$ pour tout $\mathcal{O}_L$-module topologique M et tout sous-groupe ouvert compact K_p de G. On note

$$\mathbf{T}_\Sigma := \otimes'_{\ell \notin \Sigma} \mathcal{H}(K_\ell \backslash \bar{B}(\mathbf{Q}_\ell)/K_\ell, \mathcal{O}_L)$$

et, si K_p est un sous-groupe ouvert compact de $\bar{B}^*(\mathbf{Q}_p)$, on note $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma(K_p)$ l'image de $\mathbf{T}_\Sigma$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{C}^0(X(K_p), \mathcal{O}_L))$. Enfin,

$$\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma = \varprojlim_{K_p} \tilde{\mathbf{T}}_\Sigma(K_p)$$

désigne l'adhérence faible de l'image de $\mathbf{T}_\Sigma$ dans $\mathrm{End}^{\mathrm{cont}}_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{C}^0(X, \mathcal{O}_L))$. L'algèbre $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma(K_p)$ est une $\mathcal{O}_L$-algèbre commutative libre de type fini. L'algèbre $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma$ est une $\mathcal{O}_L$-algèbre compacte, réduite, commutative (tous ces résultats sont standard).

Définition 5.2. — a) Soit $\phi : \tilde{\mathbf{T}}_\Sigma \to R$ un morphisme continu d'anneaux topologiques. Une représentation continue $r : G_{\mathbf{Q},\Sigma} \to \mathrm{GL}_2(R)$ est *associée à* ϕ si

$$\det(X - r(\mathrm{Frob}_\ell)) = X^2 - \phi(T_\ell)X + \ell\phi(S_\ell) \in R[X], \quad \forall \ell \notin \Sigma.$$

b) Une représentation continue $\bar{r} : G_{\mathbf{Q},\Sigma} \to GL_2(k_L)$ est dite *modulaire* (de niveau modéré K^p) si elle est associée à la projection canonique $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma \to \tilde{\mathbf{T}}_\Sigma/\mathfrak{m}$ pour un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma$, de corps résiduel k_L.

Fixons désormais une représentation modulaire $\bar{r} : G_{\mathbf{Q},\Sigma} \to GL_2(k_L)$ (de niveau modéré K^p) et notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal correspondant de $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma$. On fait l'hypothèse suivante, qui simplifie considérablement les arguments :

Hypothèse. *La représentation $\bar{r}_{|\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ est absolument irréductible.*

Définition 5.3. — On note A le complété $\mathfrak{m}$-adique de $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma$. C'est une $\mathcal{O}_L$-algèbre plate, locale, noethérienne, réduite de corps résiduel k_L, facteur direct de $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma$. Si M est un $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma$-module, on note $M_m = A \otimes_{\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma} M$. Ainsi, M_m est facteur direct de M.

Comme l'hypothèse ci-dessus implique en particulier que $\bar{r}$ est irréductible, il existe, d'après un théorème de Carayol ([**10**, th. 3]), pour tout K_p suffisamment petit une unique représentation continue

$$r^{\mathfrak{m}}(K_p) : G_{\mathbf{Q},\Sigma} \to GL_2(\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma(K_p)_{\mathfrak{m}})$$

associée au morphisme canonique $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma \to \tilde{\mathbf{T}}_\Sigma(K_p)_{\mathfrak{m}}$. La représentation

$$r^{\mathfrak{m}} = \varprojlim r^{\mathfrak{m}}(K_p)$$

est alors associée au morphisme canonique $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma \to A$ et $\overline{r^{\mathfrak{m}}} = \bar{r}$.

Notons $\mathrm{MaxSpec}(A[1/p])$ l'ensemble des idéaux maximaux de $A[1/p]$. Puisque $A[1/p]$ est un anneau de Jacobson, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{MaxSpec}(A[1/p])$ le corps résiduel $k(\mathfrak{p})$ de $\mathfrak{p}$ est une extension finie de L et l'image du morphisme canonique $A \to k(\mathfrak{p})$ est contenue dans l'anneau des entiers de $k(\mathfrak{p})$. Soit $r(\mathfrak{p}) : G_{\mathbf{Q},\Sigma} \to GL_2(k(\mathfrak{p}))$ la spécialisation de $r^{\mathfrak{m}}$ via $A[1/p] \to k(\mathfrak{p})$, et soit $\Pi(\mathfrak{p})$ la représentation de Banach unitaire de G attachée à $r(\mathfrak{p})$ via la correspondance de Langlands locale p-adique pour G. Le résultat de compatibilité local-global dont nous aurons besoin est alors [29]

Théorème 5.4. — *Pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $A[1/p]$, on a un isomorphisme de représentations de G :*

$$\mathcal{C}^0(X)[\mathfrak{p}] \simeq \Pi(\mathfrak{p})^{\oplus r},$$

pour un certain entier $r > 0$.

Démonstration. — Voir l'appendice. □

Le théorème suivant, dont la preuve est aussi adaptée d'un argument d'Emerton [**31**], nous permettra d'appliquer la théorie globale dans notre situation.

Théorème 5.5. — *Il existe une forme modulaire quaternionique f de poids 2 pour le groupe $\bar{B}^*$, telle que si $\pi(f)$ est la représentation automorphe correspondante de $\bar{B}^*(\mathbf{A})$, $\pi(f)_p = \pi \otimes \xi \circ \det$, où ξ est un caractère non ramifié, et telle que $\overline{r}_f : \mathcal{G}_{\mathbf{Q}} \to GL_2(\overline{\mathbf{F}_p})$ soit absolument irréductible en restriction à $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$.*

Démonstration. — Soit σ un $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$-type minimal de π. Choisissons un réseau σ_0 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$-stable dans σ, et notons $\overline{\sigma_0} = \sigma_0 \otimes_{\mathcal{O}_L} k_L$. Fixons un poids de Serre $W \in \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}(\overline{\sigma_0})$.

Lemme 5.6. — *Il existe une forme modulaire quaternionique g pour $\bar{B}^*$ telle que si $r : \mathcal{G}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}_2(L)$ est la représentation galoisienne associée à g, alors :*

a) La restriction $\overline{r}_p := \overline{r}|_{\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ de la réduction (modulo p) $\overline{r} : \mathcal{G}_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ est absolument irréductible, et

b) Si $\overline{\pi}$ est la représentation lisse de G correspondant à $\overline{r}_p$ par Langlands local modulo p, alors $W \in \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}(\overline{\pi})$.

Démonstration. — On peut supposer $W = \mathrm{Sym}^r \mathbf{F}_p^2$ pour un certain $0 \leq r \leq p-1$. La description explicite de la correspondance de Langlands locale modulo p montre qu'il suffit d'imposer que $\overline{r}_p = \mathrm{Ind}_{\mathbf{Q}_{p^2}}^{\mathbf{Q}_p} \omega_2^{r+1}$, à twist par un caractère non ramifié près. Donc il suffit de trouver $\overline{r}$ modulaire telle que $\overline{r}_p$ soit cette induite. Soit F un corps quadratique imaginaire avec p et ℓ inertes dans F. Soit χ un caractère de Hecke χ de F tel que $\overline{\eta_p} = \omega_2^{r+1}$, $\chi_\infty(z) = z^{-1}$ et χ_ℓ choisi de sorte que l'induite automorphe locale (pour le groupe GL_2) $\mathrm{Ind}_{F_\ell}^{\mathbf{Q}_\ell} \chi_\ell$ soit supercuspidale. La théorie de Hecke dit alors que l'induite automorphe globale de χ est la représentation automorphe associée à une forme modulaire de poids 2, qui se transfère (grâce à la correspondance de Jacquet-Langlands globale) en une forme quaternionique pour notre algèbre de quaternions $\bar{B}$. Cette forme satisfait aux conditions imposées. □

Soit g une forme comme dans le lemme précédent, choisissons un ensemble Σ suffisamment grand et notons $\mathfrak{m}$ l'idéal de l'algèbre de Hecke $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma$ correspondant à $\overline{r}$. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $A[1/p]$

29. Nous rappelons qu'il est entièrement dû à Emerton.

associé à r. Le théorème 5.4 [30] fournit un plongement $\Pi(\mathfrak{p}) \to \mathcal{C}^0(X(K^p))[\mathfrak{p}]$, et donc en réduisant mod p, on en déduit que $\overline{\pi} = \overline{\Pi(\mathfrak{p})}$ se plonge dans $\mathcal{C}^0(X(K^p), k_L)[\mathfrak{m}]$. En particulier,

$$\mathrm{Hom}_{GL_2(\mathbf{Z}_p)}(W, \mathcal{C}^0(X(K^p), k_L)_{\mathfrak{m}}) \neq 0,$$

De plus, le foncteur $\mathrm{Hom}_{GL_2(\mathbf{Z}_p)}(\cdot, \mathcal{C}^0(X(K^p), \mathcal{O}_L/\pi_L^n)_{\mathfrak{m}})$ est exact pour tout $n \geq 1$ (lemme 6.3). On en déduit dans un premier temps (en prenant $n = 1$) que

$$\mathrm{Hom}_{GL_2(\mathbf{Z}_p)}(\overline{\sigma_0}, \mathcal{C}^0(X(K^p), k_L)_{\mathfrak{m}}) \neq 0$$

puis, par récurrence sur n et en passant à la limite projective que

$$\mathrm{Hom}_{GL_2(\mathbf{Z}_p)}(\sigma_0, \mathcal{C}^0(X(K^p), \mathcal{O}_L)_{\mathfrak{m}}) \neq 0.$$

Ensuite, comme σ est lisse, on a

$$\mathrm{Hom}_{GL_2(\mathbf{Z}_p)}(\sigma_0, \mathcal{C}^0(X(K^p), \mathcal{O}_L)_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{Hom}_{GL_2(\mathbf{Z}_p)}(\sigma_0, \mathrm{LC}(X(K^p), \mathcal{O}_L)_{\mathfrak{m}})$$

et ce L-espace vectoriel est de dimension finie. Il existe donc un idéal maximal $\mathfrak{p}_1$ de $\mathbf{T}_{\mathfrak{m}}[1/p]$ tel que

$$\mathrm{Hom}_{GL_2(\mathbf{Z}_p)}(\sigma_0, \mathrm{LC}(X(K^p), \mathcal{O}_L)_{\mathfrak{m}}[\mathfrak{p}_1]) \neq 0.$$

L'idéal $\mathfrak{p}_1$ correspond à une forme modulaire f pour $\bar{B}^*$ et le membre de droite est $\pi(f)^{K^p}$. La non annulation obtenue nous dit donc que σ se plonge dans $\pi(f)_p$ et donc ([**49**]) que $\pi(f)_p \simeq \pi \otimes \xi \circ \det$, avec ξ un caractère non ramifié. La propriété de r_f découle du choix de $\mathfrak{p}_1$. □

5.2. Nouvelle application du théorème d'uniformisation p-adique. — Le but de cette partie est d'expliquer la preuve du résultat suivant, qui est une réformulation très simple, modulo quelques précautions topologiques, mais bien pratique, du théorème de Cerednik-Drinfeld. On écrira Hom_G au lieu de $\mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}$ dans la suite. Nous renvoyons le lecteur aux sections 4.1 et 4.2 pour les objets apparaissant dans l'énoncé suivant.

Théorème 5.7. — *On a un isomorphisme de modules de Hecke*

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{LA}(X(K^p))^*, \Omega^1(\Sigma_n)^\rho) \simeq \Omega^1(\mathrm{Sh}_K)^\rho.$$

Démonstration. — Reprenons les notations du lemme 4.4. En calculant les sections globales de Ω^1 des deux côtés de l'isomorphisme de Cerednik-Drinfeld, puis en prenant les parties ρ-isotypiques, on obtient un isomorphisme

$$\bigoplus_{i=1}^{r} ((\Omega^1(\Sigma_n))^\rho)^{\Gamma_i} \simeq \Omega^1(\mathrm{Sh}_K)^\rho.$$

Pour simplifier les formules, nous allons poser

$$W = ((\Omega^1(\Sigma_n))^\rho)^* \quad \text{et} \quad X = X(K^p) = \coprod \Gamma_i \backslash G$$

dans la suite de cette preuve. Le théorème 3.2 montre que W est une représentation localement analytique de G sur un espace de type compact. Puisque $\mathrm{LA}(X)$ et W sont réflexifs, le théorème 5.7 est une conséquence du résultat suivant, qui est une application simple de la réciprocité de Frobenius, modulo quelques problèmes topologiques.

30. Pour cet argument, l'énoncé plus faible 13.5 de l'appendice serait en fait suffisant.

Lemme 5.8. — *On a un isomorphisme de modules de Hecke*

$$\bigoplus_{i=1}^{r}((\Omega^1(\Sigma_n))^{\rho})^{\Gamma_i} \simeq \mathrm{Hom}_G(W, \mathrm{LA}(X)).$$

Démonstration. — Soit $\omega = (\omega_i)_{i=1,\ldots,r} \in \bigoplus_{i=1}^{r}((\Omega^1(\Sigma_n))^{\rho})^{\Gamma_i}$. On lui associe $\phi_\omega : W \to \mathrm{LA}(X)$, qui envoie $\ell \in W$ sur la fonction $\phi_\omega(\ell) : \Gamma_i g \mapsto \ell(g^{-1}.\omega_i)$ sur $X = \coprod \Gamma_i \backslash G$. Montrons tout d'abord que cette définition a un sens : si $g' = \gamma g$, avec $\gamma \in \Gamma_i$, $1 \leq i \leq r$, on a bien

$$\ell((g')^{-1}.\omega_i) = \ell(g^{-1}\gamma_i^{-1}.\omega_i) = \ell(g^{-1}.\omega_i),$$

puisque ω_i est invariante par Γ_i. Pour voir que $\phi_\omega(l)$ est bien localement analytique, il suffit de noter que $\ell(g^{-1}.\omega_i) = (g.\ell)(\omega_i)$ et d'utiliser le fait que $G \to \Omega^1(\mathcal{M}_n)^*, g \mapsto g.\ell$ est localement analytique (cf. 3.2). De plus, ϕ_ω est G-équivariante, puisque

$$\begin{aligned}\phi_\omega(g.\ell)(\Gamma_i g') &= (g.\ell)((g')^{-1}.\omega_i) = \ell(g^{-1}(g')^{-1}.\omega_i) = \ell((g'g)^{-1}.\omega_i)\\ &= \phi_\omega(\ell)(\Gamma_i g'g) = (g.\phi_\omega(\ell))(\Gamma_i g').\end{aligned}$$

Il reste à voir que ϕ_ω est un morphisme continu. Cela revient évidemment à montrer que

$$W \to \mathrm{LA}(G),\ \ell \mapsto (g.\ell)(\omega_i)$$

est continue, pour chaque $i = 1, \ldots, r$, ce qui découle du résultat général suivant (en prenant $\lambda = ev_{\omega_i}$, $w = \ell$) :

Lemme 5.9. — *Soit W une représentation localement analytique d'un groupe de Lie p-adique G sur un espace de type compact. Fixons $\lambda \in W^*$. Le morphisme*

$$F : W \to \mathrm{LA}(G),\ w \mapsto (g \mapsto \lambda(g.w))$$

est continu.

Démonstration. — En décomposant G selon les classes à gauche modulo un sous-groupe ouvert compact de G, on peut supposer que G est compact. Considérons l'application $F_1 : D(G) \to W^*$ qui envoie $\mu \in D(G)$ sur l'élément $w \mapsto \int_G \lambda(g.w)\mu$. Nous allons voir que F_1 est continue, ce qui permettra de conclure car F n'est rien d'autre que la transposée de F_1 (en identifiant le dual de W^* avec W et le dual de $D(G)$ avec $\mathrm{LA}(G)$, ce qui est permis car W et $\mathrm{LA}(G)$ sont des espaces réflexifs). Puisque $D(G)$ et W sont tous deux des espaces de Fréchet, on peut tester la continuité de F_1 avec des suites. Soit $(\mu_n)_n$ une suite d'éléments de $D(G)$ convergeant vers 0. Par définition, F_1 envoie $\mu \in D(G)$ sur l'élément $w \mapsto \int_G \lambda(g.w)\mu$. Or cette dernière quantité est exactement $\lambda(I(\rho_w)(\mu)) = \lambda(\mu * w)$ dans les notations de [**66**]. D'après [**66**, prop. 3.2], $\mu \mapsto \mu * w$ est continue. En particulier, pour chaque $w \in W$, la suite $(\mu_n * w)_n$ tend vers 0. On conclut alors avec le très utile lemme suivant, appliqué à $V = W^*$.

Lemme 5.10. — *Soit V un espace vectoriel localement convexe sur un corps sphériquement complet. Une suite $(v_n)_n$ de V converge vers 0 si et seulement si elle converge faiblement vers 0.*

□

Pour conclure la preuve du lemme 5.8, il suffit d'exhiber un inverse de l'application déjà construite : cet inverse envoie $\psi \in \mathrm{Hom}_G(W, \mathrm{LA}(X))$ sur le r-uplet des éléments de $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho = W^*$ correspondant à $\ell \in W \mapsto \psi(\ell)(\gamma_i)$, pour un $\gamma_i \in \Gamma_i$ quelconque. On vérifie que l'isomorphisme construit commute à l'action de l'algèbre de Hecke hors p... □

Cela finit la preuve du théorème 5.7. □

Remarque 5.11. — La flèche naturelle déduite de la surjection $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$:

$$\mathrm{Hom}_G((\Omega^1(\Sigma_n)^\rho))^*, \mathrm{LA}(X(K^p))) \to \mathrm{Hom}_G(H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^\rho, \mathrm{LC}(X(K^p)))$$

s'identifie via les isomorphismes de la proposition 5.7 et du théorème 4.1 à la filtration de Hodge

$$\Omega^1(\mathrm{Sh}_K)^\rho \to H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_K)^\rho.$$

Pour le voir, on se ramène immédiatement au cas du revêtement étale de la variété propre et lisse $X_\Gamma = \Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}_n$, avec Γ discret cocompact dans G, par la variété Stein $\breve{\mathcal{M}}_n$; dans ce cas, la filtration de Hodge sur $H^1_{\mathrm{dR}}(X_\Gamma) = H^1(\Gamma, \Omega^\cdot(\breve{\mathcal{M}}_n))$ est donnée par

$$\mathrm{Im}\left(H^1(\Gamma, \Omega^1(\breve{\mathcal{M}}_n)[1]) \to H^1(\Gamma, \Omega^\cdot(\breve{\mathcal{M}}_n))\right).$$

5.3. Preuve du théorème 5.1. — On peut maintenant appliquer le théorème 5.5 : il existe une forme modulaire quaternionique f de poids 2 pour le groupe $\bar{B}^*$, telle que si $\pi(f)$ est la représentation automorphe correspondante de $\bar{B}^*(\mathbf{A})$, $\pi(f)_p = \pi \otimes \xi \circ \det$, où ξ est un caractère non ramifié, et telle que $\overline{r}_f : \mathcal{G}_{\mathbf{Q}} \to GL_2(\overline{\mathbf{F}_p})$ soit absolument irréductible en restriction à $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Soit Σ un ensemble fini de premiers contenant p et suffisamment grand pour que $\overline{r}_f$ définisse un idéal maximal de l'algèbre de Hecke $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma$ [31] ; soit A le complété $\mathfrak{m}$-adique de $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma$ et $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $A[1/p]$ associé à la forme f.

On a d'après la proposition 5.7

$$\mathrm{Hom}_G((\mathrm{LA}(X(K^p))[\mathfrak{p}])^*, \Omega^1(\Sigma_n)^\rho) \simeq \Omega^1(\mathrm{Sh}_K)^\rho[\mathfrak{p}] \neq 0$$

Le théorème 5.4 permet d'obtenir ainsi l'existence d'un morphisme G-équivariant continu non nul

$$\Phi_0 : (\Pi^{\mathrm{an}})^* \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho,$$

où $\Pi = \Pi(\mathfrak{p}) \in \mathcal{V}(\pi)$ (modulo un twist non ramifiée que l'on va ignorer dans la suite). Le morphisme Φ_0 induit, par restriction, un morphisme continu G-équivariant

$$\Phi : (\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}})^* \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho.$$

Montrons que ce morphisme est non nul. S'il était nul, Φ_0 se factoriserait par le quotient $(\Pi^{\mathrm{lisse}})^*$ de $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$. Comme Φ_0 n'est pas nul et $\Pi^{\mathrm{lisse}} \simeq \pi$ est irréductible, π^* se plongerait dans $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho$, ce qui est absurde puisque u^+ n'annule aucun élément de $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho$. On en déduit que Φ est effectivement non nul.

En outre, la composée de Φ avec la surjection canonique $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$ est nulle : en dualisant cette flèche on obtient en effet un morphisme G-équivariant $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^\rho \to \Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$, qui est forcément nul car $\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$ n'a pas de vecteurs lisses non nuls (exercice), alors que $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^\rho$

31. Pour les notations relatives aux algèbres de Hecke, voir le paragraphe 5.1.

est lisse (proposition 3.6). Par conséquent, Φ se factorise par $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$, ce qui finit la preuve du théorème 5.1.

6. (φ, Γ)-modules sur l'anneau de Robba et équations différentielles p-adiques

Ce chapitre ne contient aucun résultat original et sert uniquement comme référence pour la suite. Le lecteur pourra consulter [**1**], [**2**], [**41**], [**57**] pour plus de détails concernant l'équation différentielle p-adique attachée à une représentation de de Rham de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Nous nous contenterons d'énoncer les principaux résultats concernant cette construction.

Rappelons que l'on a fixé une suite $(\zeta_{p^n})_{n\geq 1}$, où ζ_{p^n} est une racine primitive de l'unité d'ordre p^n, et $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$. Soit $\mathcal{E}^{]0,r_n]}$ l'anneau des fonctions analytiques (définies sur L) sur la couronne $|\zeta_{p^n} - 1| \leq |T| < 1$, et soit

$$\mathcal{R} = \varinjlim_n \mathcal{E}^{]0,r_n]} \subset L[[T, T^{-1}]]$$

l'anneau de Robba. L'anneau $\mathcal{R}$ est muni d'actions continues de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}}/\mathbf{Q}_p)$ et d'un Frobenius φ, commutant entre elles, en posant

$$\varphi(T) = (1+T)^p - 1 \quad \text{et} \quad \sigma_a(T) = (1+T)^a - 1, \quad a \in \mathbf{Z}_p^*,$$

où $\sigma_a \in \Gamma$ est tel que $\chi_{\mathrm{cyc}}(\sigma_a) = a$ (en d'autres termes $\sigma_a(\zeta) = \zeta^a$ pour tout $\zeta \in \mu_{p^\infty}$).

Définition 6.1. — Un (φ, Γ)-*module* Δ *sur* $\mathcal{R}$ est un $\mathcal{R}$-module libre de type fini muni d'actions semi-linéaires continues de φ et Γ, commutant entre elles et telles que l'application naturelle $\mathcal{R} \otimes_{\varphi(\mathcal{R})} \varphi(\Delta) \to \Delta$ soit un isomorphisme.

Soit Δ un (φ, Γ)-module sur $\mathcal{R}$. D'après un résultat standard de Berger (voir [**1**, lemme 4.1]), l'action de Γ sur Δ se dérive, d'où une connexion

$$\nabla : \Delta \to \Delta, \quad \nabla(z) = \lim_{a\to 1} \frac{\sigma_a(z) - z}{a - 1}.$$

Par exemple, si $\Delta = \mathcal{R}$ est le (φ, Γ)-module trivial, alors

$$\nabla = t\partial, \quad \text{où} \quad \partial = (1+T)\frac{d}{dT} \quad \text{et} \quad t = \log(1+T) \in \mathcal{R}.$$

Notons que $\varphi(t) = pt$ et $\gamma(t) = \chi_{\mathrm{cyc}}(\gamma)t$ pour $\gamma \in \Gamma$, ce qui fait que si Δ est un (φ, Γ)-module sur $\mathcal{R}$, alors $t^k\Delta$ l'est ausssi, pour tout entier k.

Exemple 6.2. — a) La théorie de Fontaine [**39**] combinée au théorème de surconvergence de Cherbonnier-Colmez [**13**] permettent d'attacher à toute L-représentation V de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ un (φ, Γ)-module (étale) $D_{\mathrm{rig}}(V)$ sur $\mathcal{R}$, de rang $\dim_L(V)$. Berger a montré [**1**] que le foncteur $V \to D_{\mathrm{rig}}(V)$ est pleinement fidèle.

b) Soit V une L-représentation de de Rham de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Un théorème fondamental de Berger [**1**] montre l'existence d'un unique sous-(φ, Γ)-module $N_{\mathrm{rig}}(V) \subset D_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$ tel que

$$N_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] = D_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] \quad \text{et} \quad \nabla(N_{\mathrm{rig}}(V)) \subset t \cdot N_{\mathrm{rig}}(V).$$

Le (φ, Γ)-module $N_{\mathrm{rig}}(V)$ devient une équation différentielle p-adique avec structure de Frobenius sur $\mathcal{R}$, grâce à la connexion $\partial = \frac{1}{t}\nabla$. Ce (φ, Γ)-module jouera un rôle fondamental dans cet article (c'est précisément cette construction qui a permis à Berger de démontrer le théorème de monodromie p-adique [**1**]). Contrairement à $V \to D_{\mathrm{rig}}(V)$, le foncteur $V \to N_{\mathrm{rig}}(V)$ n'est pas pleinement fidèle (32).

Lemme 6.3. — *Soit $P \in L[X]$ un polynôme non nul et soit V une L-représentation absolument irréductible de dimension 2 de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, non trianguline (au sens de [**18**]). Alors $P(\nabla)$ est injectif sur $D_{\mathrm{rig}}(V)$.*

Démonstration. — D'après [**28**, prop 2.1] le noyau X de $P(\nabla)$ sur $D_{\mathrm{rig}}(V)$ est de dimension finie sur L. Comme il est stable par φ, on en déduit que si $X \neq 0$, alors φ a des vecteurs propres sur $D_{\mathrm{rig}}(V)$ (éventuellement après avoir remplacé L par une extension finie). Cela contredit [**18**, lemme 3.2]. □

Le résultat suivant est une observation importante de Colmez, qui joue un rôle clé dans [**20**]. Nous nous en servirons aussi dans le chapitre suivant.

Proposition 6.4. — *Soit V une L-représentation de de Rham, absolument irréductible de dimension 2 de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Si V n'est pas trianguline, alors $\partial = \frac{1}{t}\nabla$ est bijectif sur $N_{\mathrm{rig}}(V)$.*

Démonstration. — Soient $N_{\mathrm{rig}} = N_{\mathrm{rig}}(V)$ et $D_{\mathrm{rig}} = D_{\mathrm{rig}}(V)$, et soit h tel que $t^h N_{\mathrm{rig}} \subset D_{\mathrm{rig}}$. Puisque $(\nabla - h)(t^h x) = t^{h+1}\partial x$ et $D_{\mathrm{rig}}^{\nabla = h} = 0$ (lemme 6.3), ∂ est injectif sur N_{rig}. La surjectivité est plus subtile, et utilise le théorème de monodromie p-adique. Plus précisément, [**51**, prop. 20.4.2] fournit un accouplement parfait

$$N_{\mathrm{rig}}/\partial(N_{\mathrm{rig}}) \otimes \check{N}_{\mathrm{rig}}^{\partial=0} \to L$$

où $\check{N}_{\mathrm{rig}} = N_{\mathrm{rig}}(\check{V})$ est l'équation différentielle attachée au dual de Cartier $\check{V} = V^* \otimes \chi_{\mathrm{cyc}}$ de V. Puisque $\check{V}$ n'est pas trianguline, la première partie de la preuve montre que $\check{N}_{\mathrm{rig}}^{\partial=0} = 0$, ce qui permet de conclure. □

Soit Δ un (φ, Γ)-module sur $\mathcal{R}$. Berger montre [**2**, th. I.3.3] que pour tout n assez grand (dépendant de Δ) il existe un unique sous $\mathcal{E}^{]0,r_n]}$-module $\Delta^{]0,r_n]}$ de Δ (33) tel que $\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^{]0,r_n]}} \Delta^{]0,r_n]} \to \Delta$ soit un isomorphisme et tel que $\mathcal{E}^{]0,r_{n+1}]} \otimes_{\mathcal{E}^{]0,r_n]}} \Delta^{]0,r_n]}$ admette une base contenue dans $\varphi(\Delta^{]0,r_n]})$ (pour l'existence, il suffit de prendre pour $\Delta^{]0,r_n]}$ le sous $\mathcal{E}^{]0,r_n]}$-module de Δ engendré par une base fixée de Δ). De plus, $\Delta^{]0,r_n]}$ est stable sous l'action de Γ et ∇, et $\varphi(\Delta^{]0,r_n]}) \subset \Delta^{]0,r_{n+1}]}$ pour tout n assez grand.

Notons $L_n = L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$. On dispose pour tout $n \geq 1$ d'une injection Γ-équivariante (34) d'anneaux $\varphi^{-n} : \mathcal{E}^{]0,r_n]} \to L_n[[t]]$, qui envoie f sur $f(\zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1)$. Si Δ est un (φ, Γ)-module sur $\mathcal{R}$, on note (pour n assez grand)

$$\Delta^+_{\mathrm{dif,n}} = L_n[[t]] \otimes_{\mathcal{E}^{]0,r_n]}} \Delta^{]0,r_n]}, \quad \Delta^+_{\mathrm{dif}} = \varinjlim_n \Delta^+_{\mathrm{dif,n}}.$$

32. On perd la filtration de Hodge ; voir la fin de ce chapitre pour un énoncé plus précis.
33. Si $\Delta = D_{\mathrm{rig}}(V)$, on notera $D^{]0,r_n]}$ au lieu de $(D_{\mathrm{rig}})^{]0,r_n]}$, et ainsi de suite, pour alléger les notations.
34. Comme f converge en $\zeta_{p^n} - 1$, $f(\zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1)$ est bien défini en tant qu'élément de $L_n[[t]]$.

Ainsi, $\Delta^+_{\rm dif}$ est un $L_\infty[[t]] := \varinjlim_n L_n[[t]]$-module libre de même rang que Δ et il est muni d'une action de Γ, qui respecte $\Delta^+_{\rm dif,n}$ pour n assez grand. La dérivée de cette action fournit une connexion ∇ sur $\Delta^+_{\rm dif}$, qui respecte $\Delta^+_{\rm dif,n}$ pour n assez grand, et qui satisfait

$$\nabla(fz) = t\frac{df}{dt}\cdot z + f\cdot\nabla z, \quad \forall f\in L_\infty[[t]],\ z\in\Delta^+_{\rm dif}.$$

Exemple 6.5. — L'exemple suivant sera systématiquement utilisé dans la suite. Soit V une L-représentation de de Rham de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Si n est assez grand, on dispose d'un *morphisme de localisation* [35]

$$\varphi^{-n} : D^{]0,r_n]}(V) \to (\mathbf{B}^+_{\rm dR}\otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_{\mathbf{Q}_p}},$$

qui est Γ-équivariant et induit un morphisme injectif $\varphi^{-n} : D^+_{\rm dif,n}(V) \to (\mathbf{B}^+_{\rm dR}\otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{H}_{\mathbf{Q}_p}}$. Fontaine a montré [**41**] que ce morphisme induit un isomorphisme canonique de $L_n[[t]]$-modules avec action semi-linéaire de Γ

$$D^+_{\rm dif,n}(V) = {\rm Fil}^0(L_n((t))\otimes_L D_{\rm dR}(V)),$$

où l'on considère la filtration t-adique sur $L_n((t))$ et la filtration de Hodge sur $D_{\rm dR}(V)$. Berger a montré [**1, 2**] que via cet isomorphisme on peut décrire $N^+_{\rm dif,n}(V)\subset D^+_{\rm dif,n}(V)[1/t]$ par

$$N^+_{\rm dif,n}(V) = L_n[[t]]\otimes_L D_{\rm dR}(V).$$

On peut aussi décrire simplement $N_{\rm rig}(V)$ à partir de $D_{\rm rig}(V)$ via

$$N_{\rm rig}(V) = \{z\in D_{\rm rig}(V)[1/t] |\ \varphi^{-n}(z)\in N^+_{\rm dif,n}(V)\quad \forall n\gg 0\}.$$

De plus, pour n assez grand

$$N^{]0,r_n]}(V) = \{z\in D_{\rm rig}(V)[1/t] |\ \varphi^{-k}(z)\in N^+_{\rm dif,k}(V)\quad \forall k\geq n\}.$$

Enfin, on peut reconstruire $D_{\rm rig}(V)$ à partir de $N_{\rm rig}(V)$ et de la filtration de Hodge, via

$$D_{\rm rig}(V) = \{z\in N_{\rm rig}(V)[1/t] |\ \varphi^{-n}(z)\in {\rm Fil}^0(L_n((t))\otimes_L D_{\rm dR}(V))\quad \forall n\gg 0\}.$$

On a une description similaire de $D^{]0,r_n]}(V)$ pour n assez grand.

Nous aurons aussi besoin d'une description plus précise de $N_{\rm rig}(V)$. Supposons que V est une représentation potentiellement cristalline (pour simplifier) de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et prenons une extension finie galoisienne K de $\mathbf{Q}_p$ telle que V soit cristalline en tant que représentation de ${\rm Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$. Soit K_0 l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ dans K. Une construction standard utilisant la théorie du corps des normes de Fontaine-Wintenberger (voir le chapitre 1 de [**2**] pour les détails [36]) permet d'associer à l'extension de corps perfectoïdes $K^{\rm cyc}/\mathbf{Q}_p^{\rm cyc}$ une extension finie étale $\mathcal{R}_K$ de l'anneau de Robba $\mathcal{R}$. De plus, $\mathcal{R}_K$ est muni d'un Frobenius φ et d'une action de ${\rm Gal}(K^{\rm cyc}/\mathbf{Q}_p)$, qui sont compatibles avec les actions correspondantes sur $\mathcal{R}$, et telles que $\mathcal{R}_K^{{\rm Gal}(K^{\rm cyc}/\mathbf{Q}_p^{\rm cyc})} = \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_K^{{\rm Gal}(K^{\rm cyc}/K)} = K_0$. Berger [**2, 57**] montre l'existence d'un isomorphisme de comparaison, compatible avec toutes les structures supplémentaires

$$\mathcal{R}_K\otimes_{\mathcal{R}} N_{\rm rig}(V) = \mathcal{R}_K\otimes_{K_0} D_{\rm cris,K}(V),$$

35. Rappelons que $\mathcal{H}_{\mathbf{Q}_p} = {\rm Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p^{\rm cyc})$.
36. Nous allons noter $\mathcal{R}_K$ ce que Berger note $B^\dagger_{\rm rig,K}$.

où

$$D_{\mathrm{cris,K}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)} = D_{\mathrm{pst}}(V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)}.$$

En prenant les invariants par $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{cyc}}/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}})$, on obtient la description suivante de $N_{\mathrm{rig}}(V)$

$$N_{\mathrm{rig}}(V) = \left(\mathcal{R}_K \otimes_{K_0} D_{\mathrm{pst}}(V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)}\right)^{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{cyc}}/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}})}. \tag{4}$$

Cette description montre que $N_{\mathrm{rig}}(V)$ ne dépend que du $(\varphi, \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module $D_{\mathrm{pst}}(V)$, *sans sa filtration de Hodge.* (37)

Exemple 6.6. — Revenons maintenant à notre contexte usuel et considérons le $(\varphi, \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module $M(\pi)$ attaché à π. Au vu de la discussion précédente, la définition suivante n'est pas bien surprenante :

Définition 6.7. — Soit K une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$, qui contient L et telle que l'inertie I_K de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ agisse trivialement sur $M(\pi)$. On pose

$$N_{\mathrm{rig}}(\pi) = \left(\mathcal{R}_K \otimes_{K_0} M(\pi)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)}\right)^{\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{cyc}}/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}})},$$

où K_0 est l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ dans K.

Le (φ, Γ)-module $N_{\mathrm{rig}}(\pi)$ sur $\mathcal{R}$ qui s'en déduit est indépendant du choix de K, et il est libre de rang 2 sur $\mathcal{R}$. Soit

$$M_{\mathrm{dR}}(\pi) = (\overline{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M(\pi))^{\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}} \simeq (K \otimes_{K_0} M(\pi)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)})^{\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p)},$$

un L-espace vectoriel de dimension 2. On a un isomorphisme canonique pour n assez grand

$$(N_{\mathrm{rig}}(\pi))^+_{\mathrm{dif,n}} \simeq L_n[[t]] \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi).$$

Toute L-droite $\mathcal{L}$ de $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$ définit une filtration exhaustive décroissante $\mathrm{Fil}_{\mathcal{L}}$ sur $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$, en posant

$$\mathrm{Fil}^{-1}(M_{\mathrm{dR}}(\pi)) = M_{\mathrm{dR}}(\pi), \quad \mathrm{Fil}^0(M_{\mathrm{dR}}(\pi)) = \mathcal{L}, \quad \mathrm{Fil}^1(M_{\mathrm{dR}}(\pi)) = 0.$$

Rappelons que $\mathcal{V}(\pi)$ est l'ensemble des (classes d'isomorphisme des) $\Pi \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}(G)$ absolument irréductibles telles que $\Pi^{\mathrm{lisse}} \simeq \pi$. On voit dans la suite $\mathcal{V}(\pi)$ comme sous-ensemble de l'ensemble des (classes d'isomorphismes de) L-représentations absolument irréductibles de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, grâce au foncteur de Colmez [**16**, chap. II, IV] et au résultat principal de [**22**].

Soit $V \in \mathcal{V}(\pi)$ et fixons une identification $D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M(\pi)$ en tant que $(\varphi, \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p})$-modules. Cet isomorphisme est unique à scalaire près et il induit un isomorphisme de L-espaces vectoriels de dimension 2

$$D_{\mathrm{dR}}(V) \simeq (\overline{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} D_{\mathrm{pst}}(V))^{\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}} \simeq M_{\mathrm{dR}}(\pi).$$

La filtration de Hodge $\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V))$ définit ainsi une L-droite $\mathcal{L}(V) \subset M_{\mathrm{dR}}(\pi)$, qui ne dépend pas du choix de l'isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M(\pi)$. Réciproquement, étant donnée une L-droite $\mathcal{L}$ de $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$, la filtration $\mathrm{Fil}_{\mathcal{L}}$ sur $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$ est faiblement admissible. Le théorème de Colmez-Fontaine [**21**] permet donc de construire une unique (à isomorphisme près) L-représentation $V_{\mathcal{L}} \in \mathcal{V}(\pi)$ telle

37. Elle montre aussi que le terme de droite de l'égalité (4) ne dépend pas de K ; cela est aussi une conséquence élémentaire de la théorie de Galois.

que $\mathcal{L}(V_{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$. On déduit alors de [**22**, th1.3] (cela utilise [**31**]) que $V \to \mathcal{L}(V)$ induit une bijection $\mathcal{V}(\pi) \to \mathrm{Proj}(M_{\mathrm{dR}}(\pi))$.

Pour résumer, si $V \in \mathcal{V}(\pi)$, alors le choix d'un isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M(\pi)$ induit :

• un isomorphisme de (φ, Γ)-modules sur $\mathcal{R}$

$$N_{\mathrm{rig}}(V) \simeq N_{\mathrm{rig}}(\pi), \tag{5}$$

qui induit une identification de $L_n[[t]]$-modules avec action semi-linéaire de Γ (pour n assez grand)

$$N^+_{\mathrm{dif,n}}(V) \simeq L_n[[t]] \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi).$$

• un isomorphisme de L-espaces vectoriels filtrés $D_{\mathrm{dR}}(V) \simeq (M_{\mathrm{dR}}(\pi), \mathrm{Fil}_{\mathcal{L}(V)})$.

• des identifications de $L_n[[t]]$-modules avec action semi-linéaire de Γ (pour n assez grand)

$$D^+_{\mathrm{dif,n}}(V) \simeq \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi)) \simeq tN^+_{\mathrm{dif,n}}(V) + L_n[[t]] \otimes_L \mathcal{L}(V),$$

• des inclusions de (φ, Γ)-modules

$$tN_{\mathrm{rig}}(\pi) \subset D_{\mathrm{rig}}(V) \subset N_{\mathrm{rig}}(\pi).$$

Tout ceci est une conséquence de la discussion ci-dessus et du fait que l'on travaille en poids $0, 1$. Toutes ces identifications et inclusions *dépendent du choix de l'isomorphisme* $D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M(\pi)$, mais uniquement à scalaire près. Par conséquent, *la L-droite $\mathcal{L}(V) \subset M_{\mathrm{dR}}(\pi)$ est parfaitement bien définie*, ainsi que les images dans $N_{\mathrm{rig}}(\pi)$, $L_n[[t]] \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi)$, de toutes ces identifications.

7. Représentations localement analytiques de G et modèle de Kirillov-Colmez

Nous rappelons dans ce chapitre un certain nombre de constructions et résultats concernant la correspondance de Langlands locale p-adique, en particulier la théorie du modèle de Kirillov de Colmez [**16**, chap. VI], qui sera indispensable dans les chapitres suivants. Notre discussion est assez rapide et nous renvoyons le lecteur au paragraphe 5 du chapitre VI de [**16**] ou aux chapitres 4 et 5 de [**27**], où tout ceci est décrit en détail.

7.1. (φ, Γ)-modules et représentations de G. — Pour toute L-représentation V de dimension 2 de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, Colmez [**16**, ch.II,IV,V] construit un faisceau G-équivariant (38) $U \to D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, dont les sections sur $\mathbf{Z}_p$ sont données par $D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{Z}_p = D_{\mathrm{rig}}(V)$. L'action du monoïde $P^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (qui stabilise $\mathbf{Z}_p$) sur $D_{\mathrm{rig}}(V)$ est donnée par (39)

$$\begin{pmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = (1+T)^b . \varphi^k(\sigma_a(z)), \quad \forall z \in D_{\mathrm{rig}}(V), k \geq 0, a \in \mathbf{Z}_p^*, b \in \mathbf{Z}_p,$$

alors que l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p\mathbf{Z}_p & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est très compliquée.

L'espace $D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1$ des sections globales du faisceau attaché à V est un espace LF avec action continue de G. Par construction, le caractère central de $D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1$ est (40)

$$\delta_V = \chi_{\mathrm{cyc}}^{-1} \det V.$$

38. Le groupe G agit sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) . x = \frac{ax+b}{cx+d}$.
39. Rappelons que $a \to \sigma_a$ désigne l'inverse de l'isomorphisme $\Gamma \simeq \mathbf{Z}_p^*$ fourni par le caractère cyclotomique.
40. Vu comme caractère que $\mathbf{Q}_p^*$ par la théorie du corps de classe local.

Dans toutes les applications que nous avons en vue, on aura $\det V = \chi_{\mathrm{cyc}}$ et donc $\delta_V = 1$.

Pour tout ouvert compact U de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ on dispose d'une application de prolongement par zéro $D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes U \to D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1$, qui permet d'identifier $D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes U$ à un sous-espace de $D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1$. Soit

$$w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in G,$$

et notons aussi w la restriction à $D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ de l'action de l'involution w de $D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1$. Alors $D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1 = D_{\mathrm{rig}}(V) + wD_{\mathrm{rig}}(V)$ et l'application $z \to (\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z), \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wz))$ induit une identification

$$D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D_{\mathrm{rig}}(V) \times D_{\mathrm{rig}}(V) |\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) = w(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1))\}.$$

Nous allons utiliser systématiquement le résultat suivant de Colmez [**16**, ch V].

Théorème 7.1. — *Soit V une L-représentation de dimension 2 de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$.*

a) L'action de G sur $D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1$ s'étend en une structure[41] *de $D(G)$-module topologique.*

b) Si $\check{V} = V^* \otimes \chi_{\mathrm{cyc}} \simeq V \otimes \delta_V^{-1}$ est le dual de Cartier de V, il existe un accouplement parfait de $D(G)$-modules topologiques

$$\{\ \}_{\mathbf{P}^1} : (D_{\mathrm{rig}}(\check{V}) \boxtimes \mathbf{P}^1) \times (D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1) \to L,$$

c) Il existe une suite exacte canonique de $D(G)$-modules topologiques

$$0 \to (\Pi(\check{V})^{\mathrm{an}})^* \to D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi(V)^{\mathrm{an}} \to 0,$$

et $(\Pi(\check{V})^{\mathrm{an}})^*$ s'identifie ainsi à l'orthogonal de $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^* \subset D_{\mathrm{rig}}(\check{V}) \boxtimes \mathbf{P}^1$ (ou de $\Pi(V)^*$) dans $D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Remarque 7.2. — a) Dans toutes nos applications on aura $\det V = \chi_{\mathrm{cyc}}$ et donc $\delta_V = 1$ et $\check{V} \simeq V$ canoniquement. La suite exacte précédente devient dans ce cas

$$0 \to (\Pi(V)^{\mathrm{an}})^* \to D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi(V)^{\mathrm{an}} \to 0$$

et $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*$ s'identifie à son propre orthogonal dans $D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1$ via l'accouplement $\{\ \}_{\mathbf{P}^1}$: $(D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1) \times (D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1) \to L$.

b) Si U est un ouvert compact de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ et si H est un sous-groupe ouvert compact de G qui stabilise U, l'espace $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes U \subset D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par $D(H) \subset D(G)$ et $\mathrm{Res}_U(\lambda \cdot z) = \lambda \cdot \mathrm{Res}_U(z)$ pour tout $z \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ et tout $\lambda \in D(H)$.

7.2. L'action infinitésimale de G. — Soit $U(\mathfrak{gl}_2) \subset D(G)$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G (tensorisée avec L). La discussion précédente montre l'existence d'une action de $\mathfrak{gl}_2$ sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p = D_{\mathrm{rig}}$, qui satisfait $\mathrm{Res}_U(X \cdot z) = X \cdot \mathrm{Res}_U(z)$ pour $z \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, $X \in U(\mathfrak{gl}_2)$ et $U \subset \mathbf{Z}_p$ ouvert compact. Bien que l'action du Borel soit relativement explicite, l'action de l'involution w est très compliquée. Le résultat suivant permet de contourner ce problème.

Considérons la base

$$a^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad a^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad u^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

41. Rappelons que $D(G)$ est l'algèbre des distributions sur G.

de $\mathfrak{gl}_2$, ainsi que l'élément de Casimir

$$C = u^+u^- + u^-u^+ + \frac{1}{2}h^2 \in U(\mathfrak{gl}_2), \quad \text{où} \quad h = a^+ - a^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right).$$

L'élément C engendre le centre de $U(\mathfrak{sl}_2)$. On identifie un élément f de $\mathcal{R}$ avec l'opérateur "multiplication par f" sur $D_{\mathrm{rig}}(V)$ dans l'énoncé suivant, qui est le résultat principal de [**26**].

Théorème 7.3. — *Soient a et b les poids de Hodge-Tate généralisés de V, et soit $k = a + b$. En tant qu'opérateurs sur $D_{\mathrm{rig}}(V)$ nous avons*

$$a^+ = \nabla, \quad a^- = k - 1 - \nabla, \quad u^+ = t, \quad u^- = -\frac{(\nabla - a)(\nabla - b)}{t}, \quad C = \frac{(a-b)^2 - 1}{2}.$$

En particulier, si $a = 0$ et $b = 1$ on a

$$a^+ = \nabla = -a^-, \quad C = 0, \quad u^+ = t, \quad u^- = -\frac{\nabla(\nabla - 1)}{t} = -t\partial^2,$$

où $\partial = \frac{1}{t}\nabla$, une connexion sur $D_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$.

7.3. Vecteurs P-finis et modèle de Kirillov. — Rappelons que $P = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On fixe une L-représentation V de dimension 2 de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et on suppose que V est *absolument irréductible.*

Définition 7.4. — a) On dit qu'un vecteur $v \in \Pi(V)$ est P-*fini* s'il existe $n, k \geq 1$ tels que

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^k v = 0$$

et si $L\left[\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right] v$ est de dimension finie sur L. On note $\Pi(V)^{P-\mathrm{fini}}$ l'espace des vecteurs P-finis de $\Pi(V)$.

b) Un vecteur $v \in \Pi(V)^{P-\mathrm{fini}}$ est dit *de pente infinie* s'il existe $n, k \geq 1$ et $m \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\left(\sum_{i=0}^{p^n-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)^k \circ \left(\begin{smallmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v = 0.$$

On note $\Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}} \subset \Pi(V)^{P-\mathrm{fini}}$ l'espace des vecteurs P-finis de pente infinie.

Remarque 7.5. — Soit $v \in \Pi(V)^{P-\mathrm{fini}}$ et soient n, k comme dans la définition ci-dessus. Alors pour tout $u \in \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ on a $(1-u)^k v \in \Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}}$. Plus précisément, n'importe quels $m \geq -v_p(x)$ et $N \geq m + n$ satisfont

$$\left(\sum_{i=0}^{p^N-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)^k \circ \left(\begin{smallmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(1-u)^k v = 0.$$

La preuve de ce résultat est un exercice amusant laissé au lecteur. Nous utiliserons à plusieurs reprises cette observation (avec $k = 1$).

Soit X un $L_\infty[[t]]$-module muni d'une action semi-linéaire de Γ (par rapport à l'action naturelle de Γ sur $L_\infty[[t]] = \varinjlim_n L_n[[t]]$). On note $\mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, X)^\Gamma$ l'espace des fonctions $\phi : \mathbf{Q}_p^* \to X$ à support compact dans $\mathbf{Q}_p$ et satisfaisant $\phi(ax) = \sigma_a(\phi(x))$ pour tous $x \in \mathbf{Q}_p^*$ et $a \in \mathbf{Z}_p^*$. On note $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X)^\Gamma$ le sous-espace de $\mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, X)^\Gamma$ formé des fonctions nulles au voisinage de 0. L'application $\phi \to (\phi(p^i))_{i\in\mathbf{Z}}$ induit un isomorphisme L-linéaire

$$\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X)^\Gamma \simeq \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} X.$$

Rappelons que l'on a fixé un système compatible $(\zeta_{p^n})_{n\geq 1}$ de racines de l'unité, ce qui permet de définir un caractère additif localement constant

$$\varepsilon : \mathbf{Q}_p \to \mu_{p^\infty}, \quad \varepsilon(b) = \zeta_{p^n}^{p^n b}, \ \ \forall n \geq -v_p(b).$$

On munit les espaces $\mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, X)^\Gamma$ et $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X)^\Gamma$ d'une action de P, définie par

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \phi\right)(x) = \varepsilon(bx)e^{tbx}\phi(ax).$$

Proposition 7.6. — *Les sous-espaces $\Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}}$ et $\Pi(V)^{P-\mathrm{fini}}$ sont stables sous l'action de P et il existe une injection P-équivariante canonique $v \mapsto \phi_v$*

$$\Pi(V)^{P-\mathrm{fini}} \to \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, D_{\mathrm{dif}}^-(V))^\Gamma, \quad \textit{où} \quad D_{\mathrm{dif}}^-(V) = \varinjlim_n D_{\mathrm{dif,n}}^+(V)[1/t]/D_{\mathrm{dif,n}}^+(V),$$

qui induit un isomorphisme

$$\Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}} \simeq \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, D_{\mathrm{dif}}^-(V))^\Gamma.$$

En particulier $v \to (\phi_v(p^i))_{i\in\mathbf{Z}}$ induit une bijection

$$\Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}} \to \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} D_{\mathrm{dif}}^-(V).$$

Démonstration. — Ces constructions ont été introduites par Colmez dans le paragraphe VI.5 de [**16**]. Leur extension sous la forme de la proposition 7.6 (qui ne demande aucune idée supplémentaire) se trouve dans le chapitre 4 de [**27**], plus précisément les propositions 4.6, 4.8, 4.11, le lemme 4.12 et le corollaire 4.13 de loc.cit. □

7.4. Dualité et modèle de Kirillov. — Le résultat suivant (théorème 7.8) de Colmez est crucial, mais demande pas mal de préliminaires. L'accouplement naturel $\check{V} \times V \to L(1)$ induit par fonctorialité un accouplement

$$\langle\ \rangle : D_{\mathrm{dif}}^+(\check{V})[1/t] \times D_{\mathrm{dif}}^+(V)[1/t] \to L_\infty((t))dt,$$

où l'on note dt la base canonique de $\mathbf{Q}_p(1)$. On définit un accouplement

$$\{\ \}_{\mathrm{dif}} : D_{\mathrm{dif}}^+(\check{V})[1/t] \times D_{\mathrm{dif}}^+(V)[1/t] \to L$$

en posant

$$\{\check{z}, z\}_{\mathrm{dif}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \mathrm{res}_0\left(\mathrm{Tr}_{L_n((t))/L((t))}(\langle\sigma_{-1}(\check{z}), z\rangle)\right),$$

où $\mathrm{res}_0((\sum_{n\gg-\infty} a_n t^n)dt) = a_{-1}$.

Proposition 7.7. — *a)* $\{\ \}_{\mathrm{dif}}$ *est un accouplement* Γ*-équivariant parfait entre* $D^+_{\mathrm{dif}}(\check{V})[1/t]$ *et* $D^+_{\mathrm{dif}}(V)[1/t]$*. Pour tout* n *assez grand l'orthogonal de* $D^+_{\mathrm{dif,n}}(\check{V})$ *est* $D^+_{\mathrm{dif,n}}(V)$*. Ainsi,* $\{\ \}_{\mathrm{dif}}$ *induit un accouplement parfait entre* $D^+_{\mathrm{dif}}(\check{V})$ *et* $D^-_{\mathrm{dif}}(V)$*.*

b) Si V *est de de Rham à poids de Hodge-Tate* 0 *et* $k \geq 1$*, alors pour tout* n *assez grand l'orthogonal de* $N^+_{\mathrm{dif,n}}(\check{V})$ *est* $t^k N^+_{\mathrm{dif,n}}(V)$*.*

Démonstration. — Ce sont des traductions élémentaires, voir par exemple la discussion qui précède le lemme VI.3.3 de [**16**], ainsi que le lemme VI.4.16 de loc.cit. □

D'après le corollaire VI.13 de [**23**], il existe $m(V)$ assez grand tel que l'inclusion $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^* \subset D_{\mathrm{rig}}(\check{V}) \boxtimes \mathbf{P}^1$ se factorise à travers

$$D^{]0,r_{m(D)}]}(\check{V}) \boxtimes \mathbf{P}^1 := \{z \in D_{\mathrm{rig}}(\check{V}) \boxtimes \mathbf{P}^1 |\, \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z), \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wz) \in D^{]0,r_{m(D)}]}(\check{V})\},$$

ce qui nous permet de définir pour $n \geq m(V)$ et $j \in \mathbf{Z}$

$$i_{j,n} : (\Pi(V)^{\mathrm{an}})^* \to D^+_{\mathrm{dif,n}}(\check{V}), \quad i_{j,n} = \varphi^{-n} \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \begin{pmatrix} p^{n-j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons qu'on dispose d'un accouplement canonique G-équivariant parfait $\{\ \}_{\mathbf{P}^1}$ entre $D_{\mathrm{rig}}(\check{V}) \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1$, qui induit l'accouplement naturel entre $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^* \subset D_{\mathrm{rig}}(\check{V}) \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\Pi(V)^{\mathrm{an}} = (D_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1)/(\Pi(\check{V})^{\mathrm{an}})^*$. Enfin, la proposition 7.6 fournit un isomorphisme $v \to \phi_v$ entre $\Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}}$ et $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, D^-_{\mathrm{dif}}(V))^\Gamma$, ce qui permet de donner un sens à l'égalité ci-dessous :

Théorème 7.8. — *On a* $\Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}} \subset \Pi(V)^{\mathrm{an}}$ *et pour tous* $n \geq m(V)$*,* $v \in \Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}}$ *et* $l \in (\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*$ *on a*

$$\{l, v\}_{\mathbf{P}^1} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \{i_{j,n}(l), \phi_v(p^{-j})\}_{\mathrm{dif}}.$$

Démonstration. — Cette généralisation de la proposition VI.5.12 de [**16**] est démontrée (de manière différente) dans [**27**, th. 5.3]. □

7.5. Une description utile de Π^{lisse}. — Les deux résultats techniques suivants seront utilisés constamment dans le chapitre suivant.

Proposition 7.9. — *Soit* $V \in \mathcal{V}(\pi)$ *et notons*

$$\Pi(V)_c^{P-\mathrm{lisse}} = \{v \in \Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}} |\, u^+ v = a^+ v = 0\}.$$

Alors $\Pi(V)_c^{P-\mathrm{lisse}} \subset \Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$ *et l'isomorphisme* $\Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}} \simeq \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, D^-_{\mathrm{dif}}(V))^\Gamma$ *induit un isomorphisme de* P*-modules*

$$\Pi(V)_c^{P-\mathrm{lisse}} \simeq \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, N^+_{\mathrm{dif}}(V)/D^+_{\mathrm{dif}}(V))^\Gamma.$$

Démonstration. — L'espace $\Pi(V)_c^{P-\mathrm{lisse}}$ est noté $\Pi_c^{P-\mathrm{alg}}$ dans [**26**] (en prenant $k = 1$ dans loc.cit.). L'inclusion $\Pi(V)_c^{P-\mathrm{lisse}} \subset \Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$ découle alors du théorème 5.6 de loc.cit (c'est une conséquence facile des théorèmes 7.3 et 7.8, combinés avec la proposition 7.7). La deuxième partie découle de la proposition 5.4 de loc.cit (et se déduit aussi de la proposition 7.6 et de l'égalité

$$(t^{-1} D^+_{\mathrm{dif}}(V)/D^+_{\mathrm{dif}}(V))^{\nabla=0} = N^+_{\mathrm{dif}}(V)/D^+_{\mathrm{dif}}(V),$$

qui se démontre sans aucun problème). □

Remarque 7.10. — En se rappelant que

$$N^+_{\mathrm{dif}}(V) = L_\infty[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V) \quad \text{et} \quad D^+_{\mathrm{dif}}(V) = tN^+_{\mathrm{dif}}(V) + L_\infty[[t]] \otimes_L \mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V)),$$

on obtient un isomorphisme canonique Γ-équivariant

$$N^+_{\mathrm{dif}}(V)/D^+_{\mathrm{dif}}(V) \simeq L_\infty \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V)).$$

L'action de Γ sur le terme de droite étant lisse, on en déduit que $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, N^+_{\mathrm{dif}}(V)/D^+_{\mathrm{dif}}(V))^\Gamma$ n'est rien d'autre que l'espace des fonctions localement constantes $\phi : \mathbf{Q}_p^* \to L_\infty \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V))$ à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$ et telles que $\phi(ax) = \sigma_a(\phi(x))$ pour $x \in \mathbf{Q}_p^*$ et $a \in \mathbf{Z}_p^*$. On a un isomorphisme naturel (utiliser le théorème de Hilbert 90)

$$\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V))^\Gamma \otimes_L L_\infty \simeq \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V))),$$

et le terme de droite (avec son action naturelle de P, définie en utilisant le caractère additif ε) est le modèle de Kirillov usuel de $\pi \otimes_L L_\infty$, ce qui explique le nom de ce chapitre.

Théorème 7.11. — *Si $V \in \mathcal{V}(\pi)$, alors*

$$\Pi(V)^{\mathrm{lisse}} = \{v \in \Pi(V)^{\mathrm{an}} \mid u^+ v = a^+ v = 0\} = \Pi(V)_c^{P-\mathrm{lisse}}$$

et on a un isomorphisme canonique de P-modules

$$\Pi(V)^{\mathrm{lisse}} \simeq \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, N^+_{\mathrm{dif}}(V)/D^+_{\mathrm{dif}}(V))^\Gamma.$$

Démonstration. — Notons $\Pi = \Pi(V)$. Commençons par montrer la première égalité. Une inclusion étant évidente, supposons que $v \in \Pi^{\mathrm{an}}$ est tué par u^+ et a^+, et montrons que v est tué par u^-. Soit $x \in \mathbf{Q}_p$ et soit $v_x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v - v$, de telle sorte que $u^+ v_x = 0$ et

$$a^+ v_x = a^+ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) (a^+ v + x u^+ v) = 0.$$

On en déduit [42] que $v_x \in \Pi_c^{P-\mathrm{lisse}}$ et donc, grâce à la proposition 7.9, $u^- v_x = 0$. L'identité

$$u^- \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) (-x^2 u^+ + u^- - xh)$$

et le fait que v est tué par u^+ et $h = 2a^+$ montrent que $u^- v_x = (\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1) u^- v$. Ainsi, $u^- v \in \Pi^{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = 0$, la dernière égalité étant une conséquence de [**27**, lemme 7.1] (c'est un résultat élémentaire). Cela montre la première égalité.

Pour conclure la première partie, il reste à prouver l'égalité $\Pi(V)_c^{P-\mathrm{lisse}} = \Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$. Une inclusion est fournie par la proposition 7.9. L'autre inclusion vient du fait que $\Pi(V)^{\mathrm{lisse}} \simeq \pi$ est supercuspidale, donc tout vecteur de $\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$ est combinaison linéaire de vecteurs du type $(1-u)v$ avec $u \in \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $v \in \Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$. On conclut en utilisant l'inclusion $(1-u)\Pi(V)^{P-\mathrm{lisse}} \subset \Pi(V)_c^{P-\mathrm{lisse}}$ (remarque 7.5).

La deuxième partie s'obtient en combinant ce qu'on vient de démontrer avec la proposition 7.9. □

42. Noter que $v_x \in \Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}}$ grâce à la remarque 7.5.

8. Le G-module $\Pi(\pi,0)$

Le but de ce chapitre est d'expliquer la preuve du théorème suivant, dû à Colmez [16, 20].

Théorème 8.1. — *Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(\pi)$. Le choix d'isomorphismes $D_{\mathrm{pst}}(V_1) \simeq M(\pi)$ et $D_{\mathrm{pst}}(V_2) \simeq M(\pi)$ induit un isomorphisme de G-modules topologiques :*

$$\Pi(V_1)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_1)^{\mathrm{lisse}} \simeq \Pi(V_2)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_2)^{\mathrm{lisse}}.$$

Nous allons en fait démontrer un résultat nettement plus précis, et construire un isomorphisme explicite, ce qui est indispensable pour nos besoins. Comme la construction demande un certain nombre de préliminaires techniques, nous renvoyons le lecteur au théorème 8.6. Nous avons cherché à distinguer le plus soigneusement possible les identifications parfaitement canoniques de celles qui ne le sont qu'à scalaire près, ce qui alourdit un peu la rédaction, mais évite tout risque de confusion.

8.1. Points fixes de ψ et le G-module $tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1$. — Soit $V \in \mathcal{V}(\pi)$. Notons

$$tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1 = \{z \in D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1 |\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z), \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wz) \in tN_{\mathrm{rig}}(V)\}$$

et définissons d'une manière similaire $tN^{]0,r_n]}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1$ pour n assez grand. Il n'est pas clair *à priori* que $tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1$ soit stable sous l'action de G, mais nous allons voir que c'est en effet le cas. Ce résultat a déjà été démontré de manière très détournée dans le chapitre VI de [**16**], puis d'une manière complètement différente dans [**20**]. Nous en donnons une preuve différente.

Proposition 8.2. — *Pour tout $V \in \mathcal{V}(\pi)$ il existe n tel que l'inclusion*[43] $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^* \subset D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1$ *induise une inclusion*

$$(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^* \subset tN^{]0,r_n]}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1.$$

Démonstration. — Soit $m(V)$ comme dans la discussion qui suit la proposition 7.7 et soit $l \in (\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*$, vu comme élément de $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*$ nul sur $\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$. En combinant l'isomorphisme $\Pi(V)^{\mathrm{lisse}} \simeq \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, N^+_{\mathrm{dif}}(V)/D^+_{\mathrm{dif}}(V))^\Gamma$ (théorème 7.11) avec le théorème 7.8 et la proposition 7.7, on obtient $i_{j,n}(l) \in tN^+_{\mathrm{dif,n}}(V)$ pour $n \geq m(V)$ et $j \in \mathbf{Z}$. En particulier (en prenant $j = n$) $\varphi^{-n}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(l)) \in tN^+_{\mathrm{dif,n}}(V)$ pour $n \geq m(V)$ et donc $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(l) \subset tN^{]0,r_{m(V)}]}(V)$ (cf. l'exemple 6.5), ce qui permet de conclure (en remplaçant l par wl). $\square$

Rappelons que si Δ est un (φ,Γ)-module sur $\mathcal{R}$, il existe un unique opérateur ψ sur Δ qui commute avec Γ, s'annule sur $\sum_{i=1}^{p-1}(1+T)^i\varphi(\Delta)$ et satisfait $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}$. Soit maintenant $V \in \mathcal{V}(\pi)$ et identifions comme toujours $\check{V}$ avec V. Par construction, on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \psi \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \quad \text{sur} \quad D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1.$$

Ainsi, l'inclusion $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^* \subset D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1$ composée avec $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ induit une inclusion

$$[(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=1} \subset D_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}.$$

43. On identifie implicitement ici $\check{V}$ et V.

Théorème 8.3. — *L'inclusion précédente est un isomorphisme de $D(\Gamma)$-modules et induit un isomorphisme de $D(\Gamma)$-modules*

$$[(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1} \simeq (tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}.$$

En composant avec $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$ *on obtient un isomorphisme de $D(\Gamma)$-modules*

$$[(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1} \simeq (1-\varphi)(tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}.$$

Démonstration. — La seconde partie est une conséquence de la première, de l'égalité $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} = 1-\varphi$ sur $(tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}$ et du fait que $D_{\mathrm{rig}}(V)^{\varphi=1}=0$, car V n'est pas trianguline. Commençons par montrer que $[(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1} \subset D_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$ est un isomorphisme. Soit $D(V)$ le (φ,Γ)-module étale sur l'anneau de Fontaine $\mathcal{E}$ attaché à V par l'équivalence de catégories de Fontaine [**39**]. D'après [**16**, prop. V.1.18] l'application naturelle $D(\Gamma)\otimes_{\Lambda(\Gamma)} D(V)^{\psi=1} \to D_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$ est un isomorphisme de $D(\Gamma)$-modules, où $\Lambda(\Gamma)$ est l'algèbre des mesures sur Γ à valeurs dans L. Or [**23**, remarque V.14] l'application $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ induit un isomorphisme de $\Lambda(\Gamma)$-modules

$$(\Pi(V)^*)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1} \simeq D(V)^{\psi=1}.$$

Soit alors $z\in D_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=1}$ et écrivons

$$z=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma}\gamma(x_i)\mu_i(\gamma)$$

avec $x_i\in D(V)^{\psi=1}$ et $\mu_i\in D(\Gamma)$. Si $l_i\in(\Pi^*)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1}$ satisfont $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(l_i)=x_i$, alors

$$z=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(l),\quad \text{où}\quad l=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma}\left(\begin{smallmatrix} \chi_{\mathrm{cyc}}(\gamma) & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) l_i\mu_i(\gamma)\in[(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1},$$

ce qui permet de conclure.

Ensuite, la proposition 8.2 montre que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ induit une inclusion

$$[(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1} \subset (tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}.$$

Soit $z\in(tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}$. D'après ce que l'on vient de faire, il existe $l\in[(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1}$ tel que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(l)=z$. Nous allons montrer que l s'annule sur $\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}=\Pi(V)_c^{P-\mathrm{lisse}}$ (l'égalité découle du théorème 7.11), ce qui permettra de conclure. Soit $a\geq m(V)$ tel que $z\in D^{]0,r_a]}(V)$. Comme $\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) l=l$, on a $i_{j,n}(l)=\varphi^{-n}(z)\in tN^+_{\mathrm{dif},\mathrm{n}}(V)$ pour $n\geq a$ et $j\in\mathbf{Z}$. Le résultat s'obtient alors en combinant les propositions 7.7 et 7.9 avec le théorème 7.8. □

Proposition 8.4. — *Pour tout $V\in\mathcal{V}(\pi)$*

a) Le sous-espace $tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes\mathbf{Z}_p^*:=(tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=0}$ est stable sous l'involution $w=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ de $D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes\mathbf{Z}_p^*=D_{\mathrm{rig}}(V)^{\psi=0}$.

b) Le sous-espace $tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes\mathbf{P}^1$ de $D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes\mathbf{P}^1$ est stable sous l'action de G.

Démonstration. — a) Le caractère central de $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ étant trivial, l'involution w de $(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*$ laisse stable $[(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*]^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1}$. La dernière partie du théorème 8.3 entraîne la stabilité de $(1-\varphi)(tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}$ par w. Ensuite, $tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{Z}_p^* = (tN_{\mathrm{rig}})^{\psi=0}$ est engendré comme $D(\Gamma)$-module par $(1-\varphi)(tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=1}$ (cela suit par exemple de [**50**, prop. 4.3.8]), ce qui permet de conclure, en utilisant le fait que $w\circ\sigma_a = \sigma_{a^{-1}}\circ w$ sur $D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ (qui suit de l'égalité $w\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)w$).

b) C'est une conséquence formelle de la stabilité de $tN_{\mathrm{rig}}(V)$ par $P^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p\setminus\{0\} & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et du point a). □

8.2. La représentation $\Pi(\pi,0)$. — Nous avons besoin du résultat suivant de Colmez, qui permet de se débarrasser de la dépendance en la filtration de Hodge dans les constructions précédentes.

Théorème 8.5. — *Soit $V\in\mathcal{V}(\pi)$. Choisissons un isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V)\simeq M(\pi)$, induisant un isomorphisme $N_{\mathrm{rig}}(V)\simeq N_{\mathrm{rig}}(\pi)$. L'involution de $(tN_{\mathrm{rig}}(\pi))^{\psi=0}$ induite (proposition 8.4) par l'involution w de $(tN_{\mathrm{rig}}(V))^{\psi=0}$ ne dépend ni du choix de $V\in\mathcal{V}(\pi)$ ni du choix de l'isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V)\simeq M(\pi)$.*

Démonstration. — L'indépendance par rapport au choix de l'isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V)\simeq M(\pi)$ est claire, car deux tels isomorphismes diffèrent par un scalaire. L'indépendance par rapport au choix de $V\in\mathcal{V}(\pi)$ a été démontrée (par voie très détournée) dans le paragraphe 9 du chapitre VI de [**16**] (se rappeler que les éléments de $\mathcal{V}(\pi)$ sont classifiés par la filtration de Hodge sur $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$). Le lecteur trouvera une preuve nettement plus simple dans [**20**], qui exploite la description explicite de l'action infinitésimale de G sur $tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes\mathbf{P}^1$. □

Notons encore w l'involution de $(tN_{\mathrm{rig}}(\pi))^{\psi=0}$ obtenue dans le théorème 8.5. L'existence de cette involution combinée avec le fait que $tN_{\mathrm{rig}}(\pi)$ est un (φ,Γ)-module sur $\mathcal{R}$ permettent de copier les constructions usuelles de Colmez (voir le paragraphe 2 du chapitre II de [**16**]) et d'obtenir un faisceau G-équivariant $U\to tN_{\mathrm{rig}}(\pi)\boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ dont les sections sur $\mathbf{Z}_p$ sont $tN_{\mathrm{rig}}(\pi)$, muni de l'action canonique de P^+ définie par

$$\begin{pmatrix} p^k a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} z = (1+T)^b\sigma_a(\varphi^k(z)).$$

Notons qu'en copiant ces constructions on obtient *à priori* seulement un faisceau équivariant sous l'action du groupe libre engendré par P^+ et w, mais toutes les relations qui ont lieu dans G sont satisfaites aussi par les sections de ce faisceau, car c'est le cas pour le faisceau attaché à $D_{\mathrm{rig}}(V)$ (pour un $V\in\mathcal{V}(\pi)$ quelconque) et car $tN_{\mathrm{rig}}(V)\subset D_{\mathrm{rig}}(V)$.

Soit $V\in\mathcal{V}(\pi)$. Fixons un isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V)\simeq M(\pi)$, qui induit un isomorphisme $tN_{\mathrm{rig}}(V)\simeq tN_{\mathrm{rig}}(\pi)$. Cet isomorphisme s'étend par construction en un isomorphisme G-équivariant

$$tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes\mathbf{P}^1\simeq tN_{\mathrm{rig}}(\pi)\boxtimes\mathbf{P}^1,$$

qui dépend du choix de l'isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V)\simeq M(\pi)$, mais uniquement à scalaire près. Ensuite, par construction de $tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes\mathbf{P}^1$, on dispose d'une inclusion G-équivariante canonique

$$tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes\mathbf{P}^1\subset D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes\mathbf{P}^1.$$

On en déduit une inclusion G-équivariante

$$tN_{\mathrm{rig}}(\pi)\boxtimes \mathbf{P}^1 \subset D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1,$$

canonique à scalaire près; son image est donc un sous-G-module canonique de $D_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1$. Enfin, la proposition 8.2 fournit une inclusion canonique $(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^* \subset tN_{\mathrm{rig}}(V)\boxtimes \mathbf{P}^1$, donc une inclusion G-équivariante

$$(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^* \subset tN_{\mathrm{rig}}(\pi)\boxtimes \mathbf{P}^1,$$

canonique à scalaire près.

Après ces préliminaires un peu pédants mais malheureusement nécessaires, on peut démontrer le résultat suivant, dû à Colmez [**16, 20**]. Notre preuve est différente de celles trouvées dans loc.cit., mais elle s'inspire fortement d'une astuce que l'on peut trouver dans [**20**].

Théorème 8.6. — *Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(\pi)$. On a*

$$(\Pi(V_1)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_1)^{\mathrm{lisse}})^* = (\Pi(V_2)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_2)^{\mathrm{lisse}})^*$$

à l'intérieur de $tN_{\mathrm{rig}}(\pi)\boxtimes \mathbf{P}^1$. Ainsi, il existe un isomorphisme canonique à scalaire près $\Pi(V_1)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_1)^{\mathrm{lisse}} \simeq \Pi(V_2)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_2)^{\mathrm{lisse}}$.

Démonstration. — La seconde assertion est une conséquence de la première et de la discussion qui précède le théorème 8.6. Notons pour simplifier $\Delta_j = D_{\mathrm{rig}}(V_j)$ et $N_{\mathrm{rig}} = N_{\mathrm{rig}}(\pi)$, ainsi que $\Pi_j = \Pi(V_j)$. Fixons des identifications $N_{\mathrm{rig}}(V_j) = N_{\mathrm{rig}}$ et regardons $(\Pi_1^{\mathrm{an}}/\Pi_1^{\mathrm{lisse}})^*$ comme un sous-$D(G)$-module de $\Delta_2\boxtimes \mathbf{P}^1$, via la composée d'inclusions $(\Pi_1^{\mathrm{an}}/\Pi_1^{\mathrm{lisse}})^* \subset tN_{\mathrm{rig}}\boxtimes \mathbf{P}^1 \subset \Delta_2\boxtimes \mathbf{P}^1$ construites ci-dessus.

Montrons d'abord que $(\Pi_1^{\mathrm{an}}/\Pi_1^{\mathrm{lisse}})^*$ est contenu dans $(\Pi_2^{\mathrm{an}})^* \subset \Delta_2\boxtimes \mathbf{P}^1$. On déduit du théorème de Hahn-Banach et du caractère réflexif de $\Pi_1^{\mathrm{an}}/\Pi_1^{\mathrm{lisse}}$ que $\mathfrak{g}(\Pi_1^{\mathrm{an}})^*$ est dense dans $(\Pi_1^{\mathrm{an}}/\Pi_1^{\mathrm{lisse}})^*$, et puisque $(\Pi_2^{\mathrm{an}})^*$ est fermé dans $\Delta_2\boxtimes \mathbf{P}^1$, il suffit de montrer que $\mathfrak{g}(\Pi_1^{\mathrm{an}})^* \subset (\Pi_2^{\mathrm{an}})^*$, et même $u^+(\Pi_1^{\mathrm{an}})^* \subset (\Pi_2^{\mathrm{an}})^*$ (si cela est vrai, on déduit le résultat pour u^- en conjuguant par w, et pour a^+ et a^- en utilisant les relations $h = u^+u^- - u^-u^+ = 2a^+ = -2a^-$).

Autrement dit, il s'agit de montrer que $u^+(\Pi_1^{\mathrm{an}})^*$ et $(\Pi_2^{\mathrm{an}})^*$ sont orthogonaux dans $\Delta_2\boxtimes \mathbf{P}^1$. Soient Π_1^0 et Π_2^0 les boules unités pour des normes G-invariantes sur Π_1, respectivement Π_2. Alors $(\Pi_1^0)^*\otimes_{\mathcal{O}_L} L = \Pi_1^*$ et $(\Pi_2^0)^*\otimes_{\mathcal{O}_L} L = \Pi_2^*$ sont denses dans $(\Pi_1^{\mathrm{an}})^*$ et $(\Pi_2^{\mathrm{an}})^*$, respectivement ; il suffit donc de montrer que $u^+(\Pi_1^{(0)})^*$ et $(\Pi_2^{(0)})^*$ sont orthogonaux dans $\Delta_2\boxtimes \mathbf{P}^1$. Mais pour tous $x\in(\Pi_1^{(0)})^*$, $y\in(\Pi_2^{(0)})^*$ et $n\in\mathbf{Z}$ on a

$$\{u^+x, y\}_{\mathbf{P}^1} = \{\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)u^+x, \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)y\}_{\mathbf{P}^1} =$$

$$p^n\{u^+\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)x, \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)y\}_{\mathbf{P}^1} \in p^n\{u^+(\Pi_1^{(0)})^*, (\Pi_2^{(0)})^*\}_{\mathbf{P}^1}.$$

La compacité de $(\Pi_1^{(0)})^*$ et $(\Pi_2^{(0)})^*$ et la continuité de $\{\ \}_{\mathbf{P}^1}$ permettent de conclure que $\{u^+x, y\}_{\mathbf{P}^1} = 0$ et donc $\mathfrak{g}(\Pi_1^{\mathrm{an}})^* \subset (\Pi_2^{\mathrm{an}})^*$, comme voulu (cette dernière partie de l'argument est fortement inspirée de [**20**]).

Il nous reste à montrer que tout élément $l\in(\Pi_1^{\mathrm{an}}/\Pi_1^{\mathrm{lisse}})^*$, vu comme élément de $(\Pi_2^{\mathrm{an}})^*$, s'annule sur Π_2^{lisse}. D'après la proposition 8.2 il existe $a \geq m(V_1)$ tel que $(\Pi_1^{\mathrm{an}}/\Pi_1^{\mathrm{lisse}})^* \subset tN^{]0,r_a]}\boxtimes \mathbf{P}^1$, ce qui fait que $i_{j,n}(l)\in tN^+_{\mathrm{dif},n}(V_2)$ pour tous $j\in\mathbf{Z}$ et $n\geq a$. On conclut en utilisant les théorème 7.8 et 7.11, ainsi que les propositions 7.6 et 7.7. $\square$

Définition 8.7. — On note $\Pi(\pi,0)^*$ le sous-G-module de $tN_{\mathrm{rig}}(\pi)\boxtimes\mathbf{P}^1$ image de $(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*$ pour n'importe quel $V\in\mathcal{V}(\pi)$ et n'importe quel isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V)\simeq M(\pi)$. On note $\Pi(\pi,0)$ le dual topologique de $\Pi(\pi,0)^*$ muni de l'action duale de G.

Ainsi, $\Pi(\pi,0)$ est une représentation localement analytique de G sur un espace de type compact et pour tout $V\in\mathcal{V}(\pi)$ on dispose d'un isomorphisme $\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}\simeq\Pi(\pi,0)$, canonique à scalaire près. On peut reformuler comme suit le théorème 5.1.

Théorème 8.8. — *Il existe un morphisme G-équivariant continu non nul*

$$\Phi:\Pi(\pi,0)^*\to\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho.$$

9. Structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module sur $\Pi(\pi,0)^*$

Ce chapitre assez technique est un des points centraux de ce texte. On y explique dans un premier temps la construction d'un opérateur ∂, déduit de la connexion de l'équation différentielle p-adique de Berger, sur $\Pi(\pi,0)^*$. Cet opérateur joue un rôle tout à fait semblable à l'opérateur de "multiplication par z" sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ (z est la coordonnée sur Ω) et cette heuristique guide sa construction. L'observation de base est que cet opérateur sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ peut se décrire en comparant les actions infinitésimales a^+ et u^+ des groupes $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. En effet, on vérifie sans mal que

$$a^+-1=u^+\circ\partial.$$

Nous verrons que l'on peut définir un unique automorphisme ∂ du L-espace vectoriel topologique $\Pi(\pi,0)^*$ qui satisfait la relation précédente. Ce résultat est dû à Colmez **[20]**, mais nous avons décidé de le reprendre de manière assez détaillée, avec un argument différent et plus direct.

Puis nous montrons que l'analogie précédente n'est pas anodine et améliorons le résultat en munissant $\Pi(\pi,0)^*$ d'une structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module telle que la variable z agisse *via* ∂. Cet énoncé, dont la preuve exploite la dualité de Morita, jouera un rôle capital dans la suite.

Nous fixons $\Pi\in\mathcal{V}(\pi)$ et notons $V=V(\Pi)$, $D_{\mathrm{rig}}=D_{\mathrm{rig}}(V)$. On fixe un isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V)\simeq M(\pi)$, ce qui induit un isomorphisme $N_{\mathrm{rig}}=N_{\mathrm{rig}}(V)\simeq N_{\mathrm{rig}}(\pi)$ et (théorème 8.6 et ce qui suit) une identification $\Pi(\pi,0)=\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$. La construction qui suit ne dépend pas des choix faits, mais il convient de les introduire pour certains arguments techniques.

9.1. Construction de l'opérateur ∂ sur $\Pi(\pi,0)^*$.

— Le résultat suivant, qui sera utilisé constamment dans la suite, repose sur la proposition 6.4.

Proposition 9.1. — *L'opérateur u^+ est d'image fermée sur $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ et induit un homéomorphisme entre $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ et $u^+((\Pi^{\mathrm{an}})^*)$.*

Démonstration. — Considérons une suite $z_n=(x_n,y_n)\in(\Pi^{\mathrm{an}})^*\subset D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ telle que u^+z_n converge dans $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ vers $z=(x,y)\in(\Pi^{\mathrm{an}})^*$. Puisque $u^+z_n=(tx_n,-t\partial^2(y_n))$ (utiliser le théorème 7.3) converge dans $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ vers (x,y), il existe $a>0$ tel que $\lim_{n\to\infty}tx_n=x$, $\lim_{n\to\infty}(-t\partial^2(y_n))=y$ dans $D^{]0,r_a]}$. Comme $tD^{]0,r_a]}$ est fermé dans $D^{]0,r_a]}$ et la multiplication par

t est un homéomorphisme $D^{]0,r_a]}$ dans $tD^{]0,r_a]}$ (par le théorème de l'image ouverte), on conclut que $x = tx'$ avec $x' \in D^{]0,r_a]}$ et x_n tend vers x' dans $D^{]0,r_a]}$.

Pour les y_n l'argument est plus délicat. D'abord, le même raisonnement avec $D^{]0,r_a]}$ remplacé par $N^{]0,r_a]}$ (noter que $\partial^2(y_n) \in N^{]0,r_a]}$ pour tout n assez grand, en grandissant éventuellement a) montre que $y = -tu$ avec $u \in N^{]0,r_a]}$, et $\partial^2(y_n)$ tend vers u dans $N^{]0,r_a]}$. En particulier $\partial^2(y_n)$ converge vers u dans N_{rig}. Mais $\partial : N_{\mathrm{rig}} \to N_{\mathrm{rig}}$ étant une bijection linéaire continue entre des espaces LF (proposition 6.4), c'est un homéomorphisme (théorème de l'image ouverte), donc y_n converge dans N_{rig} vers $y' := \partial^{-2}(u)$.

On a donc montré l'existence de $x' \in D_{\mathrm{rig}}$ et $y' \in N_{\mathrm{rig}}$ tels que $x = tx'$, $y = -t\partial^2(y')$ et x_n tend vers x', alors que y_n tend vers y' dans N_{rig}. Il existe donc $b > a$ tel que y_n tend vers y' dans $N^{]0,r_b]}$. Alors $y_n \in D^{]0,r_b]}$ converge dans $N^{]0,r_b]}$ vers y' et comme $D^{]0,r_b]}$ est fermé dans $N^{]0,r_b]}$, on obtient $y' \in D^{]0,r_b]}$ et donc $z' := (x', y') \in D_{\mathrm{rig}} \times D_{\mathrm{rig}}$.

Pour montrer que l'image de u^+ est fermée, il reste à vérifier que $z' := (x', y') \in (\Pi^{\mathrm{an}})^*$, car si ce résultat est établi, l'égalité $z = u^+ z'$ est claire par construction. Le fait que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(y') = w(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(x'))$ suit en passant à la limite dans $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(y_n) = w(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(x_n))$. Donc $z' \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Il reste à vérifier que z' est orthogonal à $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$, ce qui suit du fait que les (x_n, y_n) le sont. Enfin, la dernière assertion est une conséquence de ce que l'on a déjà démontré et du théorème de l'image ouverte pour les Fréchets, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 9.2. — *L'opérateur u^+ est d'image fermée sur $\Pi(\pi, 0)^*$ et*

$$\Pi(\pi, 0)^*/u^+(\Pi(\pi, 0)^*) \simeq (\Pi(\pi, 0)^{u^+=0})^*.$$

Démonstration. — Le premier point découle directement de la proposition précédente. Ensuite, $\Pi(\pi, 0)^*/u^+\Pi(\pi, 0)^*$ est un Fréchet nucléaire d'après ce que l'on vient de démontrer. Il est donc réflexif et comme son dual est trivialement $\Pi(\pi, 0)^{u^+=0}$, cela permet de conclure. □

Théorème 9.3. — *Il existe une unique application linéaire continue $\partial : \Pi(\pi, 0)^* \to \Pi(\pi, 0)^*$ telle que l'on ait une égalité d'opérateurs sur $\Pi(\pi, 0)^*$*

$$a^+ - 1 = u^+ \circ \partial.$$

Démonstration. — L'unicité découle simplement du fait que u^+ est injectif sur $\Pi(\pi, 0)^*$, le point délicat est l'existence. Soit $l \in \Pi(\pi, 0)^*$, on veut démontrer que $l_1 := a^+ l - l$ est dans $u^+\Pi(\pi, 0)^*$. D'après le corollaire précédent, il suffit de voir que l_1 s'annule sur $\Pi(\pi, 0)^{u^+=0} = (\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}})^{u^+=0}$. En considérant l_1 comme une forme linéaire sur Π^{an} s'annulant sur Π^{lisse}, il s'agit de montrer que $l_1(a^+v + v) = 0$ pour tout $v \in \Pi^{\mathrm{an}}$ tel que $u^+v \in \Pi^{\mathrm{lisse}}$. Il suffit donc de démontrer le

Lemme 9.4. — *Soit $v \in \Pi^{\mathrm{an}}$ tel que $u^+v \in \Pi^{\mathrm{lisse}}$. Alors $v_1 := a^+v + v \in \Pi^{\mathrm{lisse}}$.*

Démonstration. — La relation $u^+(a^+ + 1) = a^+u^+$ et le fait que $a^+u^+v = 0$ montrent que $u^+v_1 = 0$. Comme le Casimir agit par 0 sur Π^{an} (théorème 7.3), on obtient aussi

$$u^-u^+v + a^+v + (a^+)^2v = 0,$$

et donc $a^+v_1 = 0$ (car $u^-u^+v = 0$ par hypothèse). Le théorème 7.11 permet de conclure. □

Ce qui précède montre l'existence d'une unique application $\partial : \Pi(\pi,0)^* \to \Pi(\pi,0)^*$ telle que $a^+ - 1 = u^+\partial$. Par unicité, ∂ est linéaire. La continuité suit de la continuité de l'application $a^+ - 1 : \Pi(\pi,0)^* \to \Pi(\pi,0)^*$ et du fait que u^+ réalise un homéomorphisme de $\Pi(\pi,0)^*$ sur le fermé $u^+(\Pi(\pi,0)^*)$ de $\Pi(\pi,0)^*$. □

Le résultat suivant montre que la connaissance de u^+ et ∂ sur $\Pi(\pi,0)^*$ équivaut à la connaissance de toute l'action de $U(\mathfrak{sl}_2)$:

Proposition 9.5. — *a) En tant qu'opérateurs sur* $\Pi(\pi,0)^*$

$$a^+ = \partial \circ u^+, \quad \partial u^+ - u^+\partial = 1, \quad u^- = -\partial a^+ = -\partial^2 u^+.$$

b) Pour tout $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$, *le choix d'un isomorphisme* $\Pi(\pi,0) \simeq \Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$ *induit une inclusion* $\mathfrak{g}(\Pi^{\mathrm{an}})^* \subset \Pi(\pi,0)^*$ *et on a une égalité d'opérateurs sur* $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$

$$a^+ = \partial \circ u^+, \quad u^- = -\partial a^+ = -\partial^2 u^+.$$

Démonstration. — a) On a

$$u^+a^+ = a^+u^+ - u^+ = (a^+ - 1)u^+ = u^+\partial u^+,$$

ce qui permet de conclure pour la première égalité, car u^+ est injective sur $\Pi(\pi,0)^*$. La seconde relation s'en déduit. Ensuite, comme le Casimir agit trivialement sur $\Pi(\pi,0)^*$ et que $u^+u^- - u^-u^+ = h = 2a^+$, on a

$$u^+u^- = a^+ - (a^+)^2 = -u^+\partial a^+,$$

donc $u^- = -\partial a^+ = -\partial^2 u^+$, comme voulu.

b) L'inclusion est claire. Soit $l \in (\Pi^{\mathrm{an}})^*$, alors $l_1 = u^+l \in \Pi(\pi,0)^*$ et donc $a^+l_1 - l_1 = u^+\partial l_1$, autrement dit $a^+u^+l - u^+l = u^+\partial u^+l$. En utilisant la relation $u^+a^+ = a^+u^+ - u^+$ sur $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ on obtient bien $u^+(a^+l - \partial u^+l) = 0$, ce qui permet de conclure pour la première relation, car u^+ est injectif sur $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$. Puisque Π^{an} a un caractère infinitésimal nul (théorème 7.3) la relation $u^- = -\partial a^+ = -\partial^2 u^+$ s'en déduit comme dans la preuve de la partie a). □

Enfin, il sera utile de comprendre le lien entre l'action de G et les opérateurs ∂ et u^+, lien fourni par le :

Théorème 9.6. — *Pour tout* $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ *l'opérateur* $a - c\partial$ *est inversible sur* $\Pi(\pi,0)^*$ *et*

$$g \circ \partial \circ g^{-1} = (d\partial - b)(a - c\partial)^{-1}, \quad gu^+g^{-1} = \frac{1}{\det g}(a - c\partial)^2 u^+.$$

Démonstration. — On commence par montrer

Lemme 9.7. — $\partial + x$ *est injectif sur* $\Pi(\pi,0)^*$ *pour tout* $x \in \mathbf{Q}_p$.

Démonstration. — En conjuguant la relation $a^+ - 1 = u^+\partial$ avec $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et en utilisant l'identité

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) a^+ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = a^+ + xu^+,$$

ainsi que l'injectivité de u^+ sur $\Pi(\pi,0)^*$, on obtient

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \partial \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \partial + x.$$

On peut donc supposer que $x = 0$, et il suffit de voir que $a^+ - 1$ est injectif sur $\Pi(\pi, 0)^*$. En plongeant $\Pi(\pi, 0)^*$ dans $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, on se ramène à montrer l'injectivité de $a^+ - 1$ sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, qui suit du lemme 6.3. □

Passons maintenant à la preuve du théorème. En conjuguant la relation $a^+ - 1 = u^+ \circ \partial$ avec g, on obtient

$$ga^+g^{-1} - 1 = gu^+g^{-1} \circ g\partial g^{-1}.$$

Un calcul immédiat montre les identités suivantes dans $D(G)$, donc aussi dans $\Pi(\pi, 0)^*$

$$ga^+g^{-1} = \frac{1}{\det g}(ada^+ - abu^+ + cdu^- - bca^-) \quad \text{et} \quad gu^+g^{-1} = \frac{1}{\det g}(-ach + a^2u^+ - c^2u^-).$$

En utilisant la proposition 9.5 (ainsi qu'un calcul direct laissé au lecteur), ces identités se réécrivent

$$gu^+g^{-1} = \frac{1}{\det g}(a - c\partial)^2u^+ \quad \text{et} \quad ga^+g^{-1} = \frac{1}{\det g}(a - c\partial)(d\partial - b)u^+ \tag{6}$$

Nous avons besoin du

Lemme 9.8. — *On a une égalité d'opérateurs sur* $\Pi(\pi, 0)^*$

$$g\partial g^{-1}(a - c\partial) = d\partial - b.$$

Démonstration. — Pour simplifier les formules, posons $x = a - c\partial$ et $y = d\partial - b$. La relation $\partial u^+ - u^+\partial = 1$ fournit alors

$$yu^+x - xu^+y = \det g,$$

qui, combinée avec la relation (6), donne

$$\left(ga^+g^{-1} - 1\right)x = \left(\frac{1}{\det g}xyu^+ - 1\right)x = \frac{1}{\det g}xyu^+x - x =$$

$$\frac{1}{\det g}x(xu^+y + \det g) - x = \frac{1}{\det g}x^2u^+y = gu^+g^{-1}y.$$

En combinant ceci avec la relation $\left(ga^+g^{-1} - 1\right)x = gu^+g^{-1} \circ g\partial g^{-1}x$ et avec l'injectivité de gu^+g^{-1} sur $\Pi(\pi, 0)^*$, on obtient enfin $g\partial g^{-1}x = y$, ce qui permet de conclure. □

Le théorème 9.6 est ainsi réduit à la preuve de l'inversibilité de $a - c\partial$. Or, on déduit du lemme 9.8 la relation

$$(c \cdot g\partial g^{-1} + d)(a - c\partial) = \det g,$$

ce qui permet de conclure. □

9.2. Construction de la structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module. — Afin de prouver dans la section suivante que le morphisme Φ du théorème 8.8 est surjectif, il sera vital de savoir que l'on peut munir $\Pi(\pi,0)^*$ d'une structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module, et c'est à cette tâche qu'est consacrée ce paragraphe. Vu la construction de l'opérateur ∂ dans le paragraphe 9.1, le lecteur ne sera pas surpris par l'énoncé du

Théorème 9.9. — *Il existe une unique structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module sur $\Pi(\pi,0)^*$ qui soit compatible avec sa structure de L-espace vectoriel et telle que $z.l = \partial(l)$ pour tout $l \in \Pi(\pi,0)^*$.*

La preuve du théorème 9.9 occupe le reste de ce chapitre. L'argument suit un chemin un peu détourné, car l'opérateur ∂ sur $\Pi(\pi,0)$ (ou son dual) ne préserve pas de sous-espaces de Banach "évidents" de $\Pi(\pi,0)$ (en particulier, il ne préserve pas les vecteurs localement analytiques de rayon fixé). La raison en est que même si ∂ est construit à partir de la connexion ∂ sur N_{rig}, sa définition fait aussi apparaître ∂^{-1}, qui est difficilement contrôlable. Pour contourner ces difficultés, nous utilisons la dualité de Morita, des arguments d'analyse fonctionnelle et le résultat technique suivant. On note $\langle\ ,\ \rangle$ l'accouplement canonique entre $\Pi(\pi,0)^*$ et $\Pi(\pi,0)$.

Proposition 9.10. — *Soient $v \in \Pi(\pi,0)$ et $l \in \Pi(\pi,0)^*$. L'application*

$$\phi_{l,v} : \mathbf{Q}_p \to L, \quad \phi_{l,v}(x) = \langle (\partial - x)^{-1} l, v\rangle$$

s'étend en une fonction localement analytique sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, nulle à l'infini.

Démonstration. — Posons $\phi_{l,v}(\infty) = 0$. Pour montrer que $\phi_{l,v}$ est localement analytique, nous aurons besoin du résultat suivant :

Lemme 9.11. — *Pour tous $g \in G$, $l \in \Pi(\pi,0)^*$, $v \in \Pi(\pi,0)$ et $x \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ on a*

$$\phi_{l,v}(gx) = \frac{cx+d}{\det g}\phi_{(c\partial+d)g^{-1}l,g^{-1}v}(x).$$

Démonstration. — C'est un calcul un peu fastidieux dont l'ingrédient clé est le théorème 9.6. Explicitement, en utilisant deux fois ce théorème on obtient, en posant $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$:

$$\phi_{l,v}(gx) = \langle (\partial - gx)^{-1} l, v\rangle = (cx+d)\langle (d\partial - b + x(c\partial - a))^{-1} l, v\rangle$$

$$= -(cx+d)\langle (a-c\partial)^{-1}(x-(d\partial-b)(a-c\partial)^{-1})^{-1} l, v\rangle = -(cx+d)\langle (a-c\partial)^{-1}(x - g\partial g^{-1})^{-1} l, v\rangle$$

$$= (cx+d)\langle (a-c\partial)^{-1} g(\partial - x)^{-1} g^{-1} l, v\rangle = (cx+d)\langle (a - cg^{-1}\partial g)^{-1}(\partial - x)^{-1} g^{-1} l, g^{-1} v\rangle$$

$$= \frac{cx+d}{\det g}\langle (c\partial + d)(\partial - x)^{-1} g^{-1} l, g^{-1} v\rangle = \frac{cx+d}{\det g}\phi_{(c\partial+d)g^{-1}l,g^{-1}v}.$$

□

Il suffit donc de voir que $\phi_{l,v}$ est analytique au voisinage de 0. Notons que grâce au théorème 9.6 on a [44]

$$\phi_{l,v}(x) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \partial^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) l, v\rangle = \langle l, \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \partial^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v\rangle.$$

En écrivant $\Pi(\pi,0) = \Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$, pour un choix de $\Pi \in \mathcal{V}(\pi)$, et en filtrant Π "par rayon d'analyticité" (voir [**23**, chap. IV] pour les détails), on peut écrire $\Pi(\pi,0)$ comme une réunion

44. On définit les opérateurs ∂, ∂^{-1} sur $\Pi(\pi,0)$ par dualité.

croissante d'espaces de Banach $\Pi(\pi,0)^{(h)}$ ($h\in\mathbf{N}^*$), stables par $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, mais *pas* par ∂ ou ∂^{-1}. Soit h tel que $v\in\Pi(\pi,0)^{(h)}$. La fonction $x\to\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v$ étant analytique au voisinage de 0, à valeurs dans le Banach $\Pi(\pi,0)^{(h)}$, on peut écrire pour $x\in p^N\mathbf{Z}_p$ (N assez grand, ne dépendant que de v)

$$\left(\begin{smallmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v=\sum_{n\geq 0}x^n v_n$$

avec $v_n\in\Pi(\pi,0)^{(h)}$. On a $p^{nN}v_n\to 0$ dans $\Pi(\pi,0)^{(h)}$, donc aussi dans $\Pi(\pi,0)$. Puisque ∂ est un homéomorphisme de $\Pi(\pi,0)$ (car elle est linéaire bijective et que $\Pi(\pi,0)$ est un espace de type compact), on a $p^{nN}\partial^{-1}(v_n)\to 0$ dans $\Pi(\pi,0)$. Il existe donc $h'\geq h$ tel que $p^{nN}\partial^{-1}(v_n)\to 0$ dans $\Pi(\pi,0)^{(h')}$. Posons

$$v_n'=p^{nN}\partial^{-1}(v_n).$$

Ainsi, pour tout $x\in p^N\mathbf{Z}_p$ on a (par continuité de ∂^{-1} et de la restriction de l à $\Pi(\pi,0)^{(h')}$)

$$\phi_{l,v}(x)=\langle l,\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\partial^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v\rangle=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{p^N}\right)^n l\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v_n'\right).$$

Puisque v_n' tendent vers 0 dans $\Pi(\pi,0)^{(h')}$, il existe M, dépendant de h', tel que les fonctions

$$f_n:\mathbf{Z}_p\to L,\quad f_n(x)=l\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)v_n'\right)$$

tendent vers 0 dans l'espace des fonctions analytiques sur $a+p^M\mathbf{Z}_p$ pour tout $a\in\mathbf{Z}_p$ (cela découle du théorème IV.6 et de la remarque IV.15 de [**23**]). On en déduit que la fonction

$$x\mapsto\phi_{l,v}(x)=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{p^N}\right)^n f_n(x)$$

est analytique au voisinage de 0, ce qui permet de conclure. $\square$

Passons maintenant à la preuve du théorème 9.9. Soit $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}$ la *Steinberg analytique*, quotient de l'espace $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))$ des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, à valeurs dans L, par les fonctions constantes. Nous ferons un usage constant du résultat classique et fondamental suivant, connu sous le nom de dualité de Morita.

Proposition 9.12. — *a) Soit $\lambda\in\mathcal{O}(\Omega)^*$. La fonction f_λ définie (pour $x\in\mathbf{Q}_p$) par*

$$f_\lambda(x)=\lambda\left(\frac{1}{z-x}\right)$$

s'étend en une fonction localement analytique sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, nulle à l'infini. De plus, l'application $\lambda\mapsto f_\lambda$ induit un isomorphisme de L-espaces vectoriels topologiques [45]

$$\mathcal{O}(\Omega)^*\simeq\mathrm{St}^{\mathrm{an}}.$$

b) La transposée de l'isomorphisme précédent est (via l'identification $\mathcal{O}(\Omega)^{**}=\mathcal{O}(\Omega)$) l'application $\mu\mapsto f_\mu\in\mathcal{O}(\Omega)$, où

$$f_\mu(z)=\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}\frac{1}{z-x}\mu(x).$$

45. C'est même un isomorphisme de G-représentations, si l'on remplace $\mathcal{O}(\Omega)$ par $\Omega^1(\Omega)$.

Soit

$$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}_{x \in \mathbf{Q}_p} \frac{1}{z-x} \subset \mathcal{O}(\Omega)$$

le sous L-espace vectoriel de $\mathcal{O}(\Omega)$ engendré par les fonctions $\frac{1}{z-x}$ pour $x \in \mathbf{Q}_p$. Si $f \in \mathcal{S}$, on note μ_f l'élément de $(\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^*$ qui correspond à f via l'isomorphisme $\mathcal{O}(\Omega) \simeq (\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^*$. Explicitement,

$$\mu_f = \sum_{x \in \mathbf{Q}_p} a_x \delta_x - \left(\sum_{x \in \mathbf{Q}_p} a_x \right) \delta_\infty \quad \text{si} \quad f = \sum_{x \in \mathbf{Q}_p} \frac{a_x}{z-x} \in \mathcal{S}.$$

Notons que $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathcal{O}(\Omega)$ (cela découle directement de la proposition 9.12 et du théorème de Hahn-Banach).

Le théorème 9.6 donne un sens à la définition suivante :

Définition 9.13. — Si $f = \sum_{x \in \mathbf{Q}_p} \frac{a_x}{z-x} \in \mathcal{S}$, on définit un opérateur linéaire continu

$$T_f : \Pi(\pi, 0)^* \to \Pi(\pi, 0)^*, \quad T_f(l) = \sum_{x \in \mathbf{Q}_p} a_x (\partial - x)^{-1}(l) \in \Pi(\pi, 0)^*.$$

Notons que par construction on a pour tous $l \in \Pi(\pi,0)^*, v \in \Pi(\pi, 0), f \in \mathcal{S}$

$$\langle T_f(l), v \rangle = \sum_{x \in \mathbf{Q}_p} a_x \phi_{l,v}(x) = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi_{l,v} \mu_f, \tag{7}$$

puisque $\phi_{l,v}$ s'annule à l'infini.

Proposition 9.14. — *Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ qui converge vers f dans $\mathcal{O}(\Omega)$. Alors la suite d'opérateurs T_{f_n} converge faiblement vers un opérateur continu T_f : $\Pi(\pi, 0)^* \to \Pi(\pi, 0)^*$.*

Démonstration. — Posons $g_n = f_n - f_{n-1}$, de telle sorte que $g_n \in \mathcal{S}$ tend vers 0 dans $\mathcal{O}(\Omega)$. Si $v \in \Pi(\pi, 0)$ et $l \in \Pi(\pi, 0)^*$ on a

$$\langle T_{g_n}(l), v \rangle = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi_{l,v} \mu_{g_n}.$$

Comme g_n tend vers 0 dans $\mathcal{O}(\Omega)$, μ_{g_n} tend vers 0 dans $(\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^*$ (par dualité de Morita) et donc μ_{g_n} tend faiblement vers 0 dans $(\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^*$, ce qui permet de conclure que $\lim_{n \to \infty} \langle T_{g_n}(l), v \rangle = 0$. Combiné avec le lemme 5.10 et la réflexivité de $\Pi(\pi, 0)$, cela montre que $\lim_{n \to \infty} T_{g_n}(l) = 0$ dans $\Pi(\pi, 0)^*$. Ainsi, $\lim_{n \to \infty}(T_{f_n}(l) - T_{f_{n-1}}(l)) = 0$ et comme $\Pi(\pi, 0)^*$ est complet, la suite d'opérateurs $(T_{f_n})_n$ converge faiblement. La continuité de la limite découle du théorème de Banach-Steinhaus. □

Proposition 9.15. — *a) Pour tous $f \in \mathcal{O}(\Omega), l \in \Pi(\pi, 0)^*, v \in \Pi(\pi, 0)$ on a*

$$\langle T_f(l), v \rangle = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi_{l,v} \mu_f.$$

b) Si $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ tend vers $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, alors pour tout $l \in \Pi(\pi, 0)^*$ on a

$$\lim_{n \to \infty} T_{f_n}(l) = T_f(l) \quad \textit{dans} \quad \Pi(\pi, 0)^*.$$

Démonstration. — a) Soit $(f_n)_n$ comme dans la proposition précédente, alors

$$\langle T_f(l), v\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T_{f_n}(l), v\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi_{l,v}\mu_{f_n} = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi_{l,v}\mu_f,$$

la dernière égalité étant une conséquence du fait que (μ_{f_n}) converge faiblement vers μ_f (encore une fois, par dualité de Morita).

b) Le lemme 5.10 montre qu'il suffit de vérifier que $\lim_{n\to\infty}\langle T_{f_n}(l), v\rangle = \langle T_f(l), v\rangle$ pour tout $v \in \Pi(\pi, 0)^*$. Cela découle directement du a) et de la dualité de Morita. □

Le théorème 9.9 se déduit maintenant facilement de ce qui précède. En effet, la structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module sur $\Pi(\pi, 0)^*$ s'obtient en posant $f.l = T_f(l)$ pour $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $l \in \Pi(\pi, 0)^*$. Le seul point qu'il nous reste à vérifier est que $(fg).l = f.(g.l)$ pour tous $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $l \in \Pi(\pi, 0)^*$. Par densité de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ et la continuité des applications $l \mapsto f.l$ et $f \mapsto f.l$ (qui découle des résultats précédents), on se ramène au cas où $f, g \in \mathcal{S}$, et ensuite au cas $f = \frac{1}{z-x}$ et $g = \frac{1}{z-y}$, avec $x, y \in \mathbf{Q}_p$. De plus (encore par continuité), on peut supposer que $x \neq y$. Mais alors

$$fg = \frac{1}{x-y}\cdot\left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y}\right) \in \mathcal{S},$$

et le résultat voulu découle de l'identité

$$(\partial - x)^{-1} \circ (\partial - y)^{-1} = \frac{1}{x-y}((\partial - x)^{-1} - (\partial - y)^{-1})$$

valable sur $\Pi(\pi, 0)^*$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème 9.9, mais il nous sera très utile par la suite.

Proposition 9.16. — *Tout morphisme G-équivariant continu $\Phi : \Pi(\pi, 0)^* \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ est $\mathcal{O}(\Omega)$-linéaire.*

Démonstration. — Les opérateurs ∂ et u^+ satisfont $a^+ - 1 = u^+\partial$ sur les deux espaces $\Pi(\pi, 0)^*$ et $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$. Puisque Φ est G-équivariant, il commute à a^+ et u^+. On en déduit que $u^+\Phi(\partial l) = u^+\partial\Phi(l)$ pour tout $l \in \Pi(\pi, 0)^*$. Puisque u^+ est injectif sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$, on en déduit que Φ commute avec ∂. Il commute donc aussi avec $(\partial - x)^{-1}$ pour tout $x \in \mathbf{Q}_p$. On en déduit que $\Phi(f.l) = f\Phi(l)$ pour tout $f \in \mathcal{S}$ et tout $l \in \Pi(\pi, 0)^*$, et le résultat s'ensuit grâce à la densité de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ et au point b) de la proposition 9.15. □

10. Surjectivité de Φ

Ce chapitré est consacré à la preuve du résultat suivant, preuve qui doit beaucoup à des discussions avec Laurent Fargues et Pierre Colmez.

Théorème 10.1. — *Tout morphisme G-équivariant continu et non nul $\Phi : \Pi(\pi, 0)^* \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ est surjectif.*

En appliquant [**68**, lemma 3.6] et le théorème 8.8, on en déduit que le $D(G)$-module $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ est coadmissible. En décomposant $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ selon l'action de D^*, on obtient la coadmissibilité du $D(G)$-module $\mathcal{O}(\Sigma_n)$.

La preuve du théorème 10.1 se fait en deux étapes : on établit d'abord que l'image de Φ est dense en utilisant des résultats de Kohlhaase [**54**] sur le lien entre certains fibrés G-équivariants sur la tour de Drinfeld et certains fibrés D^*-équivariants sur la tour de Lubin-Tate. Un argument d'analyse fonctionnelle permet alors de conclure que Φ est surjectif. Les deux étapes utilisent de manière cruciale la structure de $\mathcal{O}(\Omega)$-module sur $\Pi(\pi,0)^*$ et le fait que Φ est $\mathcal{O}(\Omega)$-linéaire. Nous utiliserons aussi systématiquement les résultats du chapitre 3 de [**68**] concernant les modules coadmissibles sur une algèbre de Fréchet-Stein (qui sera dans notre cas l'algèbre des fonctions rigides analytiques sur une variété Stein sur $\mathbf{Q}_p$).

10.1. Les tours jumelles. — Si X vit sur $\mathbf{Q}_p$, $\breve{X}$ désigne l'extension des scalaires $X\hat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\breve{\mathbf{Q}}_p$.

Lemme 10.2. — *Soit $F : X \to Y$ un morphisme d'espaces de Fréchet, tel que $\breve{F} : \breve{X} \to \breve{Y}$ soit d'image dense. Alors F est d'image dense.*

Démonstration. — Soit l une forme linéaire continue s'annulant sur l'image de F. Alors pour tout $a \in \breve{\mathbf{Q}}_p$

$$\breve{l}(\breve{F}(x\hat{\otimes}a)) = \breve{l}(F(x)\hat{\otimes}a) = a \cdot l(F(x)) = 0.$$

Donc $\breve{l} \circ \breve{F}$ s'annule sur l'image de $X \otimes_{\mathbf{Q}_p} \breve{\mathbf{Q}}_p$ dans $\breve{X}$. Cette image étant dense, on a $\breve{l} \circ \breve{F} = 0$ et comme $\breve{F}$ est d'image dense on a $\breve{l} = 0$. Mais alors pour tout $y \in Y$ on a $l(y) = \breve{l}(y\hat{\otimes}1) = 0$, d'où le résultat. □

Avant de prouver que Φ est surjective, on va montrer que Φ est d'image dense. D'après le lemme précédent, il suffit de le faire pour $\breve{\Phi}$.

Proposition 10.3. — *L'image de $\breve{\Phi}$ est dense dans $\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n)^\rho$.*

Démonstration. — Notons $W = \overline{\mathrm{Im}(\breve{\Phi})}$ l'adhérence de l'image de $\breve{\Phi}$: c'est un sous-$\mathcal{O}(\breve{\Omega})$-module coadmissible (sur $\mathcal{O}(\breve{\Omega})$) de $\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n)^\rho$, puisqu'un sous-module fermé d'un module coadmissible est lui-même coadmissible et puisque $\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n)$ est coadmissible, en tant que $\mathcal{O}(\breve{\Omega})$-module projectif de type fini [**68**]. On a donc une suite exacte G-équivariante de $\mathcal{O}(\breve{\Omega})$-modules coadmissibles

$$0 \to W \to \mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n)^\rho \to \mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n)^\rho/W \to 0.$$

Comme $\breve{\Omega}$ est une variété Stein, cette suite exacte revient exactement à la donnée d'une suite exacte de faisceaux cohérents G-équivariants sur $\breve{\Omega}$, que nous noterons

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{F}' \to 0.$$

Le faisceau $\mathcal{G}$ est un fibré vectoriel, puisque $\breve{\mathcal{M}}_n$ est un revêtement étale de $\breve{\Omega}$. Les faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ aussi : comme $\breve{\Omega}$ est une courbe lisse, il suffit en effet de voir qu'ils sont sans torsion. Or la partie de torsion d'un faisceau cohérent G-équivariant sur $\mathcal{O}(\breve{\Omega})$ est un sous-ensemble discret de $\breve{\Omega}$ stable par G : c'est donc l'ensemble vide. La suite exacte ci-dessus est donc une suite exacte de *fibrés G-équivariants sur* $\breve{\Omega}$.

Pour montrer que ces deux fibrés sont isomorphes, nous allons faire appel aux résultats de [**54**]. Commençons par fixer quelques notations. On note $\breve{\mathcal{M}}_0^{(0)}$ la composante de $\breve{\mathcal{M}}_0$ correspondant au lieu où la quasi-isogénie est de hauteur 0, et $\breve{\mathcal{M}}_n^{(0)}$ ses revêtements. On note aussi $\breve{\mathcal{L}}_0^{(0)}$ l'espace de Lubin-Tate ([**56**], c'est une boule ouverte de rayon 1) et $\breve{\mathcal{L}}_n^{(0)}$ ses revêtements (galoisiens de groupe G_0/G_n).

L'observation de base de Kohlhaase est que l'anneau $\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n^{(0)})$, resp. $\mathcal{O}(\breve{\mathcal{L}}_n^{(0)})$, est $(\breve{F}_n, G_n)$-régulier [46], resp. $(\breve{F}_n, D_n)$-régulier, au sens de Fontaine. Ceci va permettre de définir de catégories de fibrés équivariants intéressants, "à la Fontaine".

Si $\mathcal{N}$ est un fibré vectoriel G_0-équivariant de rang r sur $\breve{\mathcal{M}}_0^{(0)}$ et si $N = H^0(\breve{\mathcal{M}}_0^{(0)}, \mathcal{N})$, on pose

$$\Lambda_n(\mathcal{N}) = (\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_0^{(0)})} N)^{G_n}.$$

De la régularité de $\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n^{(0)})$, on déduit par un argument standard que l'application naturelle

$$\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n^{(0)}) \otimes_{\breve{F}_n} \Lambda_n(\mathcal{N}) \to \mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_0^{(0)})} N \tag{8}$$

est injective, pour tout n. En particulier, $\Lambda_n(\mathcal{N})$ est un $\breve{F}_n$-espace vectoriel avec action semi-linéaire de G_0/G_n, de dimension inférieure ou égale à r.

De même, si $\mathcal{N}$ est un fibré vectoriel D_0-équivariant sur $\breve{\mathcal{L}}_0^{(0)}$, et si $N = H^0(\breve{\mathcal{L}}_0^{(0)}, \mathcal{N})$, on pose

$$\Delta_n(\mathcal{N}) = (\mathcal{O}(\breve{\mathcal{L}}_n^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}(\breve{\mathcal{L}}_0^{(0)})} N)^{D_n}.$$

L'application naturelle

$$\mathcal{O}(\breve{\mathcal{L}}_n^{(0)}) \otimes_{\breve{F}_n} \Delta_n(\mathcal{N}) \to \mathcal{O}(\breve{\mathcal{L}}_n^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}(\breve{\mathcal{L}}_0^{(0)})} N \tag{9}$$

est injective pour tout n.

Définition 10.4. — Un fibré vectoriel G_0-équivariant $\mathcal{N}$ sur $\breve{\mathcal{M}}_0^{(0)}$ est dit *de Lubin-Tate* s'il existe $n \geq 0$ tel que l'application (8) soit un isomorphisme. On définit alors $\mathbf{D}_{\mathrm{LT}}(\mathcal{N})$ comme le fibré D_0-équivariant sur $\breve{\mathcal{L}}_0^{(0)}$ dont l'espace des sections globales est le $\mathcal{O}(\breve{\mathcal{L}}_n^{(0)})^{G_0} = \mathcal{O}(\breve{\mathcal{L}}_0^{(0)})$-module

$$H^0(\breve{\mathcal{L}}_0^{(0)}, \mathbf{D}_{\mathrm{LT}}(\mathcal{N})) = (\mathcal{O}(\breve{\mathcal{L}}_n^{(0)}) \otimes_{\breve{F}_n} \Lambda_n(\mathcal{N}))^{G_0}.$$

Un fibré vectoriel D_0-équivariant $\mathcal{N} = \tilde{N}$ sur $\breve{\mathcal{L}}_0^{(0)}$ est dit *de Drinfeld* s'il existe $n \geq 0$ tel que l'application (9) soit un isomorphisme. On définit alors $\mathbf{D}_{\mathrm{Dr}}(\mathcal{N})$ comme le fibré G_0-équivariant sur $\breve{\mathcal{M}}_0^{(0)}$ dont l'espace des sections globales est le $\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n^{(0)})^{D_0} = \mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_0^{(0)})$-module

$$H^0(\breve{\mathcal{M}}_0^{(0)}, \mathbf{D}_{\mathrm{Dr}}(\mathcal{N})) = (\mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n^{(0)}) \otimes_{\breve{F}_n} \Delta_n(\mathcal{N}))^{D_0}.$$

Un fibré G-équivariant $\mathcal{N}$ sur $\breve{\Omega}$ est dit de *Lubin-Tate* si $(\pi_{\mathrm{Dr}}^{(0)})^*(\mathrm{Res}_{G_0}^G(\mathcal{N}))$ est de Lubin-Tate au sens précédent, où $\pi_{\mathrm{Dr}}^{(0)} : \breve{\mathcal{M}}_0^{(0)} \to \breve{\Omega}$ est l'application des périodes de $\breve{\mathcal{M}}_0$ restreinte à la composante connexe $\breve{\mathcal{M}}_0^{(0)}$.

De même, un fibré D^*-équivariant $\mathcal{N}$ sur $\breve{\mathbf{P}}^1$ est dit *de Drinfeld* si $(\pi_{\mathrm{LT}}^{(0)})^*(\mathrm{Res}_{D_0}^{D^*}(\mathcal{N}))$ est de Drinfeld au sens précédent, où $\pi_{\mathrm{LT}}^{(0)} : \breve{\mathcal{L}}_0^{(0)} \to \breve{\mathbf{P}}^1$ est l'application des périodes de Gross-Hopkins [**43**].

46. Rappelons que $F_n = \mathbf{Q}_p(\mu_{p^n})$.

Si $\mathcal{N}$ est un fibré de Lubin-Tate sur $\breve{\Omega}$ (resp. si $\mathcal{N}$ est un fibré de Drinfeld sur $\breve{\mathbf{P}}^1$), le fibré $\mathbf{D}_{\mathrm{LT}}(\mathcal{N})$ est D^*-équivariant (resp. le fibré $\mathbf{D}_{\mathrm{Dr}}(\mathcal{N})$ est G-équivariant) et de plus il descend en un fibré D^*-équivariant encore noté $\mathbf{D}_{\mathrm{LT}}(\mathcal{N})$ sur $\breve{\mathbf{P}}^1$ (resp. en un fibré G-équivariant encore noté $\mathbf{D}_{\mathrm{Dr}}(\mathcal{N})$ sur $\breve{\Omega}$).

***Théorème 10.5* (Kohlhaase).** — *a) Les foncteurs $\mathbf{D}_{\mathrm{LT}}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{Dr}}$ réalisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre entre la catégorie des fibrés G-équivariants sur $\breve{\Omega}$ dits de Lubin-Tate et celle des fibrés D^*-équivariants sur $\breve{\mathbf{P}}^1$ dits de Drinfeld.*

b) Si ρ est une représentation lisse de dimension finie de D^*, le fibré $\rho^* \otimes \mathcal{O}_{\breve{\mathbf{P}}^1}$ est un fibré de Drinfeld et on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{D}_{\mathrm{Dr}}(\rho^* \otimes \mathcal{O}_{\breve{\mathbf{P}}^1}) = \mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n)^\rho.$$

c) Les catégories des fibrés de Drinfeld et des fibrés de Lubin-Tate sont stables par sous-objet et quotient, et les foncteurs $\mathbf{D}_{\mathrm{LT}}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{Dr}}$ préservent les suites exactes.

Remarque 10.6. — Les méthodes de Kohlhaase [**54**] sont élémentaires et *n'utilisent pas* l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld, dû à Faltings et Fargues [**34, 35**].

Revenons à la preuve de la proposition 10.3. Le fibré $\mathcal{G}$ est un fibré de Lubin-Tate, d'après le deuxième point du théorème, puisque $\mathcal{G} = \mathbf{D}_{\mathrm{Dr}}(\rho^* \otimes \mathcal{O}_{\breve{\mathbf{P}}^1})$. Le troisième point du théorème prouve que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont aussi de Lubin-Tate, et que l'on a une suite exacte de fibrés D^*-équivariants sur $\breve{\mathbf{P}}^1$:

$$0 \to \mathbf{D}_{\mathrm{LT}}(\mathcal{F}) \to \rho^* \otimes \mathcal{O}_{\breve{\mathbf{P}}^1} \to \mathbf{D}_{\mathrm{LT}}(\mathcal{F}') \to 0.$$

Choisissons λ un entier positif suffisamment grand pour que les fibrés $\mathbf{D}_{\mathrm{LT}}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}(\lambda)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{LT}}(\mathcal{F}') \otimes \mathcal{O}(\lambda)$ soient à pentes positives. En tordant par $\mathcal{O}(\lambda)$, on a donc une injection D^*-équivariante

$$0 \to H^0(\mathbf{D}_{\mathrm{LT}}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}(\lambda)) \to \rho^* \otimes \mathrm{Sym}^\lambda(L^2)$$

Or, comme ρ^* est lisse, le membre de droite est une représentation irréductible et cette flèche est donc un isomorphisme. En outre, la suite exacte longue de cohomologie donne l'annulation de $H^0(\mathbf{D}_{\mathrm{LT}}(\mathcal{F}') \otimes \mathcal{O}(\lambda)) = 0$. Comme $\mathbf{D}_{\mathrm{LT}}(\mathcal{F}') \otimes \mathcal{O}(\lambda)$ est un fibré de pentes positives, il est nul et donc $\mathbf{D}_{\mathrm{LT}}(\mathcal{F})$ est en fait isomorphe à $\rho^* \otimes \mathcal{O}_{\breve{\mathbf{P}}^1}$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{G}$. Ainsi, on a bien $W = \mathcal{O}(\breve{\mathcal{M}}_n)^\rho$. □

Remarque 10.7. — La preuve ci-dessus est simple mais ne fonctionne plus en dimension supérieure (la théorie de Kohlhaase n'est pas limitée à la dimension 1) ; toutefois, elle s'applique encore si l'on remplace $\mathbf{Q}_p$ par une extension finie. Elle utilise de façon cruciale le fait que ρ est lisse. Si $V(\mathbf{X})$ est le module de Dieudonné rationnel du groupe formel de hauteur 2 sur $\overline{\mathbf{F}}_p$, $V(\mathbf{X})$ est une représentation irréductible de degré 2 de D^* et pourtant l'on a une suite exacte de fibrés D^*-équivariants sur $\mathbf{P}^1$ ([**43**]) :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1) \to V(\mathbf{X}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1) \to 0,$$

qui tirée en arrière à $\breve{\mathcal{L}}_0^{(0)}$ redonne la suite exacte de fibrés équivariants fournie par la théorie de Grothendieck-Messing.

Notons qu'au passage on a démontré la

Proposition 10.8. — *Le $\mathcal{O}(\Omega)$-module $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ avec action semi-linéaire de G est topologiquement irréductible.*

Démonstration. — Soit $V \subset \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ un sous $\mathcal{O}(\Omega)$-module fermé non nul et stable sous l'action de G. Comme on l'a vu dans la preuve du lemme 10.2, $\breve{V}$ est lui-même non nul et le paragraphe précédent montre que le $\mathcal{O}(\breve{\Omega})$-module $\mathcal{O}(\breve{\Sigma}_n)^\rho$ avec action semi-linéaire de G est irréductible. En particulier, $\breve{V}$ en est un sous-espace dense et par le lemme 10.2 on en déduit que V est dense dans $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$; comme il est fermé, il est égal à tout l'espace. □

Remarque 10.9. — Nous ne prétendons pas avoir démontré que le G-module topologique $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ est irréductible ! Toutefois il l'est effectivement : combiner [**20**] et le théorème 1.2.

Proposition 10.10. — *Tout endomorphisme $\mathcal{O}(\Omega)$-linéaire et G-équivariant de $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ est scalaire.*

Démonstration. — On raisonne comme avant : il suffit de le vérifier après avoir étendu les scalaires à $\breve{\mathbf{Q}}_p$, dans quel cas cela suit de l'équivalence de catégories de Kohlhaase et du fait que les endomorphismes du fibré D^*-équivariant $\rho^* \otimes \mathcal{O}_{\breve{\mathbf{P}}^1}$ sont scalaires (par un argument semblable à celui utilisé pour démontrer son irréductibilité). □

10.2. Un résultat d'analyse fonctionnelle. — Si l'on savait que $\Pi(\pi, 0)^*$ était coadmissible comme $\mathcal{O}(\Omega)$-module, on pourrait conclure directement que Φ est surjective, car un morphisme continu entre modules coadmissibles sur une algèbre de Fréchet-Stein est automatiquement d'image fermée [**68**]. Mais il semble difficile de montrer un tel énoncé de coadmissibilité - nous l'obtiendrons uniquement comme conséquence de notre résultat principal ! Pour conclure que l'image de Φ est effectivement $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ tout entier, il reste donc à démontrer la

Proposition 10.11. — *Soit X une variété Stein sur $\mathbf{Q}_p$. Soit N un $\mathcal{O}(X)$-module projectif de type fini et soit Y un $\mathcal{O}(X)$-module qui soit un espace de Fréchet. Tout morphisme continu $F : Y \to N$ qui est $\mathcal{O}(X)$-linéaire et d'image dense est surjectif.*

Démonstration. — Notons $N' := \mathrm{Im}(F) \subset N$. Par hypothèse il existe un $\mathcal{O}(X)$-module N'' tel que $N \oplus N'' = \mathcal{O}(X)^d$, $d > 0$. En remplaçant N par $N \oplus N'' = \mathcal{O}(X)^d$, Y par [47] $Y \oplus N''$ et F par $F \oplus \mathrm{id}$, on peut donc supposer N libre de rang fini. En raisonnant dans une base, on est même ramené au cas où $N = \mathcal{O}(X)$, $N' = I$ est un idéal de $\mathcal{O}(X)$.

Supposons que l'on peut trouver un nombre fini d'éléments $f_1, ..., f_m \in I$ tels que $V(f_1, \dots, f_m)$ soit vide. L'idéal $J = (f_1, \dots, f_m)$ de $\mathcal{O}(X)$ est de type fini, donc coadmissible et donc fermé [**68**] dans $\mathcal{O}(X)$. De plus, si $(U_j)_j$ est un recouvrement Stein de X, alors $V(J \cap \mathcal{O}(U_j)) = \emptyset$, donc $J \cap \mathcal{O}(U_j) = \mathcal{O}(U_j)$ par le Nullstellensatz affinoïde, pour tout j. On en déduit que J est dense, et comme il est fermé, on a $J = \mathcal{O}(X)$ et donc aussi $I = \mathcal{O}(X)$, ce qui finit la preuve de la proposition.

Il reste donc à montrer l'existence de $f_1, ..., f_m$. On choisit les f_i par récurrence. On prend $f_1 \in I$ non nulle. Supposons $f_1, \dots, f_{i-1}$ choisis et $V(f_1, \dots, f_{i-1})$ non vide. Donnons-nous un recouvrement de Stein (U_j) de X. Pour chaque j, $V(f_1, \dots, f_{i-1}) \cap U_j$ est affinoïde et n'a donc

47. Noter que N'' (et donc $Y \oplus N''$) est naturellement muni d'une structure d'espace de Fréchet, car c'est un sous-$\mathcal{O}(X)$-module fermé du Fréchet $\mathcal{O}(X)^d$.

qu'un nombre fini de composantes irréductibles [48]. On choisit pour chaque composante un point fermé quelconque de cette composante. Répétant cette opération pour chaque j, on obtient une suite dénombrable $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de X. Pour chaque k, on choisit un élément $\xi_k \in \mathcal{O}(X)$ s'annulant en z_j, pour tout $j = 0, \ldots, k-1$ et ne s'annulant pas en z_k (l'existence de ξ_k est facile si l'on souvient que, X étant Stein, il existe une immersion fermée ι de X dans l'espace affine ; il suffit de prendre ξ_k de la forme $P \circ \iota$, où P est un polynôme bien choisi).

On va construire $f_i \in I$ ne s'annulant en aucun des z_n. Par hypothèse, I est dense dans $\mathcal{O}(X)$, il existe donc un élément $h_n \in I$ ne s'annulant pas sur l'orbite de z_n, pour chaque $n \geq 0$. Par définition $h_n = F(y_n)$, avec $y_n \in Y$. Comme Y est un espace de Fréchet, sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes $(q_n)_{n\geq 0}$. Posons $c_0 = 1$, puis choisissons $c_n \in \mathbf{Q}_p$ par récurrence sur n, de sorte que $\sum_{k=0}^{n} c_k\xi_k h_k$ ne s'annule pas en z_n, ce qui est possible puisque $h_n(z_n) \neq 0$, et de sorte que

$$|c_n| \max_{k=0,\ldots,n} q_k(\xi_n y_n) \leq 2^{-n}$$

(cette expression a un sens, puisque Y est un $\mathcal{O}(X)$-module). Notons

$$f_i = F\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\xi_k y_k\Big) \in I,$$

la somme $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\xi_k y_k$ étant convergente dans Y. Soit $n \geq 0$. Alors pour tout $k > n$,

$$F(c_k\xi_k y_k)(z_n) = c_k\xi_k(z_n)h_k(z_n) = 0,$$

et donc

$$f_i(z_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k\xi_k(z_n)h_k(z_n) \neq 0,$$

par choix de la suite c. Donc f_i ne s'annule en aucun des z_n.

Soit $j \geq 0$. Si Z est une composante irréductible de l'affinoïde $V(f_1, \ldots, f_{i-1}) \cap U_j$, il existe n tel que $z_n \in Z$ par choix de la suite z, mais par hypothèse f_i ne s'annule pas en z_n. Ainsi, $V(f) \cap Z$ est un fermé strict de Z et donc $\dim V(f) \cap Z < \dim Z$. Ceci valant pour chaque composante irréductible de $V(f_1, \ldots, f_{i-1}) \cap U_j$, on en déduit que

$$\dim V(f_1, \ldots, f_i) \cap U_j \leq \dim V(f_1, \ldots, f_{i-1}) \cap U_j - 1$$

Comme (U_j) est un recouvrement ouvert affinoïde admissible de X, on en déduit en passant à la limite sur j que

$$\dim V(f_1, \ldots, f_i) < \dim V(f_1, \ldots, f_{i-1}),$$

comme voulu. □

Le théorème 10.1 résulte alors de la proposition précédente [49] (avec $X = \Omega$, $Y = \Pi(\pi, 0)^*$ et $N = \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$) et des propositions 9.16 et 10.3.

48. Soit A une algèbre affinoïde. Les composantes irréductibles de l'espace affinoïde $\mathrm{Sp}A$ sont les ensembles analytiques $\mathrm{Sp}A/\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal de A ; comme A est noethérienne, il n'y en a qu'un nombre fini.

49. Noter que $\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho$ est un facteur direct de $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ en tant que $\mathcal{O}(\Omega)$-module, et que $\mathcal{O}(\Sigma_n)$ est projectif de type fini comme $\mathcal{O}(\Omega)$-module [**54**, prop. A5]

11. Injectivité de Φ et fin de la preuve

Nous allons expliquer dans cette partie la preuve de l'injectivité de Φ (ce qui terminera la démonstration du théorème 1.2) et celle du théorème 1.4. Cela passe par l'introduction d'une nouvelle représentation de G, notée $\Pi(\pi,2)$, dont le dual est construit à partir de la représentation $\Pi(\pi,0)^*$ et de l'opérateur ∂, ainsi que par l'étude de l'action de u^+ sur $\Pi(\pi,2)$, et plus précisément du G-module $\Pi(\pi,2)^{u^+=0}$, reposant sur la théorie du modèle de Kirillov de Colmez rappelée dans la section 7. Nous commençons donc par là. Notons que l'injectivité de Φ est une conséquence immédiate de l'irréductibilité de $\Pi(\pi,0)$, qui est démontrée dans [**20**], mais nous aurons besoin de la plupart des constructions et résultats techniques de ce chapitre dans la preuve du théorème 1.4. Ces mêmes résultats permettent de démontrer l'injectivité de Φ sans utiliser son irréductibilité.

11.1. La représentation $\Pi(\pi,2)$. — Nous avons déjà observé que la G-représentation $\Omega^1(\Sigma_n)$ s'obtient directement à partir de $\mathcal{O}(\Sigma_n)$, en tordant par le cocycle $c\in Z^1(G,\mathcal{O}(\Omega)^*)$,

$$c(g)=\det g\cdot(a-cz)^{-2},\quad \text{si}\quad g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G.$$

Nous allons construire un analogue $\Pi(\pi,2)^*$ de $\Omega^1(\Sigma_n)$ à partir de $\Pi(\pi,0)^*$, par le même procédé : le travail déjà effectué rend la marche à suivre évidente.

La première partie du théorème 9.6 permet de définir une action de G sur $\Pi(\pi,0)^*$ en posant

$$g*l=\det g\cdot(a-c\partial)^{-2}(g.l)\quad \text{si}\quad g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G.$$

Cette représentation se réalise sur l'espace vectoriel topologique $\Pi(\pi,0)^*$, mais pour éviter les confusions il convient d'introduire une variable formelle dz et poser

$$\Pi(\pi,2)^*=\Pi(\pi,0)^*\,dz,\quad \text{avec}\quad g(l\,dz)=(\det g\cdot(a-c\partial)^{-2}(g.l))\,dz \tag{10}$$

pour $l\in\Pi(\pi,0)^*$ et $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G$. Le théorème 9.6 et le corollaire 9.2 se reformulent alors comme suit :

Proposition 11.1. — *$\Pi(\pi,2)^*$ est une représentation de G et l'application*

$$d:\Pi(\pi,0)^*\to\Pi(\pi,2)^*,\quad d(l)=-u^+(l)\,dz$$

est G-équivariante, d'image fermée.

11.2. Le noyau de u^+ sur $\Pi(\pi,2)$. — Nous reprenons les notations des sections 6 et 7. Le but de ce paragraphe est d'établir le théorème 11.7 ci-dessous.

Proposition 11.2. — *Soit $V\in\mathcal{V}(\pi)$. Le plongement $v\mapsto\phi_v$ de $\Pi(V)^{P-\mathrm{fini}}$ dans $\mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*,D_{\mathrm{dif}}^-(V))^\Gamma$ induit un plongement P-équivariant*

$$\Psi_V:(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^{u^+=0}\to\mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*,t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/N_{\mathrm{dif}}^+(V))^\Gamma.$$

Démonstration. — En utilisant le théorème 7.11, on obtient
$$(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^{u^+=0} = (\Pi(V)^{\mathrm{an}})^{a^+u^+=(u^+)^2=0}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}.$$
Le plongement $\Pi(V)^{P-\mathrm{fini}} \subset \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, D_{\mathrm{dif}}^-(V))^\Gamma$ induit un plongement [50]
$$(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^{a^+u^+=(u^+)^2=0} \subset \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, (t^{-2}D_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V))^{\nabla t=0})^\Gamma.$$
En utilisant la description explicite
$$N_{\mathrm{dif}}^+(V) = L_\infty[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V) \quad \text{et} \quad D_{\mathrm{dif}}^+(V) = tN_{\mathrm{dif}}^+(V) + L_\infty[[t]] \otimes_L \mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V)),$$
un calcul immédiat montre que l'inclusion $N_{\mathrm{dif}}^+(V) \subset t^{-1}D_{\mathrm{dif}}^+(V)$ induit un isomorphisme canonique Γ-équivariant
$$t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V) \simeq (t^{-2}D_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V))^{\nabla t=0}.$$
On obtient donc un plongement $v \mapsto \phi_v$
$$(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^{a^+u^+=(u^+)^2=0} \subset \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/D_{\mathrm{dif}}^+(V))^\Gamma.$$
En combinant ceci avec le théorème 7.11 on obtient le résultat voulu. □

Soit $V \in \mathcal{V}(\pi)$ et fixons un isomorphisme $\alpha : D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M(\pi)$. Il induit un isomorphisme de Γ-modules $\alpha_{\mathrm{dif}} : N_{\mathrm{dif}}^+(V) \simeq L_\infty[[t]] \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi)$ et donc un isomorphisme de Γ-modules
$$\alpha_{\mathrm{dif}} : t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/N_{\mathrm{dif}}^+(V) \simeq L_\infty(-1) \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi).$$
L'isomorphisme α induit aussi un plongement $\alpha_{\mathbf{P}^1} : (\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^* \to tN_{\mathrm{rig}}(\pi) \boxtimes \mathbf{P}^1$ (via l'isomorphisme $tN_{\mathrm{rig}}(V) \boxtimes \mathbf{P}^1 \simeq tN_{\mathrm{rig}}(\pi) \boxtimes \mathbf{P}^1$ induit par α) et par définition $\alpha_{\mathbf{P}^1}$: $(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^* \to \Pi(\pi, 0)^*$ est un isomorphisme. On note
$$\xi_{V,\alpha} : \Pi(\pi, 0) \simeq \Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$$
l'isomorphisme induit par la transposée de $\alpha_{\mathbf{P}^1}$ composé avec l'isomorphisme
$$[(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*]^* \simeq \Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}.$$
En utilisant le plongement Ψ_V introduit dans la proposition précédente on obtient un plongement
$$\iota_{V,\alpha} : \Pi(\pi, 0)^{u^+=0} \to \mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty(-1) \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi)), \quad \iota_{V,\alpha} = \alpha_{\mathrm{dif}} \circ \Psi_V \circ (\xi_{V,\alpha}|_{\Pi(\pi,0)^{u^+=0}}).$$
Théorème 11.3. — *Le plongement $\iota_{V,\alpha}$ introduit ci-dessus est indépendant, à homothétie près, du choix de $V \in \mathcal{V}(\pi)$ et de l'isomorphisme $\alpha : D_{\mathrm{pst}}(V) \simeq M(\pi)$. De plus, pour tout choix de V et α le diagramme suivant de P-représentations est commutatif à scalaire près*
$$\begin{array}{ccc} \Pi(\pi, 0)^{u^+=0} & \to & \mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty(-1) \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi))^\Gamma \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^{u^+=0} & \to & \mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V)/N_{\mathrm{dif}}^+(V))^\Gamma \end{array}.$$
En particulier, on dispose d'un plongement P-équivariant canonique à scalaire près :
$$\iota : \Pi(\pi, 2)^{u^+=0} \to \mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi))^\Gamma.$$

50. On écrit t pour l'opérateur de multiplication par t sur $D_{\mathrm{dif}}^-(V)$.

Démonstration. — La dernière assertion découle immédiatement de la première, en utilisant le fait que comme P-représentations, $\Pi(\pi,0)$ et $\Pi(\pi,2)$ ne diffèrent que par torsion par le caractère $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \mapsto a$.

L'indépendance (à homothétie près) par rapport à α (à V fixé) est immédiate (changer α en $x\alpha$ avec $x \in L$ a pour effet le changement de $\iota_{V,\alpha}$ en $x^2\iota_{V,\alpha}$, car $\xi_{V,x\alpha} = x\xi_{V,\alpha}$), mais l'indépendance par rapport à V l'est nettement moins. Nous aurons besoin du résultat suivant, qui demande quelques préliminaires. Par construction on a $\Pi(\pi,0)^* \subset tN_{\mathrm{rig}}(\pi) \boxtimes \mathbf{P}^1$ et même $\Pi(\pi,0)^* \subset tN^{]0,r_n]} \boxtimes \mathbf{P}^1$ pour n assez grand (dépendant de V uniquement). Cela permet de définir des applications

$$i_{j,n} : \Pi(\pi,0)^* \to t(N_{\mathrm{rig}}(\pi))^+_{\mathrm{dif}} = tL_\infty[[t]] \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi), \quad i_{j,n} = \varphi^{-n} \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \begin{pmatrix} p^{n-j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour n assez grand et $j \in \mathbf{Z}$. Notons que $i_{j,n}(L) = \alpha_{\mathrm{dif}}(i_{j,n}(l))$ si $l \in (\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*$ satisfait $L = \alpha_{\mathbf{P}^1}(l)$ (il suffit de suivre les définitions). Enfin, on écrit $\{\ \}_{\mathrm{dif,V}}$ pour l'accouplement entre $tN^+_{\mathrm{dif}}(V)$ et $t^{-1}N^+_{\mathrm{dif}}(V)/N^+_{\mathrm{dif}}(V)$ induit par l'accouplement entre $D_{\mathrm{dif}}(\check{V})^+[1/t] = D_{\mathrm{dif}}(V)^+[1/t]$ et $D_{\mathrm{dif}}(V)^+[1/t]$.

Lemme 11.4. — *Soit* $\Pi(\pi,0)_c^{u^+=0}$ *le sous-espace de* $\Pi(\pi,0)^{u^+=0}$ *engendré par les* $(1-n)v$ *avec* $n \in \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ *et* $v \in \Pi(\pi,0)^{u^+=0}$. *Si* $L \in \Pi(\pi,0)^*$ *et* $v \in \Pi(\pi,0)_c^{u^+=0}$, *alors pour tout* n *assez grand*

$$L(v) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \{\alpha_{\mathrm{dif}}^{-1}(i_{j,n}(L)), \alpha_{\mathrm{dif}}^{-1}(\iota_{V,\alpha}(v))(p^{-j})\}_{\mathrm{dif,V}}.$$

Démonstration. — Ecrivons $L = \alpha_{\mathbf{P}^1}(l)$ avec $l \in (\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^*$. L'égalité $L(v) = l(\xi_{V,\alpha}(v))$ découle de la définition de $\xi_{V,\alpha}$. Ensuite, le vecteur $v_1 = \xi_{V,\alpha}(v)$ est dans le sous-espace de $(\Pi(V)^{\mathrm{an}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}})^{u^+=0} \subset \Pi(V)^{P-\mathrm{fini}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$ engendré par les $(1-n)y$ avec $y \in \Pi(V)^{P-\mathrm{fini}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$. On en déduit que $v_1 \in \Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}}/\Pi(V)^{\mathrm{lisse}}$, ce qui permet d'utiliser le théorème 7.8 et obtenir ainsi

$$L(v) = l(v_1) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \{i_{j,n}(l), \Psi_V(v_1)(p^{-j})\}_{\mathrm{dif,V}}.$$

On conclut en utilisant les égalités $i_{j,n}(L) = \alpha_{\mathrm{dif}}(i_{j,n}(l))$ et $\Psi_V(v_1) = \alpha_{\mathrm{dif}}^{-1}(i_{V,\alpha}(v))$.

□

Considérons maintenant deux représentations $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(\pi)$ et deux isomorphismes $\alpha_1 : D_{\mathrm{pst}}(V_1) \simeq M(\pi)$, $\alpha_2 : D_{\mathrm{pst}}(V_2) \simeq M(\pi)$. Soit $u = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1 : D_{\mathrm{pst}}(V_1) \simeq D_{\mathrm{pst}}(V_2)$. En appliquant le lemme précédent avec $V = V_1$, puis avec $V = V_2$ et en comparant les résultats on obtient pour tous $L \in \Pi(\pi,0)^*$, $v \in \Pi(\pi,0)_c^{u^+=0}$ et n assez grand

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} \{\alpha_{1,\mathrm{dif}}^{-1}(i_{j,n}(L)), \alpha_{1,\mathrm{dif}}^{-1}(\iota_{V_1,\alpha_1}(v))(p^{-j})\}_{\mathrm{dif,V_1}} =$$

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} \{u_{\mathrm{dif}}(\alpha_{1,\mathrm{dif}}^{-1}(i_{j,n}(L))), u_{\mathrm{dif}}(\alpha_{1,\mathrm{dif}}^{-1}(\iota_{V_2,\alpha_2}(v))(p^{-j}))\}_{\mathrm{dif,V_2}}.$$

Puisque les accouplements $\{\ \}_{\mathrm{dif},\mathrm{V_j}}$ sont induits par des isomorphismes $\wedge^2(D_{\mathrm{pst}}(V_j)) \simeq L$, u_{dif} est compatible avec ces accouplements à un scalaire C près. Ainsi, l'égalité précédente s'écrit

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\{\alpha_{1,\mathrm{dif}}^{-1}(i_{j,n}(L)),\alpha_{1,\mathrm{dif}}^{-1}(\iota_{V_1,\alpha_1}(v)-C\iota_{V_2,\alpha_2}(v))(p^{-j})\}_{\mathrm{dif},\mathrm{V}_1}=0.$$

Nous avons maintenant besoin du

Lemme 11.5. — *Soit $(x_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ une suite d'éléments de $t^{-1}N_{\mathrm{dif}}^+(V_1)/N_{\mathrm{dif}}^+(V_1)$, à support fini et telle que pour tout $L\in\Pi(\pi,0)^*$ et tout n assez grand*

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\{\alpha_{1,\mathrm{dif}}^{-1}(i_{j,n}(L)),x_j\}_{\mathrm{dif},\mathrm{V}_1}=0.$$

Alors $x_j=0$ pour tout j.

Démonstration. — On a donc pour tout $l\in(\Pi(V_1)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_1)^{\mathrm{lisse}})^*$

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\{i_{j,n}(l),x_j\}_{\mathrm{dif},\mathrm{V}_1}=0.$$

La proposition 7.6 permet de construire un vecteur $v\in\Pi(V_1)_c^{P-\mathrm{fini}}$ tel que $\phi_v(p^{-j})=x_j$ pour tout j. Le théorème 7.8 combiné avec l'hypothèse montre que $l(v)=0$ pour tout $l\in(\Pi(V_1)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_1)^{\mathrm{lisse}})^*$, autrement dit $v\in\Pi(V_1)^{\mathrm{lisse}}$. On conclut en utilisant la proposition 7.9. □

On déduit de ce qui précède que $\iota_{V_1,\alpha_1}-C\iota_{V_2,\alpha_2}$ s'annule sur $\Pi(\pi,0)_c^{u^+=0}$, autrement dit que l'image de $\iota_{V_1,\alpha_1}-C\iota_{V_2,\alpha_2}$ est contenue dans le sous-espace des $\left(\begin{smallmatrix}1&\mathbf{Q}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$-invariants de $\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty(-1)\otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi)^\Gamma$. Comme ce sous-espace est nul, cela permet de conclure.

□

Pour pouvoir décrire plus complètement $\Pi(\pi,2)^{u^+=0}$, il faut maintenant comprendre le lien entre $\Pi(\pi,2)$ et les Π^{an}, pour $\Pi\in\mathcal{V}(\pi)$.

Proposition 11.6. — *Soit $\Pi\in\mathcal{V}(\pi)$. Le choix d'un isomorphisme $\Pi(\pi,0)\simeq\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}}$ détermine un plongement G-équivariant de $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ dans $\Pi(\pi,2)^*$, qui fait de $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ un sous-espace G-stable de $\Pi(\pi,2)^*$ contenant $d(\Pi(\pi,0)^*)$.*

Démonstration. — L'application

$$d:(\Pi^{\mathrm{an}})^*\to(\Pi^{\mathrm{an}}/\Pi^{\mathrm{lisse}})^*\simeq\Pi(\pi,0)^*\to\Pi(\pi,2)^*,$$

la première flèche étant $l\mapsto -u^+(l)$ et la dernière étant simplement $l\mapsto l\,dz$ est bien définie et un plongement car u^+ est injectif d'image fermée sur $\Pi(\pi,0)^*$. Il reste à montrer que d est G-équivariante, ce qui revient à montrer que

$$u^+(gl)=\det g\cdot(a-c\partial)^{-2}g(u^+l)$$

pour tout $l\in(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ et tout $g\in G$. Si $c=0$, découle de l'identité

$$u^+\cdot\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}=\frac{d}{a}\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}\cdot u^+$$

dans $D(G)$ et du fait que $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ est un $D(G)$-module. Ainsi, F est équivariante pour l'action du Borel B de G et il suffit de tester que $d(wl) = wd(l)$ pour $l \in (\Pi^{\mathrm{an}})^*$. Cela revient à $u^+wl = -\partial^{-2}w(u^+l)$, ou encore (en appliquant w et en utilisant la relation $w\partial^{-2}w = \partial^2$ sur $\Pi(\pi,0)^*$) $u^-l = -\partial^2 u^+ l$. Cela découle de la proposition 9.5. □

Théorème 11.7. — *Le sous-espace $\Pi(\pi,2)^{u^+=0}$ de $\Pi(\pi,2)$ est stable par G et on a un isomorphisme, canonique à scalaire près, de représentations de G :*

$$\Pi(\pi,2)^{u^+=0} \simeq \pi \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi).$$

Démonstration. — La stabilité de $\Pi(\pi,2)^{u^+=0}$ par G vient du fait que $\Pi(\pi,2)^{u^+=0}$ est dual du conoyau de la flèche G-équivariante $d : \Pi(\pi,0)^* \to \Pi(\pi,2)^*$ (voir les propositions 9.1 et 11.1). Montrons tout d'abord que $\Pi(\pi,2)^{u^+=0}$ est une représentation lisse de G. Commençons par

Lemme 11.8. — *Pour tout $v \in \Pi(\pi,2)$ l'application*

$$f_v : (a,b,c,d) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.v$$

est localement analytique en chacun des arguments a,b,c,d au voisinage de $(1,0,0,1)$.

Démonstration. — La représentation $\Pi(\pi,0)$ est localement analytique et comme représentations du Borel B, $\Pi(\pi,2)$ et $\Pi(\pi,0)$ ne diffèrent que par torsion par le caractère de B, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto d/a$. Donc f_v est localement analytique en a,b et d. De plus,

$$f_v(1,0,x,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}.v = w\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w.v = wf_{w.v}(1,x,0,1),$$

ce qui permet de conclure. □

En utilisant le lemme précédent et un calcul immédiat, on obtient les formules suivantes pour l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\Pi(\pi,2)$

$$a^+ = \partial u^+, \quad a^- = -\partial u^+, \quad u^- = -\partial^2 u^+.$$

Ainsi, un vecteur tué par u^+ est automatiquement tué par $\mathfrak{g}$. Une nouvelle application du lemme précédent permet de conclure que $\Pi(\pi,2)^{u^+=0}$ est une représentation lisse de G.

Choisissons maintenant $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(\pi)$ non isomorphes (cela correspond au choix de deux filtrations différentes sur $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$). Fixons des isomorphismes

$$\Pi(\pi,0) \simeq \Pi(V_1)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_2)^{\mathrm{lisse}} \quad \text{et} \quad \Pi(\pi,0) \simeq \Pi(V_2)^{\mathrm{an}}/\Pi(V_2)^{\mathrm{lisse}}.$$

D'après la proposition 11.6, on peut donc voir $(\Pi(V_1)^{\mathrm{an}})^*$ et $(\Pi(V_2)^{\mathrm{an}})^*$ comme deux sous-espaces de $\Pi(\pi,2)^*$ contenant $d(\Pi(\pi,0)^*)$. Notons X_1 et X_2 les images de ces sous-espaces dans le quotient $\Pi(\pi,2)^*/d((\Pi(\pi,0)^*)$. Comme représentation de G

$$X_j \simeq (\Pi(V_j)^{\mathrm{an}})^*/\Pi(\pi,0)^* \simeq \pi^*.$$

En particulier, X_1 et X_2 sont des représentations irréductibles de G et donc X_1 et X_2 sont égaux s'ils sont d'intersection non nulle. S'ils étaient égaux, on aurait $(\Pi(V_1)^{\mathrm{an}})^* = (\Pi(V_2)^{\mathrm{an}})^*$ (puisque ces deux sous-espaces contiennent $d(\Pi(\pi,0)^*)$), et un des résultats principaux de **[23]** entraîne que

$\Pi(V_1) \simeq \Pi(V_2)$, ce qui contredit le fait que V_1 et V_2 ne sont pas isomorphes. On en déduit que X_1 et X_2 sont en somme directe, ce qui donne dualement une surjection G-équivariante

$$\Pi(\pi,2)^{u^+=0} = (\Pi(\pi,2)^*/d(\Pi(\pi,0)^*))^* \twoheadrightarrow \pi^{\oplus 2}.$$

Comme on vient de voir que $\Pi(\pi,2)^{u^+=0}$ est une G-représentation lisse et comme π est supercuspidale, ce morphisme se scinde et on peut donc écrire :

$$\Pi(\pi,2)^{u^+=0} = \pi^{\oplus 2} \oplus \xi,$$

où ξ est une représentation lisse de G.

Le théorème 11.3 permet de plonger $\Pi(\pi,2)^{u^+=0}$ dans $\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi))^\Gamma$, de façon P-équivariante. Si X est une représentation de P, on note X_c le sous-espace engendré par les éléments de la forme $(1-n).v$, avec $n \in \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $v \in X$. On a donc

$$\pi_c^{\oplus 2} \oplus \xi_c \hookrightarrow ((\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)^\Gamma)_c)^{\oplus 2} = (\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)^\Gamma)^{\oplus 2}.$$

Or π_c et $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)^\Gamma$ sont isomorphes comme P-représentations et irréductibles (c'est un résultat standard de la théorie du modèle de Kirillov des représentations supercuspidales de G). On a donc nécessairement $\xi_c = 0$. En d'autres termes, tout vecteur de ξ est fixé par l'action de l'unipotent supérieur : mais il n'y a pas de tel vecteur non nul dans $\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)^\Gamma$! On en déduit que $\xi = 0$, et $\Pi(\pi,2)^{u^+=0}$ et $\pi \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi)$ sont donc deux représentations isomorphes de G. Il reste donc pour conclure à exhiber un isomorphisme G-équivariant canonique, à scalaire près, entre ces représentations.

Ce qui précède donne en particulier que l'image de $\Pi(\pi,2)^{u^+=0}$ dans $\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi))^\Gamma$ est le sous-espace $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi))^\Gamma$. La théorie du modèle de Kirillov usuelle pour les représentations lisses combinée avec la transformée de Fourier de [**16**, VI.1.2] donne en outre un isomorphisme P-équivariant $\pi \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi) \simeq \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes_L M_{\mathrm{dR}}(\pi))^\Gamma$. On obtient donc en composant l'inverse de cet isomorphisme avec la flèche fournie par le théorème 11.3 un isomorphisme P-équivariant, canonique à scalaire près

$$\Pi(\pi,2)^{u^+=0} \simeq \pi \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi).$$

Cet isomorphisme est automatiquement G-équivariant (car les deux membres sont isomorphes comme G-représentations à $\pi \oplus \pi$, et π est irréductible comme P-représentation). □

En retour, le théorème précédent permet de décrire les positions relatives des sous-représentations $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ à l'intérieur de $\Pi(\pi,2)^*$. Soit $\mathcal{L}$ une filtration sur $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$. Il lui correspond une représentation $V_{\mathcal{L}} \in \mathcal{V}(\pi)$, qui vient avec un isomorphisme $D_{\mathrm{pst}}(V_{\mathcal{L}}) \simeq M(\pi)$.

Corollaire 11.9. — *La préimage de $\mathcal{L}^\perp \otimes \pi^* \subset (\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^*$ dans $\Pi(\pi,2)^*$ est $(\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}})^*$ (vu dans $\Pi(\pi,2)^*$ par la proposition 11.6).*

Démonstration. — Il s'agit de vérifier que le quotient de $d((\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}})^*)$ par $d(\Pi(\pi,0)^*)$ est isomorphe à $\mathcal{L}^\perp \otimes \pi^*$, vu comme sous-espace du conoyau de $d : \Pi(\pi,0)^* \to \Pi(\pi,2)^*$ par le théorème 11.7. L'isomorphisme $\alpha : D_{\mathrm{pst}}(V_{\mathcal{L}}) \simeq M(\pi)$ identifie ce quotient à $(\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{lisse}})^*$. Dans la construction de l'isomorphisme du théorème 11.7, on peut choisir $V = V_{\mathcal{L}}$. Admettons qu'on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Pi(\pi,2)^{u^+=0} & \longrightarrow & \Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{lisse}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi))^\Gamma & \to & \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty[[t]] \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi)/\mathrm{Fil}^0(L_\infty((t)) \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi)))^\Gamma \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes (celle de droite s'obtient en composant le modèle de Kirillov usuel de $\Pi_{\mathcal{L}}$ avec α_{dif}). Comme de plus, toutes les identifications effectuées sont canoniques à scalaire près, le résultat s'ensuit.

Reste à justifier la commutativité du diagramme précédent. Comme on a choisi $V = V_{\mathcal{L}}$ dans 11.7, il s'agit, par définition de $\iota_{V_{\mathcal{L}},\alpha}$, de justifier que le diagramme dont les flèches sont $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-équivariantes

$$\begin{array}{ccc} (\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}}/\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{lisse}})^{u^+=0} = (\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}})^{a^+u^+=(u^+)^2=0}/\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{lisse}} & \xrightarrow{u^+} & \Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{lisse}} \\ \downarrow \Psi_{V_{\mathcal{L}}} & & \downarrow \\ \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes t^{-1} N_{\mathrm{dif}}^+(V_{\mathcal{L}})/N_{\mathrm{dif}}^+(V_{\mathcal{L}}))^\Gamma & \xrightarrow{t} & \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty \otimes N_{\mathrm{dif}}^+(V_{\mathcal{L}})/D_{\mathrm{dif}}^+(V_{\mathcal{L}}))^\Gamma \end{array}$$

est commutatif, puisque, par définition (voir la proposition 11.1), la flèche $(\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}})^* \to \Pi(\pi,2)^*$ était déduite de $d = -u^+ : (\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}})^* \to (\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{an}}/\Pi_{\mathcal{L}}^{\mathrm{lisse}})^*$. Comme les deux flèches verticales sont induites par le plongement $\Pi(V_{\mathcal{L}})^{P-\mathrm{fini}} \to \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, D_{\mathrm{dif}}^-(V_{\mathcal{L}}))^\Gamma$, la commutativité de ce diagramme se réduit simplement au fait que ce plongement est $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-équivariant. □

11.3. Démonstrations des théorèmes 1.2 et 1.4. — La proposition 9.16 montre que l'on peut aussi voir Φ comme un morphisme

$$\Phi : \Pi(\pi,2)^* \to \Omega^1(\Sigma_n)^\rho,$$

ce que l'on fait dans la suite de cette section.

Proposition 11.10. — *Le morphisme Φ est injectif.*

Démonstration. — Soit $v \in \Pi(\pi,2)^*$ tel que $\Phi(v) = 0$. En particulier, l'image de $\Phi(v)$ dans le quotient $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$ est nulle. La composée de Φ et de la surjection sur la cohomologie de de Rham est G-équivariante donc se factorise par le quotient de $\Pi(\pi,2)^*$ par l'image de u^+ : comme celle-ci est fermée par la proposition 9.1, ce quotient s'identifie, comme on l'a déjà vu, à $((\Pi(\pi,2))^{u^+=0})^*$ et on a donc une flèche G-équivariante *surjective* $((\Pi(\pi,2))^{u^+=0})^* \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$. Or on a déjà vu que, comme G-représentations, $((\Pi(\pi,2))^{u^+=0})^* \simeq (\pi^*)^{\oplus 2}$ et que $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$ a pour quotient $(\pi^*)^{\oplus 2}$ [51]. La flèche considérée ne peut donc être qu'un isomorphisme. Par conséquent, $v \in \mathrm{Im} u^+$: il existe $v' \in \Pi(\pi,2)^*$ tel que $v' = u^+.v$. Or

$$0 = \Phi(v) = \Phi(u^+.v') = u^+.\Phi(v').$$

51. Dualement, cela revient à dire que $H^1_{\mathrm{dR,c}}(\Sigma_n)^{\rho^\vee}$ contient $\pi^{\oplus 2}$ comme sous-objet. Le théorème 4.1 dit exactement cela, avec sous-objet remplacé par quotient ; mais cela suffit, puisque π est supercuspidale, donc est un objet projectif de la catégorie des représentations lisses de G à caractère central trivial.

Comme $\mathrm{Ker}(u^+) = 0$ sur $\Omega^1(\Sigma_n)^\rho$, on en déduit que $\Phi(v') = 0$. Répétant l'argument, on voit qu'un vecteur v d'image nulle par Φ est en fait dans $\mathrm{Im}(u^+)^j$ pour tout j.

Voyons l'élément v' ci-dessus comme un élément de $\Pi(\pi,0)^*$, ce qui est loisible puisque les espaces vectoriels topologiques sous-jacents à $\Pi(\pi,0)^*$ et $\Pi(\pi,2)^*$ sont les mêmes. L'opérateur u^+ agit de la même manière sur $\Pi(\pi,0)^*$ et $\Pi(\pi,2)^*$ et est injectif, donc v' est dans $\mathrm{Im}(u^+)^j$ pour tout j. De plus, comme $u^+ : \Pi(\pi,0)^* \to \Pi(\pi,2)^*$ est G-équivariant et comme $w.v$ est aussi dans le noyau de Φ, on a aussi que $w.v'$ est dans $\mathrm{Im}(u^+)^j$ pour tout j. Voyons v' dans $tN_{\mathrm{rig}}(\pi) \boxtimes \mathbf{P}^1$: $v' = (z_1, z_2)$. Comme $v' \in \mathrm{Im}(u^+)^j$ pour tout $j > 0$, z_1 est infiniment divisible par t. On voit immédiatement que cela force $z_1 = 0$ en prenant une base de $N_{\mathrm{rig}}(\pi)$ sur $\mathcal{R}$. Mais $w.v'$ a la même propriété et $w.v' = (z_2, z_1)$. On a donc aussi $z_2 = 0$ et donc $v' = 0$. Donc v est lui-même nul. □

Remarque 11.11. — On verra plus loin (démonstration du théorème 1.10) que l'intersection des $\mathrm{Im}((u^+)^j)$, $j \geq 0$, sur $\Pi(\pi,0)^*$ (ou $\Pi(\pi,2)^*$) est en fait nulle, mais cela fait appel à un résultat délicat de [**29**], que l'argument précédent permet d'éviter.

Ceci termine la preuve du théorème 1.2.

Démonstration du théorème 1.4. — L'isomorphisme Φ induit un isomorphisme
$$(\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^* \simeq H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho.$$
De plus, un tel isomorphisme Φ est unique à scalaire près, d'après les propositions 9.16 et 10.10. En combinant ceci avec le théorème 11.7, on en déduit que l'on a un isomorphisme canonique à scalaire près
$$H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho \simeq \pi^* \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi)^*.$$
Une fois ceci acquis, la deuxième partie du théorème se déduit trivialement du corollaire 11.9. □

Remarque 11.12. — Tous les résultats de cet article s'étendent aux fibrés $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbf{Z}$. Dans l'énoncé du théorème 1.2, il suffit de remplacer $\Pi(\pi,0)$ par la représentation de G dont le dual est l'espace topologique $\Pi(\pi,0)^*$ avec action de G tordue par $(a - c\partial)^{-k}$.

Pour le théorème 1.4, il faut cette fois-ci considérer, pour $k \geq 0$, la suite exacte
$$0 \to \mathcal{O}(-k)(\Sigma_n)^\rho \xrightarrow{(u^+)^{k+1}} \mathcal{O}(k+2)(\Sigma_n)^\rho \otimes \det{}^{k+1} \to H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho \otimes \mathrm{Sym}^k \to 0,$$
afin de décrire les vecteurs localement analytiques des représentations de Banach attachées aux représentations à poids $0, k+1$. L'existence de cette suite exacte se justifie comme dans [**64**, p. 95-97].

Remarque 11.13. — La conjecture originale de Breuil-Strauch [**8**] était formulée de façon légèrement différente. Nous expliquons maintenant le lien avec les résultats de cet article.

Les auteurs de [**8**] travaillent avec le revêtement de Drinfeld de niveau $1 + \varpi_D\mathcal{O}_D$, et nous noterons $\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D}$ le modèle sur $\mathbf{Q}_p$ de son quotient par l'action de $p^{\mathbf{Z}}$. Soit $K_0 = \mathbf{Q}_{p^2}$ et $K = \mathbf{Q}_{p^2}(\sqrt[p^2-1]{-p})$. Dans [**75**], Teitelbaum a construit un modèle formel semi-stable minimal $\widehat{\Sigma}_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D,K}$ de $\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D,K}$, qui donne par uniformisation p-adique un modèle semi-stable $\widehat{\mathrm{Sh}}_{(1+\varpi_D\mathcal{O}_D)K^p,K}$ de la courbe de Shimura $\mathrm{Sh}_{(1+\varpi_D\mathcal{O}_D)K^p,K}$. Les résultats de [**46**], qui étendent la théorie de Hyodo-Kato à des variétés rigides non nécessairement propres, permettent de définir la cohomologie log-rigide de la fibre spéciale de $\widehat{\Sigma}_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D}$, qui est un $(\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p})$-$K_0$-module $H^1_{\mathrm{HK}}(\widehat{\Sigma}_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D,K})$, avec un isomorphisme $H^1_{\mathrm{HK}}(\widehat{\Sigma}_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D,K}) \otimes_{K_0} K \simeq H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D,K})$. On montre avec des arguments semblables [52] à ceux de la section 4 que, pour toute représentation irréductible ρ de $D^*/1+\varpi_D\mathcal{O}_D$ de correspondante de de Jacquet-Langlands π, l'on a un isomorphisme compatible aux $(\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p})$-structures des deux membres

$$\mathrm{Hom}_G((H^1_{\mathrm{HK}}(\widehat{\Sigma}_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D,K})^{\rho})^*, \pi) = \varinjlim_{K^p} H^1_{\mathrm{HK}}(\widehat{\mathrm{Sh}}_{(1+\varpi_D\mathcal{O}_D)K^p,K})[\pi(g)^p_f]^{\rho},$$

où g est une forme quaternionique telle que $\pi(g)_p = \rho$, comme dans la partie 5.3. Saito **[62]** a montré que la structure de $(\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module donnée par la théorie de Hyodo-Kato classique sur l'espace vectoriel $\varinjlim_{K^p} H^1_{\mathrm{dR}}(S_{K_pK^p,K})[\pi(f)^p]^{\rho}$ était celle de $M(\pi)$. On déduit donc de l'isomorphisme précédent une identification naturelle

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D})^{\rho} = \pi^* \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi)^*.$$

Soit $\mathcal{L}$ une droite de $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$. Via cette identification, on peut voir $\mathcal{L}^{\perp} \otimes \pi^*$ comme un sous-espace de $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D})^{\rho}$. Breuil et Strauch définissent la représentation $BS(\mathcal{L})$ de G comme le dual de la préimage dans $\Omega^1(\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D})^{\rho}$ de $\mathcal{L}^{\perp} \otimes \pi^*$ [53].

Soit g une forme quaternionique telle que $\pi(g)_p = \rho$, comme dans la partie 5.3. La forme g a une représentation galoisienne associée r et $r_p = r_{|\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ est de de Rham à poids $0, 1$ avec $D_{\mathrm{pst}}(r_p) = M(\pi)$. Donc r_p correspond au choix d'une droite, notée $\mathcal{L}$, sur $M_{\mathrm{dR}}(\pi)$. On sait que $\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathcal{L}} = \Pi(r_p)^{\mathrm{an}}$ est un quotient de $(\Omega^1(\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D})^{\rho})^*$, puisque ce dernier est isomorphe à $\Pi(\pi, 2)$ comme G-représentation, et que ce quotient correspond au quotient $\pi \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi) \to \pi \otimes M_{\mathrm{dR}}(\pi)/\mathcal{L}'$, pour un certain $\mathcal{L}'$. Autrement dit, l'image de la flèche naturelle

$$\mathrm{Hom}_G((\Omega^1(\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D})^{\rho})^*, \Pi(r_p)^{\mathrm{an}}) \to \mathrm{Hom}_G((H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D})^{\rho})^*, \pi) = M_{\mathrm{dR}}(\pi)^*$$

est la droite $(\mathcal{L}')^{\perp}$. Or, comme on l'a déjà noté (remarque 5.11), cette flèche correspond à la flèche naturelle

$$\varinjlim_{K_p} \Omega^1(\mathrm{Sh}_{(1+\varpi_D\mathcal{O}_D)K^p})[\pi(g)^p_f]^{\rho} \to \varinjlim_{K_p} H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_{(1+\varpi_D\mathcal{O}_D)K^p})[\pi(g)^p_f]^{\rho}.$$

Le théorème de comparaison étale-de Rham appliqué à la cohomologie de la courbe de Shimura propre $\mathrm{Sh}_{(1+\varpi_D\mathcal{O}_D)K^p}$ implique que la filtration de Hodge sur la cohomologie de de Rham

$$\varinjlim_{K_p} H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Sh}_{(1+\varpi_D\mathcal{O}_D)K^p})[\pi(g)^p_f]^{\rho} \simeq M_{\mathrm{dR}}(\pi)^*$$

est donnée par la droite $\mathcal{L}^{\perp}$. Autrement dit, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ et pour ce $\mathcal{L}$, on a donc bien $\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathcal{L}} = BS(\mathcal{L})$.

On recommence ensuite le même jeu avec une autre forme quaternionique correspondant à une filtration différente (il en existe : il suffit de faire varier la représentation résiduelle). On a donc un autre $\mathcal{L}'$ pour lequel on sait que $\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathcal{L}'} = BS(\mathcal{L})$.

52. La seule chose à savoir est l'existence d'une suite spectrale pour la cohomologie log-rigide pour un quotient $\widehat{\Sigma}_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D} \to \Gamma\backslash\widehat{\Sigma}_{1+\varpi_D\mathcal{O}_D}$, avec Γ sous-groupe de G comme dans le théorème de Cerednik-Drinfeld : pour cela voir **[46]**, chapitre 7.

53. Comme d'habitude, ρ est fixée et sous-entendue dans la notation $BS(\mathcal{L})$.

Identifions $\mathbf{P}(M_{\mathrm{dR}})$ à $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ via le choix de la base $(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ de M_{dR}. Soit maintenant $\mathcal{L}''$ une filtration admissible quelconque, et $(a, b) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ l'élément correspondant. Alors on a

$$[BS(\mathcal{L}'')] = a[BS(\mathcal{L})] + b[BS(\mathcal{L}')]$$

et

$$[\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathcal{L}''}] = a[\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathcal{L}}] + b[\Pi^{\mathrm{an}}_{\mathcal{L}'}]$$

dans le groupe $\mathrm{Ext}^1_G((\mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho)^*, \pi)$. Donc $BS(\mathcal{L}'') = \Pi^{\mathrm{an}}_{\mathcal{L}''}$.

La conjecture de Breuil-Strauch dans sa formulation originale est donc un corollaire des résultats obtenus.

12. Compléments : quelques corollaires et une question

12.1. Preuves des théorèmes 1.9 et 1.10. — Nous rassemblons dans cette section les preuves des corollaires annoncés dans l'introduction.

Démonstration du théorème 1.9. — D'après [**16**, p. 20 et 174], le membre de droite est l'image par $1-\varphi$ de $(tN_{\mathrm{rig}}(\pi))^{\psi=1}$. Or, on a déjà vu que cette image est isomorphe au membre de gauche dans le théorème 8.3. $\square$

Démonstration du théorème 1.10. — Soit $f \in \mathcal{O}(\Sigma_n)$ une fonction infiniment primitivable. Ecrivons

$$f = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes f_i$$

avec $v_i \in \rho_i$, où ρ_i est une représentation lisse irréductible de D^*, et $f_i \in \mathcal{O}(\Sigma_n)^{\rho_i}$, pour $i = 1, \ldots, r$. Fixons i et supposons ρ_i non triviale. L'hypothèse sur f implique que f_i est dans l'image de l'opérateur $(u^+)^j$ sur $\mathcal{O}(\Sigma_n)^{\rho_i} = \Pi(\pi_i, 0)^*$, où $\pi_i = \mathrm{JL}(\rho_i)$ (puisque ρ_i est non triviale, on peut appliquer le théorème 1.2) pour tout j. En outre, si l'on choisit $\Pi \in \mathcal{V}(\pi_i)$, on peut voir f_i comme un élément de $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$. Le théorème 8.4.3 de [**29**] dit que le sous-espace de Π^{an} des vecteurs tués par une puissance de u^+ est dense dans Π^{an} (cette propriété équivaut au fait que la représentation galoisienne correspondante soit non trianguline). Cela implique en particulier que l'intersection des $\mathrm{Im}((u^+)^j)$ sur le dual est nulle. On en déduit $f_i = 0$. La seule possibilité est donc que ρ_i soit triviale, i.e. que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. $\square$

Remarque 12.1. — Un élément z de l'intersection des $\mathrm{Im}((u^+)^j)$, vu comme élément de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, satisfait trivialement $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z) = 0$. Ainsi, au lieu d'utiliser [**29**] on aurait pu utiliser l'injectivité [**20**] de l'application $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} : (\Pi^{\mathrm{an}})^* \to D_{\mathrm{rig}}$.

12.2. Le complexe de de Rham dans la catégorie dérivée des $D(G)$-modules. — Pour $n \geq 0$, notons $R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)$ le complexe de de Rham de Σ_n :

$$\mathcal{O}(\Sigma_n) \xrightarrow{d} \Omega^1(\Sigma_n).$$

D'après le théorème 10.1, c'est un objet de la catégorie dérivée $D^b(D(G))$ de la catégorie abélienne [**68**] des $D(G)$-modules coadmissibles. On munit ce complexe de la filtration "bête", de sorte que $F^i R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n) = R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)$ si $i < 0$, $F^i R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n) = 0$ si $i > 0$ et

$$F^0 R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n) = [0 \to \Omega^1(\Sigma_n)].$$

Proposition 12.2. — *Pour tout $V \in \mathcal{V}(\pi)$ on a un isomorphisme d'espaces vectoriels filtrés (canonique à scalaire près)*

$$\mathrm{Hom}_{D^b(D(G))}((\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*, R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho[1]) = D_{\mathrm{dR}}(V),$$

pour tout n suffisamment grand.

Remarque 12.3. — a) Un résultat plus satisfaisant serait de remplacer le complexe de de Rham par un complexe convenable de cohomologie log-rigide et d'affirmer l'existence d'un *isomorphisme canonique de $(\varphi, N, \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p})$-modules filtrés* entre le membre de gauche et $D_{\mathrm{pst}}(V)$. Cela permettrait de récupérer la représentation V à partir de $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$.

b) L'énoncé de la proposition donne une information nettement moins précise sur $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ que la conjecture de Breuil-Strauch. Au moins pour les $V \in \mathcal{V}(\pi)$ d'origine globale, Peter Scholze nous a d'ailleurs indiqué un argument qui devrait permettre de déduire la proposition du théorème de compatibilité local-global d'Emerton et du lemme de Poincaré p-adique ([**72**, cor. 6.13]).

c) Pour $k \in \mathbf{Z}$ et $n \geq 0$, notons $R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n, k) = R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n) \otimes (\mathrm{Sym}^k)^*$ le complexe de de Rham de Σ_n tordu par la représentation algébrique $(\mathrm{Sym}^k)^*$:

$$\mathcal{O}(\Sigma_n) \otimes (\mathrm{Sym}^k)^* \xrightarrow{d \otimes id} \Omega^1(\Sigma_n) \otimes (\mathrm{Sym}^k)^*.$$

On pourrait aussi munir ce complexe d'une filtration, comme le font Schneider et Stuhler dans [**64**, p. 95-97], en prenant le produit tensoriel de la filtration "bête" par une certaine filtration sur $(\mathrm{Sym}^k)^*$. On obtiendrait ainsi une filtration telle que $F^i R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n, k) = R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n, k)$ si $i < -k$, $F^i R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n, k) = 0$ si $i > 0$ et

$$F^i R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n, k) = [0 \to \mathcal{O}(k+2)(\Sigma_n) \otimes \det{}^{k+1}], \ -k \leq i \leq 0,$$

et on pourrait prouver l'exact analogue de la proposition précédente avec des poids de Hodge-Tate égaux à $0, k+1$. Toutefois cela alourdit considérablement les notations.

Démonstration. — Le cas $\rho = 1$ est un résultat de Schraen [**70**]. En fait, Schraen raffine l'énoncé en un isomorphisme de (φ, N)-modules filtrés, après avoir muni le membre de gauche d'un Frobenius et d'une monodromie en s'inspirant de la théorie de Hyodo-Kato. Cela lui permet de définir un scindage canonique du complexe introduit dans la remarque précédente : $R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_0, k)^{D^*} \simeq (H^0_{\mathrm{dR}}(\Omega) \oplus H^1_{\mathrm{dR}}(\Omega)[-1]) \otimes (\mathrm{Sym}^k)^*$. La monodromie N est un élément du Ext^1 entre ces deux composantes et le membre de gauche de la proposition se décompose en tant que φ-module comme une somme directe

$$\mathrm{Ext}^1_{D(G)}((\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*, H^0_{\mathrm{dR}}(\Omega) \otimes (\mathrm{Sym}^k)^*) \oplus \mathrm{Hom}_{D(G)}((\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*, H^1_{\mathrm{dR}}(\Omega) \otimes (\mathrm{Sym}^k)^*)$$

$$= \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Sym}^k, \Pi(V)^{\mathrm{an}}) \oplus \mathrm{Hom}_G(\mathrm{St} \otimes \mathrm{Sym}^k, \Pi(V)^{\mathrm{an}}),$$

ce qui explique pourquoi en niveau 0, des vecteurs localement algébriques apparaissent à la fois en sous-objet en en quotient de $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$.

Le cas $\rho \neq 1$ se déduit du théorème 1.4. En effet, le complexe $R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho$ (où n est choisi suffisamment grand) est scindé quasi-isomorphe à $(\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^*[-1]$: en effet, tous les groupes de cohomologie du complexe sont nuls sauf celui de degré 1 qui vaut $(\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^*$, d'après le théorème 1.4. On a donc trivialement un isomorphisme d'espaces vectoriels (sans filtration)

$$\mathrm{Hom}_{D^b(D(G))}((\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*, R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n)^\rho[1]) = D_{\mathrm{dR}}(V),$$

puisque $(\Pi(\pi,2)^{u^+=0})^* = \pi^* \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)^*$. Le fait que les filtrations coïncident est un corollaire direct de la conjecture. □

12.3. Fonctions au bord de Σ_n et faisceau $U \to tN_{\mathrm{rig}} \boxtimes U$. — La dualité de Serre pour les variétés rigides Stein [**12**] donne un isomorphisme de représentations de $G \times D^*$

$$\Omega^1(\Sigma_n)^* \simeq H^1_c(\Sigma_n, \mathcal{O}).$$

Comme Σ_n est Stein, on a en outre une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}(\Sigma_n) \to \varinjlim_Z \mathcal{O}(\Sigma_n - Z) \to H^1_c(\Sigma_n, \mathcal{O}) \to 0 \tag{11}$$

où Z décrit l'ensemble des réunions finies d'affinoïdes admissibles de Σ_n. Notons τ_n la composée de la surjection canonique de Σ_n sur Σ_0 avec la rétraction du demi-plan sur l'arbre de Bruhat-Tits, dont on fixe l'origine standard. Soit B_i la boule centrée en l'origine dans l'arbre de rayon i. Si U est un ouvert de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, il lui correspond un ouvert V de l'arbre, constitué de la réunion de toutes les demi-droites partant de l'origine aboutissant en un point de U, et l'on pose

$$\mathcal{F}_\pi(U) = \varinjlim_i \mathcal{O}(\tau_n^{-1}(V - B_i))^\rho,$$

ce qui a un sens puisque D^* agit sur $\tau_n^{-1}(V - B_i)$. Cela définit un faisceau $\mathcal{F}_\pi$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$. Ce faisceau est en quelque sorte le faisceau des sections du fibré structural "au bord" de Σ_n. Il est alors tentant de formuler la conjecture suivante, qui est un prolongement naturel de la conjecture de Breuil-Strauch.

Conjecture 12.4. — *Le faisceau $\mathcal{F}_\pi$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ est le faisceau $U \mapsto tN_{\mathrm{rig}}(\pi) \boxtimes U$ de Colmez. La suite exacte de représentations de G (voir* [**20**]*)*

$$0 \to \Pi(\pi,0)^* \to tN_{\mathrm{rig}}(\pi) \boxtimes \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to \Pi(\pi,2) \to 0$$

s'identifie à la suite exacte déduite de (11) *:*

$$0 \to \mathcal{O}(\Sigma_n)^\rho \to \mathcal{F}_\pi(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)) \to (\Omega^1(\Sigma_n)^\rho)^* \to 0.$$

13. Appendice : compatibilité local-global (d'après Emerton)

Nous expliquons dans cet appendice la preuve du théorème 5.4, en suivant de manière pleinement fidèle Emerton [**31**]. Nous reprenons les notations des sections 4.1 et 5.1 (en fixant K^p et en posant $X = X(K^p)$).

Lemme 13.1. — *Le groupe* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ *agit librement sur* X*, avec un nombre fini d'orbites. En particulier, il existe* $s>0$ *tel que pour tout* $\mathbf{Z}_p$*-module topologique* M *l'on ait un isomorphisme de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$*-représentations*

$$\mathcal{C}^0(X,M)\simeq\mathcal{C}^0(\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p),M)^{\oplus s}.$$

Le résultat suivant est un des ingrédients de base de la théorie.

Lemme 13.2. — *Si* $\mathcal{B}$ *est un facteur direct topologique (en tant que* G*-module) de* $\mathcal{C}^0(X)$*, alors* $\mathcal{B}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)-\mathrm{alg}}$ *est dense dans* $\mathcal{B}$*.*

Démonstration. — Il suffit de le faire pour $\mathcal{B}=\mathcal{C}^0(X)$, dans quel cas cela découle du lemme 13.1 et du théorème de Mahler (voir [**59**, prop. A.3] et [**22**, prop. 2.12] pour des résultats généraux à ce sujet). □

La version "en famille" de la correspondance de Langlands locale p-adique pour G permet de construire un A-module orthonormalisable Π^{univ}, avec action continue de G, tel que pour tout $\mathfrak{p}\in\mathrm{MaxSpec}(A[1/p])$ on ait un isomorphisme

$$\Pi^{\mathrm{univ}}\otimes_A k(\mathfrak{p})\simeq\Pi(\mathfrak{p}).$$

L'existence de Π^{univ} est un résultat profond mais standard de la théorie, cf. par exemple [**7, 16, 53**] (rappelons que nous supposons que la représentation modulo p de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est absolument irréductible). De plus, la compatibilité avec la correspondance modulo p montre que

$$\overline{\pi}:=\Pi^{\mathrm{univ}}/\mathfrak{m}\Pi^{\mathrm{univ}}$$

est une représentation lisse irréductible de G sur k_L.

Définition 13.3. — On note

$$M=\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{A[G]}(\Pi^{\mathrm{univ}},\mathcal{C}^0(X,\mathcal{O}_L)_{\mathfrak{m}}),$$

Π^{univ} étant muni de la topologie $\mathfrak{m}$-adique et $\mathcal{C}^0(X,\mathcal{O}_L)_{\mathfrak{m}}$ de la topologie induite par $\mathcal{C}^0(X,\mathcal{O}_L)$. On note

$$M^*=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}(M,\mathcal{O}_L)$$

le dual de Schikhof de M, que l'on munit de la topologie de la convergence simple. On a réciproquement $M=\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathcal{O}_L}(M^*,\mathcal{O}_L)$.

Remarque 13.4. — On voit immédiatement qu'on a des isomorphismes canoniques

$$M[\mathfrak{p}][1/p]=k(\mathfrak{p})\otimes_{A/\mathfrak{p}}M[\mathfrak{p}]\simeq\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_G(\Pi(\mathfrak{p}),\mathcal{C}^0(X)[\mathfrak{p}])\simeq\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{A[G]}(\Pi(\mathfrak{p}),\mathcal{C}^0(X)_{\mathfrak{m}})$$

pour tout $\mathfrak{p}\in\mathrm{MaxSpec}(A[1/p])$.

Dans un premier temps, nous allons commencer par prouver l'énoncé plus faible suivant.

Proposition 13.5. — *Pour tout idéal maximal* $\mathfrak{p}$ *de* $A[1/p]$*,*

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_G(\Pi(\mathfrak{p}),\mathcal{C}^0(X)[\mathfrak{p}])\neq 0.$$

Démonstration. — D'après la remarque 13.4 il s'agit de justifier que $M[\mathfrak{p}][1/p] \neq 0$, pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $A[1/p]$. L'idée (due à Emerton) est de démontrer cet énoncé par interpolation p-adique, en le prouvant pour une famille dense d'idéaux maximaux (formée de points correspondant à des représentations galoisiennes cristallines). Cela demande quelques préliminaires.

Lemme 13.6. — *Le A-module M^* est de type fini.*

Démonstration. — Comme M^* est compact, il suffit de montrer que $M^*/\mathfrak{m}M^*$ est de dimension finie sur k_L. Or, l'isomorphisme $M = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathcal{O}_L}(M^*, \mathcal{O}_L)$ induit un isomorphisme

$$(M/\pi_L M)[\mathfrak{m}] \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}(M^*, k_L)[\mathfrak{m}] \simeq \mathrm{Hom}_{k_L}(M^*/\mathfrak{m}M^*, k_L).$$

Il suffit donc de démontrer que $(M/\pi_L M)[\mathfrak{m}]$ est de dimension finie sur k_L. Mais, par définition de M, on dispose d'une injection de k_L-espaces vectoriels

$$(M/\pi_L M)[\mathfrak{m}] \subset \mathrm{Hom}_{k_L[G]}(\Pi^{\mathrm{univ}}/\mathfrak{m}\Pi^{\mathrm{univ}}, \mathrm{LC}(X, k_L)_{\mathfrak{m}}).$$

Comme $\overline{\pi} = \Pi^{\mathrm{univ}}/\mathfrak{m}\Pi^{\mathrm{univ}}$ est irréductible et lisse, le choix d'un vecteur non nul quelconque v de $\overline{\pi}$ et d'un sous-groupe ouvert K_p qui le fixe fournit un plongement

$$\mathrm{Hom}_{k_L[G]}(\overline{\pi}, \mathrm{LC}(X, k_L)_{\mathfrak{m}}) \subset (\mathrm{LC}(X, k_L)_{\mathfrak{m}})^{K_p} \subset \mathrm{LC}(X(K_p), k_L)$$

et le dernier espace est de dimension finie sur k_L car $X(K_p)$ est fini. □

Lemme 13.7. — *Si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $A[1/p]$, $M[\mathfrak{p}] \otimes_{A/\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p}) \neq 0$ si et seulement si $\mathfrak{p} \in$ Supp $M^*[1/p]$.*

Démonstration. — On montre [**31**, C.14] que $M[\mathfrak{p}] \otimes_{A/\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p})$ est le $k(\mathfrak{p})$-dual de $M^* \otimes_A k(\mathfrak{p}) = M^*[1/p] \otimes_{A[1/p]} k(\mathfrak{p})$. Comme $M^*[1/p]$ est un $A[1/p]$-module de type fini d'après le lemme 13.6, le lemme de Nakayama montre que $\mathfrak{p} \in$ Supp $M^*[1/p]$ si et seulement si $M^*[1/p] \otimes_{A[1/p]} k(\mathfrak{p}) \neq 0$. □

Vu le lemme précédent, il suffit de montrer que Supp $M^*[1/p]$ est Zariski dense dans Spec $A[1/p]$ (il est automatiquement fermé puisque $M^*[1/p]$ est de type fini sur $A[1/p]$). Nous allons exhiber une famille $\mathcal{C}$ d'idéaux maximaux de $A[1/p]$, qui est Zariski dense dans Spec $A[1/p]$ et contenue dans Supp $M^*[1/p]$.

Soit σ une représentation automorphe de $\bar{B}^*(\mathbf{A})$ telle que :
a) σ soit non ramifiée en dehors de Σ.
b) $\sigma_f^{K^p} \neq 0$ et $\sigma_p^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)} \neq 0$.
c) La représentation galoisienne associée r_σ vérifie $\overline{r}_\sigma = \overline{r}$.

L'action de $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma$ sur σ_f définit un morphisme $\tilde{\mathbf{T}}_\Sigma \to L$, qui s'étend par continuité en un morphisme $A[1/p] \to L$ (puisque $\overline{r}_\sigma = \overline{r}$), dont le noyau est un idéal maximal $\mathfrak{p}_\sigma$ de $A[1/p]$. On note

$$\mathcal{C} = \{\mathfrak{p}_\sigma, \sigma \text{ comme avant}\}.$$

Lemme 13.8. — *L'ensemble $\mathcal{C}$ est Zariski dense dans* Spec *$A[1/p]$.*

Démonstration. — Notons que par définition, $A[1/p]$ agit fidèlement sur $\mathcal{C}^0(X)_{\mathfrak{m}}$. Il suffit donc de montrer que tout $t \in \cap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{C}}\mathfrak{p}$ agit par 0 sur $\mathcal{C}^0(X)_m$. Comme l'action est continue, il suffit pour cela de prouver que $\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{C}}\mathcal{C}^0(X)_{\mathfrak{m}}[\mathfrak{p}]$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X)_{\mathfrak{m}}$. Comme $\mathcal{C}^0(X)_{\mathfrak{m}}$ est un facteur direct topologique de $\mathcal{C}^0(X)$, l'ensemble des vecteurs $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$-algébriques de $\mathcal{C}^0(X)_{\mathfrak{m}}$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X)_{\mathfrak{m}}$, d'après le lemme 13.2. Il suffit donc de justifier que

$$(\mathcal{C}^0(X)_{\mathfrak{m}})_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)-alg} \subset \sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{C}}\mathcal{C}^0(X)_{\mathfrak{m}}[\mathfrak{p}].$$

Mais ceci est un corollaire immédiat du lemme 4.7. □

On note $\mathrm{LP}(X)$ l'espace des vecteurs localement algébriques de $\mathcal{C}^0(X)_{\mathfrak{m}}$.

Lemme 13.9. — *Pour tout* $\mathfrak{p}\in\mathcal{C}$, $M[\mathfrak{p}]\otimes_{A/\mathfrak{p}}k(\mathfrak{p})\neq 0$, *autrement dit*

$$\mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi(\mathfrak{p}),\mathcal{C}^0(X)[\mathfrak{p}])\neq 0.$$

De plus, $\mathrm{LP}(X)[\mathfrak{p}]$ *est inclus dans l'image de la flèche naturelle*

$$\Pi(\mathfrak{p})\otimes\mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi(\mathfrak{p}),\mathcal{C}^0(X)[\mathfrak{p}])\to\mathcal{C}^0(X)[\mathfrak{p}].$$

Démonstration. — Soit $\mathfrak{p}\in\mathcal{C}$, σ la représentation automorphe correspondante. Comme $\sigma_p^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}\neq 0$, la restriction de $r_\sigma = r(\mathfrak{p})$ au groupe de décomposition en p est cristalline. En outre, $\overline{r(\mathfrak{p})}_{|\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}} = \overline{r}_{|\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ est absolument irréductible, et donc en particulier $r(\mathfrak{p})_{|\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ l'est. Notons $a<b$ ses poids de Hodge-Tate, et posons $W=\mathrm{Sym}^{b-a-1}(L^2)\otimes\det{}^a$.

D'après Berger-Breuil [**3**] et la construction de la correspondance de Langlands locale p-adique pour G, le complété unitaire universel de $\sigma_p\otimes W$ est précisément $\Pi(\mathfrak{p})$. Comme $\sigma_p\otimes W$ est localement algébrique, on obtient

$$\mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi(\mathfrak{p}),\mathcal{C}^0(X)[\mathfrak{p}])=\mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\sigma_p\otimes W,\mathcal{C}^0(X)[\mathfrak{p}])=\mathrm{Hom}_G(\sigma_p\otimes W,\mathrm{LP}(X)[\mathfrak{p}]).$$

De plus, le lemme 4.7 montre que le morphisme d'évaluation

$$(\sigma_p\otimes W)\otimes\mathrm{Hom}_G(\sigma_p\otimes W,\mathrm{LP}(X)[\mathfrak{p}])\to\mathrm{LP}(X)[\mathfrak{p}]$$

est un isomorphisme, ce qui permet de conclure (en utilisant l'injection $\sigma_p\otimes W\subset\Pi(\mathfrak{p})$). □

Ceci achève la preuve de la proposition 13.5. □

Nous avons maintenant en main tous les ingrédients pour prouver le théorème 5.4.

Démonstration du théorème 5.4. — Montrons tout d'abord que la flèche naturelle d'évaluation

$$(\Pi^{\mathrm{univ}}\widehat{\otimes}_A M)[1/p]\to\mathcal{C}^0(X)_{\mathfrak{m}} \tag{12}$$

est un isomorphisme. Cette flèche s'obtient après inversion de p à partir de la flèche :

$$\Pi^{\mathrm{univ}}\widehat{\otimes}_A M\to\mathcal{C}^0(X,\mathcal{O}_L)_{\mathfrak{m}}.$$

Comme $\Pi^{\mathrm{univ}}\widehat{\otimes}_A M$ est séparé pour la topologie π_L-adique, on peut tester l'injectivité de (12) après réduction modulo π_L de ce morphisme :

$$\Pi^{\mathrm{univ}}/\pi_L\widehat{\otimes}_A M/\pi_L\to\mathcal{C}^0(X,k_L)_{\mathfrak{m}}.$$

Prenons la composante $\mathfrak{m}$-isotypique : cela donne une flèche

$$\overline{\pi} \otimes_{k_L} \mathrm{Hom}_{k_L[G]}(\overline{\pi}, \mathcal{C}^0(X, k_L)[\mathfrak{m}]) \to \mathcal{C}^0(X, k_L)[\mathfrak{m}].$$

Cette flèche est injective, puisque $\overline{\pi}$ est lisse irréductible et $\mathcal{C}^0(X, k_L)[\mathfrak{m}]$ est lisse. Mais comme l'action de A sur $\Pi^{\mathrm{univ}} \widehat{\otimes}_A M$ est continue, tout élément de $\Pi^{\mathrm{univ}}/\pi_L \widehat{\otimes}_A M/\pi_L$ est tué par une puissance de $\mathfrak{m}$ (puisque $\pi_L \in \mathfrak{m}$). On voit aisément que cela entraîne qu'un élément dans le noyau est forcément nul.

Prouvons la surjectivité. Comme, d'après le lemme 13.6, M^* est de type fini sur A, et comme Π^{univ} est un $A[G]$-module orthonormalisable admissible, l'image du morphisme (12) est automatiquement fermée (combiner Proposition 3.1.3 et Lemma 3.1.16 de [**31**]). Il suffit du coup de montrer que l'image de (12) est dense. On a vu dans la preuve du lemme 13.9 que l'image de $\Pi(\mathfrak{p}) \otimes \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi(\mathfrak{p}), \mathcal{C}^0(X)[\mathfrak{p}])$ contient $\mathrm{LP}(X)[\mathfrak{p}]$. Par conséquent, l'image de notre morphisme contient $(\mathcal{C}^0(X)_{\mathfrak{m}})^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)-\mathrm{alg}}$, qui forme un sous-espace dense.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de $A[1/p]$. Pour achever la preuve du théorème 5.4, on prend la partie $\mathfrak{p}$-isotypique de l'isomorphisme (12) :

$$\Pi(\mathfrak{p}) \otimes \mathrm{Hom}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi(\mathfrak{p}), \mathcal{C}^0(X)[\mathfrak{p}]) \simeq \mathcal{C}^0(X)[\mathfrak{p}],$$

et on observe que $\mathrm{Hom}_G(\Pi(\mathfrak{p}), \mathcal{C}^0(X)[\mathfrak{p}])$ est un L-espace vectoriel de dimension finie. Cet espace pourrait *a priori* très bien être nul, mais précisément la proposition 13.5 montre que ce n'est pas le cas. $\square$

Références

[1] L. Berger-Représentations p-adiques et équations différentielles, Invent. Math. 148 (2002), p. 219-284.

[2] L. Berger-Equations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, Astérisque 319 (2008), p. 13-38.

[3] L. Berger, C. Breuil-Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $G_{\mathbf{Q}_p}$, Astérisque 330, p. 155-211.

[4] J.-F. Boutot, H. Carayol-Uniformisation p-adique des courbes de Shimura : les théorèmes de Cerednik et Drinfeld, dans "Courbes modulaires et courbes de Shimura", 196-197, Astérisque, p. 45-158, 1991.

[5] J.-F. Boutot, Th. Zink-The p-adic uniformization of Shimura curves, 2000, preprint disponible à `https://www.math.uni-bielefeld.de/?zink/p-adicuni.ps`.

[6] C. Breuil-Invariant L et série spéciale p-adique, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup 37, p. 559-610, 2004.

[7] C. Breuil-Correspondance de Langlands p-adique, compatibilité local-global et applications, Séminaire Bourbaki 1031, Astérisque 348, p. 119-147, 2012.

[8] C. Breuil, M. Strauch-Sur quelques représentations p-adiques supercuspidales de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$, non publié.

[9] H. Carayol-Non-abelian Lubin-Tate theory, dans L. Clozel and J.S. Milne, editors, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, volume II, p. 15–39. Academic Press, 1990.

[10] H. Carayol-Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet, Contemp. Math. 165 (1994), p. 213-235.

[11] G. Chenevier, Familles p-adiques de formes automorphes pour $GL(n)$, Journal für die reine und angewandte Mathematik 570, p. 143-217, 2004.

[12] B. Chiarellotto-Duality in rigid analysis, p-adic analysis, Lecture Notes in Math., 1454 (1990), p. 142-172.

[13] F. Cherbonnier, P. Colmez- Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. Math. 133 (1998), p. 581-611.

[14] P. Colmez- Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. of Math. 148 (1998), p. 485-571.

[15] P. Colmez-(φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique, Astérisque 330 (2010), p. 61-153.

[16] P. Colmez-Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Astérisque 330 (2010), p. 281-509.

[17] P. Colmez-Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, Astérisque 319 (2008), p. 117-186.

[18] P. Colmez-Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque 319 (2008), p. 213-258.

[19] P. Colmez-La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$: vecteurs localement analytiques, Automorphic Forms and Galois Representations (2011), Proceedings of the Durham LMS Symposium 2011.

[20] P. Colmez-Correspondance de Langlands locale p-adique et changement de poids, preprint.

[21] P. Colmez, J.-M. Fontaine-Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. Math. 140 (2000), p. 1-43.

[22] P. Colmez, G. Dospinescu, V. Paškūnas-The p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Cambridge Journal of Mathematics, Volume 2 (2014), Number 1.

[23] P. Colmez, G. Dospinescu-Complétés universels de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Algebra and Number Theory, 8 (2014), 1447-1519.

[24] J. F. Dat-Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale, Ann. Sci. école Norm. Sup. (4) 39 (2006), p. 1-74.

[25] G. Dospinescu, A. C. Le Bras-Fonctions sur la tour de Drinfeld et la courbe de Fargues-Fontaine, en préparation.

[26] G. Dospinescu-Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Math. Annalen, 354 (2012), 627–657.

[27] G. Dospinescu-Extensions de représentations de Rham et vecteurs localement algébriques, à paraître dans Compositio Math.

[28] G. Dospinescu-Equations différentielles p-adiques et modules de Jacquet analytiques, Automorphic Forms and Galois Representations (2011), Proceedings of the LMS Durham Symposium 2011.

[29] G. Dospinescu- Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique, thèse de l'Ecole Polytechnique, juin 2012.

[30] V.G. Drinfeld-Coverings of p-adic symmetric domains. Func. Anal. and Appl., 10, p. 107–115, 1976.

[31] M. Emerton-Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_2/\mathbf{Q}$, preprint, disponible à `http://www.math.northwestern.edu/~emerton/preprints.html`.

[32] M. Emerton-A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_2/\mathbf{Q}$, Pure and Applied Math. Quarterly 2 (2006), no. 2, p. 279-393.

[33] M. Emerton- Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups, to appear in Memoirs of the AMS, disponible à `http://www.math.northwestern.edu/~emerton/preprints.html`.

[34] G. Faltings- A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld, Algebraic number theory and algebraic geometry, Contemp. Math., vol. 300, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, p. 115-129.

[35] L. Fargues, A. Genestier, V. Lafforgue-L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld, Progress in Mathematics, vol. 262, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[36] L. Fargues-Cohomologie d'espaces de modules de groupes p-divisibles et correspondances de Langlands locale, dans Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink, et correspondances de Langlands locales, Astérisque 291, 2004.

[37] L. Fargues, J.M. Fontaine-Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique, preprint, 2011.

[38] J.-M. Fontaine-Sur certains types de représentations p-Adiques du groupe de Galois d'un corps local ;construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Ann. of Math. 115, p.529-577, 1982.

[39] J.-M. Fontaine-Représentations p-adiques des corps locaux. I, The Grothendieck Festschrift, Vol II, Progr. Math., vol 87, Birkhauser, 1990, p. 249-309.

[40] J.M. Fontaine- Périodes p-adiques, Astérisque 223, 1994, Société Mathématique de France.

[41] J.-M. Fontaine-Arithmétique des représentations p-adiques galoisiennes, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques III, Astérisque 295 (2004), 1-115.

[42] H. Frommer-The locally analytic principal series of split reductive groups, preprint, 2003.

[43] M. J. Hopkins, B. Gross-Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli spaces, Topology and Representation theory, number 158 in Contemporary Math., p. 23–88, 1994.

[44] E. Grosse-Klönne-De Rham cohomology of rigid spaces, Mathematische Zeitschrift 247 (2004), p. 223-240.

[45] E. Grosse-Klönne-Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf, Journal für die reine und angewandte Mathematik 519 (2000), p. 73-95.

[46] E. Grosse-Klönne-Frobenius and monodromy operators in rigid analysis, and Drinfeld's symmetric space, J. Algebraic Geom. 14 (2005), no. 3, p. 391-437.

[47] M. Harris-Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld's upper half space ; elaboration of Carayol's program. Invent. Math., 129, p. 75-119, 1997.

[48] M. Harris, R. Taylor-The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties, Ann. of Math. studies 151, Princeton Univ. Press, 2001.

[49] G. Henniart-Sur l'unicité des types pour GL_2, Appendice à : C. Breuil et A. Mézard-Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ en $\ell = p$, Duke Math. J. 115 (2002), p. 205-310.

[50] K. Kedlaya, J. Potharst, L. Xiao-Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ)-modules, J. Amer. Math. Soc. 27 (2014), p. 1043-1115.

[51] K. Kedlaya-p-adic differential equations, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 125, Cambridge Univ. Press, 2010.

[52] R. Kiehl-Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Invent. Math. 2, p. 256-273, 1967.

[53] M. Kisin-Deformations of $G_{\mathbf{Q}_p}$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-representations, Astérisque 330 (2010), 511-528.

[54] J. Kohlhaase-Lubin-Tate and Drinfeld bundles, Tohoku Math. J. 63, No. 2, 2011, p. 217-254.

[55] R. Liu, B. Xie, Y. Zhang- Locally Analytic Vectors of Unitary Principal Series of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Ann. E.N.S. **45** (2012), p. 167-190.

[56] J. Lubin, J. Tate- Formal moduli for one-parameter formal Lie groups, Bulletin de la S.M.F. 94, p. 49-59, 1966.

[57] A. Marmora-Irégularité et conducteur de Swan p-adiques, Documenta Mathematica 9 (2004), p. 439-483.

[58] Lue. Pan-First covering of Drinfel'd upper half plane and Banach representations of $GL_2(\mathbf{Q}_p)$, preprint 2015, arXiv :1510.03006.

[59] V. Paškūnas-The image of Colmez's Montréal functor, Publ.Math. IHES 2013, Vol.118, Nr. 1, p.1-191.

[60] D. Patel, T. Schmidt, M. Strauch-Locally analytic representations of $\mathrm{GL}(2, L)$ via semistable models of $\mathbf{P}^1$, preprint, arxiv.org/pdf/1410.1423v2.pdf

[61] M. Rapoport, T. Zink- Period spaces for p-divisible groups, Annals Math. Studies 141, Princeton University Press, 1996.

[62] T. Saito- Modular forms and p-adic Hodge theory, Invent. Math. 129 (1997), p. 607-620.

[63] S. Sen-Continuous cohomology and p-adic Galois representations, Invent. Math 62 (1980/1981), p. 89-116.

[64] P. Schneider, U. Stuhler-The cohomology of p-adic symmetric spaces, Invent. Math. 105, p. 47-122, 1991.

[65] P. Schneider, J. Teitelbaum- An integral transform for p-adic symmetric spaces, Duke Math. Journal 86, p. 391-433, 1997.

[66] P. Schneider, J. Teitelbaum-Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2, J.A.M.S. 15, p.443-468, 2002.

[67] P. Schneider, J. Teitelbaum- Banach space representations and Iwasawa theory, Israel J. Math. 127, p. 359-380, 2002.

[68] P. Schneider, J. Teitelbaum-Algebras of p-adic distributions and admissible representations, Invent. Math. 153 (2003), p. 145-196.

[69] P. Schneider, J. Teitelbaum-p-adic boundary values, Astérisque 278, 2002, p. 51-125, et 295, p. 291-299, 2004.

[70] B. Schraen-Représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(L)$ et catégories dérivées, Israel Journal of Math., vol. 176, p. 307-362.

[71] P. Scholze, J. Weinstein-Moduli of p-divisible groups, Cambridge Journal of Mathematics 1 (2013), p. 145-237.

[72] P. Scholze-p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties. Forum of Mathematics, Pi, 1, e1 2013.

[73] P. Scholze-On the p-adic cohomology of the Lubin-Tate tower, preprint.

[74] R. Taylor-On the meromorphic continuation of degree two L-functions, Documenta Math. (2006), 729-779.

[75] J. Teitelbaum- Geometry of an étale covering of the p-adic upper half plane, Ann. Inst. Fourier 40, 68-78, 1990.

Gabriel Dospinescu, CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France
E-mail : gabriel.dospinescu@ens-lyon.fr

Arthur-César Le Bras, Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : arthur-cesar.le-bras@imj-prg.fr, lebras@clipper.ens.fr