

# Effets de la résonance en flexion des planchers sur les vibrations verticales des bâtiments

Céline Chesnais, Claude Boutin, Stéphane Hans

► **To cite this version:**

Céline Chesnais, Claude Boutin, Stéphane Hans. Effets de la résonance en flexion des planchers sur les vibrations verticales des bâtiments. AFPS 2015 - 9ème Colloque National, Nov 2015, CHAMPS SUR MARNE, France. 10p. hal-01382797

**HAL Id: hal-01382797**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01382797>**

Submitted on 17 Oct 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Effets de la résonance en flexion des planchers sur les vibrations verticales des bâtiments

## Effects of the bending resonance of the floors on the vertical vibrations of buildings

Céline Chesnais<sup>1</sup>, Claude Boutin<sup>2</sup>, Stéphane Hans<sup>2</sup>

1. Université Paris-Est, GERS, SV, IFSTTAR  
Cité Descartes, 14-20 boulevard Newton  
77447 Champs-sur-Marne, Marne-la-Vallée Cedex 2  
celine.chesnais@ifsttar.fr

2. Université de Lyon, LGCB/LTDS CNRS 5513, ENTPE  
3 rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin Cedex  
claude.boutin@entpe.fr, stephane.hans@entpe.fr

---

**RÉSUMÉ.** Les bâtiments sont des assemblages de poutres et de plaques bien plus rigides en traction-compression qu'en flexion. Ainsi, il peut arriver que les modes verticaux d'une structure, qui sont pilotés par la traction-compression des murs à l'échelle macroscopique, apparaissent dans la même gamme de fréquences que les modes de flexion des planchers. Ce phénomène est étudié en considérant des bâtiments idéalisés constitués par la répétition périodique de portiques. La condition de séparation d'échelles étant respectée pour la traction-compression, la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets est utilisée pour obtenir le comportement macroscopique. En l'absence de résonance des planchers en flexion, les vibrations verticales de la structure sont décrites par l'équation habituelle pour les poutres en traction-compression. Lorsqu'il y a résonance, la forme des équations est identique mais la masse réelle des planchers doit être remplacée par une masse apparente qui dépend de la fréquence et peut devenir négative. La structure présente alors un comportement atypique au voisinage des fréquences de résonance des planchers. Cette étude porte plus particulièrement sur les propriétés modales et la fonction de transfert. Les effets de la résonance sont d'abord mis en évidence de façon théorique puis ils sont illustrés par des simulations numériques.

**ABSTRACT.** Buildings are made up of beams and plates which are much stiffer in tension-compression than in bending. Thus, the vertical modes of a structure, which are governed by the tension-compression of the walls at the macroscopic scale, can appear in the same frequency range as the bending modes of the floors. This phenomenon is investigated by considering idealized buildings constituted by the periodic repetition of frames. Since the condition of scale separation is respected for tension-compression, the homogenization method of periodic discrete media is used to obtain the macroscopic behaviour. In the absence of the bending resonance of the floors, the vertical vibrations of the structure are described by the usual equation for beams in tension-compression. When there is resonance, the form of the equations is unchanged but the real mass of the floors must be replaced by an effective mass which depends on the frequency and can become negative. The structure has then an atypical behaviour in the neighbourhood of the natural frequencies of the floors. This study focuses on the modal properties and the transfer function. The effects of the resonance are first evidenced theoretically and then illustrated with numerical simulations.

**MOTS-CLÉS :** mouvements verticaux, résonance, homogénéisation, masse apparente, fréquences interdites

**KEYWORDS:** vertical motions, resonance, homogenization, effective mass, frequency bandgaps

---

## 1. Introduction

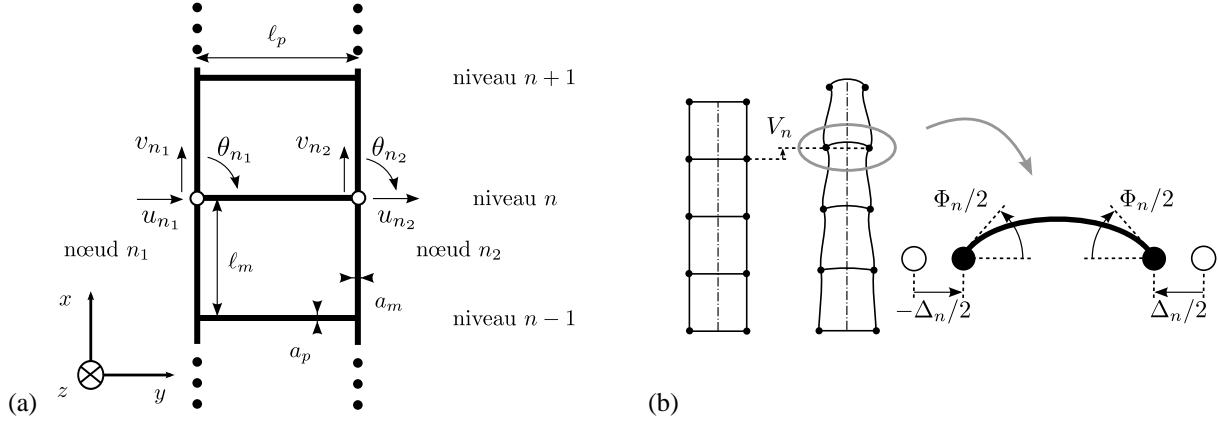
Généralement, seuls les mouvements horizontaux du sol sont pris en compte lors de l'évaluation de la réponse des structures aux séismes. Pourtant, à proximité de l'épicentre, la composante verticale peut être la plus importante et provoquer la ruine de certains ouvrages (Papazoglou et Elnashai, 1996). Les modes verticaux peuvent aussi être excités par les vibrations du sol dues aux chantiers ou au trafic (Auersch, 2010). La réponse des bâtiments à une sollicitation verticale peut être relativement complexe car il s'agit de structures réticulées constituées de poutres et de plaques bien plus rigides en traction-compression qu'en flexion. Les modes verticaux sont pilotés par la traction-compression des murs et poteaux à l'échelle macroscopique (c'est-à-dire à l'échelle de la structure) et peuvent apparaître dans la même gamme de fréquences que les modes de flexion des planchers. Dans ce cas, les planchers agissent comme des oscillateurs répartis sur toute la hauteur et le bâtiment se comporte comme un métamatériau. Ces matériaux composites, avec un grand contraste de rigidité entre les constituants qui permet des résonances locales, possèdent des propriétés atypiques (Auriault et Bonnet, 1985; Liu *et al.*, 2000). En particulier, la masse apparente est différente de la masse réelle et dépend de la fréquence.

Cet article s'intéresse aux conséquences de la résonance locale sur les propriétés modales des structures (Chesnais *et al.*, 2015). Pour cela, nous considérons des bâtiments idéalisés constitués d'un empilement de portiques. Si ces derniers sont suffisamment nombreux, la longueur caractéristique des déformations associées aux premiers modes de la structure est bien plus grande que la taille d'un portique. Cette séparation d'échelles permet d'utiliser la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (HMPD) pour obtenir une description macroscopique. Cette méthode a été mise au point par Caillerie (Tollenaere et Caillerie, 1998) et a été étendue aux situations avec résonance locale en flexion (Chesnais, 2010). Son principal avantage est que le comportement macroscopique est déduit de façon rigoureuse à partir des propriétés du portique de base. De plus, la formulation est complètement analytique, ce qui permet de comprendre le rôle de chaque paramètre. Cette méthode a déjà donné des résultats intéressants sur le comportement dynamique des structures portiques soumises à une excitation horizontale (Hans et Boutin, 2008) qui ont été appliqués sur des bâtiments (Chesnais, 2010; Chesnais *et al.*, 2011; Hans *et al.*, 2011). Les structures étudiées et les principes de la méthode sont décrits dans la partie 2. La partie 3 présente les deux comportements macroscopiques possibles : sans et avec la résonance locale. Dans la partie 4, les conséquences de la résonance sur les propriétés modales et la fonction de transfert sont analysées. Les résultats sont confirmés par des simulations numériques.

## 2. Cadre de l'étude

Les structures étudiées sont constituées par l'empilement d'un grand nombre  $N$  de portiques identiques comportant un plancher soutenu par deux murs (figure 1(a)). Les murs et les planchers sont des poutres ou des plaques dont le comportement hors-plan est modélisé par des poutres d'Euler-Bernoulli. Ils sont reliés par des nœuds parfaitement rigides et sans masse. Les caractéristiques des planchers ( $j = p$ ) et des murs ( $j = m$ ) sont :  $\ell_j$  la longueur,  $a_j$  l'épaisseur,  $A_j$  l'aire de la section,  $I_j = a_j^2 A_j / 12$  l'inertie selon la direction  $z$ ,  $\rho_j$  la masse volumique,  $E_j$  le module d'élasticité et  $\nu_j$  le coefficient de Poisson.

L'analyse d'un tel réseau périodique de poutres avec la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets (HMPD) est réalisée en deux étapes (Tollenaere et Caillerie, 1998). Tout d'abord, la discrétisation de l'équilibre dynamique permet de ramener de façon rigoureuse l'étude de l'équilibre de l'ensemble de la structure en régime harmonique à l'étude de l'équilibre des nœuds. Ainsi, les mouvements des nœuds peuvent être utilisés



**Figure 1:** (a) Structures étudiées et notations. (b) Cinématique verticale.

comme descripteurs du mouvement de la structure. La cinématique est caractérisée à chaque niveau  $n$  par les mouvements des deux nœuds dans le plan  $(x, y)$  (figure 1(a)). Ces six variables peuvent être remplacées par trois variables décrivant le mouvement de corps rigide du niveau  $n$  et trois variables décrivant sa déformation. Les structures étudiées étant symétriques, les cinématiques horizontale et verticale sont découplées. Cet article traite uniquement des vibrations verticales qui sont gouvernées par  $(V, \Delta, \Phi)$  (figure 1(b)). L'étude des vibrations horizontales peut être trouvée dans (Boutin et Hans, 2003; Hans et Boutin, 2008).

La seconde étape est le processus d'homogénéisation qui permet de construire un modèle continu décrivant le comportement macroscopique. L'hypothèse clé est que la taille d'un portique dans la direction de la périodicité  $\ell_m$  est petite par rapport à la taille caractéristique des vibrations de la structure  $L$ . Ainsi, le facteur d'échelles est petit :  $\epsilon = \ell_m/L \ll 1$ . À cause de la condition de séparation d'échelles, la méthode est limitée aux premiers modes de vibration. L'existence d'une échelle macroscopique est exprimée au moyen de la variable d'espace macroscopique  $x$ . Les inconnues sont des fonctions continues de  $x$  qui coïncident avec les variables discrètes à chaque niveau, par exemple  $V_\epsilon(x = x_n) = V(\text{niveau } n)$ . Ces fonctions sont supposées converger lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 et sont développées selon les puissances de  $\epsilon$  :  $V_\epsilon(x) = V^0(x) + \epsilon V^1(x) + \epsilon^2 V^2(x) + \dots$ . De la même façon, toutes les autres inconnues y compris la fréquence propre sont développées selon les puissances de  $\epsilon$ . Comme  $\ell_m = \epsilon L$  est un petit incrément par rapport à  $x$ , les variations des fonctions inconnues entre des niveaux voisins sont exprimées à l'aide de séries de Taylor, ce qui introduit les dérivées macroscopiques. La physique du problème est prise en compte grâce à la normalisation qui consiste à estimer les paramètres géométriques et mécaniques en fonction des puissances de  $\epsilon$ . Ainsi, les effets mécaniques apparaissent au même ordre quelle que soit la valeur de  $\epsilon$ . Tous les développements selon les puissances de  $\epsilon$  sont ensuite introduits dans les équations d'équilibre des nœuds et les différents ordres de grandeur sont séparés. Le modèle homogénéisé correspond à l'ordre 0, c'est-à-dire la limite lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, et les ordres supérieurs sont des correcteurs.

En général, la condition de séparation d'échelles nécessite que les longueurs des ondes de compression  $\lambda_c$  et de flexion  $\lambda_f$  générées dans les éléments à la fréquence de vibration de la structure globale soient bien plus grandes que la longueur des éléments  $\ell$ . Dans ce cas, les efforts dans les éléments peuvent être développés en fonction des petits paramètres  $\ell/\lambda_c$  et  $\ell/\lambda_f$ . Cette situation correspond à un état quasi-statique à l'échelle microscopique. Néanmoins, à des fréquences plus élevées, il peut arriver que seule la longueur de l'onde de compression soit plus grande que la longueur des éléments et que ces derniers soient en résonance en flexion. Le développement de

l'effort tranchant et du moment fléchissant en fonction de  $\ell/\lambda_f$  n'est plus possible. Cependant, l'effort normal peut encore être développé en fonction de  $\ell/\lambda_c$  et l'homogénéisation conduit à des descriptions atypiques avec dynamique interne. Au-delà de cette gamme de fréquences, la résonance locale à la fois en flexion et en compression rend l'homogénéisation impossible.

### 3. Modèles macroscopiques

#### 3.1. État quasi-statique à l'échelle microscopique

Afin d'illustrer la situation classique en homogénéisation, la première structure portiques étudiée a des éléments suffisamment épais pour que les modes verticaux soient associés à un état quasi-statique à l'échelle microscopique. Les murs et les planchers sont réalisés dans le même matériau et la normalisation retenue est donnée ci-dessous.

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(\sqrt{\epsilon}) \quad ; \quad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\sqrt{\epsilon}) \quad ; \quad \frac{\ell_p}{\ell_m} = O(1) \quad ; \quad \omega_0 = O\left(\frac{1}{L}\sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}\right) \quad [1]$$

Dans ce cas, l'homogénéisation montre que, à l'ordre dominant, l'équilibre des forces verticales est décrit par l'équation classique des poutres en traction-compression avec le module de compression des deux murs  $2E_m A_m$  et la masse linéique  $\Lambda$ .

$$\Lambda \omega_0^2 V^0(x) + 2E_m A_m V^{0''}(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \Lambda = \Lambda_m + \Lambda_p, \quad \Lambda_m = 2\rho_m A_m, \quad \Lambda_p = \rho_p A_p \frac{\ell_p}{\ell_m} \quad [2]$$

Une fois que le déplacement vertical moyen  $V$  est connu, les deux autres variables associées à la cinématique verticale,  $\Phi$  et  $\Delta$ , peuvent être déterminées grâce à deux équations supplémentaires qui décrivent l'équilibre interne des portiques (Boutin et Hans, 2003; Chesnais, 2010). Une étude systématique dans laquelle les propriétés des éléments varient montre que les vibrations verticales avec un état quasi-statique à l'échelle microscopique sont toujours décrites par l'équation [2] (Boutin et Hans, 2003).

#### 3.2. Résonance locale en flexion

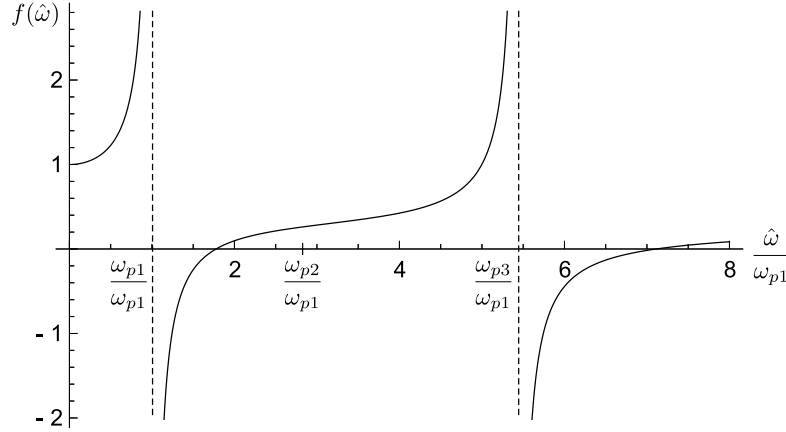
Les effets de la résonance des planchers en flexion sont mis en évidence par l'étude d'une structure avec des planchers plus fins que les murs.

$$\frac{a_m}{\ell_m} = O(\sqrt{\epsilon}) \quad ; \quad \frac{a_p}{\ell_m} = O(\epsilon) \quad ; \quad \frac{\ell_p}{\ell_m} = O(1) \quad ; \quad \omega_0 = O\left(\frac{1}{L}\sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}\right) \quad [3]$$

Comme l'ordre de grandeur de  $a_m/a_p$  n'est pas une puissance entière de  $\epsilon$ , les inconnues doivent maintenant être développées selon les puissances de  $\epsilon^{1/2}$ . De plus, à cause de la résonance locale, l'effort tranchant et le moment fléchissant dans les éléments ne peuvent pas être développés. L'homogénéisation fournit alors les équations suivantes pour les deux premiers ordres significatifs de l'équilibre des forces verticales. La principale différence avec la partie 3.1 est la multiplication de  $\Lambda_p$  par une fonction  $f$  qui dépend de la fréquence.

$$\Lambda_m \omega_0^2 V^0(x) + 2E_m A_m V^{0''}(x) = 0 \quad [4a]$$

$$\Lambda_m \omega_0^2 \epsilon^{1/2} V^{1/2}(x) + 2E_m A_m \epsilon^{1/2} V^{1/2''}(x) + 2\Lambda_m \omega_0 \epsilon^{1/2} \omega_{1/2} V^0(x) + \Lambda_p f(\omega_0) \omega_0^2 V^0(x) = 0 \quad [4b]$$



**Figure 2:** Variations de la fonction  $f$  en fonction de la fréquence adimensionnelle  $\hat{\omega}/\omega_{p1}$ . Comme les fréquences propres des poutres d'Euler-Bernoulli sont proportionnelles à la suite des carrés des entiers impairs, les modes des planchers correspondent aux abscisses suivantes :  $\omega_{p1}/\omega_{p1} = 3^2/3^2 = 1$ ,  $\omega_{p2}/\omega_{p1} = 5^2/3^2 = 2,78$ ,  $\omega_{p3}/\omega_{p1} = 7^2/3^2 = 5,44$ , etc.

À cause du contraste entre les épaisseurs des murs et des planchers,  $\Lambda_p$  est négligeable par rapport à  $\Lambda_m$ . C'est la raison pour laquelle l'équation à l'ordre dominant est dégénérée. Pour la plupart des fréquences  $f(\omega_0) = O(1)$  et l'équation [4]a suffit à décrire le comportement macroscopique. Cependant, nous verrons que  $f(\omega_0)$  peut devenir infinie. Dans ce cas, le terme d'inertie associé aux planchers n'est plus négligeable. Pour construire une description macroscopique valable dans toute la gamme de fréquences des vibrations verticales, nous additionnons les équations [4].

$$\Lambda(\hat{\omega}) \hat{\omega}^2 \hat{V}(x) + 2E_m A_m \hat{V}''(x) = o(\sqrt{\epsilon}) \quad [5]a$$

$$\text{avec} \quad \hat{V}(x) = V^0(x) + \epsilon^{1/2} V^{1/2}(x), \quad \hat{\omega} = \omega_0 + \epsilon^{1/2} \omega_{1/2}, \quad \Lambda(\hat{\omega}) = \Lambda_m + \Lambda_p f(\hat{\omega})$$

$$f(\hat{\omega}) = \frac{8}{3\pi \sqrt{\frac{\hat{\omega}}{\omega_{p1}}} \left[ \coth\left(\frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{\hat{\omega}}{\omega_{p1}}}\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{\hat{\omega}}{\omega_{p1}}}\right) \right]} \quad [5]b$$

L'équation [5]a ressemble à l'équation [2] mais elle en diffère fondamentalement à cause de la masse apparente  $\Lambda(\hat{\omega})$  qui dépend de la fréquence. La méthode HMPD fournit une expression analytique de la fonction  $f$ . Ses variations en fonction de la fréquence sont représentées sur la figure 2. Cette figure montre que  $f(\hat{\omega}) \rightarrow 1$  lorsque  $\hat{\omega} \rightarrow 0$  comme prévu et que  $|f(\hat{\omega})| \rightarrow +\infty$  lorsque  $\hat{\omega} \rightarrow \omega_{p(2k-1)}$  où  $\omega_{p(2k-1)}$  désigne les pulsations des modes de flexion impairs des planchers avec les deux extrémités encastées. Pour la plupart des pulsations supérieures à  $\omega_{p1}$ , nous avons  $f(\hat{\omega}) < 1$ , ce qui signifie que la structure semble plus légère grâce à la résonance locale. Il faut également noter que  $f(\hat{\omega})$  peut être négative. La masse apparente est différente de la masse réelle car les points des portiques bougent les uns par rapport aux autres. D'après la définition des variables macroscopiques,  $V(x)$  décrit le déplacement vertical moyen des nœuds. À basses fréquences, l'ensemble du portique subit le même mouvement de translation. En conséquence, la somme des forces d'inertie qui agissent sur l'ensemble du portique est égale à la masse du portique multipliée par l'accélération des nœuds. Lorsqu'il y a résonance en flexion, le

mouvement des points des planchers peut fortement différer de celui des nœuds et certains points peuvent même être en opposition de phase. Dans ces conditions, la somme des forces d'inertie qui agissent sur le portique est modifiée. Cette analyse de l'origine physique de la masse apparente est confirmée par la cohérence entre la déformation des planchers et les variations de la fonction  $f$ . Lorsque  $\hat{\omega} \rightarrow \omega_{p1}$ , la déflexion devient de plus en plus grande à cause de la résonance. Elle est en phase avec les nœuds pour  $\hat{\omega} < \omega_{p1}$  et en opposition de phase pour  $\hat{\omega} > \omega_{p1}$ . À la fréquence du deuxième mode de flexion  $\omega_{p2}$ , le mouvement en phase des deux murs ne provoque pas la résonance des planchers. Néanmoins, la déflexion des planchers n'est pas uniforme et la masse apparente est plus petite que la masse réelle.

Cette étude se concentre sur la description macroscopique mais l'équilibre interne des portiques est également affecté par la résonance locale. Comme ces équations dépendent de la rigidité en flexion des éléments, il est probable que la structure ait également un comportement atypique au voisinage des fréquences des modes pairs des planchers, des modes des murs et des modes de l'ensemble du portique (Chesnais, 2010; Chesnais *et al.*, 2015).

#### 4. Quelques conséquences de la résonance locale

Ce paragraphe présente les conséquences de la résonance locale et des variations de la masse apparente sur le comportement dynamique d'une structure en considérant deux problèmes : les vibrations libres et forcées. De l'amortissement est introduit dans le dernier cas. La structure étudiée a été spécialement conçue pour mettre en valeur les effets de la résonance locale. Il s'agit d'une tranche de 1 m d'épaisseur d'une structure portiques comme sur la figure 1 avec  $N = 15$  niveaux. Elle est encadrée à la base et libre au sommet. Les murs et les planchers ont la même longueur  $\ell_m = \ell_p = 3$  m et les épaisseurs correspondent aux ordres de grandeur de la partie 3.2. Dans (Boutin et Hans, 2003), il a été montré que le facteur d'échelles peut être estimé par  $\epsilon \approx \pi/(2N)$  pour le premier mode macroscopique de la structure. Les murs sont en béton mais les planchers ont été alourdis afin d'avoir  $\Lambda_p \approx \Lambda_m$  et augmenter l'influence de leur résonance. Les caractéristiques retenues sont résumées dans l'équation [6]. Les fréquences propres des planchers sont  $f_{p1} = 52,08$  Hz,  $f_{p2} = 143,56$  Hz,  $f_{p3} = 281,44$  Hz.

$$\begin{array}{llll} N = 15 & a_m = 0,971 \text{ m} & E_m = E_p = 30000 \text{ MPa} & \rho_m = 2300 \text{ kg.m}^{-3} \\ \ell_m = \ell_p = 3 \text{ m} & a_p = 0,314 \text{ m} & \nu_m = \nu_p = 0.2 & \rho_p = 14225 \text{ kg.m}^{-3} \end{array} \quad [6]$$

##### 4.1. Analyse modale

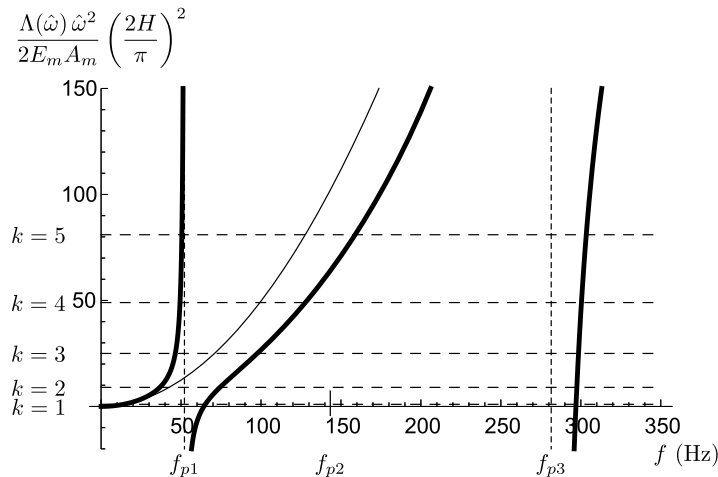
Pour une structure fixe à la base et libre au sommet, la solution de l'équation [5]a est écrite ci-dessous.

$$\hat{V}(x) = B \sin(\alpha x) \quad \text{avec} \quad \alpha^2 = \frac{\Lambda(\hat{\omega}) \hat{\omega}^2}{2E_m A_m} \quad \text{et} \quad \cos(\alpha H) = 0 \quad [7]$$

Les fréquences propres sont donc données par l'équation [8].

$$\alpha_k H = \frac{(2k-1)\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Lambda(\hat{\omega}) \hat{\omega}^2}{2E_m A_m} \left( \frac{2H}{\pi} \right)^2 = (2k-1)^2 \quad [8]$$

En l'absence de résonance, la masse apparente est constante et il n'y a qu'une seule solution  $\hat{\omega}_k$  pour chaque valeur de  $k$ . Pour la structure considérée, cela conduit aux fréquences données dans la seconde colonne de la table 1. Comme elles sont dans la même gamme que les fréquences propres des planchers, les variations de la masse apparente ne peuvent pas être négligées. La figure 3 montre que cela a trois conséquences :



**Figure 3:** Le trait fin est obtenu en remplaçant la masse apparente par la masse réelle alors que le trait épais prend en compte la résonance des planchers. Les traits pointillés horizontaux indiquent les premières valeurs de  $(2k - 1)^2$ . Les fréquences propres de la structure sont les abscisses des intersections des courbes continues et des traits pointillés.

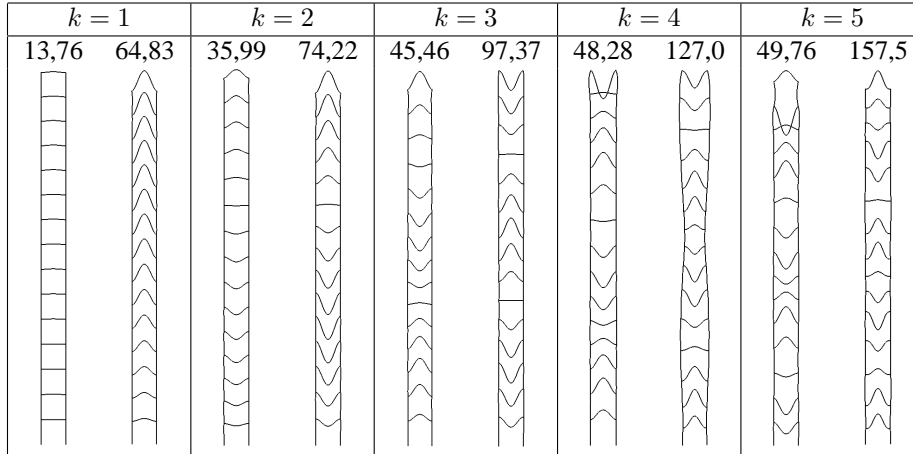
- *Modification des fréquences de résonance de la structure.*
- *Absence d'unicité des fréquences modales :* Comme il y a plusieurs solutions  $\hat{\omega}$  pour chaque valeur de  $k$ , la structure a la même déformée macroscopique à différentes fréquences. Cependant, à l'échelle microscopique, la déformation des planchers est différente.
- *Concentration de modes :* À cause des grandes variations de la masse apparente au voisinage des fréquences des modes de flexion impairs des planchers, il y a une solution  $\hat{\omega}$  proche de ces fréquences pour chaque valeur de  $k$ . Juste après la résonance des planchers, la masse apparente est négative et il y a une gamme de fréquences sans aucun mode vertical.

Tous ces résultats sont confirmés numériquement avec le code d'éléments finis CESAR-LCPC. Les modes de deux structures ont été déterminés. Pour la première, les éléments sont modélisés par des poutres d'Euler-Bernoulli comme avec la méthode HMPD. Pour la seconde, les éléments sont modélisés par des poutres de Timoshenko, ce

k	Résonance des planchers négligée (Eq. [2])	Résonance des planchers prise en compte (Eq. [5]a)	Éléments finis avec des poutres d'Euler-Bernoulli	Éléments finis avec des poutres de Timoshenko
1	14,19	14,00 - 65,14 - 297,0	13,76 - 64,83	13,73 - 61,35
2	42,56	36,73 - 74,35 - 297,5	35,99 - 74,22	35,12 - 71,71
3	70,94	46,42 - 97,68 - 298,5	45,46 - 97,37	43,32 - 96,04
4	99,31	49,36 - 127,8 - 300,4	48,28 - 127,0	45,66 - 125,5
5	127,69	50,49 - 158,9 - 303,4	49,76 - 157,5	46,93 - 154,2

**Table 1:** Comparaison des fréquences propres (Hz) de la structure estimées avec les modèles homogénéisés et la méthode des éléments finis.





**Figure 4:** Déformées modales et fréquences propres de la structure calculées avec la méthode des éléments finis. Pour chaque valeur de  $k$ , les murs et les planchers se déforment en phase à la fréquence la plus basse et en opposition de phase à la fréquence plus élevée.

qui est plus réaliste pour la structure considérée. La table 1 compare les fréquences propres calculées avec la méthode des éléments finis et l'équation [8]. Les deux approches donnent des résultats similaires. L'utilisation des poutres de Timoshenko modifie légèrement les fréquences mais les déformées modales sont identiques (figure 4).

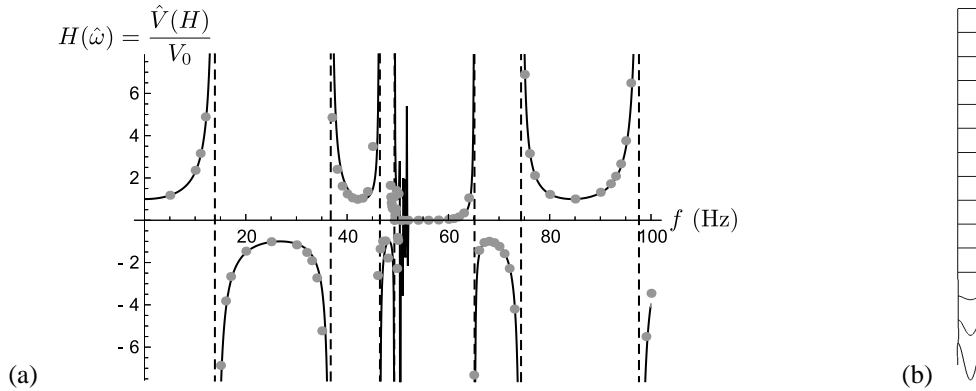
#### 4.2. Fonction de transfert

Un mouvement harmonique vertical d'amplitude  $V_0$  est maintenant imposé à la base de la structure et nous regardons l'évolution en fonction de la fréquence de l'amplitude du déplacement au sommet. La solution du modèle homogénéisé (équation [5]a) dépend du signe de la masse apparente comme le montre l'équation [9].

$$\Lambda(\hat{\omega}) \geq 0 \Rightarrow \hat{V}(x) = V_0 [\cos(\alpha x) + \tan(\alpha H) \sin(\alpha x)] \quad \text{et} \quad H(\hat{\omega}) = \frac{\hat{V}(H)}{V_0} = \frac{1}{\cos(\alpha H)} \quad [9]a$$

$$\Lambda(\hat{\omega}) < 0 \Rightarrow \hat{V}(x) = V_0 [\cosh(\alpha x) - \tanh(\alpha H) \sinh(\alpha x)] \quad \text{et} \quad H(\hat{\omega}) = \frac{\hat{V}(H)}{V_0} = \frac{1}{\cosh(\alpha H)} \quad [9]b$$

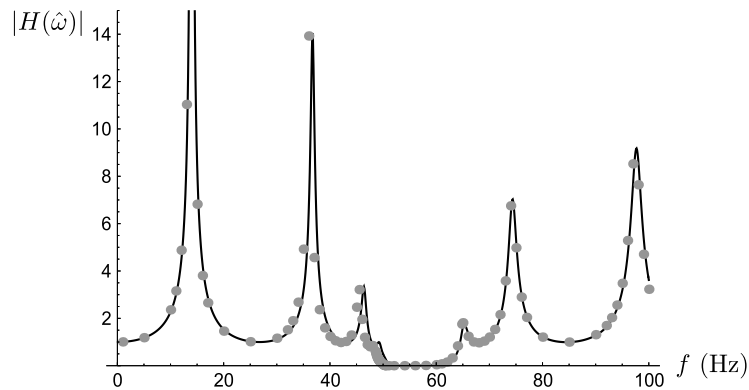
Les variations avec la fréquence de la fonction de transfert  $H(\hat{\omega})$  sont représentées sur la figure 5(a). Comme prévu, cette fonction présente des pics aux fréquences propres de la structure déterminées dans la partie 4.1. Juste avant la première fréquence de résonance des planchers à 52 Hz, les pics sont très nombreux à cause des grandes variations de la masse apparente. Cependant, un grand nombre d'entre eux ne correspondent pas à des modes réels. En effet, le processus d'homogénéisation remplace la structure par une poutre équivalente qui a une infinité de degrés de liberté et donc une infinité de modes verticaux. Au contraire, la structure étudiée n'a que 15 déformées macroscopiques possibles. Juste après la résonance des planchers, la masse apparente est négative et il y a une bande de fréquences interdite, c'est-à-dire que le mouvement n'est pas transmis au sommet de la structure pour ces fréquences. Tous ces résultats sont confirmés numériquement. La fonction de transfert calculée avec la méthode des éléments finis est presque identique (figure 5(a)). Comme expliqué ci-dessus, il y a moins de pics avant la résonance des planchers et la bande interdite démarre à des fréquences légèrement plus basses. Un exemple de



**Figure 5:** (a) Fonction de transfert de la structure étudiée. La courbe continue correspond au modèle homogénéisé (équations [9]) et les points aux calculs par éléments finis. (b) Déformation de la structure à 52 Hz.

déformation de la structure à l'intérieur de la bande interdite est également présenté sur la figure 5(b). Les premiers planchers subissent des déformations importantes à cause de la résonance mais l'énergie n'est pas transférée aux niveaux supérieurs. À partir du quatrième plancher, il n'y a plus de vibrations.

L'introduction d'un peu d'amortissement ne modifie pas fondamentalement les résultats. Pour cela, un module d'élasticité complexe  $E_p = E_m = E e^{i\eta}$  est utilisé dans le modèle homogénéisé (équations [9]). Le module de la fonction de transfert est représenté sur la figure 6 pour  $\eta = 2 \cdot 10^{-2}$ . La principale différence avec la figure 5(a) est que la bande de fréquences interdite est plus large. En conséquence, les pics de la fonction de transfert avant la résonance n'existent plus. Les simulations numériques continuent à donner des résultats très proches de la fonction de transfert du modèle homogénéisé.



**Figure 6:** Module de la fonction de transfert de la structure amortie ( $E_p = E_m = E e^{i\eta}$  avec  $\eta = 2 \cdot 10^{-2}$ ). La courbe continue correspond au modèle homogénéisé (équations [9]) et les points aux calculs par éléments finis.

## 5. Conclusion

À cause du contraste de rigidité entre la traction-compression et la flexion dans les poutres et les plaques qui constituent les bâtiments, leurs modes verticaux peuvent apparaître dans la même gamme de fréquences que les modes de flexion des planchers. L'extension de la méthode HMPD à ces situations avec résonance locale montre que la masse réelle doit être remplacée par une masse apparente qui dépend de la fréquence. Celle-ci devient infinie et change de signe au voisinage des modes de flexion impairs des planchers. En conséquences, plusieurs modes verticaux associés à des fréquences différentes peuvent avoir la même déformée macroscopique et des bandes de fréquences interdites pour lesquelles les vibrations ne se propagent pas dans la structure peuvent apparaître.

Ces résultats théoriques sont confirmés par des simulations numériques. La structure étudiée a été conçue spécialement pour mettre en valeur les effets de la résonance locale. Néanmoins, la méthode HMPD étant complètement analytique, il est possible d'anticiper l'évolution du comportement lorsque des paramètres sont modifiés. En particulier, si la proportion de masse dans les planchers est plus faible, les effets de la résonance sont visibles dans une gamme plus étroite autour des fréquences de résonance des planchers. Dans (Chesnais *et al.*, 2015), le modèle proposé décrit correctement les modes verticaux d'une structure portiques avec des dimensions plus réalistes et il est très certainement transposable à des bâtiments.

## References

- L. Auersch : Building response due to ground vibration - Simple prediction model based on experience with detailed models and measurements. *Int. J. Acoust. Vib.*, 15(3):101–112, 2010.
- J-L Auriault et G. Bonnet : Dynamique des composites élastiques périodiques. *Arch. Mech.*, 37(4-5):269–284, 1985.
- C. Boutin et S. Hans : Homogenisation of periodic discrete medium: Application to dynamics of framed structures. *Comput. Geotech.*, 30(4):303–320, 2003.
- C. Chesnais : *Dynamique de milieux réticulés non contreventés - Application aux bâtiments*. Thèse de doctorat, ENTPE - ECL, 2010. URL [http://bibli.ec-lyon.fr/exl-doc/TH\\_T2177\\_cchesnais.pdf](http://bibli.ec-lyon.fr/exl-doc/TH_T2177_cchesnais.pdf).
- C. Chesnais, C. Boutin et S. Hans : Structural Dynamics and Generalized Continua. In H. Altenbach, Maugin G. A. et Erofeev V., éditeurs : *Mechanics of Generalized Continua*, pages 57–76. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- C. Chesnais, C. Boutin et S. Hans : Effects of the local resonance in bending on the longitudinal vibrations of reticulated beams. *Wave Motion*, 57:1–22, 2015.
- S. Hans et C. Boutin : Dynamics of discrete framed structures: A unified homogenized description. *J. Mech. Mater. Struct.*, 3(9):1709–1739, 2008.
- S. Hans, C. Boutin, C. Chesnais, J. Soubestre et Q. B. Bui : De la mesure de bruit de fond au fonctionnement structurel. In 8<sup>e</sup> Colloque National de l'AFPS, École des Ponts Paristech, 2011.
- Z. Liu, X. X. Zhang, Y. W. Mao, Y. Y. Zhu, Z. Y. Yang, C. T. Chan et P. Sheng : Locally resonant sonic materials. *Science*, 289(5485):1734–1736, 2000.
- A. J. Papazoglou et A. S. Elnashai : Analytical and field evidence of the damaging effect of vertical earthquake ground motion. *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, 25(10):1109–1137, 1996.
- H. Tollenaere et D. Caillerie : Continuous modeling of lattice structures by homogenization. *Adv. Eng. Softw.*, 29(7-9):699–705, 1998.