Quelques Résultats sur les Espaces de Sobolev

Jérôme Droniou

Quelques Résultats sur les Espaces de Sobolev.

Jérôme Droniou[1]

29/04/2001

[1]Université de Provence, CMI, Technopôle de Château Gombert, 39 rue F.Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13
email: droniou@cmi.univ-mrs.fr

Table des Matières

Notations générales.
N est un entier supérieur à 1. λ_N désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$.
$x \cdot y$ est le produit scalaire canonique de deux vecteurs $(x, y) \in \mathbb{R}^N$ et $|\cdot|$ la norme euclidienne associée (dist est la distance correspondante).
Pour $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, x' désigne le vecteur $(x_1, \ldots, x_{N-1})$ de $\mathbb{R}^{N-1}$ (vecteur "vide" lorsque $N = 1$).
Le support d'une fonction f est noté $\mathrm{supp}(f)$. $\mathbf{1}_E$ est la fonction caractéristique d'un ensemble E.
Nous noterons parfois ∂_i l'opérateur de dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x_i}$.
Enfin, $(e_1, \ldots, e_N)$ désigne la base canonique euclidienne de $\mathbb{R}^N$; nous nous permettrons aussi l'abus de considérer que les $N-1$ premiers vecteurs $(e_1, \ldots, e_{N-1})$ de cette base forment la base canonique de $\mathbb{R}^{N-1}$. $\det_N$ désigne le déterminant dans la base $(e_1, \ldots, e_N)$.

Chapitre 1

Changement de Variable Lipschitzien, Transport d'Espaces de Sobolev

1.1 Le Théorème de Rademacher

Dans ce chapitre, si $x \in \mathbb{R}^N$ et $r \geq 0$, $B(x,r)$ désigne la boule euclidienne ouverte dans $\mathbb{R}^N$, de centre x et de rayon r; $\overline{B}(x,r)$ désigne son adhérence et $S(x,r)$ son bord.

1.1.1 Quelques Rappels en Dimension 1

Lemme 1.1.1 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application lipschitzienne alors la dérivée Df de f au sens des distributions sur $\mathbb{R}$ est dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = f(0) + \int_0^x Df(t)\,dt. \tag{1.1.1}$$

Démonstration:

$\diamondsuit$ Etape 1: On montre que $Df \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$; $\frac{\varphi(\cdot+s)-\varphi(\cdot)}{s} \stackrel{s\to 0}{\longrightarrow} \varphi'$ uniformément sur $\mathbb{R}$ et a, pour $s \in [-1,1]\backslash\{0\}$, son support inclus dans $\mathrm{supp}(\varphi) + [-1,1]$; comme $f \in L^1(\mathrm{supp}(\varphi)+[-1,1])$, on en déduit

$$\begin{aligned}
\langle Df, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= -\lim_{s\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\varphi(x+s)-\varphi(x)}{s}\,dx \\
&= -\lim_{s\to 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-s)-f(x)}{s}\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $s \neq 0$, on a $|\frac{f(x-s)-f(x)}{s}| \leq \mathrm{Lip}(f)$, donc

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-s)-f(x)}{s}\varphi(x)\,dx\right| \leq \mathrm{Lip}(f)\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,dx.$$

En passant à la limite $s \to 0$, on obtient

$$|\langle Df, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})}| \leq \mathrm{Lip}(f)||\varphi||_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Cette inégalité, valable pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, nous dit que Df est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), ||.||_{L^1(\mathbb{R})})$; Df s'étend donc en une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire un élément $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ au sens: pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle Df, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx,$$

ce qui signifie exactement $Df \in L^\infty(\mathbb{R})$.

$\diamondsuit$ Etape 2: On prouve (1.1.1).
Pour démontrer cette formule, il suffit, en posant

$$h(x) = \int_0^x Df(t)\,dt \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),$$

de prouver que la dérivée au sens des distributions de h est Df; on aura alors $D(f-h) = 0$, c'est-à-dire que $f - h$ est une fonction constante, d'où $f = f(0) + h$.
Pour calculer Dh, prenons $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$; par définition de h, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^+}\left(\int_{\mathbb{R}^+} Df(t)\varphi'(x)\mathbf{1}_{[0,x]}(t)\,dt\right)dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^-}\left(\int_{\mathbb{R}^-} Df(t)\varphi'(x)\mathbf{1}_{[x,0]}(t)\,dt\right)dx.\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^+} Df(t)\left(\int_{\mathbb{R}^+} \varphi'(x)\mathbf{1}_{[t,+\infty[}\,dx\right)dt \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^-} Df(t)\left(\int_{\mathbb{R}^-} \varphi'(x)\mathbf{1}_{]-\infty,t]}\,dx\right)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} Df(t)(-\varphi(t))\,dt - \int_{\mathbb{R}^-} Df(t)\varphi(t)\,dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} Df(t)\varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Cette égalité, valable pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, signifie exactement $Dh = Df$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ce qui conclut cette démonstration. ■

On déduit aisément de ce lemme que toute fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, au sens classique, λ_1-presque partout sur $\mathbb{R}$ (en tous les points de Lebesgue de $Df \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$).

1.1.2 Dérivées de Fonctions Lipschitziennes

Lemme 1.1.2 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^N$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ est une application lipschitzienne, alors f admet une extension lipschitzienne $\widetilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telle que* $\mathrm{Lip}(\widetilde{f}) = \mathrm{Lip}(f)$. *De plus, si f est bornée par M sur A, on peut choisir $\widetilde{f}$ bornée par M sur $\mathbb{R}^N$.*

Démonstration:
Posons, pour $x \in \mathbb{R}^N$, $\widetilde{f}(x) = \sup_{y\in A}\{f(y) - \mathrm{Lip}(f)|x-y|\} \in]-\infty, \infty]$ (nous avons choisi de raisonner avec la norme euclidienne — la constante de lipschitz est bien sûr celle associée à cette norme —, mais ce qui suit est valable pour toute norme).
Commençons par voir que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\widetilde{f}(x) < \infty$; il suffit, pour cela, de fixer $y_0 \in A$ et de constater que, pour tout $y \in A$, puisque $f(y) \le f(y_0) + \mathrm{Lip}(f)|y-y_0| \le f(y_0) + \mathrm{Lip}(f)|y-x| + \mathrm{Lip}(f)|x-y_0|$, on a $f(y) - \mathrm{Lip}(f)|x-y| \le f(y_0) + \mathrm{Lip}(f)|x-y_0|$, donc $\widetilde{f}(x) \le f(y_0) + \mathrm{Lip}(f)|x-y_0| < \infty$.
$\widetilde{f}$ est bien une extension de f. En effet, prenons $x \in A$; puisque $f(y) \le f(x) + \mathrm{Lip}(f)|x-y|$ pour tout $y \in A$, on a $\widetilde{f}(x) \le f(x)$; comme $x \in A$, on a aussi $\widetilde{f}(x) \ge f(x) - \mathrm{Lip}(f)|x-x| = f(x)$, ce qui nous donne bien $\widetilde{f}(x) = f(x)$.
Enfin, $\widetilde{f}$ est lipschitzienne, de constante de lipschitz $\mathrm{Lip}(f)$. En effet, prenons $(x,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$; pour tout $y \in A$, on a $\widetilde{f}(x) \ge f(y) - \mathrm{Lip}(f)|x-y| \ge f(y) - \mathrm{Lip}(f)|x-z| - \mathrm{Lip}(f)|y-z|$, soit $\widetilde{f}(x) + \mathrm{Lip}(f)|x-z| \ge f(y) - \mathrm{Lip}(f)|z-y|$; en prenant la borne supérieure de cette inégalité sur les $y \in A$, on obtient $\widetilde{f}(x) + \mathrm{Lip}(f)|x-z| \ge \widetilde{f}(z)$, soit $\widetilde{f}(z) - \widetilde{f}(x) \le \mathrm{Lip}(f)|x-z|$; en effectuant le même calcul avec les rôles de x et z inversés, on trouve $\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(z) \le \mathrm{Lip}(f)|x-z|$, ce qui nous donne $|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(z)| \le \mathrm{Lip}(f)|x-z|$, c'est-à-dire le caractère lipschitzien de $\widetilde{f}$, avec $\mathrm{Lip}(f)$ pour constante de lipschitz.

Supposons maintenant f bornée par M sur A et notons $T_M(s) = \sup(-M, \inf(M, s))$ (i.e. $T_M(s) = -M$ si $s < -M$, $T_M(s) = s$ si $-M \leq s \leq M$ et $T_M(s) = M$ si $s > M$); $T_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée par M.
Nous allons voir que c'est une application 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Soient $(s,t) \in \mathbb{R}$; quitte à échanger les rôles de s et t, on peut supposer $s \leq t$; il nous faut ensuite traiter les cas un par un.

- Si $s \leq t < -M$ ou $M < s \leq t$, alors $T_M(t) - T_M(s) = 0$, donc $|T_M(t) - T_M(s)| \leq |s-t|$.
- Si $s < -M \leq t \leq M$, alors $T_M(t) - T_M(s) = t + M$ et, comme $t + M \leq t - s = |t-s|$, on a bien $|T_M(t) - T_M(s)| \leq |t-s|$.
- Si $s < -M \leq M < t$, alors $T_M(t) - T_M(s) = M + M$ et, comme $M + M \leq t - s = |t-s|$, on a bien $|T_M(t) - T_M(s)| \leq |t-s|$.
- Si $-M \leq s \leq t \leq M$, alors $T_M(t) - T_M(s) = t - s$, donc $|T_M(t) - T_M(s)| \leq |t-s|$.
- Si $-M \leq s \leq M < t$, alors $T_M(t) - T_M(s) = M - s$ et, comme $M - s \leq t - s = |t-s|$, on a bien $|T_M(t) - T_M(s)| \leq |t-s|$.

Ainsi, $T_M(\widetilde{f})$ est une fonction $\mathrm{Lip}(f)$-lipschitzienne bornée par M; de plus, sur A, puisque $|f| \leq M$, on a $T_M(\widetilde{f}) = T_M(f) = f$. $T_M(\widetilde{f})$ est donc, dans ce cas, l'extension de f recherchée. ■

Théorème 1.1.1 (Rademacher) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne alors f est dérivable λ_N-presque partout sur Ω.*

Rappelons avant la démonstration que, pour tout $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ et tout ensemble mesurable A de $\mathbb{R}^N$, on a $\lambda_N(M(A)) = |\det(M)|\lambda_N(A)$.

Démonstration:
Comme Ω peut être recouvert par une union dénombrable de boules dont l'adhérence est compacte dans Ω, il suffit de montrer que, pour toute boule B d'adhérence compacte dans Ω, $f_{|B}$ est dérivable λ_N-presque partout sur B.
Soit donc une telle boule. $f_{|B}$ étant lipschitzienne, elle admet une extension lipschitzienne $\widetilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Il suffit de montrer que $\widetilde{f}$ est dérivable λ_N-presque partout sur $\mathbb{R}^N$ pour voir que $f_{|B} = \widetilde{f}_{|B}$ est dérivable λ_N-presque partout sur B et conclure ainsi la démonstration du théorème.

♢ Etape 1: On montre que, pour $v \in S(0,1)$ fixé,

$$\widetilde{f}'(x;v) = \lim_{t \to 0} \frac{\widetilde{f}(x+tv) - \widetilde{f}(x)}{t}$$

existe dans $\mathbb{R}$ pour λ_N-presque tout $x \in \mathbb{R}^N$.
Soit $A_v = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \widetilde{f}'(x;v) \text{ n'existe pas}\}$; par le critère de Cauchy,

$$\mathbb{R}^N \backslash A_v = \bigcap_{n>0} \bigcup_{k>0} \bigcap_{\substack{(t,\,t') \in]-\frac{1}{k},\frac{1}{k}[\\ t \neq 0\,,\, t' \neq 0}} \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \left| \frac{\widetilde{f}(x+tv) - \widetilde{f}(x)}{t} - \frac{\widetilde{f}(x+t'v) - \widetilde{f}(x)}{t'} \right| \leq \frac{1}{n} \right\},$$

soit, en utilisant la continuité de $\widetilde{f}$,

$$\mathbb{R}^N \backslash A_v = \bigcap_{n>0} \bigcup_{k>0} \bigcap_{\substack{(t,\,t') \in \mathbb{Q} \cap]-\frac{1}{k},\frac{1}{k}[\\ t \neq 0\,,\, t' \neq 0}} \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \left| \frac{\widetilde{f}(x+tv) - \widetilde{f}(x)}{t} - \frac{\widetilde{f}(x+t'v) - \widetilde{f}(x)}{t'} \right| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme $x \to \frac{\widetilde{f}(x+tv)-\widetilde{f}(x)}{t}$ et $x \to \frac{\widetilde{f}(x+t'v)-\widetilde{f}(x)}{t'}$ sont Borel-mesurables et comme ces unions et intersections sont dénombrables, on en déduit que A_v est un borélien de $\mathbb{R}^N$.
Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on remarque que

$$g \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longrightarrow & \widetilde{f}(x+sv) \end{array} \right.$$

est lipschitzienne, donc dérivable λ_1-presque partout sur $\mathbb{R}$; pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a donc

$$\lambda_1\left(\left\{s \in \mathbb{R} \mid \lim_{t\to 0} \frac{\widetilde{f}(x+sv+tv)-\widetilde{f}(x+sv)}{t} \text{ n'existe pas}\right\}\right) = 0. \tag{1.1.2}$$

On complète le vecteur v en une base $(v_1, \ldots, v_{N-1}, v)$ de $\mathbb{R}^N$. Soit l'isomorphisme

$$P\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ (t_1, \ldots, t_{N-1}, s) & \longrightarrow & t_1 v_1 + \cdots + t_{N-1} v_{N-1} + sv. \end{array}\right.$$

On sait, P étant linéaire inversible, que, pour tout borélien A de $\mathbb{R}^N$, $\lambda_N(A) = |\det(P)|\lambda_N(P^{-1}(A))$. En particulier, grâce au théorème de Fubini,

$$\begin{array}{rcl} \lambda_N(A_v) & = & |\det(P)|\lambda_N(P^{-1}(A_v)) \\ & = & |\det(P)| \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \lambda_1\left((P^{-1}(A_v))_{(t_1,\ldots,t_{N-1})}\right) dt_1 \ldots, dt_{N-1}, \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} (P^{-1}(A_v))_{(t_1,\ldots,t_{N-1})} & = & \{s \in \mathbb{R} \mid (t_1, \ldots, t_{N-1}, s) \in P^{-1}(A_v)\} \\ & = & \{s \in \mathbb{R} \mid t_1 v_1 + \cdots + t_{N-1} v_{N-1} + sv \in A_v\}. \end{array}$$

Or, en posant $x = t_1 v_1 + \cdots + t_{N-1} v_{N-1}$, $x + sv \in A_v$ si et seulement si

$$\lim_{t\to 0} \frac{\widetilde{f}(x+sv+tv)-\widetilde{f}(x+sv)}{t}$$

n'existe pas. On voit donc, grâce à (1.1.2), que $\lambda_1\left((P^{-1}(A_v))_{(t_1,\ldots,t_{N-1})}\right) = 0$ pour tout $(t_1, \ldots, t_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$, ce qui nous donne $\lambda_N(A_v) = 0$, c'est-à-dire le résultat voulu.

Remarquons au passage le résultat suivant: pour $v \in S(0,1)$ fixé, la fonction $x \in \mathbb{R}^N \backslash A_v \to \widetilde{f}'(x;v) \in \mathbb{R}$ est la limite simple de la suite de fonctions continues uniformément bornées $(n(\widetilde{f}(\cdot + v/n) - \widetilde{f}(\cdot)))_{n\geq 1}$ (la borne uniforme vient du caractère lipschitzien de $\widetilde{f}$); comme A_v est un borélien de $\mathbb{R}^N$, en posant $\widetilde{f}'(\cdot;v) \equiv 0$ sur A_v, la fonction $\widetilde{f}'(\cdot;v) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ainsi définie est Borel-mesurable et appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
On voit aussi que, pour λ_N-presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ ($x \notin A_{e_1} \cup \cdots \cup A_{e_N}$),

$$\nabla\widetilde{f}(x) = (\widetilde{f}'(x;e_1), \ldots, \widetilde{f}'(x;e_N))^T$$

existe et que $x \in \mathbb{R}^N \to \nabla\widetilde{f}(x) \in \mathbb{R}^N$ (définie λ_N-presque partout) est dans $(L^\infty(\mathbb{R}^N))^N$.

$\diamondsuit$ Etape 2: On fixe toujours v dans $S(0,1)$ et on montre que, pour λ_N-presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a $\widetilde{f}'(x;v) = \nabla\widetilde{f}(x) \cdot v$.
Pour cela, on prend $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, et on calcule, grâce au caractère lipschitzien de $\widetilde{f}$ et en utilisant le théorème de convergence dominée:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}'(x;v)\varphi(x)\,dx & = & \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\widetilde{f}(x+(1/n)v)-\widetilde{f}(x)}{(1/n)}\varphi(x)\,dx \\ & = & \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(x)\frac{\varphi(x-(1/n)v)-\varphi(x)}{(1/n)} \\ & = & -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(x)\nabla\varphi(x)\cdot v\,dx, \end{array} \tag{1.1.3}$$

la dernière égalité découlant des faits suivants: $\frac{\varphi(\cdot - v/n)-\varphi(\cdot)}{1/n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\nabla\varphi(\cdot)\cdot v$ uniformément sur $\mathbb{R}$, a son support inclus dans $\text{supp}(\varphi) + \overline{B}(0,1)$, et $\widetilde{f} \in L^1(\text{supp}(\varphi) + \overline{B}(0,1))$. En appliquant ce résultat à $v = e_i$ (pour $i = 1, \ldots, N$), on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}'(x;e_i)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx,$$

ce qui, associé à (1.1.3), donne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}'(x;v)\varphi(x)\,dx &= \sum_{i=1}^N v_i \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}'(x;e_i)v_i\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\nabla\widetilde{f}(x)\cdot v\,dx.
\end{aligned}$$

Puisque $\widetilde{f}'(\cdot;v)$ et $\nabla\widetilde{f}(\cdot)\cdot v$ sont dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)\subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, cette égalité nous donne, grâce au lemme fondamental des distributions, $\widetilde{f}'(\cdot;v)=\nabla\widetilde{f}(\cdot)\cdot v$ λ_N-presque partout sur $\mathbb{R}^N$. Notons $B_v=A_v\cup A_{e_1}\cdots\cup A_{e_N}\cup\{x\in\mathbb{R}^N \mid \widetilde{f}'(x;v)\neq\nabla\widetilde{f}(x)\cdot v\}$; on a $\lambda_N(B_v)=0$.

◇ Etape 3: On conclut.
Soit $\{v_n\,,\ n\geq 1\}$ un ensemble dénombrable dense dans $S(0,1)$. Posons $B=\bigcup_{n\geq 1}B_{v_n}$; on a $\lambda_N(B)=0$. Nous allons montrer que, pour tout $x\notin B$, $\widetilde{f}$ est dérivable en x, ce qui achèvera la démonstration.
Soit $x\in\mathbb{R}^N\backslash B$ et $(h_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ tendant vers 0; prenons $(h_{k_l})_{l\geq 1}$ une suite quelconque extraite de $(h_k)_{k\geq 1}$. Comme $h_{k_l}/|h_{k_l}|=w_l\in S(0,1)$, on peut extraire une suite $(z_m)_{m\geq 1}=(w_{l_m})_{m\geq 1}$ qui converge vers $z\in S(0,1)$. Notons finalement $t_m=|h_{k_{l_m}}|$; on a $t_m z_m=h_{k_{l_m}}$.
On écrit alors, pour tous $n\geq 1$ et $m\geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{|\widetilde{f}(x+t_m z_m)-\widetilde{f}(x)-\nabla\widetilde{f}(x)\cdot(t_m z_m)|}{t_m} \\
&\leq \frac{|\widetilde{f}(x+t_m z_m)-\widetilde{f}(x+t_m v_n)|}{t_m}+\left|\frac{\widetilde{f}(x+t_m v_n)-\widetilde{f}(x)}{t_m}-\nabla\widetilde{f}(x)\cdot v_n\right|+|\nabla\widetilde{f}(x)\cdot(v_n-z_m)| \\
&\leq \Big(\mathrm{Lip}(\widetilde{f})+|\nabla\widetilde{f}(x)|\Big)\,|v_n-z_m|+\left|\frac{\widetilde{f}(x+t_m v_n)-\widetilde{f}(x)}{t_m}-\nabla\widetilde{f}(x)\cdot v_n\right|.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$. Choisissons $n\geq 1$ tel que $|v_n-z|\leq\varepsilon$; on a alors

$$\begin{aligned}
&\frac{|\widetilde{f}(x+t_m z_m)-\widetilde{f}(x)-\nabla\widetilde{f}(x)\cdot(t_m z_m)|}{t_m} \\
&\leq \Big(\mathrm{Lip}(\widetilde{f})+|\nabla\widetilde{f}(x)|\Big)\,(\varepsilon+|z-z_m|)+\left|\frac{\widetilde{f}(x+t_m v_n)-\widetilde{f}(x)}{t_m}-\nabla\widetilde{f}(x)\cdot v_n\right|.
\end{aligned}$$

Mais $t_m\to 0$ lorsque $m\to\infty$, donc

$$\left|\frac{\widetilde{f}(x+t_m v_n)-\widetilde{f}(x)}{t_m}-\nabla\widetilde{f}(x)\cdot v_n\right|\to 0 \quad \text{lorsque} \quad m\to\infty$$

(car $x\notin B_{v_n}$, ce qui signifie que $(\widetilde{f}(x+sv_n)-\widetilde{f}(x))/s\overset{s\to 0}{\longrightarrow}\widetilde{f}'(x;v_n)$ et que $\widetilde{f}'(x;v_n)=\nabla\widetilde{f}(x)\cdot v_n$). Ainsi, puisque $z_m\to z$ lorsque $m\to\infty$, il existe $m_0\geq 1$ tel que, pour tout $m\geq m_0$,

$$\frac{|\widetilde{f}(x+t_m z_m)-\widetilde{f}(x)-\nabla\widetilde{f}(x)\cdot(t_m z_m)|}{t_m}\leq 2(\mathrm{Lip}(\widetilde{f})+|\nabla\widetilde{f}(x)|)\varepsilon+\varepsilon.$$

On a donc montré que, de toute suite extraite de

$$\left(\frac{|\widetilde{f}(x+h_k)-\widetilde{f}(x)-\nabla\widetilde{f}(x)\cdot h_k|}{|h_k|}\right)_{k\geq 1}, \tag{1.1.4}$$

on pouvait re-extraire une suite qui converge vers 0. Cela implique que toute la suite (1.1.4) converge vers 0, et que $\widetilde{f}$ est donc dérivable en x, de dérivée $\widetilde{f}'(x)(h)=\nabla\widetilde{f}(x)\cdot h$. ■

Corollaire 1.1.1 *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne alors les dérivées partielles classiques de f sont dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et coincident avec ses dérivées au sens des distributions dans Ω.*

Remarque 1.1.1 *Nous verrons, dans la première étape de la démonstration, que, lorsque f est globalement lipschitzienne sur Ω, ses dérivées classiques sont dans $L^\infty(\Omega)$ et sont essentiellement bornées par* $\mathrm{Lip}(f)$.

Démonstration:
$\diamondsuit$ Etape 1: On montre que les dérivées partielles classiques de f sont dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
Pour tout $i \in [1, N]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est définie λ_N-presque partout sur Ω grâce au théorème de Rademacher. On remarque que, en posant $f \equiv 0$ hors de Ω (ce qui définit une fonction Borel-mesurable sur $\mathbb{R}^N$), la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\cdot) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\cdot + e_i/n) - f(\cdot)}{1/n} \qquad (\lambda_N\text{-presque partout sur } \Omega)$$

est Lebesgue-mesurable, en tant que limite simple λ_N-presque partout de fonctions mesurables.
Soit K un compact de Ω et $\delta = \mathrm{dist}(K, \mathbb{R}^N \backslash \Omega)$; comme $\widetilde{K} = K + \overline{B}(0, \delta/2)$ est un compact de Ω, f est lipschitzienne sur $\widetilde{K}$. Notons C une constante de lipschitz pour f sur $\widetilde{K}$. Lorsque $|t| \le \delta/2$ et $x \in K$, on a $(x, x + te_i) \in \widetilde{K}$, donc

$$\left| \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} \right| \le C. \tag{1.1.5}$$

En passant à la limite lorsque $t \to 0$, on trouve donc, pour λ_N-presque tout $x \in K$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \le C. \tag{1.1.6}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est donc essentiellement bornée sur K et les dérivées partielles de f sont bien dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Lorsque f est globalement lipschitzienne sur Ω, (1.1.5) est vraie, avec $C = \mathrm{Lip}(f)$, pour tout $x \in \Omega$ et tout $|t| < \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \backslash \Omega)$. Passer à la limite $t \to 0$ nous permet de voir que (1.1.6) reste vraie, avec $C = \mathrm{Lip}(f)$, pour λ_N-presque tout $x \in \Omega$ et que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est donc dans $L^\infty(\Omega)$, avec une norme dans cet espace majorée par $\mathrm{Lip}(f)$.

$\diamondsuit$ Etape 2: Montrons maintenant que ces dérivées classiques coincident avec les dérivées au sens des distributions de f dans Ω.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ et $\delta = \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(\varphi); \mathbb{R}^N \backslash \Omega) > 0$. Comme $\frac{\varphi(\cdot+se_i)-\varphi(\cdot)}{s} \overset{s\to 0}{\longrightarrow} \partial_i \varphi$ uniformément sur Ω en ayant (pour $|s| \le \delta/2$) son support inclus dans $K = \mathrm{supp}(\varphi) + \overline{B}(0, \delta/2)$ (compact de Ω) et comme $f \in L^1(K)$ (f est localement lipschitzienne sur Ω, donc localement bornée sur Ω), on a

$$\langle D_i f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = -\int_\Omega f(x) \partial_i \varphi(x)\, dx = -\lim_{s\to 0} \int_\Omega f(x) \frac{\varphi(x + se_i) - \varphi(x)}{s}\, dx.$$

De plus,

$$\int_\Omega f(x) \frac{\varphi(x + se_i) - \varphi(x)}{s}\, dx = \frac{1}{s}\left(\int_{\Omega + se_i} f(x - se_i)\varphi(x)\, dx - \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \right).$$

Comme, pour $|s| \le \delta/2$, $\Omega + se_i \supset \mathrm{supp}(\varphi)$, les intégrales de cette dernière expression ne portent (lorsque $|s| \le \delta/2$) que sur $\mathrm{supp}(\varphi)$; cela nous permet de voir que

$$\langle D_i f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = -\lim_{s\to 0} \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} \frac{f(x - se_i) - f(x)}{s} \varphi(x)\, dx.$$

En notant C une constante de lipschitz de f sur K, (1.1.5) nous donne, pour tout $|s| \le \delta/2$ et tout $x \in \mathrm{supp}(\varphi)$, $|\frac{f(x-se_i)-f(x)}{s}| \le C$. Ainsi, par le théorème de Rademacher, $\frac{f(\cdot-se_i)-f(\cdot)}{s} \overset{s\to 0}{\longrightarrow} -\frac{\partial f}{\partial x_i}$ λ_N-presque partout sur Ω, donc sur $\mathrm{supp}(\varphi)$, tout en restant majorée (sur $\mathrm{supp}(\varphi)$) par C. On obtient alors, par convergence dominée,

$$\langle D_i f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\, dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\, dx.$$

Ceci étant vérifié pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, on a bien $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. ∎

1.2 Le Changement de Variable Lipschitzien

Commençons par un petit lemme classique

Lemme 1.2.1 *Soit $f : U \to V$ un homéomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^N$. Si f est dérivable en un point $x \in U$ et si $f'(x) \in GL_n(\mathbb{R})$, alors f^{-1} est dérivable en $f(x)$ et $(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$.*

Remarque 1.2.1 *Le résultat reste vrai lorsque U et V sont des ouverts d'espaces vectoriels normés quelconques.*

DÉMONSTRATION:
Par définition, il existe $\varepsilon : U \to \mathbb{R}^N$ tendant vers 0 en x telle que, pour tout $y \in U$,

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + |y-x|\varepsilon(y). \tag{1.2.1}$$

Soit $z \in V$; en appliquant (1.2.1) à $y = f^{-1}(z) \in U$, on obtient

$$z = f(x) + f'(x)(f^{-1}(z) - f^{-1}(f(x))) + |f^{-1}(z) - f^{-1}(f(x))|\varepsilon(f^{-1}(z)),$$

soit, puisque $f'(x) \in GL_n(\mathbb{R})$,

$$f^{-1}(z) - f^{-1}(f(x)) = (f'(x))^{-1}(z - f(x)) - |f^{-1}(z) - f^{-1}(f(x))|(f'(x))^{-1}\varepsilon(f^{-1}(z)). \tag{1.2.2}$$

Or f^{-1} est continue en $f(x)$, donc $\varepsilon(f^{-1}(z)) \to 0$ lorsque $z \to f(x)$; il existe alors W voisinage de $f(x)$ tel que $|(f'(x))^{-1}\varepsilon(f^{-1}(z))| \le 1/2$ lorsque $z \in W$. En injectant ceci dans (1.2.2) et en prenant les normes, on en déduit, pour tout $z \in W$,

$$|f^{-1}(z) - f^{-1}(f(x))| \le 2|(f'(x))^{-1}||z - f(x)|.$$

En notant $C = 2|(f'(x))^{-1}|$, on a donc, pour tout $z \in W$,

$$\frac{|f^{-1}(z) - f^{-1}(f(x))|}{|z - f(x)|} \le C. \tag{1.2.3}$$

(1.2.2) peut se re-écrire, pour tout $z \in V$,

$$f^{-1}(z) = f^{-1}(f(x)) + (f'(x))^{-1}(z - f(x)) + |z - f(x)|\eta(z) \tag{1.2.4}$$

avec $\eta(z) = -\frac{|f^{-1}(z)-f^{-1}(f(x))|}{|z-f(x)|}\varepsilon(f^{-1}(z))$ lorsque $z \ne f(x)$ et $\eta(f(x)) = 0$. Or, par (1.2.3), la fonction $z \to |f^{-1}(z) - f^{-1}(f(x))|/|z - f(x)|$ est bornée sur W voisinage de $f(x)$ et on a vu que $\varepsilon(f^{-1}(z)) \to 0$ lorsque $z \to f(x)$; ainsi, $\eta(z) \to 0$ lorsque $z \to f(x)$ et (1.2.4) prouve bien que f^{-1} est dérivable en $f(x)$, de dérivée $(f'(x))^{-1}$. ■

La démonstration du théorème de changement de variable lipschitzien repose sur l'utilisation du théorème de Radon-Nikodym; le lemme suivant est l'outil qui nous permet d'identifier la dérivée de Radon-Nikodym qui apparaitra dans la démonstration du théorème de changement de variable lipschitzien.

Lemme 1.2.2 S*oit U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$. Si $\varphi : U \to V$ est un homéomorphisme dérivable en un point $x \in U$ alors*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda_N(\varphi(B(x,r)))}{\lambda_N(B(x,r))} = |J\varphi(x)|.$$

Remarque 1.2.1

1) *On a noté $|J\varphi(x)|$ la valeur absolue du jacobien de φ en x, i.e. la valeur absolue du déterminant de $\varphi'(x)$.*

2) *Ce résultat reste vrai lorsque l'on suppose simplement φ continue (et non plus homéomorphisme); la démonstration de cette généralisation fait intervenir le degré topologique, mais n'est pas utile à notre propos.*

Démonstration:
On commence par remarquer que, φ étant un homéomorphisme, $\varphi(B(x,r))$ est mesurable pour tout $r < \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \backslash U)$.
Par translation, on se ramène au cas $x = 0$ et $\varphi(x) = 0$.

◇ Etape 1: Si $M = \varphi'(0)$ est inversible.
Posons alors $F(x) = M^{-1}\varphi(x)$. Pour tout $r < \mathrm{dist}(0, \mathbb{R}^N \backslash U)$, on a

$$\lambda_N(\varphi(B(0,r))) = \lambda_N(M(F(B(0,r)))) = |\det(M)|\lambda_N(F(B(0,r))).$$

Il suffit donc de prouver que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda_N(F(B(0,r)))}{\lambda_N(B(0,r))} = 1 \tag{1.2.5}$$

pour conclure.
$F : U \to W = M^{-1}(V)$ est un homéomorphisme dérivable en 0, qui vérifie $F(0) = 0$ et $F'(0) = Id$; cela signifie qu'il existe $\varepsilon_1 : U \to \mathbb{R}^N$ tendant vers 0 en 0 telle que, pour tout $x \in U$,

$$F(x) = x + |x|\varepsilon_1(x). \tag{1.2.6}$$

Par le lemme 1.2.1, on sait que F^{-1} est dérivable en 0, de dérivée Id, ce qui signifie qu'il existe $\varepsilon_2 : W \to \mathbb{R}^N$ tendant vers 0 en 0 et telle que, pour tout $y \in W$,

$$F^{-1}(y) = y + |y|\varepsilon_2(y). \tag{1.2.7}$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Prenons $\delta > 0$ tel que $B(0,\delta) \subset U \cap W$ et tel que, pour $|z| < \delta$, on ait $|\varepsilon_1(z)| \le \varepsilon$ et $|\varepsilon_2(z)| \le \varepsilon$. Soit $r < \delta$; par (1.2.6) et (1.2.7), on a

$$F(B(0,r)) \quad\subset\quad B(0,(1+\varepsilon)r)\,, \tag{1.2.8}$$

$$F^{-1}(B(0,(1-\varepsilon)r)) \quad\subset\quad B(0,(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)r) \subset B(0,r). \tag{1.2.9}$$

De (1.2.9), on déduit

$$F(F^{-1}(B(0,(1-\varepsilon)r)) = B(0,(1-\varepsilon)r) \subset F(B(0,r)). \tag{1.2.10}$$

(1.2.8) et (1.2.10) nous donnent donc $\lambda_N(B(0,(1-\varepsilon)r)) \le \lambda_N(F(B(0,r))) \le \lambda_N(B(0,(1+\varepsilon)r))$, soit, en utilisant $\lambda_N(B(0,kr)) = k^N\lambda_N(B(0,r))$ avec $k = 1-\varepsilon$ et $k = 1+\varepsilon$,

$$(1-\varepsilon)^N \le \liminf_{r\to 0} \frac{\lambda_N(F(B(0,r)))}{\lambda_N(B(0,r))} \le \limsup_{r\to 0} \frac{\lambda_N(F(B(0,r)))}{\lambda_N(B(0,r))} \le (1+\varepsilon)^N.$$

Ceci ayant été établi pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on trouve bien (en faisant $\varepsilon \to 0$) l'égalité (1.2.5).

◇ Etape 2: Si $M = \varphi'(0)$ n'est pas inversible. Il faut alors prouver que la limite des quotients des mesures est 0.
On remarque que $M(\overline{B}(0,1))$ est de λ_N-mesure nulle, puisqu'inclus dans l'image de M, un sous-espace vectoriel de dimension strictement inférieure à N. En posant $H_n = M(\overline{B}(0,1)) + \overline{B}(0,1/n)$ (borné, donc de mesure finie), on voit que

$$M(\overline{B}(0,1)) = \bigcap_{n\ge 1} H_n \qquad \text{(car } M(\overline{B}(0,1)) \text{ est compact donc fermé)},$$

en intersection décroissante. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \lambda_N(H_n) = 0$; prenons $\varepsilon > 0$ et choisissons $n_0 \ge 1$ tel que $\lambda_N(H_{n_0}) < \varepsilon$.
Soit $\delta > 0$ tel que, pour $|x| < \delta$, $|\varphi(x) - M(x)| \le (1/n_0)|x|$. Soit $r < \delta$ et $|x| \le r$; en notant $x = ry$, avec $y \in \overline{B}(0,1)$, on voit que $\varphi(x) \in rM(y) + r\overline{B}(0,1/n_0) \subset rH_{n_0}$. Ainsi, $\varphi(B(0,r)) \subset rH_{n_0}$ et

$$\lambda_N(\varphi(B(0,r))) \le r^N\lambda_N(H_{n_0}) \le \frac{\lambda_N(B(0,r))}{\lambda_N(B(0,1))} \times \varepsilon.$$

On en déduit

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\lambda_N(\varphi(B(0,r)))}{\lambda_N(B(0,r))} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_N(B(0,1))}.$$

Ceci ayant été établi pour tout $\varepsilon > 0$, faire $\varepsilon \to 0$ nous donne le résultat voulu. ■

Avant de prouver le théorème de changement de variable lipschitzien dans sa généralité, nous énonçons et prouvons ici une version *a priori* plus faible, mais de laquelle découle en fait le résultat que nous souhaitons.

Lemme 1.2.3 *Soit U et V des ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$. Si $\varphi : U \to V$ est un homéomorphisme lipschitzien alors, pour tout f positive ou dans $L^1(V)$, on a*

$$\int_V f\, d\lambda_N = \int_U f \circ \varphi |J\varphi|\, d\lambda_N.$$

Remarque 1.2.2 *En tant que polynôme en $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{(i,j)\in[1,N]^2}$, $J\varphi$ (qui est défini λ_N-presque partout sur U par le théorème de Rademacher) est dans $L^\infty(U)$.*

Démonstration:
φ étant un homéomorphisme, $\mu(A) = \lambda_N(\varphi(A))$ est une mesure (finie, car V est borné) sur les boréliens de U.
Soit $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une extension lipschitizenne de φ. Dans ce qui suit, $||.||_\infty$ désigne la norme sup sur $\mathbb{R}^N$, i.e. $||x||_\infty = \sup_{i\in[1,N]} |x_i|$; la constante de lipschitz de $\widetilde{\varphi}$ est prise par rapport à cette norme.

♢ Etape 1: on montre que, pour C pavé ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\lambda_N(\widetilde{\varphi}(C)) \leq (\mathrm{Lip}(\widetilde{\varphi}))^N \lambda_N(C)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour $k \in \mathbb{N}^N$, on pose $D_k = a + \prod_{i=1}^N [k_i\varepsilon, (k_i+1)\varepsilon[$; en notant $b_k = a + (k_1\varepsilon, \ldots, k_N\varepsilon) + (\varepsilon/2, \ldots, \varepsilon/2)$ le centre de D_k, on a, pour tout $x \in D_k$, $||x - b_k||_\infty \leq \varepsilon/2$, donc $||\widetilde{\varphi}(x) - \widetilde{\varphi}(b_k)||_\infty \leq \mathrm{Lip}(\widetilde{\varphi})\varepsilon/2$. Ainsi, $\widetilde{\varphi}(D_k) \subset \widetilde{\varphi}(b_k) + [-\mathrm{Lip}(\widetilde{\varphi})\varepsilon/2, \mathrm{Lip}(\widetilde{\varphi})\varepsilon/2]^N$, ce qui implique

$$\lambda_N(\widetilde{\varphi}(D_k)) \leq (\mathrm{Lip}(\widetilde{\varphi})\varepsilon)^N. \tag{1.2.11}$$

Soit C un pavé de $\mathbb{R}^N$; C est de la forme $a + \prod_{i=1}^N]0, \alpha_i[$, avec $a \in \mathbb{R}^N$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in]0, \infty]$. Si un des $(\alpha_i)_{i\in[1,N]}$ est infini, la mesure de C est infinie et l'inégalité recherchée est alors triviale; on se place donc maintenant dans le cas où tous les $(\alpha_i)_{i\in[1,N]}$ sont dans $]0, \infty[$.
Soit $E = \{k \in \mathbb{N}^N \mid \forall i \in [1,N]\,,\ 0 \leq k_i \leq \alpha_i/\varepsilon\}$. On a $C \subset \cup_{k\in E} D_k$, donc $\widetilde{\varphi}(C) \subset \cup_{k\in E}\widetilde{\varphi}(D_k)$, ce qui implique, par (1.2.11),

$$\lambda_N(\widetilde{\varphi}(C)) \leq \sum_{k\in E} \lambda_N(\widetilde{\varphi}(D_k)) \leq \mathrm{Card}(E)\varepsilon^N(\mathrm{Lip}(\widetilde{\varphi}))^N. \tag{1.2.12}$$

Mais, si $[\cdot]$ désigne la partie entière, on a $\mathrm{Card}(E) = ([\alpha_1/\varepsilon] + 1)\cdots([\alpha_n/\varepsilon] + 1) \leq (\frac{\alpha_1}{\varepsilon} + 1)\cdots(\frac{\alpha_N}{\varepsilon} + 1)$, donc on déduit de (1.2.12) que

$$\lambda_N(\widetilde{\varphi}(C)) \leq (\mathrm{Lip}(\widetilde{\varphi}))^N \varepsilon^N \left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon} + 1\right)\cdots\left(\frac{\alpha_N}{\varepsilon} + 1\right) \leq (\mathrm{Lip}(\widetilde{\varphi}))^N(\alpha_1 + \varepsilon)\cdots(\alpha_N + \varepsilon).$$

Ceci ayant été établi pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient, en faisant $\varepsilon \to 0$, $\lambda_N(\widetilde{\varphi}(C)) \leq (\mathrm{Lip}(\widetilde{\varphi}))^N \alpha_1 \cdots \alpha_N$, ce qui est le résultat recherché puisque $\lambda_N(C) = \alpha_1 \cdots \alpha_N$.

♢ Etape 2: On montre que μ est absolument continue par rapport à λ_N.
Soit $A \subset U$ de λ_N-mesure nulle; par définition de la mesure de Lebesgue par sa mesure extérieure, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un recouvrement de A par des pavés ouverts $(C_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}^N$ tels que $\sum_{n\geq 1} \mathrm{vol}(C_n) = \sum_{n\geq 1} \lambda_N(C_n) < \varepsilon$.
Puisque $\varphi(A) \subset \widetilde{\varphi}(A) \subset \cup_{n\geq 1}\widetilde{\varphi}(C_n)$, on en déduit, par l'étape 1,

$$\lambda_N(\varphi(A)) \leq \sum_{n\geq 1} \lambda_N(\widetilde{\varphi}(C_n)) \leq (\mathrm{Lip}(\widetilde{\varphi}))^N \sum_{n\geq 1} \lambda_N(C_n).$$

Ainsi, $\lambda_N(\varphi(A)) \leq \varepsilon(\mathrm{Lip}(\widetilde{\varphi}))^N$; cette inégalité ayant été établie pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient le résultat voulu: $\mu(A) = \lambda_N(\varphi(A)) = 0$.

$\diamondsuit$ Etape 3: On conclut.
Grâce au théorème de Radon-Nykodim et par l'étape 1, il existe donc $h \in L^1(U)$ (car μ est une mesure finie) telle que, pour tout borélien A de U,

$$\mu(A) = \lambda_N(\varphi(A)) = \int_A h\, d\lambda_N.$$

Mais, en tout point de Lebesgue x de h, c'est-à-dire pour λ_N-presque tout $x \in U$, on a

$$h(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_N(B(x,r))} \int_{B(x,r)} h\, d\lambda_N = \lim_{r\to 0} \frac{\lambda_N(\varphi(B(x,r)))}{\lambda_N(B(x,r))}.$$

Par le lemme 1.2.2, pour tout x point de dérivabilité de φ, c'est-à-dire pour λ_N-presque tout $x \in U$ grâce au théorème de Rademacher, cette dernière limite est $|J\varphi(x)|$. Ainsi $h = |J\varphi|$ λ_N-presque partout sur U, et on voit donc que, pour tout A borélien de U, $\lambda_N(\varphi(A)) = \int_U \mathbf{1}_A |J\varphi|\, d\lambda_N$.
Pour toute fonction $f = \mathbf{1}_B$ avec B borélien de V, en notant $A = \varphi^{-1}(B)$, on a donc $\int_V f\, d\lambda_N = \int_V \mathbf{1}_{\varphi(A)}\, d\lambda_N = \lambda_N(\varphi(A)) = \int_U \mathbf{1}_A |J\varphi|\, d\lambda_N = \int_U f\circ\varphi |J\varphi|\, d\lambda_N$. Par combinaison linéaire, on a donc encore $\int_V f\, d\lambda_N = \int_U f\circ\varphi|J\varphi|\, d\lambda_N$ lorsque f est une fonction simple sur V.
Soit f positive mesurable sur V. Prenons une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions simples positives qui converge en croissant vers f; puisque $(f_n\circ\varphi|J\varphi|)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions positives mesurables qui converge aussi en croissant vers $f\circ\varphi|J\varphi|$, le théorème de convergence monotone nous dit que

$$\int_V f\, d\lambda_N = \lim_{n\to\infty} \int_V f_n\, d\lambda_N = \lim_{n\to\infty} \int_U f_n \circ\varphi|J\varphi|\, d\lambda_N = \int_U f\circ\varphi|J\varphi|\, d\lambda_N.$$

Lorsque f est dans $L^1(V)$, on écrit $f = f^+ - f^-$ et on applique le résultat précédent à f^+ et f^- pour conclure que $f\circ\varphi|J\varphi| \in L^1(U)$ et que l'on a bien la formule annoncée dans le lemme. ■

Théorème 1.2.1 (Changement de variable lipschitzien) *Soit U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$. Si $\varphi : U \to V$ est un homéomorphisme localement lipschitzien alors, pour tout f positive ou dans $L^1(V)$, on a*

$$\int_V f\, d\lambda_N = \int_U f\circ\varphi|J\varphi|\, d\lambda_N.$$

Remarque 1.2.3 *Ici, $J\varphi$ est dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(U)$.*

Démonstration:
On note, pour $n \geq 1$, $U_n = B(0,n) \cap \{x \in \mathbb{R}^N \mid \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N\backslash U) > 1/n\}$; les U_n sont des ouverts bornés et $U = \bigcup_{n\geq 1} U_n$, en union croissante. Comme U_n est relativement compact dans U, φ est lipschitzienne sur U_n et $V_n = \varphi(U_n)$ est un ouvert borné de V; de plus, φ est un homéomorphisme lipschitzien entre U_n et V_n; φ étant surjective, on a aussi $V = \bigcup_{n\geq 1} V_n$, en union croissante.
En utilisant le théorème de convergence monotone, le lemme 1.2.3 nous donne, pour f positive et mesurable sur V,

$$\begin{aligned} \int_V f\, d\lambda_N &= \lim_{n\to\infty} \int_V f\mathbf{1}_{V_n}\, d\lambda_N \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{V_n} f\, d\lambda_N \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{U_n} f\circ\varphi|J\varphi|\, d\lambda_N \\ &= \int_U f\circ\varphi|J\varphi|\, d\lambda_N. \end{aligned}$$

Lorsque f est dans $L^1(V)$, on conclut en écrivant $f = f^+ - f^-$ et en appliquant le résultat précédent à f^+ et à f^-. ■

1.3 Transport des Espaces de Lebesgue

Théorème 1.3.1 *Soit $p \in [1, +\infty]$, Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : \Omega' \to \Omega$ un homéomorphisme bilipschitzien. L'application*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} L^p(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Omega') \\ f & \longrightarrow & f \circ \varphi \end{array} \right. \tag{1.3.1}$$

est bien définie et c'est un isomorphisme.

Remarque 1.3.1 *Nous verrons, au cours de la démonstration, que la norme de (1.3.1) est majorée par un réel ne dépendant que de N et $\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})$ (pour $p = \infty$, cette application est même une isométrie).*

Démonstration:
$\diamondsuit$ Etape 1: $f \circ \varphi$ est mesurable et ne dépend pas du représentant de f.
Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est Borel-mesurable alors, $\varphi : \Omega' \to \Omega$ étant borélienne car continue, $f \circ \varphi : \Omega' \to \mathbb{R}$ est mesurable.
Supposons $f = f^*$ λ_N-presque partout sur Ω; alors $f \circ \varphi = f^* \circ \varphi$ sur $\Omega' \backslash \varphi^{-1}(\{f \neq f^*\})$; par le théorème de changement de variable lipschitzien, puisque $\varphi^{-1} : \Omega \to \Omega'$ est un homéomorphisme lipschitzien, $\lambda_N(\varphi^{-1}(\{f \neq f^*\})) = \int_{\{f \neq f^*\}} |J\varphi^{-1}| \, d\lambda_N = 0$. Ainsi, $f \circ \varphi = f^* \circ \varphi$ λ_N-presque partout sur Ω'.

$\diamondsuit$ Etape 2: on suppose $p < \infty$.
Si $f \in L^p(\Omega)$, le théorème de changement de variable lipschitzien appliqué avec φ^{-1} nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |f \circ \varphi|^p \, d\lambda_N &= \int_{\Omega'} |f|^p \circ \varphi \, d\lambda_N \\ &= \int_{\Omega} |f|^p |J\varphi^{-1}| \, d\lambda_N \\ &\leq ||J\varphi^{-1}||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |f|^p \, d\lambda_N, \end{aligned}$$

et, $J\varphi^{-1}$ étant un polynôme en $\left(\frac{\partial(\varphi^{-1})_i}{\partial x_j}\right)_{(i,j) \in [1,N]}$, $||J\varphi^{-1}||_{L^\infty(\Omega)}$ est majoré par un réel C ne dépendant que de N et $\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})$ (remarque 1.1.1). Ainsi, $f \circ \varphi \in L^p(\Omega')$ et

$$||f \circ \varphi||_{L^p(\Omega')} \leq C^{1/p} ||f||_{L^p(\Omega)} \leq \sup(C, 1) ||f||_{L^p(\Omega)}. \tag{1.3.2}$$

$\diamondsuit$ Etape 3: on suppose $p = \infty$.
Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Posons $A = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > ||f||_{L^\infty(\Omega)}\}$; A est de mesure nulle, donc par le théorème de changement de variable lipschitzien, $\varphi^{-1}(A)$ est aussi de mesure nulle ($\lambda_N(\varphi^{-1}(A)) = \int_A |J\varphi^{-1}| = 0$). Comme $|f \circ \varphi(x)| \leq ||f||_{L^\infty(\Omega)}$ pour tout $x \notin \varphi^{-1}(A)$, on en déduit que $f \circ \varphi \in L^\infty(\Omega')$ avec

$$||f \circ \varphi||_{L^\infty(\Omega')} \leq ||f||_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.3.3}$$

L'inégalité (1.3.2) (dans le cas $p < \infty$) ou (1.3.3) (dans le cas $p = \infty$) nous dit que l'application (1.3.1) est bien définie et, étant trivialement linéaire, qu'elle est continue.

$\diamondsuit$ Etape 4: caractère isomorphique de (1.3.1).
Le résultat ci-dessus appliqué avec φ^{-1} (homéomorphisme bilipschitzien entre Ω et Ω') à la place de φ nous montre que $g \in L^p(\Omega') \to g \circ \varphi^{-1} \in L^p(\Omega)$ est bien définie et linéaire continue; cette application est alors trivialement l'inverse de (1.3.1), ce qui prouve que (1.3.1) est un isomorphisme. ■

Remarque 1.3.2 *Nous avons raisonné en supposant que les éléments de $L^p(\Omega)$ étaient des fonctions Borel-mesurables. Mais, lorsque $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable, elle est égale presque partout à une fonction $\widetilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}$ Borel-mesurable; comme φ^{-1} transporte les ensembles de mesure nulle sur des ensembles de mesure nulle (c'est une conséquence du théorème de changement de variable lipschitzien appliqué à φ^{-1} homéomorphisme localement lipschitzien), on en déduit que $f \circ \varphi = \widetilde{f} \circ \varphi$ presque partout sur Ω' (ce qui prouve au passage que $f \circ \varphi$ est Lebesgue-mesurable, ce qui n'avait rien d'évident et est faux en général si φ^{-1} n'est pas localement lipschitzien). On peut donc indifféremment considérer les éléments de $L^p(\Omega)$ comme des fonctions Borel- ou Lebesgue-mesurables.*

1.4 Transport des Espaces de Sobolev

Lorsque $p \in [1, +\infty]$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $W^{1,p}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev usuel, muni de la norme

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} ||D_i u||_{L^p(\Omega)}.$$

Lemme 1.4.1 *Si $p \in [1, +\infty[$ alors $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Remarque 1.4.1 *En fait, on prouve ci-après le résultat suivant plus puissant: pour tout u, il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que, si $p \in [1, +\infty[$ vérifie $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$; autrement dit, la suite qui approche u est indépendante de p.*

Démonstration:
$\diamondsuit$ Etape 1: On tronque.
Soit $\gamma \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $\gamma \equiv 1$ sur $B(0, 1)$ et $\gamma \equiv 0$ hors de $B(0, 2)$; posons $\gamma_n(x) = \gamma(x/n)$. $\gamma_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\gamma_n \equiv 1$ sur $B(0, n)$ et $\gamma_n \equiv 0$ hors de $B(0, 2n)$; on remarque aussi que $\nabla\gamma_n(x) = \frac{1}{n}\nabla\gamma(x/n)$ donc $||\,|\nabla\gamma_n|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{||\,|\nabla\gamma|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
Pour $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on pose $u_n = \gamma_n u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. u_n est à support compact, $u_n \to u$ λ_N-presque partout sur $\mathbb{R}^N$ et $|u_n| \leq |u| \in L^p(\mathbb{R}^N)$ donc, par convergence dominée, $u_n \to u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. De plus, pour tout $i \in [1, N]$, $D_i u_n = u\partial_i\gamma_n + \gamma_n D_i u$; or

i) $\partial_i\gamma_n \to 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ donc $u\partial_i\gamma_n \to 0$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$,

ii) $\gamma_n D_i u \to D_i u$ λ_N-presque partout sur $\mathbb{R}^N$ en étant majorée par $|D_i u| \in L^p(\mathbb{R}^N)$, donc $\gamma_n D_i u \to D_i u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

On a donc $D_i u_n \to D_i u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.
Ainsi, on a approché u par une suite de fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ à supports compacts; si l'on peut approcher toute fonction de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ à support compact par une suite de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, on aura prouvé le théorème.

$\diamondsuit$ Etape 2: On régularise.
Prenons donc $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ à support compact. Soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une approximation $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ de l'unité. En posant $u_n = u * \rho_n$, on définit une suite de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui converge vers u dans $L^p(\mathbb{R}^N)$; de plus, $\nabla u_n = (\nabla u) * \rho_n \to \nabla u$ dans $(L^p(\mathbb{R}^N))^N$, puisque $\nabla u \in (L^p(\mathbb{R}^N))^N$, et on a bien $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. ■

Lemme 1.4.2 (Prolongement) *Soit $p \in [1, +\infty]$, U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $u \in W^{1,p}(U \cap V)$. S'il existe $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant ∂V tel que $u = 0$ sur $U \cap V \cap \mathcal{O}$, alors la fonction $\widetilde{u}$ définie sur U par*

$$\widetilde{u} = \begin{cases} u & sur \quad U \cap V, \\ 0 & sur \quad U \backslash (U \cap V) \end{cases}$$

est dans $W^{1,p}(U)$ et $\nabla\widetilde{u}$ est donné par

$$\nabla\widetilde{u} = \begin{cases} \nabla u & sur \quad U \cap V, \\ 0 & sur \quad U \backslash (U \cap V). \end{cases}$$

Remarque 1.4.1

1) *On appliquera souvent ce résultat pour $u \in W^{1,p}(V)$ à support compact dans V et $U = \mathbb{R}^N$: le prolongement de u à $\mathbb{R}^N$ par 0 hors de V est alors dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

2) *On a $||\widetilde{u}||_{W^{1,p}(U)} = ||u||_{W^{1,p}(U\cap V)}$.*

Démonstration:
On sait bien évidemment que $\widetilde{u} \in L^p(U)$. Pour montrer que $\widetilde{u} \in W^{1,p}(U)$, il suffit donc de montrer la formule donnée pour $\nabla\widetilde{u}$, i.e. que $\nabla\widetilde{u} = \widetilde{\nabla u}$.
Notons $F = V \backslash \mathcal{O}$; c'est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^N$ (si $(x_n)_{n\geq 1} \in F$ converge dans $\mathbb{R}^N$ vers x, alors $x \in \overline{V} \cap \mathbb{R}^N \backslash \mathcal{O} = V \backslash \mathcal{O}$ puisque $\partial V = \overline{V} \backslash V \subset \mathcal{O}$).
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ et $K = \mathrm{supp}(\varphi)$ (compact de U). $K \cap F$ est un compact inclus dans $U \cap V$; on peut donc prendre $\gamma \in \mathcal{C}_c^\infty(U \cap V)$ telle que $\gamma \equiv 1$ sur un voisinage de $K \cap F$. On a alors, pour tout $i \in [1, N]$,

$$\begin{aligned}
\langle D_i\widetilde{u}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(U),\mathcal{D}(U)} &= -\int_U \widetilde{u}(x)\partial_i\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_{K\cap F} u(x)\partial_i\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_{K\cap F} u(x)\partial_i(\gamma\varphi)(x)\,dx \\
&= -\int_{U\cap V} u(x)\partial_i(\gamma\varphi)(x)\,dx,
\end{aligned}$$

l'avant dernière égalité ayant lieu car $\gamma\varphi = \varphi$ sur un voisinage de $K \cap F$, la dernière égalité car $u = 0$ sur $U \cap V$ hors de F et $\partial_i(\gamma\varphi) = 0$ sur $U \cap V$ hors de K. Or $\gamma\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U \cap V)$ et $u \in W^{1,p}(U \cap V)$, donc par définition de $D_i u \in L^p(U \cap V)$, on a

$$\begin{aligned}
-\int_{U\cap V} u(x)\partial_i(\gamma\varphi)(x)\,dx &= \int_{U\cap V} D_i u(x)\gamma(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{K\cap F} D_i u(x)\gamma(x)\varphi(x)\,dx,
\end{aligned}$$

car u, donc $D_i u$, est nulle sur $U \cap V \cap \mathcal{O}$. Enfin, puisque $\gamma \equiv 1$ au voisinage de $K \cap F$,

$$\begin{aligned}
\int_{K\cap F} D_i u(x)\gamma(x)\varphi(x)\,dx &= \int_{K\cap F} D_i u(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{U\cap V} D_i u(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_U \widetilde{D_i u}(x)\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Ces égalités mises bout à bout, et valables pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$, donnent $D_i\widetilde{u} = \widetilde{D_i u}$ dans $\mathcal{D}'(U)$, ce qui est le résultat voulu. ■

Théorème 1.4.1 (Composition de dérivées faibles) *Soit $p \in [1, +\infty]$, Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)^T : \Omega' \to \Omega$ un homéomorphisme bilipschitzien. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ alors:*

i) $u \circ \varphi \in W^{1,p}(\Omega')$,

ii) $\forall i \in [1, N]$, $D_i(u \circ \varphi) = \sum_{k=1}^N D_k u \circ \varphi\, D_i\varphi_k$,

iii) $\exists M > 0$ *ne dépendant que de* N, $\mathrm{Lip}(\varphi)$ *et* $\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})$ *telle que* $||u \circ \varphi||_{W^{1,p}(\Omega')} \leq M||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Remarque 1.4.2 *La conclusion iii) nous dit que l'opération de composition*

$$\left\{\begin{array}{rcl} W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{1,p}(\Omega') \\ u & \longrightarrow & u \circ \varphi \end{array}\right.$$

est linéaire continue. Comme elle a un inverse linéaire continu (c'est $v \in W^{1,p}(\Omega') \to v\circ\varphi^{-1} \in W^{1,p}(\Omega)$), cette application est en fait un isomorphisme. Ce théorème est donc bien un résultat de transport des espaces de Sobolev.

Démonstration:
On sait déjà (théorème 1.3.1) que, pour $u \in W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $u \circ \varphi$ est bien définie et appartient à $L^p(\Omega')$.
Nous allons commencer par prouver ii). Cette égalité étant locale, il suffit de montrer que, pour tout ouvert U d'adhérence compacte dans Ω', on a l'égalité ii) sur U (i.e. dans $\mathcal{D}'(U)$).

$\diamondsuit$ Etape 1: on montre ii) pour $p < \infty$.
Soit donc un tel U. On remarque que $V = \varphi(U)$ est un ouvert de Ω (φ est un homéomorphisme) et que $\overline{V} = \varphi(\overline{U})$ est un compact de Ω. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $\phi \equiv 1$ au voisinage de $\overline{V}$. Posons $F = \phi u$; $F \in W^{1,p}(\Omega)$ et est à support compact dans Ω; ainsi, par le lemme de prolongement 1.4.2, l'extension de F à $\mathbb{R}^N$ par 0 hors de Ω, encore notée F, est dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
Soit une suite $(F_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui converge vers F dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Posons $G_n = F_n \circ \varphi : \Omega' \to \mathbb{R}$; partout où φ est dérivable au sens classique, i.e. λ_N-presque partout sur Ω', G_n est dérivable et

$$\frac{\partial G_n}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial F_n}{\partial x_k} \circ \varphi \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}.$$

De plus, F_n et φ étant lipschitziennes, G_n est lipschitzienne et toutes les dérivées classiques ci-dessus coincident avec les dérivées au sens des distributions.
Comme $F_n \to F$ et (pour tout $k \in [1, N]$) $D_k F_n \to D_k F$ dans $L^p(\Omega)$, le théorème 1.3.1 nous permet de voir que que $F_n \circ \varphi \to F \circ \varphi$ et $D_k F_n \circ \varphi \to D_k F \circ \varphi$ dans $L^p(\Omega')$. Les fonctions $(D_i\varphi_k)_{(i,k)\in[1,N]}$ étant dans $L^\infty(\Omega')$, on en déduit

$$D_i G_n = \sum_{k=1}^N D_k F_n \circ \varphi \, D_i\varphi_k \to \sum_{k=1}^N D_k F \circ \varphi \, D_i \varphi_k \quad \text{dans } L^p(\Omega'), \text{ donc dans } \mathcal{D}'(\Omega').$$

Comme $G_n = F_n \circ \varphi \to F \circ \varphi$ dans $L^p(\Omega')$, donc dans $\mathcal{D}'(\Omega')$, on a $D_i G_n \to D_i(F \circ \varphi)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega')$.

En passant à la limite, on obtient finalement $D_i(F \circ \varphi) = \sum_{k=1}^N D_k F \circ \varphi \, D_i\varphi_k$ dans $\mathcal{D}'(\Omega')$, donc aussi dans $\mathcal{D}'(U)$. Sur V, puisque $F = u$, on a $D_k F = D_k u$; ainsi, sur $U = \varphi^{-1}(V)$, $F \circ \varphi = u \circ \varphi$ et $D_k F \circ \varphi = D_k u \circ \varphi$. Le recollement de toutes ces égalités donne $D_i(u \circ \varphi) = \sum_{k=1}^N D_k u \circ \varphi \, D_i \varphi_k$ dans $\mathcal{D}'(U)$, c'est-à-dire ce que l'on souhaitait.

$\diamondsuit$ Etape 2: on montre ii) pour $p = \infty$.
Soit toujours U ouvert d'adhérence compacte dans Ω' et $V = \varphi(U)$.
V est un ouvert borné inclus dans Ω, donc $u \in W^{1,\infty}(V) \subset W^{1,1}(V)$. Par l'étape 1, puisque $u \in W^{1,1}(V)$ et $\varphi : U \to V$ est un homéomorphisme bilipschitzien, on a, dans $\mathcal{D}'(U)$, $D_i(u \circ \varphi) = \sum_{k=1}^N D_k u \circ \varphi \, D_i \varphi_k$, c'est-à-dire ce que l'on voulait démontrer.

$\diamondsuit$ Etape 3: on conclut
La formule ii) étant établie, il ne reste plus qu'à prouver i) et iii). Or, par le théorème 1.3.1, pour tout $k \in [1, N]$, $D_k u \circ \varphi \in L^p(\Omega')$ (car $D_k u \in L^p(\Omega)$) donc, les fonctions $(D_i\varphi_k)_{k\in[1,N]}$ étant dans $L^\infty(\Omega')$, on a bien, par ii), $D_i(u \circ \varphi) \in L^p(\Omega')$ pour tout $i \in [1, N]$, donc $u \circ \varphi \in W^{1,p}(\Omega')$.
En notant C un majorant de la norme de l'application (1.3.1) ne dépendant que de N et $\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})$ (cf remarque 1.3.1), puisque $||D_i\varphi_k||_{L^\infty(\Omega')} \leq \mathrm{Lip}(\varphi_k) \leq \mathrm{Lip}(\varphi)$, on a, par la formule ii),

$$||D_i(u \circ \varphi)||_{L^p(\Omega')} \leq \mathrm{Lip}(\varphi) \sum_{k=1}^N ||D_k u \circ \varphi||_{L^p(\Omega')} \leq C\mathrm{Lip}(\varphi) \sum_{k=1}^N ||D_k u||_{L^p(\Omega)},$$

ce qui implique

$$||u \circ \varphi||_{W^{1,p}(\Omega')} \leq C||u||_{L^p(\Omega)} + C\mathrm{Lip}(\varphi) \sum_{k=1}^N ||D_k u||_{L^p(\Omega)} \leq C \sup(1, \mathrm{Lip}(\varphi))||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$$

et conclut cette démonstration. ■

Chapitre 2

Intégrale sur des Bords d'Ouverts

Dans ce chapitre, $||\cdot||$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^N$.

2.1 Ouverts Lipschitziens

2.1.1 Ouverts Faiblement Lipschitziens

Définition 2.1.1 *Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est faiblement lipschitzien si sa frontière $\partial\Omega$ est bornée et si, pour tout $a \in \partial\Omega$, il existe un ouvert O de $\mathbb{R}^N$ contenant a et un homéomorphisme bilipschitzien $\varphi : O \to B^N = \{x \in \mathbb{R}^N \mid ||x|| \leq 1\}$ tels que*

$$\varphi(O \cap \Omega) = B^N_+ = \{(x', x_N) \in B^N \mid x_N > 0\},$$
$$\varphi(O \cap \partial\Omega) = B^{N-1} = \{(x', 0) \in B^N\}.$$

Remarque 2.1.1

1) *Si Ω est faiblement lipschitzien pour une norme donnée sur $\mathbb{R}^N$, il est faiblement lipschitzien pour toutes les normes sur $\mathbb{R}^N$ (si B est la boule unité pour une norme sur $\mathbb{R}^N$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\varphi(a) + \lambda B \subset B^N$; on considère alors $\widetilde{\varphi} : \varphi^{-1}(\varphi(a) + \lambda B) \to B$ définie par $\widetilde{\varphi}(x) = \lambda^{-1}(\varphi(x) - \varphi(a))$: c'est un homéomorphisme bilipschitzien entre l'ouvert $\varphi^{-1}(\varphi(a) + \lambda B)$ de $\mathbb{R}^N$ qui contient a et B, qui envoie $\varphi^{-1}(\varphi(a) + \lambda B) \cap \Omega$ sur $\{x \in B \mid x_N > 0\}$ et $\varphi^{-1}(\varphi(a) + \lambda B) \cap \partial\Omega$ sur $\{(x', 0) \in B\}$). La norme choisie sur $\mathbb{R}^N$ n'importe donc pas.*

2) *Un couple (O, φ) comme dans cette définition est appelé "carte locale".*

3) *Dans la suite, nous confondrons B^{N-1} avec l'ouvert $\{x' \in \mathbb{R}^{N-1} \mid (x', 0) \in B^N\}$ de $\mathbb{R}^{N-1}$ (qui, lorsque l'on met sur $\mathbb{R}^{N-1}$ la norme induite par celle de $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$, i.e. $x' \to ||(x', 0)||$, correspond effectivement à la boule unité de $\mathbb{R}^{N-1}$ pour cette norme).*

4) *En fait, dans la suite, nous n'aurons pas vraiment besoin que $\partial\Omega$ soit borné; il suffit que l'on puisse trouver des cartes locales $(O_i, \varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que $\partial\Omega \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} O_i$ en union localement finie (i.e. pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$, il existe un nombre fini d'ouverts $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui rencontrent K).*

Une paramétrisation locale de $\partial\Omega$ est un couple $(\tau, O \cap \partial\Omega)$ avec O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\tau : B^{N-1} \to O \cap \partial\Omega$ un homéomorphisme bilipschitzien.
Lorsque Ω est faiblement lipschitzien, $\partial\Omega$ étant borné donc compact, il existe un nombre fini de cartes locales $(O_i, \varphi_i)_{i\in[1,k]}$ telles que $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^k O_i$; on dira que $(O_i, \varphi_i)_{i\in[1,k]}$ est un système de cartes de Ω.
En définissant $\tau_i : B^{N-1} \to O_i \cap \partial\Omega$ par $\tau_i = \left(\varphi_{i\,|O_i\cap\partial\Omega}\right)^{-1}$, on obtient des paramétrisations locales $(\tau_i, O_i \cap \partial\Omega)_{i\in[1,k]}$ telles que $\partial\Omega = \cup_{i=1}^k O_i \cap \partial\Omega$; on dira que $(\tau_i, O_i \cap \partial\Omega)_{i\in[1,k]}$ est un système de paramétrisations de $\partial\Omega$.

2.1.2 Ouverts Fortement Lipschitziens

Bien sûr, si nous avons parlé d'ouvert faiblement lipschitzien, c'est qu'il existe une notion d'ouvert fortement lipschitzien. Tout ce que nous ferons dans la suite ne nécessitera que des ouverts faiblement lipschitziens; cependant, la notion d'ouvert fortement lipschitzien étant assez pratique et la plus répandue dans la littérature, il nous a semblé utile de l'aborder.

Définition 2.1.2 *Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est fortement lipschitzien si sa frontière $\partial\Omega$ est bornée et si, pour tout $a \in \partial\Omega$, il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}_a$ de $\mathbb{R}^N$, un pavé $V = \prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i[= V' \times]\alpha, \beta[$ dans les coordonnées de $\mathcal{R}_a$ qui contient a et une application lipschitzienne $\eta : V' \to]\alpha, \beta[$ tels que*

$$\begin{aligned} V \cap \Omega &= \{(y', y_N) \in V \mid y_N > \eta(y')\}, \\ V \cap \partial\Omega &= \{(y', \eta(y'))\,,\ y' \in V'\}. \end{aligned}$$

Et comme la terminologie nous l'indique:

Proposition 2.1.1 *Un ouvert fortement lipschitzien est faiblement lipschitzien.*

Démonstration:
Soit $a \in \partial\Omega$; prenons $V = V' \times]\alpha, \beta[$ (dans de bonnes coordonnées) et $\eta : V' \to]\alpha, \beta[$ donnés par la définition de Ω fortement lipschitzien, avec V voisinage de a. Nous allons exprimer φ dans les coordonnées adaptées à V.
Soit $\widetilde{\eta} : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ une extension lipschitzienne de η. Posons

$$\widetilde{\varphi} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ (y', y_N) & \longrightarrow & (y', y_N - \widetilde{\eta}(y')). \end{array} \right.$$

$\widetilde{\varphi}$ est un homéomorphisme bilipschitzien; en effet, son inverse est

$$\widetilde{\varphi}^{-1} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ (z', z_N) & \longrightarrow & (z', z_N + \widetilde{\eta}(z')). \end{array} \right.$$

Comme $\widetilde{\varphi}(a) \in \widetilde{\varphi}(V)$ ouvert, il existe une boule B de centre $\widetilde{\varphi}(a)$ et de rayon ε incluse dans $\widetilde{\varphi}(V)$; $O = \widetilde{\varphi}^{-1}(B) \subset V$ est un ouvert qui contient a. $\widetilde{\varphi} : O \to B$ est un homéomorphisme bilipschitzien et on a

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(O \cap \Omega) &= \{(z', z_N) \in B \mid z_N > 0\}, \\ \widetilde{\varphi}(O \cap \partial\Omega) &= \{(z', 0) \in B\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\widetilde{\varphi}(a) = (z'_a, 0)$ et, en remarquant que B est bilipschitziennement homéomorphe à B^N par l'application

$$\overline{\varphi} \left\{ \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B^N \\ z & \longrightarrow & \frac{1}{\varepsilon}(z - (z'_a, 0)) \end{array} \right.$$

qui envoie $\{(z', z_N) \in B \mid z_N > 0\}$ sur B^N_+ et $\{(z', 0) \in B\}$ sur B^{N-1}, la composée $\overline{\varphi} \circ \widetilde{\varphi} : O \to B^N$ nous donne l'application φ recherchée. ∎

La notion d'ouvert fortement lipschitzien est intéressante car elle est souvent plus facile à vérifier directement que celle d'ouvert faiblement lipschitzien; comme le montre l'exemple suivant, des caractères géométriques simples peuvent impliquer la propriété de forte lipschitziannité.

Proposition 2.1.2 *Si Ω est un ouvert convexe borné, alors Ω est fortement lipschitzien.*

Démonstration:
Soit $a \in \partial\Omega$. Prenons $b \in \Omega$ et notons $v_N = (b-a)/|b-a|$. On complète v_N en une base orthonormé $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_N)$ de $\mathbb{R}^N$ et on note $\mathcal{R}_a$ le repère d'origine a et de base $\mathcal{V}$. On note $\mathcal{N}$ la norme infinie associée à la base $\mathcal{V}$ (un hypercube dans le repère $\mathcal{R}_a$ est donc une boule ouverte pour la norme $\mathcal{N}$), et $y = (y', y_N)$ les coordonnées d'un point courant dans le repère $\mathcal{R}_a$.
Soit $\delta > 0$ tel que $B_{\mathcal{N}}(b, \delta) \subset \Omega$ (Ω est ouvert) et notons

$$W =]-\delta, \delta[^{N-1} \times]y_N^b - \mathrm{diam}(\Omega) - 1, y_N^b[= W' \times]y_N^b - \mathrm{diam}(\Omega) - 1, y_N^b[,$$

exprimé en coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_a$ (ou a a pour coordonnées $(0,\ldots,0)$ et b a pour coordonnées $(0,\ldots,0,y_N^b)$, avec $y_N^b = \mathrm{dist}(a,b)$).

Nous allons maintenant définir une application $\eta : W' \to]y_N^b - \mathrm{diam}(\Omega) - 1, y_N^b[$ telle que

$$W \cap \Omega = \{(y', y_N) \in W \mid y_N > \eta(y')\}, \tag{2.1.1}$$
$$W \cap \partial\Omega = \{(y', \eta(y'))\,,\ y' \in W'\}. \tag{2.1.2}$$

Pour cela, on pose simplement, pour tout $y' \in W'$, $\eta(y') = \inf\{y_N \in \mathbb{R} \mid (y', y_N) \in \partial\Omega\}$; ceci définit *a priori* une application $\eta : W' \to [-\infty, +\infty]$ (la valeur $+\infty$ étant prise aux points $y' \in W'$ tels que $\{y_N \in \mathbb{R} \mid (y', y_N) \in \partial\Omega\} = \emptyset$).
Commençons par constater que η est en fait à valeurs finies, et même à valeurs dans $]y_N^b - \mathrm{diam}(\Omega) - 1, y_N^b[$. Soit $y' \in W'$. $c_1 = (y', y_N^b) \in B_N(b,\delta) \subset \Omega$ (rappelons que les coordonnées de b dans $\mathcal{R}_a$ sont $(0, y_N^b)$) et, pour $R > \mathrm{diam}(\Omega)$, $c_2 = (y', y_N^b - R) \notin \Omega$; ainsi, il existe $c_3 \in [c_1, c_2] \cap \partial\Omega$, i.e. $c_3 = (y', y_N^{c_3}) \in \partial\Omega$ avec $y_N^{c_3} \in]y_N^b - R, y_N^b[$; on en déduit que $\{y_N \in \mathbb{R} \mid (y', y_N) \in \partial\Omega\}$ est non vide et que sa borne inférieure est dans $[-\infty, y_N^b[$. Comme le diamètre de Ω est aussi égal au diamètre de $\overline{\Omega}$, on constate que, pour tout $R > \mathrm{diam}(\Omega)$, $(y', y_N^b - R) \notin \overline{\Omega}$ (puisque $(y', y_N^b) \in \Omega$), et $\{y_N \in \mathbb{R} \mid (y', y_N) \in \partial\Omega\} \cap]-\infty, y_N^b - \mathrm{diam}(\Omega) - 1/2] = \emptyset$; ainsi, la borne inférieure de $\{y_N \in \mathbb{R} \mid (y', y_N) \in \partial\Omega\}$ est donc dans $[y_N^b - \mathrm{diam}(\Omega) - 1/2, y_N^b[\subset]y_N^b - \mathrm{diam}(\Omega) - 1, y_N^b[$.
Vérifions ensuite la propriété (2.1.2). Pour tout $y' \in W'$, il existe $(y_N^{(n)})_{n\geq 1}$ tel que $(y', y_N^{(n)}) \in \partial\Omega$ pour tout $n \geq 1$ et $y_N^{(n)} \to \eta(y')$ lorsque $n \to \infty$; $\partial\Omega$ étant fermé, on en déduit que $(y', \eta(y')) \in \partial\Omega$; ainsi, comme η est à valeurs dans $]y_N^b - \mathrm{diam}(\Omega) - 1, y_N^b[$, on obtient bien $(y', \eta(y')) \subset W \cap \partial\Omega$ pour tout $y' \in W'$. Soit maintenant $(y', y_N) \in W \cap \partial\Omega$; on sait que, puisque Ω est convexe et $(y', y_N^b) \in \Omega$, $](y', y_N), (y', y_N^b)] \subset \Omega$ et que, pour tout $t < y_N$, $(y', t) \notin \partial\Omega$ (sinon, $(y', y_N) \in](y', t), (y', y_N^b)] \subset \Omega$); ainsi, y_N est le seul point $s \in]-\infty, y_N^b[$ tel que $(y', s) \in \partial\Omega$; comme on a vu que $\eta(y')$ était aussi un élément de $]-\infty, y_N^b[$ tel que $(y', \eta(y')) \in \partial\Omega$, on en déduit que $y_N = \eta(y')$, et que $W \cap \partial\Omega$ est donc bien inclus dans $\{(y', \eta(y'))\,,\ y' \in W'\}$.
Vérifions maintenant la propriété (2.1.1). Soit $(y', y_N) \in W$ tel que $y_N > \eta(y')$; on constate que $(y', y_N) \in](y', \eta(y')), (y', y_N^b)]$; or, par ce qui précède, $(y', \eta(y')) \in \partial\Omega$ et, comme Ω est convexe, on en déduit que $](y', \eta(y')), b] =](y', \eta(y')), (y', y_N^b)] \subset \Omega$, ce qui nous permet de voir que $(y', y_N) \in \Omega$ et que $\{(y', y_N) \in W \mid y_N > \eta(y')\} \subset W \cap \Omega$. Soit maintenant $(y', y_N) \in W \cap \Omega$; si $y_N \leq \eta(y')$, alors $(y', \eta(y')) \in [(y', y_N), (y', y_N^b)] \subset \Omega$ par convexité de Ω, ce qui est impossible puisque $(y', \eta(y')) \in \partial\Omega$.

L'épigraphe $W \cap \Omega$ de la fonction $\eta : W' \to]y_N^b - \mathrm{diam}(\Omega) - 1, y_N^b[$ est donc convexe, en tant qu'intersection de deux convexes. Ainsi, η est convexe et donc localement lipschitzienne sur W'; en prenant un pavé $V = V' \times]y_N^b - \mathrm{diam}(\Omega) - 1, y_N^b[$ contenant a et tel que V' est relativement compact dans W', on constate alors que $\eta : V' \to]y_N^b - \mathrm{diam}(\Omega) - 1, y_N^b[$ est lipschitzienne et vérifie

$$V \cap \Omega = \{(y', y_N) \in V \mid y_N > \eta(y')\},$$
$$V \cap \partial\Omega = \{(y', \eta(y'))\,,\ y' \in V'\},$$

ce qui conclut cette preuve. ∎

2.1.3 Distinctions entre les deux notions

Ces deux notions (ouvert fortement lipschitzien, ouvert faiblement lipschitzien) sont cependant distinctes. Il existe en effet des ouverts faiblement lipschitziens qui ne sont pas fortement lipschitziens. Nous en donnons ici deux exemples: l'un en dimension $N = 2$, dû à M. Zerner (voir [5]), l'autre en dimension $N = 3$, intéressant car il s'agit d'un ouvert "polygonal".

Contre-exemple de Zerner

On note, pour $n \geq 0$, $a_n = 1/2^n$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned}
&f \equiv 0 \text{ sur }]-\infty, 0] \text{ et sur } [1, \infty[\,,\\
&\forall n \geq 0\,,\ f \text{ est affine sur } [a_{n+1}, (a_n + a_{n+1})/2] \text{ et sur } [(a_n + a_{n+1})/2, a_n]\,,\\
&\forall n \geq 0\,,\ f(a_n) = 0\\
&\forall n \geq 0\,,\ f((a_n + a_{n+1})/2) = (a_n + a_{n+1})/2.
\end{aligned}$$

f est lipschitzienne: en effet, elle est continue, affine par morceaux et, sur chacun des intervalles où elle est affine, sa pente est majorée en valeur absolue par $3/2$.
Soit $\Omega = \{(x,y) \in]0,1[\times\mathbb{R} \mid f(x) < y < x + f(x)\}$; Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. L'application $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x,y) = y - f(x)$ est un homéomorphisme bilipschitzien qui transforme Ω en $\Omega' = \{(x,y) \in]0,1[\times\mathbb{R} \mid 0 < y < x\}$. Ω' étant convexe, il est fortement lipschitzien, donc faiblement lipschitzien. Puisque Ω est tranformé par un homéomorphisme bilipschitzien de $\mathbb{R}^2$ en un ouvert faiblement lipschitzien, il est aisé de voir que Ω est faiblement lipschitzien.
Ω n'est cependant pas fortement lipschitzien; plus précisément, nous allons voir que Ω ne possède pas la propriété du segment.
Un ouvert U de $\mathbb{R}^N$ possède la propriété du segment si, pour tout $a \in \partial U$, il existe un voisinage V de a dans $\mathbb{R}^N$, $d \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ et $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in]0,t_0[$, $(V \cap \overline{U}) + td \subset U$; clairement, un ouvert fortement lipschitzien possède la propriété du segment (il suffit, en coordonnées adaptées à $a \in \partial U$ données par le caractère fortement lipschitzien de l'ouvert, de considérer $d = (0,\dots,0,1)$).
L'ouvert Ω que nous avons construit ci-dessus ne possède pas, en $0 \in \partial\Omega$, la propriété du segment. En effet, supposons qu'un voisinage V de 0, un vecteur $d \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ et un t_0 comme ci-dessus existent. On note alors $d = (d_1,d_2)$; pour tout $t \in]0,t_0[$, le point $0 + td = (td_1,td_2) \in V \cap \overline{U} + td$ devrait appartenir à Ω.

- Si $d_1 \le 0$ ou $d_2 \le 0$, alors soit td_1 ou td_2 est négatif, donc $(td_1,td_2) \notin \Omega$.
- Si $0 < d_2 < d_1$, alors il existe $n \ge 0$ tel que $t = (a_n + a_{n+1})/2d_1 \in]0,t_0[$, et $td = ((a_n + a_{n+1})/2, d_2(a_n + a_{n+1})/2d_1) \notin \Omega$, car $f(td_1) = f((a_n + a_{n+1})/2) = (a_n + a_{n+1})/2 = td_1 > td_2$.
- Si $d_2 \ge d_1 > 0$, alors il existe $n \ge 0$ tel que $t = a_n/d_1 \in]0,t_0[$, et $td = (a_n, d_2a_n/d_1) \notin \Omega$ car $f(td_1) + td_1 = f(a_n) + a_n = a_n = td_1 \le td_2$.

Ainsi, Ω n'ayant pas la propriété du segment, il ne peut être fortement lipschitzien.

Ouvert "deux sucres"

Le deuxième exemple d'ouvert faiblement mais non fortement lipschitzien que nous présentons est un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Cet ouvert est formé par la superposition en quinconce de deux "sucres" (pavés rectangulaires); son expression analytique est

$$\Omega = (]0,2[\times]0,1[\times]0,1[) \,\cup\, (]0,1[\times]-1,0[\times]0,2[) \,\cup\, (]0,1[\times\{0\}\times]0,1[)\,.$$

Cet ouvert est, au sens le plus naturel que l'on puisse donner à ce terme, "polygonal" (son bord est réunion de parties planes) et "sans fissure" (il n'est nulle part des "deux cotés" de son bord). Nous allons cependant voir qu'il n'est que faiblement lipschitzien, et non fortement lipschitzien (en fait, comme dans le contre-exemple précédent, nous allons prouver que cet ouvert ne satisfait pas la propriété du segment).

Avant de prouver le caractère faiblement lipschitzien de Ω, nous avons besoin d'un petit lemme.

Lemme 2.1.1 *Soit Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 les quadrants (ouverts) définis par deux droites orthogonales de $\mathbb{R}^2$ (on numérote ces quadrants dans l'ordre trigonométrique). Soit E le demi-espace ouvert défini par les quadrants Q_1 et Q_4. Il existe un homéomorphisme bilipschitzien $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi_{|Q_2} = Id$ et $\varphi(E) = Q_1$.*

Démonstration:
Par une translation, une rotation et une éventuelle symétrie, on se ramène au cas où $Q_1 = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+$, $Q_2 = \mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}^*_+$, $Q_3 = \mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}^*_-$ et $Q_4 = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_-$; on a alors $E = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$. On raisonne ensuite en coordonnées polaires.
Soit $f :]-\pi,\pi[\to]-\pi,\pi[$ la fonction continue qui vaut Id sur $]-\pi,-3\pi/4]$, qui envoie affinement $[-3\pi/4,-\pi/2]$ sur $[-3\pi/4,0]$, qui envoie affinement $[-\pi/2,\pi/4]$ sur $[0,\pi/4]$ et qui vaut Id sur $[\pi/4,\pi[$; f est un homéomorphisme bilipschitzien (il est continu, strictement croissant, affine en 4 morceaux — donc de dérivée bornée — et son inverse, qui est calculable simplement, a la même structure).
Nous définissons alors $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,0) = (x,0)$ quand $x \le 0$ et, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}^- \times \{0\})$, $\varphi(x,y) = (r\cos(f(\theta)), r\sin(f(\theta)))$, où (r,θ) sont les coordonnées polaires de (x,y), i.e. $(r,\theta) \in]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ sont définis par $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

On vérifie aisément que φ est bijective, d'inverse $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\psi(x,0) = (x,0)$ lorsque $x \leq 0$ et $\psi(x,y) = (r\cos(f^{-1}(\theta)), r\sin(f^{-1}(\theta))$ lorsque $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}^- \times \{0\})$.
Puisque Q_2 est exactement l'ensemble des points dont la coordonnée angulaire θ est dans $]\pi/2,\pi[$, et puisque f vaut l'identité sur cet intervalle, φ vaut l'identité sur Q_2. E est l'ensemble des points dont la coordonnée angulaire θ est dans $]-\pi/2,\pi/2[$ et Q_1 est l'ensemble des points tels que $\theta \in]0,\pi/2[$; puisque f est une bijection entre $]-\pi/2,\pi/2[$ et $]0,\pi/2[$, on a bien $\varphi(E) = Q_1$.
Voyons maintenant que φ et ψ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. En dehors de $\mathbb{R}^- \times \{0\}$, la continuité de ces applications est une conséquence immédiate de la continuité des coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ et de la continuité de f et f^{-1}. On a $|\varphi(x,y)| \leq r$ et $|\psi(x,y)| \leq r$, de sorte que la continuité en $(0,0)$ est évidente. Enfin, puisque f vaut l'identité au voisinage de $-\pi$ et π, φ et ψ valent aussi l'identité au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^-_* \times \{0\}$, ce qui achève de prouver la continuité de ces applications sur $\mathbb{R}^2$.
Il reste donc à voir le caractère lipschitzien de φ et ψ. Le raisonnement étant identique pour les deux fonctions, nous ne le ferons que pour φ.
Etant donné les propriétés de f, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors des 4 demi-droites $D_1 = \mathbb{R}^- \times \{0\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta = -3\pi/4\}$, $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta = -\pi/2\}$ et $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta = \pi/4\}$. Prenons une composante φ_j ($j = 1,2$) de φ et écrivons, en dehors de D_1, $\varphi_j(x,y) = g_j(r,\theta)$; il est bien connu que, lorsqu'il existe, le gradient de φ_j en (x,y) se décompose, sur la base orthonormée $(u_1,u_2) = ((\cos(\theta),\sin(\theta))^T, (-\sin(\theta),\cos(\theta))^T)$, comme

$$\nabla\varphi_j(x,y) = \frac{\partial g_j}{\partial r}(r,\theta)u_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial g_j}{\partial \theta}(r,\theta)u_2,$$

de sorte que $|\nabla\varphi_j(x,y)|^2 = (\frac{\partial g_j}{\partial r}(r,\theta))^2 + (\frac{1}{r}\frac{\partial g_j}{\partial \theta}(r,\theta))^2$. On a $g_1(r,\theta) = r\cos(f(\theta))$ et $g_2(r,\theta) = r\sin(f(\theta))$, donc, lorsque ces quantités existent, $|\frac{\partial g_j}{\partial r}(r,\theta)| \leq 1$ et $|\frac{1}{r}\frac{\partial g_j}{\partial \theta}(r,\theta)| \leq \sup_{]-\pi,\pi[\backslash\{-3\pi/4,-\pi/2,\pi/4\}} |f'| = C < \infty$ ($j = 1,2$). Ainsi, pour tout $(x,y) \notin D_1 \cup \cdots \cup D_4$ et tout $j \in \{1,2\}$, $|\nabla\varphi_j(x,y)| \leq \sqrt{1+C^2}$ avec C indépendant de (x,y). Cela nous donne donc $C' \geq 1$ tel que, pour tout $(x,y) \notin D_1 \cup \cdots \cup D_4$, $||\varphi'(x,y)|| \leq C'$. On déduit de ceci que φ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, il existe $(a_1,\ldots,a_m) \in [X,Y]$ (ordonnés sur ce segment) tels que $a_1 = X$, $a_m = Y$ et, pour tout $i \in [1,m-1]$, soit $]a_i,a_{i+1}[$ est entièrement inclus dans une des demi-droites $D_1,\ldots,D_4$, soit $]a_i,a_{i+1}[\cap (D_1 \cup \cdots \cup D_4) = \emptyset$. Si $i \in [0,m-1]$ est tel que $]a_i,a_{i+1}[\subset D_j$ pour un certain $j \in [1,4]$, alors, comme l'action de φ est angulaire, on a $|\varphi(a_i) - \varphi(a_{i+1})| = |a_i - a_{i+1}|$. Si $]a_i,a_{i+1}[\cap (D_1 \cup \cdots \cup D_4) = \emptyset$, alors φ est régulière sur $]a_i,a_{i+1}[$ et, étant continue sur $[a_i,a_{i+1}]$, le théorème des accroissements finis associé à la majoration sur $||\varphi'(x,y)||$ trouvée précédemment donne $|\varphi(a_i) - \varphi(a_{i+1})| \leq C'|a_i - a_{i+1}|$. En mettant ces inégalités bout à bout, et en utilisant le fait que les $(a_i)_{i\in[1,m]}$ sont ordonnés sur $[X,Y]$, on en déduit $|\varphi(X) - \varphi(Y)| \leq C'|X-Y|$.
■

On est maintenant équipé pour prouver que Ω est bien faiblement lipschitzien.

En tout point (x,y,z) du bord de Ω différent de $(1,0,1)$, $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$, on remarque que Ω ou $\mathbb{R}^3 \backslash \Omega$ est localement convexe; la proposition 2.1.2 nous donne donc, au voisinage d'un tel point (x,y,z), des coordonnées dans lesquelles Ω ou $\mathbb{R}^3 \backslash \Omega$ est l'épigraphe d'une fonction lipschitzienne; le raisonnement de la preuve de la proposition 2.1.1 nous fournit alors une transformation bilipschitzienne au voisinage de (x,y,z) qui envoie Ω sur une demi-boule.
Il faut maintenant voir que l'on peut trouver une telle transformation au voisinage des points $(1,0,1)$, $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$. Le cas de ces deux derniers points étant plus simple que celui du premier, nous n'étudierons que le cas de $(1,0,1)$ (en fait, pour traiter $(1,0,0)$ ou $(0,0,1)$, il suffit de faire la moitié du raisonnement suivant).
Posons $W =]0,2[\times]-1,1[\times]0,2[$ voisinage ouvert de $(1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^3$. On remarque que, si

$$\Omega' = \left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+ \times]-\infty,1[\right) \cup \left(]-\infty,1[\times \mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}\right) \cup \left(]-\infty,1[\times \{0\} \times]-\infty,1[\right),$$

on a $\Omega \cap W = \Omega' \cap W$, ce qui implique en particulier $\partial\Omega \cap W = \partial\Omega' \cap W$.
D'après le lemme 2.1.1, il existe un homéomorphisme bilipschitzien φ sur $\mathbb{R}^2$ qui laisse inchangé le quadrant $\{x < 1\,,\ y < 0\}$ et qui envoie le demi-espace $\{y > 0\}$ sur le quadrant $\{x < 1\,,\ y > 0\}$. L'application $\widetilde{\varphi} : (x,y,z) \to (\varphi(x,y),z)$ est donc un homéomorphisme bilipschitzien de $\mathbb{R}^3$ qui laisse inchangé $\{x < 1\,,\ y < 0\,,\ z \in \mathbb{R}\}$ (et donc le point $(1,0,1)$) et envoie l'ouvert Ω' sur

$$\begin{aligned} U &= \left(]-\infty,1[\times \mathbb{R}^*_+ \times]-\infty,1[\right) \cup \left(]-\infty,1[\times \mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}\right) \cup \left(]-\infty,1[\times \{0\} \times]-\infty,1[\right) \\ &= \left(]-\infty,1[\times \mathbb{R} \times]-\infty,1[\right) \cup \left(]-\infty,1[\times \mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}\right). \end{aligned}$$

Toujours par le lemme 2.1.1, on a un homéomorphisme bilipschitzien ψ de $\mathbb{R}^2$ qui laisse inchangé le quadrant $\{y < 0\,,\ z > 1\}$ et envoie le demi-espace $\{z < 1\}$ sur le quadrant $\{y < 0\,,\ z < 1\}$. L'homéomorphisme bilipschitzien $\widetilde{\psi}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par $(x, y, z) \to (x, \psi(y, z))$ laisse inchangé $\{x \in \mathbb{R}\,,\ y < 0\,,\ z > 1\}$ (donc le point $(1, 0, 1)$) et envoie l'ouvert U sur l'ouvert

$$V = \big(]-\infty, 1[\times\mathbb{R}_-^* \times]-\infty, 1[\big) \cup \big(]-\infty, 1[\times\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}\big) =]-\infty, 1[\times\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}.$$

Ce dernier ouvert étant convexe, donc fortement et faiblement lipschitzien, on peut trouver un homéomorphisme bilipschitzien $h : O \to B^3$, avec O voisinage de $(1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$, qui envoie $V \cap O$ sur B^3_+ et $\partial V \cap O$ sur B^2. $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}(W)$ étant un voisinage de $(1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$, on peut supposer, quitte à réduire O, que $O \subset \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}(W)$ ([1]). Ainsi, il existe $O' = (\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi})^{-1}(O)$ voisinage de $(1, 0, 1)$ et un homéomorphisme bilipschitzien $h \circ \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi} : O' \to B^3$ qui envoie $\Omega' \cap O'$ sur B^3_+ et $\partial\Omega' \cap O'$ sur B^2. Comme $O' \subset W$ par choix de O, on a en fait $\Omega' \cap O' = \Omega \cap O'$ et $\partial\Omega' \cap O' = \partial\Omega \cap O'$, ce qui conclut la preuve du caractère faiblement lipschitzien de Ω au voisinage de $(1, 0, 1)$.

Cependant, Ω n'est pas fortement lipschitzien. C'est bien sûr au voisinage du point $(1, 0, 1)$ que le caractère fortement lipschitzien est mis en défaut.
Pour voir cela, nous allons, comme dans le contre-exemple de Zerner, prouver que Ω ne vérifie pas la propriété du segment au point $(1, 0, 1) \in \partial\Omega$.
Supposons Ω vérifie cette propriété en $(1, 0, 1)$. Alors il existerait $d = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$ non nul, $t_0 > 0$ et un voisinage W de $(1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \in]0, t_0[$ et tout $X \in W \cap \overline{\Omega}$, $X + td \in \Omega$. Prenons pour commencer $X = (1 + \varepsilon, 0, 1)$: pour ε assez petit, on a $X \in W \cap \overline{\Omega}$; demander à ce que $X + td = (1 + \varepsilon + td_1, td_2, 1 + td_3)$ soit dans Ω pour tout $t > 0$ assez petit impose que $td_2 > 0$ (car $1 + \varepsilon + td_1 > 1$), donc que $d_2 > 0$. Prenons maintenant $X = (1, 0, 1 + \varepsilon)$; encore une fois, pour ε assez petit, X est dans $W \cap \overline{\Omega}$ et demander à ce que que $X + td = (1 + td_1, td_2, 1 + \varepsilon + td_3)$ soit dans Ω pour un $t > 0$ impose $d_2 < 0$, ce qui est une contradiction avec la condition précédemment obtenue sur d_2.

Il est aussi intéressant de remarquer que les deux contre-exemples précédents ne fournissent pas seulement des ouverts faiblement lipschitziens qui ne sont pas fortement lispchitziens, mais aussi des ouverts faiblement lipschitziens qui n'ont pas la propriété du segment.
Cette propriété est souvent considérée comme une propriété assez faible qui donne, par exemple, la densité des fonctions régulières dans les espaces de Sobolev (voir [1]). Nous montrons, avec ces contre-exemples et les résultats du chapitre 3, que le caractère faiblement lipschitzien d'un ouvert peut permettre de prouver les principaux résultats sur les espaces de Sobolev (prolongement, densité de fonctions régulières, injections de Sobolev) lorsque les techniques usuelles (propriété du segment, du cône, etc... voir [1]) sont mises en défaut.

2.2 Mesure et Intégrale sur $\partial\Omega$, Espaces $L^p(\partial\Omega)$

Dans tout ce qui suit, Ω est un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ et $(\tau_i, O_i \cap \partial\Omega)_{i\in[1,k]}$ est un système de paramétrisations de $\partial\Omega$. On se donne aussi $(\theta_i)_{i\in[1,k]}$ des fonctions mesurables $\mathbb{R}^N \to [0, 1]$ qui vérifient $\theta_i = 0$ hors de O_i et $\sum_{i\in[1,k]} \theta_i = 1$ sur $\partial\Omega$ (on dira que $(\theta_i)_{i\in[1,k]}$ est une partition mesurable de l'unité associée au système de paramétrisations $(\tau_i, O_i \cap \partial\Omega)_{i\in[1,k]}$); une telle partition existe toujours: il suffit de considérer $\theta_i = \mathbf{1}_{(O_i \setminus (O_1 \cup \cdots \cup O_{i-1})) \cap \partial\Omega}$.

2.2.1 Mesure sur $\partial\Omega$

Définition
On définit, pour A borélien de $\partial\Omega$,

$$\sigma(A) = \sum_{i=1}^{k} \int_{B^{N-1}} (\theta_i \mathbf{1}_A) \circ \tau_i(y) \left| \frac{\partial\tau_i}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\tau_i}{\partial y_{N-1}} \right| (y)\, dy. \tag{2.2.1}$$

Pour $i \in [1, k]$, τ_i étant lipschitzienne sur l'ouvert B^{N-1} de $\mathbb{R}^{N-1}$, les fonctions $(\frac{\partial\tau_i}{\partial y_j})_{j\in[1,N-1]}$ sont dans $L^\infty(B^{N-1})$; puisque le produit vectoriel et la norme euclidienne sont continus, on en déduit que

[1] Si l'on réduit ainsi O, il faut bien sûr dilater h à l'arrivée pour qu'il reste un homéomorphisme entre O et B^3; voir la preuve de la proposition 2.1.1 pour la technique de cette réduction — qui se fait en fait en partant de B^3.

$|\frac{\partial\tau_i}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau_i}{\partial y_{N-1}}|$ est positive mesurable sur B^{N-1} (et même dans $L^\infty(B^{N-1})$). Comme $(\theta_i\mathbf{1}_A)\circ\tau_i = \theta_i\circ\tau_i\mathbf{1}_{\tau_i^{-1}(A)}$ est positive mesurable sur B^{N-1} ($\tau_i : B^{N-1}\to\partial\Omega$ est continue et A est un borélien de $\partial\Omega$), l'expression (2.2.1) est bien définie.
σ est une mesure sur les boréliens de $\partial\Omega$; en effet:

i) $\sigma(\emptyset)=0$, puisque $\mathbf{1}_\emptyset\circ\tau_i=0$,

ii) Si $(A_n)_{n\geq1}$ sont des boréliens deux à deux disjoints de $\partial\Omega$, alors $\mathbf{1}_{\cup_n A_n}\circ\tau_i = \mathbf{1}_{\tau_i^{-1}(\cup_n A_n)} = \mathbf{1}_{\cup_n\tau_i^{-1}(A_n)} = \sum_n \mathbf{1}_{\tau_i^{-1}(A_n)}$ (les $(\tau_i^{-1}(A_n))_{n\geq1}$ sont deux à deux disjoints), donc, par les propriétés de l'intégrale des fonctions positives,

$$\begin{aligned}\sigma\left(\bigcup_{n\geq1}A_n\right) &= \sum_{i=1}^k\int_{B^{N-1}}\sum_{n\geq1}\theta_i\circ\tau_i\mathbf{1}_{\tau_i^{-1}(A_n)}(y)\left|\frac{\partial\tau_i}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau_i}{\partial y_{N-1}}\right|(y)\,dy\\ &= \sum_{n\geq1}\left(\sum_{i=1}^k\int_{B^{N-1}}\theta_i\circ\tau_i\mathbf{1}_{\tau_i^{-1}(A_n)}(y)\left|\frac{\partial\tau_i}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau_i}{\partial y_{N-1}}\right|(y)\,dy\right)\\ &= \sum_{n\geq1}\sigma(A_n).\end{aligned}$$

Comme, pour tout $i\in[1,k]$, $|\frac{\partial\tau_i}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau_i}{\partial y_{N-1}}|\in L^\infty(B^{N-1})$, on voit immédiatement que σ est une mesure finie sur les boréliens de $\partial\Omega$.

Caractère Intrinsèque de σ
On veut une mesure sur les boréliens de $\partial\Omega$ qui ne dépende que de $\partial\Omega$ (même pas de Ω), et il faut donc vérifier que l'expression (2.2.1) est indépendante du système de paramétrisations $(\tau_i, O_i\cap\partial\Omega)_{i\in[1,k]}$ et de la partition mesurable de l'unité associée $(\theta_i)_{i\in[1,k]}$ choisis. Prenons donc $(\widetilde{\tau}_j,\widetilde{O}_j\cap\partial\Omega)_{j\in[1,l]}$ un autre système de paramétrisations et $(\widetilde{\theta}_j)_{j\in[1,l]}$ une partition mesurable de l'unité associée à ce nouveau système de paramétrisations; on a alors $\sum_{j=1}^l\widetilde{\theta}_j\circ\tau_i=1$ sur B^{N-1}, pour tout $i\in[1,k]$, donc

$$\sigma(A)=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l\int_{B^{N-1}}(\widetilde{\theta}_j\theta_i\mathbf{1}_A)\circ\tau_i(y)\left|\frac{\partial\tau_i}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau_i}{\partial y_{N-1}}\right|(y)\,dy. \tag{2.2.2}$$

Mais, pour chaque $(i,j)\in[1,k]\times[1,l]$, l'intégrale correspondante ne porte en fait que sur $\tau_i^{-1}(O_i\cap\widetilde{O}_j\cap\partial\Omega)$, car $\widetilde{\theta}_j$ est nul hors de $\widetilde{O}_j$ et θ_i est nulle hors de O_i; de plus, le changement de variable lipschitzien (entre ouverts de $\mathbb{R}^{N-1}$)

$$\tau_i^{-1}\circ\widetilde{\tau}_j:\widetilde{\tau}_j^{-1}(O_i\cap\widetilde{O}_j\cap\partial\Omega)\to\tau_i^{-1}(O_i\cap\widetilde{O}_j\cap\partial\Omega)$$

nous permet de voir que

$$\begin{aligned}&\int_{\tau_i^{-1}(O_i\cap\widetilde{O}_j\cap\partial\Omega)}(\theta_i\widetilde{\theta}_j\mathbf{1}_A)\circ\tau_i(y)\left|\frac{\partial\tau_i}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau_i}{\partial y_{N-1}}\right|(y)\,dy\\ &\qquad=\int_{\widetilde{\tau}_j^{-1}(O_i\cap\widetilde{O}_j\cap\partial\Omega)}(\theta_i\widetilde{\theta}_j\mathbf{1}_A)\circ\widetilde{\tau}_j(y)\Delta_{i,j}(y)\,dy\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

où $\Delta_{i,j}=\left|\frac{\partial\tau_i}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau_i}{\partial y_{N-1}}\right|\circ(\tau_i^{-1}\circ\widetilde{\tau}_j)|\det((\tau_i^{-1}\circ\widetilde{\tau}_j)')|$.

Pour continuer, il nous faut le lemme suivant.

Lemme 2.2.1 *Si $M\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^{N-1})$ et $L\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^{N-1};\mathbb{R}^N)$ alors $(LMe_1)\wedge\cdots\wedge(LMe_{N-1})=\det(M)(Le_1\wedge\cdots\wedge Le_{N-1})$.*

Démonstration:

Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\det_N(L\cdot, \cdots, L\cdot, x)$ est une forme $(N-1)$-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^{N-1}$ et est donc proportionnelle à $\det_{N-1}$: il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\det_N(L\cdot, \cdots, L\cdot, x) = \lambda_x \det_{N-1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} LMe_1 \wedge \cdots \wedge LMe_{N-1} \cdot x &= \det_N(LMe_1, \cdots, LMe_{N-1}, x) \\ &= \lambda_x \det_{N-1}(Me_1, \ldots, Me_{N-1}) \\ &= \det(M)(\lambda_x \det_{N-1}(e_1, \ldots, e_{N-1})) \\ &= \det(M)\det_N(Le_1, \cdots, Le_{N-1}, x) \\ &= \det(M) Le_1 \wedge \cdots \wedge Le_{N-1} \cdot x. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on en déduit le résultat du lemme. ■

Reprenons la démonstration du caractère intrinsèque de σ.
Soit A l'ensemble des points de $\tau_i^{-1}(O_i \cap \widetilde{O}_j \cap \partial\Omega) \subset B^{N-1}$ en lesquel τ_i n'est pas dérivable; A est de λ_{N-1}-mesure nulle donc, puisque $\widetilde{\tau}_j^{-1} \circ \tau_i : \tau_i^{-1}(O_i \cap \widetilde{O}_j \cap \partial\Omega) \to \widetilde{\tau}_j^{-1}(O_i \cap \widetilde{O}_j \cap \partial\Omega)$ est un homéomorphisme lipschitzien entre ouverts de $\mathbb{R}^{N-1}$, on a

$$\lambda_{N-1}(\widetilde{\tau}_j^{-1} \circ \tau_i(A)) = \int_A |J(\widetilde{\tau}_j^{-1} \circ \tau_i)| \, d\lambda_{N-1} = 0.$$

Or, si $y \in \widetilde{\tau}_j^{-1}(O_i \cap \widetilde{O}_j \cap \partial\Omega) \backslash \widetilde{\tau}_j^{-1} \circ \tau_i(A)$, on a $\tau_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_j(y) \in \tau_i^{-1}(O_i \cap \widetilde{O}_j \cap \partial\Omega) \backslash A$ et τ_i est donc dérivable en $\tau_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_j(y)$; ainsi, pour λ_{N-1}-presque tout $y \in \widetilde{\tau}_j^{-1}(O_i \cap \widetilde{O}_j \cap \partial\Omega)$, $\tau_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_j$ est dérivable en y (fonction lipschitzienne sur l'ouvert $\widetilde{\tau}_j^{-1}(O_i \cap \widetilde{O}_j \cap \partial\Omega)$ de $\mathbb{R}^{N-1}$), τ_i est dérivable en $\tau_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_j(y)$ et, par composition des dérivées, on a $\widetilde{\tau}_j'(y) = (\tau_i \circ (\tau_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_j))'(y) = \tau_i'((\tau_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_j)(y)) \circ (\tau_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_j)'(y)$.
Ainsi, pour λ_{N-1}-presque tout $y \in \widetilde{\tau}_j^{-1}(O_i \cap \widetilde{O}_j \cap \partial\Omega)$, en appliquant le lemme (2.2.1) à $M = (\tau_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_j)'(y)$ et $L = \tau_i'((\tau_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_j)(y))$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \widetilde{\tau}_j}{\partial y_1}(y) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \widetilde{\tau}_j}{\partial y_{N-1}}(y) \\ &\quad = \widetilde{\tau}_j'(y)e_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\tau}_j'(y)e_{N-1} \\ &\quad = LMe_1 \wedge \cdots \wedge LMe_{N-1} \\ &\quad = \det((\tau_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_j)'(y)) \times \left(\frac{\partial \tau_i}{\partial y_1}((\tau_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_j)(y)) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau_i}{\partial y_{N-1}}((\tau_i^{-1} \circ \widetilde{\tau}_j)(y)) \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\Delta_{i,j}(y) = \left| \frac{\partial \widetilde{\tau}_j}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \widetilde{\tau}_j}{\partial y_{N-1}} \right| (y).$$

Lorsque l'on utilise cette égalité et (2.2.3) dans (2.2.2), on trouve

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \sum_{(i,j) \in [1,k] \times [1,l]} \int_{\widetilde{\tau}_j^{-1}(O_i \cap \widetilde{O}_j \cap \partial\Omega)} (\widetilde{\theta}_j \theta_i \mathbf{1}_A) \circ \widetilde{\tau}_j(y) \left| \frac{\partial \widetilde{\tau}_j}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \widetilde{\tau}_j}{\partial y_{N-1}} \right| (y) \, dy \\ &= \sum_{(i,j) \in [1,k] \times [1,l]} \int_{B^{N-1}} (\widetilde{\theta}_j \theta_i \mathbf{1}_A) \circ \widetilde{\tau}_j(y) \left| \frac{\partial \widetilde{\tau}_j}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \widetilde{\tau}_j}{\partial y_{N-1}} \right| (y) \, dy \\ &= \sum_{j=1}^{l} \int_{B^{N-1}} \left(\left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i \right) \widetilde{\theta}_j \mathbf{1}_A \right) \circ \widetilde{\tau}_j(y) \left| \frac{\partial \widetilde{\tau}_j}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \widetilde{\tau}_j}{\partial y_{N-1}} \right| (y) \, dy \\ &= \sum_{j=1}^{l} \int_{B^{N-1}} (\widetilde{\theta}_j \mathbf{1}_A) \circ \widetilde{\tau}_j(y) \left| \frac{\partial \widetilde{\tau}_j}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \widetilde{\tau}_j}{\partial y_{N-1}} \right| (y) \, dy, \end{aligned}$$

c'est-à-dire ce que l'on voulait.

A partir de maintenant, nous ne considérons plus, sur $\partial\Omega$, que cette mesure σ; les espaces $L^p(\partial\Omega)$ $(p \in [1, \infty])$ dont nous parlerons sont toujours ceux correspondants à cette mesure.

2.2.2 Expressions de l'Intégrale sur $\partial\Omega$

Nous allons ici nous attacher a démontrer plusieurs expressions de l'intégrale d'une fonction positive ou intégrable sur $\partial\Omega$ (ou sur une partie de $\partial\Omega$), toute assez simples à partir de (2.2.1).

Intégrale sur $\partial\Omega$ en Entier

En faisant des combinaisons linéaires à partir de (2.2.1), il est facile de trouver l'expression de l'intégrale d'une fonction simple f sur $\partial\Omega$:

$$\int_{\partial\Omega} f\,d\sigma = \sum_{i=1}^{k} \int_{B^{N-1}} (\theta_i f)\circ\tau_i(y) \left|\frac{\partial\tau_i}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau_i}{\partial y_{N-1}}\right|(y)\,dy. \tag{2.2.4}$$

Lorsque $f:\partial\Omega\to[0,+\infty]$ est mesurable, on prend une suite de fonctions simples positives f_n sur $\partial\Omega$ qui converge en croissant vers f; comme, pour tout $i\in[1,k]$, $f_n\circ\tau_i\to f\circ\tau_i$ en croissant, on déduit du théorème de convergence monotone que (2.2.4) est encore valable pour f positive mesurable. En écrivant toute fonction f intégrable comme différence de ses parties positives et négatives, on constate que (2.2.4) est aussi valable lorsque f est intégrable.

Intégrale sur un ouvert de $\partial\Omega$

Cette partie est très intuitive, mais les justifications exactes sont longues a écrire.
Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(\tau_i, O_i\cap\partial\Omega)_{i\in[1,k]}$ des paramétrisations locales de $\partial\Omega$ telles que $V\cap\partial\Omega = \cup_{i=1}^k O_i\cap\partial\Omega$ (nous dirons que $(\tau_i, O_i\cap\partial\Omega)_{i\in[1,k]}$ est un système de paramétrisations de $V\cap\partial\Omega$). On se donne aussi $(\theta_i)_{i\in[1,k]}$ une partition mesurable de l'unité associée à ce système de paramétrisations (i.e. $\theta_i=0$ hors de O_i et $\sum_{i=1}^k\theta_i=1$ sur $V\cap\partial\Omega$). Nous allons voir que l'on peut calculer l'intégrale d'une fonction positive mesurable ou intégrable sur $V\cap\partial\Omega$ en ne faisant intervenir que ces paramétrisations locales $(\tau_i, O_i\cap\partial\Omega)_{i\in[1,k]}$.
Soit $(\widetilde{\tau}_j, \widetilde{O}_j\cap\partial\Omega)_{j\in[1,l]}$ un système de paramétrisations de $\partial\Omega$ et $(\widetilde{\theta}_j)_{j\in[1,l]}$ une partition mesurable de l'unité associée. $((\tau_1, O_1\cap\partial\Omega),\dots,(\tau_k, O_k\cap\partial\Omega),(\widetilde{\tau}_1,\widetilde{O}_1\cap\partial\Omega),\dots,(\widetilde{\tau}_l,\widetilde{O}_l\cap\partial\Omega))$ est un système de paramétrisations de $\partial\Omega$ et, en notant $\Theta=\sum_{i=1}^k\theta_i$, $(\theta_1,\dots,\theta_k,(1-\Theta)\widetilde{\theta}_1,\dots,(1-\Theta)\widetilde{\theta}_l)$ est une partition mesurable de l'unité associée à ce système.
Ainsi, par (2.2.4), pour f positive mesurable ou intégrable sur $\partial\Omega$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f\mathbf{1}_{V\cap\partial\Omega}\,d\sigma &= \sum_{i=1}^{k}\int_{B^{N-1}}(\theta_i f\mathbf{1}_{V\cap\partial\Omega})\circ\tau_i(y)\left|\frac{\partial\tau_i}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau_i}{\partial y_{N-1}}\right|(y)\,dy\\ &\quad+\sum_{j=1}^{l}\int_{B^{N-1}}((1-\Theta)\widetilde{\theta}_j f\mathbf{1}_{V\cap\partial\Omega})\circ\widetilde{\tau}_j(y)\left|\frac{\partial\widetilde{\tau}_j}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\widetilde{\tau}_j}{\partial y_{N-1}}\right|(y)\,dy.\end{aligned}$$

Or $(1-\Theta)\mathbf{1}_{V\cap\partial\Omega}=0$, et, pour $i\in[1,k]$, comme $\tau_i(B^{N-1})=O_i\cap\partial\Omega\subset V\cap\partial\Omega$, $\mathbf{1}_{V\cap\partial\Omega}\circ\tau_i=1$ sur B^{N-1}; on obtient donc finalement

$$\int_{V\cap\partial\Omega} f\,d\sigma = \sum_{i=1}^{k}\int_{B^{N-1}}(\theta_i f)\circ\tau_i(y)\left|\frac{\partial\tau_i}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau_i}{\partial y_{N-1}}\right|(y)\,dy. \tag{2.2.5}$$

En résumé, on peut calculer l'intégrale sur un ouvert de $\partial\Omega$ en n'utilisant que les éléments d'un système de paramétrisations de cet ouvert.

Remarque 2.2.1 *Lorsque les fonctions τ_i sont des homéomorphismes bilipschitziens entre $a_i+\lambda_i B^{N-1}$ (avec $a_i\in\mathbb{R}^{N-1}$ et $\lambda_i\in]0,\infty[$) et des ouverts $O_i\cap\partial\Omega$ de $\partial\Omega$, par un changement de variable trivial dans $\mathbb{R}^{N-1}$ (la composée d'une translation et d'une homothétie), on constate que cette formule est encore valable (en remplaçant, dans chaque terme de la somme, B^{N-1} par $a_i+\lambda_i B^{N-1}$).*

Cas Fortement Lipschitzien: Intégrale en Coordonnées Adaptées

Nous supposons ici que Ω est fortement lipschitzien, et nous allons donner l'expression de l'intégrale d'une fonction f positive mesurable ou intégrable sur $\partial\Omega$ dans des coordonnées locales adaptées à Ω.

On se donne V ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant une partie de $\partial\Omega$, avec $V = V' \times]\alpha,\beta[$ dans de bonnes coordonnées, et $\eta : V' \to]\alpha,\beta[$ lipschitzienne données par le caractère lipschitzien fort de Ω.
En utilisant l'homéomorphisme φ construit dans la démonstration de la proposition 2.1.1, la paramétrisation locale de $\partial\Omega$ associée est $\tau(y) = (\varphi_{|O\cap\partial\Omega})^{-1}(y) = (y,\eta(y))$ ([2]); ainsi, $\frac{\partial\tau}{\partial y_j} = e_j + (0,\dots,0,\frac{\partial\eta}{\partial y_j})$.
Le vecteur $(-\nabla\eta^T,1) = (-\frac{\partial\eta}{\partial y_1},\dots,-\frac{\partial\eta}{\partial y_{N-1}},1)$ est donc orthogonal à chaque $\frac{\partial\tau}{\partial y_j}$, ce qui signifie qu'il est colinéaire au vecteur $\frac{\partial\tau}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau}{\partial y_{N-1}}$. La dernière composante de $\frac{\partial\tau}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau}{\partial y_{N-1}}$ étant

$$\frac{\partial\tau}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau}{\partial y_{N-1}}\cdot e_N = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\eta}{\partial y_{N-1}} & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

on en déduit

$$\frac{\partial\tau}{\partial y_1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial\tau}{\partial y_{N-1}} = (-\nabla\eta^T,1) \tag{2.2.6}$$

(ces fonctions étant définies λ_{N-1}-presque partout sur V', toutes ces égalités sont vraies λ_{N-1}-presque partout sur V').
On a donc, en utilisant (2.2.5) ($(\tau, V\cap\partial\Omega)$ est un système de paramétrisations de $V\cap\partial\Omega$, et $(\theta) = (\mathbf{1}_{V\cap\partial\Omega})$ est une partition mesurable de l'unité associée),

$$\int_{V\cap\partial\Omega} f\,d\sigma = \int_{V'} f(y,\eta(y))\sqrt{1+|\nabla\eta(y)|^2}\,dy \tag{2.2.7}$$

(avec un léger abus: il faudrait changer l'appellation de f lorsqu'elle est exprimée dans les coordonnées adaptées à V).

2.2.3 Transport des Espaces $L^p(\partial\Omega)$

Lemme 2.2.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{N-1},\mathbb{R}^N)$. On suppose qu'il existe $C>0$ tel que, pour tout $z\in\mathbb{R}^{N-1}$, $|Az|\ge C|z|$. Alors il existe $K>0$ ne dépendant que de N tel que $|Ae_1\wedge\cdots\wedge Ae_{N-1}|\ge KC^{N-1}$.*

Démonstration:
◇ Etape 1: preuve d'un résultat algébrique dont nous aurons besoin dans la suite.
Soit $M\in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$; on note $c(M)$ la co-matrice de M (i.e. la matrice des mineurs de M).
Le résultat que nous souhaitons prouver est:

$$|Mv_1\wedge\cdots\wedge Mv_{N-1}| \le |c(M)^T||v_1\wedge\cdots\wedge v_{N-1}| \tag{2.2.8}$$

pour tout $(v_1,\dots,v_{N-1})\in(\mathbb{R}^N)^{N-1}$ ($|\cdot|$ représente aussi la norme induite sur l'espace des matrices par la norme euclidienne canonique).
Notons $z = Mv_1\wedge\cdots\wedge Mv_{N-1}$; on a, par définition de la norme euclidienne et du produit vectoriel,

$$\begin{aligned} |z|^2 = Mv_1\wedge\cdots\wedge Mv_{N-1}\cdot z &= \det(Mv_1,\dots,Mv_{N-1},MM^{-1}z) \\ &= \det(M)\det(v_1,\dots,v_{N-1},M^{-1}z) \\ &= \det(M)v_1\wedge\cdots\wedge v_{N-1}\cdot M^{-1}z \\ &\le |\det(M)|\,|M^{-1}|\,|z|\,|v_1\wedge\cdots\wedge v_{N-1}| \\ &\le |c(M)^T|\,|z|\,|v_1\wedge\cdots\wedge v_{N-1}| \end{aligned}$$

car $\det(M)M^{-1} = c(M)^T$. En simplifiant par $|z|$, cela nous donne le résultat souhaité.
Notez que, par une technique d'approximation, on peut aussi montrer ce résultat lorsque M n'est pas inversible.

[2] Cette fonction n'est définie que sur V', mais comme il existe $a\in\mathbb{R}^{N-1}$, $\lambda>0$ et une norme sur $\mathbb{R}^N$ tels que $V' = a+\lambda B^{N-1}$, par la remarque 2.2.1, cela n'a pas d'importance.

$\diamondsuit$ Etape 2: démonstration du lemme.
Posons $B = \frac{1}{C}A$. On a, pour tout $z \in \mathbb{R}^{N-1}$, $|Bz| \geq |z|$; B est donc injective et $V = \mathrm{Im}(B)$ est de dimension $N-1$; soit $v \in V^\perp$ de norme euclidienne 1.
Soit $\widetilde{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ définie par $\widetilde{B}x = Bx' + x_N v$; comme $v \perp Bx'$ (car $Bx' \in V$), on a $|\widetilde{B}x|^2 = |Bx'|^2 + x_N^2 \geq |x'|^2 + x_N^2 = |x|^2$; $\widetilde{B}$ est donc inversible (car injective). De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $|\widetilde{B}^{-1}y| \leq |\widetilde{B}\widetilde{B}^{-1}y| = |y|$; la norme de $\widetilde{B}^{-1}$ est donc majorée par 1.
Par (2.2.8), on a

$$|\widetilde{B}^{-1}Be_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{B}^{-1}Be_{N-1}| \leq |c(\widetilde{B}^{-1})^T||Be_1 \wedge \cdots \wedge Be_{N-1}|.$$

Or, pour tout $i \in [1, N-1]$, puisque $\widetilde{B}e_i = Be_i$, on a $\widetilde{B}^{-1}Be_i = \widetilde{B}^{-1}\widetilde{B}e_i = e_i$, donc

$$|c(\widetilde{B}^{-1})^T||Be_1 \wedge \cdots \wedge Be_{N-1}| \geq |e_1 \wedge \cdots \wedge e_{N-1}| = |e_N| = 1.$$

Or la co-matrice est une fonction continue des coefficients et, comme la norme de $\widetilde{B}^{-1}$ est majorée par 1, il existe donc $C' < \infty$ ne dépendant que de N tel que $|c(\widetilde{B}^{-1})^T| \leq C'$; on a donc, en posant $K = 1/C'$ (qui ne dépend que de N), $K \leq |Be_1 \wedge \cdots \wedge Be_{N-1}|$, ce qui donne, en se souvenant que $B = \frac{1}{C}A$, le résultat du lemme. ■

Proposition 2.2.1 *Soit Ω un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Si $(\tau, O \cap \partial\Omega)$ est une paramétrisation locale de $\partial\Omega$, alors il existe $K > 0$ ne dépendant que de N tel que, pour λ_{N-1}-presque tout $y \in B^{N-1}$,*

$$\left| \frac{\partial \tau}{\partial y_1}(y) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau}{\partial y_{N-1}}(y) \right| \geq \frac{K}{\mathrm{Lip}(\tau^{-1})^{N-1}}.$$

Démonstration:
Comme $\tau^{-1} : O \cap \partial\Omega \to B^{N-1}$ est lipschitzienne, on a, pour tout $y \in B^{N-1}$, $z \in \mathbb{R}^{N-1}$ et t assez petit, $|\tau(y+tz) - \tau(y)| \geq \mathrm{Lip}(\tau^{-1})^{-1}|tz|$. Lorsque τ est dérivable en y, en divisant l'inégalité précédente par $|t|$ et en faisant $t \to 0$, on trouve donc $|\tau'(y)z| \geq \mathrm{Lip}(\tau^{-1})^{-1}|z|$.
Par le lemme 2.2.2, il existe donc $K > 0$ ne dépendant que de N tel que

$$|\tau'(y)e_1 \wedge \cdots \wedge \tau'(y)e_{N-1}| \geq K\mathrm{Lip}(\tau^{-1})^{-(N-1)}.$$

Ceci étant vérifié pour tout $y \in B^{N-1}$ point de dérivabilité de τ, cela conclut la démonstration de ce lemme. ■

Proposition 2.2.2 *Soit $p \in [1, \infty]$, Ω et Ω' deux ouverts faiblement lipschitziens de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : U \cap \partial\Omega' \to V \cap \partial\Omega$ un homéomorphisme bilipschitzien entre deux ouverts de leurs bords. Alors l'application*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L^p(V \cap \partial\Omega) & \longrightarrow & L^p(U \cap \partial\Omega') \\ f & \longrightarrow & f \circ \varphi \end{array} \right. \tag{2.2.9}$$

est bien définie et c'est un isomorphisme.

Remarque 2.2.2 *1) Cette proposition est essentielle car elle permet de montrer que des fonctions sont dans $L^p(\partial\Omega)$ en montrant que leurs transportées par des homéomorphismes bilipschitziens sont dans $L^p(B^{N-1})$, et d'estimer leurs normes dans $L^p(\partial\Omega)$ en fonction des normes de leurs transportées dans $L^p(B^{N-1})$ (cf, par exemple, la construction de la trace des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$).*

2) Nous verrons dans la démonstration qu'il existe C ne dépendant que de N tel que la norme de cette application soit majorée par $\sup_{i \in [1,k]}(C\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})\mathrm{Lip}(\tau_i)\mathrm{Lip}(\tau_i^{-1}))^{(N-1)/p}$, où $(\tau_i)_{i \in [1,k]}$ sont des applications d'un système de paramétrisations de $V \cap \partial\Omega$.

Démonstration:
Commençons par constater que la mesurabilité ne pose pas de problème: si $f : V \cap \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable alors, φ étant continue donc borélienne, $f \circ \varphi : U \cap \partial\Omega' \to \mathbb{R}$ est mesurable.

$\diamondsuit$ Etape 1: on se donne $h : V \cap \partial\Omega \to [0, \infty]$ mesurable.

Soit $(\tau_i, O_i \cap \partial\Omega)_{i\in[1,k]}$ un système de paramétrisations de $V \cap \partial\Omega$ et $(\theta_i)_{i\in[1,k]}$ une partition mesurable de l'unité associée à ce système.
$\varphi : U \cap \partial\Omega' \to V \cap \partial\Omega$ étant un homéomorphisme bilipschitzien, $(\varphi^{-1} \circ \tau_i, \varphi^{-1}(O_i \cap \partial\Omega))_{i\in[1,k]}$ est un système de paramétrisations de $U \cap \partial\Omega'$, et $(\theta_i \circ \varphi)_{i\in[1,k]}$ est une partition mesurable de l'unité associée à ce système. On a donc

$$\begin{aligned}
&\int_{U\cap\partial\Omega'} h \circ \varphi \, d\sigma \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{B^{N-1}} (\theta_i \circ \varphi \, h \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \tau_i)(y) \left| \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \tau_i)}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \tau_i)}{\partial y_{N-1}} \right| (y) \, dy. \qquad (2.2.10)
\end{aligned}$$

Soit $i \in [1, k]$. $\varphi^{-1} \circ \tau_i : B^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ étant lipschitzienne de constante de lipschitz $\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})\mathrm{Lip}(\tau_i)$, on a $|\frac{\partial(\varphi^{-1}\circ\tau_i)}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial(\varphi^{-1}\circ\tau_i)}{\partial y_{N-1}}| \in L^\infty(B^{N-1})$ et

$$\begin{aligned}
&\left\| \left| \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \tau_i)}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \tau_i)}{\partial y_{N-1}} \right| \right\|_{L^\infty(B^{N-1})} \\
&\leq C_1 \left\| \left| \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \tau_i)}{\partial y_1} \right| \right\|_{L^\infty(B^{N-1})} \times \cdots \times \left\| \left| \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \tau_i)}{\partial y_{N-1}} \right| \right\|_{L^\infty(B^{N-1})} \\
&\leq C_2 (\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})\mathrm{Lip}(\tau_i))^{N-1},
\end{aligned}$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de N (voir la remarque 1.1.1). Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\int_{B^{N-1}} (\theta_i \circ \varphi \, h \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \tau_i)(y) \left| \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \tau_i)}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \tau_i)}{\partial y_{N-1}} \right| (y) \, dy \\
&\qquad \leq C_2 (\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})\mathrm{Lip}(\tau_i))^{N-1} \int_{B^{N-1}} (\theta_i \, h) \circ \tau_i(y) \, dy.
\end{aligned}$$

Or, par la proposition 2.2.1, il existe $K > 0$ ne dépendant que de N tel que

$$\left| \frac{\partial \tau_i}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau_i}{\partial y_{N-1}} \right| \geq \frac{K}{\mathrm{Lip}(\tau_i^{-1})^{N-1}} \quad \lambda_{N-1}\text{-presque partout sur } B^{N-1},$$

et on en déduit donc que

$$\begin{aligned}
&\int_{B^{N-1}} (\theta_i \circ \varphi \, h \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \tau_i)(y) \left| \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \tau_i)}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \tau_i)}{\partial y_{N-1}} \right| (y) \, dy \\
&\leq \frac{C_2(\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})\mathrm{Lip}(\tau_i)\mathrm{Lip}(\tau_i^{-1}))^{N-1}}{K} \int_{B^{N-1}} (\theta_i \, h) \circ \tau_i(y) \left| \frac{\partial \tau_i}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau_i}{\partial y_{N-1}} \right| (y) \, dy \\
&\leq C_3 (\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})\mathrm{Lip}(\tau_i)\mathrm{Lip}(\tau_i^{-1}))^{N-1} \int_{B^{N-1}} (\theta_i \, h) \circ \tau_i(y) \left| \frac{\partial \tau_i}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau_i}{\partial y_{N-1}} \right| (y) \, dy, \quad (2.2.11)
\end{aligned}$$

où C_3 ne dépend que de N.
De (2.2.10) et (2.2.11), on tire

$$\begin{aligned}
&\int_{U\cap\partial\Omega'} h \circ \varphi \, d\sigma \\
&\leq C_3 \sup_{i\in[1,k]} \left((\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})\mathrm{Lip}(\tau_i)\mathrm{Lip}(\tau_i^{-1}))^{N-1} \right) \sum_{i=1}^{k} \int_{B^{N-1}} (\theta_i h) \circ \tau_i(y) \left| \frac{\partial \tau_i}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau_i}{\partial y_{N-1}} \right| (y) \, dy \\
&= C_3 \sup_{i\in[1,k]} \left((\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})\mathrm{Lip}(\tau_i)\mathrm{Lip}(\tau_i^{-1}))^{N-1} \right) \int_{V\cap\partial\Omega} h \, d\sigma. \qquad (2.2.12)
\end{aligned}$$

On déduit de ceci que, si $A \subset V \cap \partial\Omega$ vérifie $\sigma(A) = 0$, alors $\varphi^{-1}(A)$ est de mesure nulle dans $U \cap \partial\Omega'$ (il suffit d'appliquer (2.2.12) à $h = \mathbf{1}_A$).
Ainsi, si $f = \overline{f}$ σ-presque partout sur $V \cap \partial\Omega$, $f \circ \varphi = \overline{f} \circ \varphi$ sauf sur $\varphi^{-1}(\{f \neq \overline{f}\})$, de mesure nulle dans $U \cap \partial\Omega'$, donc σ-presque partout sur $U \cap \partial\Omega'$. Lorsque f n'est définie que σ-presque partout sur $V \cap \partial\Omega$, $f \circ \varphi$ est donc bien définie (ne dépend pas du représentant de f) σ-presque partout sur $U \cap \partial\Omega'$.

$\diamondsuit$ Etape 2: $p = \infty$, continuité de (2.2.9)
Si $f \in L^\infty(V \cap \partial\Omega)$, alors $|f| \leq ||f||_{L^\infty(V\cap\partial\Omega)}$ sauf sur A de mesure nulle dans $V \cap \partial\Omega$, donc $|f \circ \varphi| \leq ||f||_{L^\infty(V\cap\partial\Omega)}$ sauf sur $\varphi^{-1}(A)$ de mesure nulle dans $U \cap \partial\Omega'$.
$f \circ \varphi$ est donc bien dans $L^\infty(U \cap \partial\Omega')$ et on a $||f \circ \varphi||_{L^\infty(U\cap\partial\Omega')} \leq ||f||_{L^\infty(V\cap\partial\Omega)}$, ce qui signifie que (2.2.9) est bien définie et (étant trivialement linéaire) continue.

$\diamondsuit$ Etape 3: $p < \infty$, continuité de (2.2.9).
Si $f \in L^p(V \cap \partial\Omega)$, en appliquant (2.2.12) à $h = |f|^p$, on trouve

$$\int_{U\cap\partial\Omega'} |f \circ \varphi|^p \, d\sigma \leq C_3 \sup_{i\in[1,k]} \left((\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})\mathrm{Lip}(\tau_i)\mathrm{Lip}(\tau_i^{-1}))^{N-1} \right) \int_{V\cap\partial\Omega} |f|^p \, d\sigma,$$

ce qui signifie que (2.2.9) est bien définie et (étant trivialement linéaire) continue.

$\diamondsuit$ Etape 4: caractère isomorphique de (2.2.9).
En appliquant les résultats des étapes 1, 2 et 3 avec φ^{-1} (homéomorphisme bilipschitzien entre $V \cap \partial\Omega$ et $U \cap \partial\Omega'$) à la place de φ, on constate que $g \in L^p(U \cap \partial\Omega') \to g \circ \varphi^{-1} \in L^p(V \cap \partial\Omega)$ est bien définie et linéaire continue. Cette fonction est l'inverse de (2.2.9), et on en déduit donc le résultat de cette proposition. ∎

Chapitre 3

Opérateur de Prolongement, Injections

3.1 Prolongement

3.1.1 Cas du demi-espace

On note $\mathbb{R}^N_+ = \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0\}$. Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on note $\mathcal{C}^\infty_c(\overline{\Omega})$ l'espace des restrictions à Ω de fonctions de $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 3.1.1 *Si $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{C}^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.*

Remarque 3.1.1 *La suite que l'on va construire pour approcher u est indépendante de p, c'est-à-dire que l'on obtient le résultat suivant plus puissant: il existe $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ telle que, pour tout $p < +\infty$ pour lequel $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, on a $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.*

Démonstration:
Soit $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité dans $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ telle que $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset \mathbb{R}^N_- = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_N < 0\}$. Prenons $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ et notons $\widetilde{u}$ le prolongement de u à $\mathbb{R}^N$ par 0 hors de $\mathbb{R}^N_+$; $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Posons $u_n = \widetilde{u} * \rho_n$. On sait que $u_n \to \widetilde{u}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ donc, a fortiori, $u_n \to u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N_+)$.
Calculons maintenant la dérivée faible de u_n sur $\mathbb{R}^N_+$; pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N_+)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle D_i u_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N_+),\mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)} &= -\int_{\mathbb{R}^N_+} u_n(x)\partial_i\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} u_n(x)\partial_i\varphi(x)\,dx,
\end{aligned}$$

car $\varphi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^N\backslash\mathbb{R}^N_+$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\langle D_i u_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N_+),\mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)} &= -\langle \widetilde{u} * \rho_n, \partial_i\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)} \\
&= -\langle \widetilde{u}, \rho_n^\vee * \partial_i\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)} \\
&= -\langle \widetilde{u}, \partial_i(\rho_n^\vee * \varphi)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{u}(x)\partial_i(\rho_n^\vee * \varphi)(x)\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N_+} u(x)\partial_i(\rho_n^\vee * \varphi)(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Mais $\mathrm{supp}(\rho_n^\vee * \varphi) \subset \mathrm{supp}(\varphi) + \mathrm{supp}(\rho_n^\vee)$ est un compact de $\mathbb{R}^N_+$ ($\mathrm{supp}(\rho_n^\vee)$ est un compact de $\mathbb{R}^N_+$), donc $\rho_n^\vee * \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N_+)$ et

$$-\int_{\mathbb{R}^N_+} u(x)\partial_i(\rho_n^\vee * \varphi)(x)\,dx = -\langle u, \partial_i(\rho_n^\vee * \varphi)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N_+),\mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle D_i u, \rho_n^\vee * \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N_+),\mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} D_i u(x) \rho_n^\vee * \varphi(x)\, dx,
\end{aligned}
$$

par définition de $D_i u \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$. En notant $\widetilde{D_i u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ le prolongement de $D_i u$ à $\mathbb{R}^N$ par 0 hors de $\mathbb{R}^N_+$, on a

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+} D_i u(x) \rho_n^\vee * \varphi(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{D_i u}(x) \rho_n^\vee * \varphi(x)\, dx \\
&= \langle \widetilde{D_i u}, \rho_n^\vee * \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)} \\
&= \langle \rho_n * \widetilde{D_i u}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}
$$

(toutes ces étapes sont nécessaires car on ne peut jongler entre $\langle f * g, \varphi \rangle$ et $\langle f, g^\vee * \varphi \rangle$ que lorsque la dualité correspond à celle de l'espace $\mathbb{R}^N$ en entier, i.e $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)/\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$).
En recollant les égalités, valables pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N_+)$, on obtient $D_i u_n = \rho_n * \widetilde{D_i u}$ sur $\mathbb{R}^N_+$. Puisque $\widetilde{D_i u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on en déduit $D_i u_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$ (donc $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$) et $D_i u_n \to \widetilde{D_i u}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, donc en particulier $D_i u_n \to D_i u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N_+)$. On a ainsi approché u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ par une suite de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$; comme on sait déjà que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on en déduit que l'on peut approcher u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ par une suite de restrictions de fonctions dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, et le théorème est démontré. ■

Théorème 3.1.1 *Soit $p \in [1, \infty]$. L'application*

$$
P_0 \left\{ \begin{array}{rcl} W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) & \longrightarrow & W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u & \longrightarrow & P_0 u \textit{ défini } \lambda_N\textit{-presque partout par } P_0 u(x) = u(x', |x_N|) \end{array} \right.
$$

est bien définie et linéaire continue.

Remarque 3.1.1

1) *L'opérateur P_0 est un opérateur de prolongement: pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, $P_0 u = u$ sur $\mathbb{R}^N_+$.*
2) *P_0 est indépendant de p, et on peut trouver M indépendante de p telle que, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, $||P_0 u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \le M ||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}$.*

Démonstration:
Pour $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, $P_0 u$ est défini λ_N-presque partout sur $\mathbb{R}^N$ et est clairement dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ (on a $||P_0 u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 2^{1/p} ||u||_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}$).
Calculons maintenant, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, les dérivées au sens des distributions dans $\mathbb{R}^N$ de $P_0 u$.

◇ Etape 1: on suppose d'abord $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+})$.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

1) Si $i < N$, par Fubini, puisque $x_i \to u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{N-1}, |x_N|)$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} P_0 u(x) \partial_i \varphi(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x', |x_N|) \partial_i \varphi(x)\, dx_i \right) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_N \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_i u(x', |x_N|) \varphi(x)\, dx_i \right) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_N \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \partial_i u(x', |x_N|) \varphi(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

Ainsi, lorsque $i \in [1, N-1]$, $D_i(P_0 u) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $D_i(P_0 u)(x', x_N) = \partial_i u(x', |x_N|)$.

2) Si $i = N$, par Fubini, puisque $x_N \to u(x', x_N)$ et $x_N \to u(x', -x_N)$ sont dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} P_0 u(x) \partial_N \varphi(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x', |x_N|) \partial_N \varphi(x)\, dx_N \right) dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_0^{+\infty} u(x', x_N) \partial_N \varphi(x)\, dx_N \right) dx' \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{-\infty}^0 u(x', -x_N) \partial_N \varphi(x)\, dx_N \right) dx' \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_0^{+\infty} \partial_N u(x', x_N) \varphi(x)\, dx_N \right) dx' \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x', 0) \varphi(x', 0)\, dx' + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x', 0) \varphi(x', 0)\, dx' \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{-\infty}^0 -\partial_N u(x', -x_N) \varphi(x)\, dx_N \right) dx' \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x_N) \partial_N u(x', |x_N|) \varphi(x)\, dx_N \right) dx' \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{sgn}(x_N) \partial_N u(x', |x_N|) \varphi(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

On en déduit donc $D_N(P_0 u) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $D_N(P_0 u)(x', x_N) = \operatorname{sgn}(x_N) \partial_N u(x', |x_N|)$.

Ainsi, si $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$, $P_0 u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et

$$
\left\{ \begin{array}{ll} D_i(P_0 u)(x', x_N) = D_i u(x', |x_N|) & \text{si } i \in [1, N-1], \\ D_N(P_0 u)(x', x_N) = \operatorname{sgn}(x_N) D_N u(x', |x_N|). & \end{array} \right. \tag{3.1.1}
$$

$\diamondsuit$ Etape 2: lorsque $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$ avec $p < +\infty$, on sait qu'il existe $(u_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$, λ_N-presque partout sur $\mathbb{R}_+^N$ et telle que $\nabla u_n \to \nabla u$ λ_N-presque partout sur $\mathbb{R}_+^N$.
On a alors clairement $P_0 u_n \to P_0 u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, donc $\nabla(P_0 u_n) \to \nabla(P_0 u)$ dans $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N))^N$.
Grâce à (3.1.1) vérifié par chaque u_n, on voit que $\nabla(P_0 u_n)$ tend dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ (et donc dans $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N))^N$) vers la fonction $x \to (D_1 u(x', |x_N|), \ldots, D_{N-1} u(x', |x_N|), \operatorname{sgn}(x_N) D_N u(x', x_N))^T$.
En identifiant des limites dans $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N))^N$ de $\nabla(P_0 u_n)$, on en déduit que $P_0 u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et satisfait (3.1.1).

$\diamondsuit$ Etape 3: lorsque $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^N)$, on prend, pour tout $R > 0$, $\theta_R \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui vaut 1 sur un voisinage de $B(0, R)$ et on pose $u_R = \theta_R u$. u_R appartient à $W^{1,1}(\mathbb{R}_+^N)$ et $P_0 u_R$ vérifie donc les formules (3.1.1). Comme $u_R = u$ sur $B(0, R) \cap \mathbb{R}_+^N$ et $P_0 u_R = P_0 u$ sur $B(0, R)$, on constate alors que $P_0 u \in W^{1,\infty}(B(0, R))$ et vérifie (3.1.1) dans $B(0, R)$; ceci étant vérifié pour tout $R > 0$, on en déduit que $P_0 u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ et vérifie (3.1.1) sur $\mathbb{R}^N$.

$\diamondsuit$ Etape 4: conclusion.
Dans tous les cas, on a donc, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$, par (3.1.1),

$$
P_0 u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ et } ||P_0 u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = 2^{1/p} ||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)}.
$$

P_0 est donc bien définie et linéaire continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. ■

3.1.2 Cas d'un Ouvert Faiblement Lipschitzien

Théorème 3.1.2 *Soit $p \in [1, \infty]$. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ faiblement lipschitzien alors il existe un opérateur de prolongement $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire une application linéaire continue telle que, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $Pu = u$ sur Ω.*

Remarque 3.1.2 *(habituelle maintenant) L'opérateur P que l'on construit est en fait indépendant de p et sa norme $\mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$ peut aussi être majorée indépendamment de p.*

Démonstration:
Prenons un système de cartes $(O_i,\varphi_i)_{i\in[1,k]}$ de Ω (on a pris des cartes $\varphi_i : O_i \to B(0,1)$, où $B(0,1)$ est la boule unité pour la norme euclidienne) et $(\gamma_i)_{i\in[1,k]}$ une partition $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ de l'unité sur un voisinage de $\partial\Omega$ subordonnée au recouvrement $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^k O_i$ (on dira qu'une telle partition de l'unité est associée au système de cartes $(O_i,\varphi_i)_{i\in[1,k]}$).
Comme $\sum_{i=1}^k \gamma_i \equiv 1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^N$ qui contient $\partial\Omega$, la fonction

$$\gamma_0 = \left\{ \begin{array}{ll} 1-\sum_{i=1}^k \gamma_i & \text{sur } \Omega, \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N\backslash\Omega \end{array} \right.$$

est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$; en effet, γ_0 est $\mathcal{C}^\infty$ sur les ouverts Ω, $\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}$ et $\mathcal{O}$ (puisqu'elle est identiquement nulle sur $\mathcal{O}$) et $\mathbb{R}^N$ est la réunion de ces trois ouverts (puisque $\mathcal{O} \supset \partial\Omega$).

Comme toutes les dérivées des fonctions $(\gamma_i)_{i\in[1,k]} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ sont bornées sur $\mathbb{R}^N$, il en est de même pour celles de γ_0; ainsi, pour tout $i \in [0,k]$ et en notant $O_0 = \mathbb{R}^N$, l'application

$$M_i \left\{ \begin{array}{ccccc} W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{1,p}(O_i\cap\Omega) \\ u & \longrightarrow & \gamma_i u & \longrightarrow & (\gamma_i u)_{|O_i\cap\Omega} \end{array} \right.$$

est linéaire continue.

Par le théorème 1.4.1, pour tout $i \in [1,k]$, les applications

$$T_i \left\{ \begin{array}{ccc} W^{1,p}(O_i\cap\Omega) & \longrightarrow & W^{1,p}(B(0,1)\cap\mathbb{R}^N_+) \\ u & \longrightarrow & u\circ\varphi_i^{-1} \end{array} \right.$$

et

$$\widetilde{T}_i \left\{ \begin{array}{ccc} W^{1,p}(B(0,1)) & \longrightarrow & W^{1,p}(O_i) \\ u & \longrightarrow & u\circ\varphi_i \end{array} \right.$$

sont linéaires continues.

Pour U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^N$, on note $S(U,V)$ l'ensemble des fonctions $u \in W^{1,p}(U\cap V)$ telles qu'il existe $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant ∂V et vérifiant $u = 0$ sur $U\cap V\cap\mathcal{O}$; $S(U,V)$ est muni de la même norme que $W^{1,p}(U\cap V)$ (ce *n'est pas* un espace de Banach). Le lemme 1.4.2 nous dit que l'application $E_{U,V} : S(U,V) \to W^{1,p}(U)$ de prolongement par 0 sur $U\backslash(U\cap V)$ est linéaire continue.

On note $R : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to W^{1,p}(B(0,1))$ la restriction ($Ru = u_{|B(0,1)}$); c'est une application linéaire continue.

Nous définissons l'opérateur $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ par:

$$Pu = E_{\mathbb{R}^N,\Omega}\circ M_0 + \sum_{i=1}^k E_{\mathbb{R}^N,O_i}\circ\widetilde{T}_i\circ R\circ P_0\circ E_{\mathbb{R}^N_+,B(0,1)}\circ T_i\circ M_i$$

(où $P_0 : W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ est l'opérateur de prolongement défini dans le théorème 3.1.1).

$\diamondsuit$ Etape 1: P est bien définie et linéaire continue.
$M_0 : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$ est linéaire continue, et à valeurs dans $S(\mathbb{R}^N,\Omega)$: en effet, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $M_0u = \gamma_0 u = 0$ sur $\mathcal{O} \supset \partial\Omega$. Ainsi, $E_{\mathbb{R}^N,\Omega}\circ M_0 : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ est bien définie et linéaire continue.
Soit $i \in [1,k]$; comme $M_i : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(O_i\cap\Omega)$ et $T_i : W^{1,p}(O_i\cap\Omega) \to W^{1,p}(B(0,1)\cap\mathbb{R}^N_+)$ sont linéaires continues, $T_i\circ M_i$ est bien définie et linéaire continue. Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a $T_i\circ M_i(u) = (\gamma_i u)_{|O_i\cap\Omega}\circ\varphi_i^{-1} = 0$ sur $B(0,1)\cap\mathbb{R}^N_+$ hors de $\varphi_i(\mathrm{supp}(\gamma_i))$; $\mathrm{supp}(\gamma_i)$ étant un compact de O_i, $\varphi_i(\mathrm{supp}(\gamma_i))$ est un compact de $B(0,1)$, donc $\mathbb{R}^N\backslash\varphi_i(\mathrm{supp}(\gamma_i))$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ qui contient $\partial B(0,1)$ et tel que $T_i\circ M_i(u) = 0$ sur $B(0,1)\cap\mathbb{R}^N_+\cap(\mathbb{R}^N\backslash\varphi_i(\mathrm{supp}(\gamma_i)))$. $T_i\circ M_i$ est donc à valeurs dans $S(\mathbb{R}^N_+,B(0,1))$ et $E_{\mathbb{R}^N_+,B(0,1)}\circ T_i\circ M_i : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ est bien définie et linéaire continue.
Puisque $P_0 : W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $R : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to W^{1,p}(B(0,1))$ et $\widetilde{T}_i : W^{1,p}(B(0,1)) \to W^{1,p}(O_i)$

sont linéaires continues, $\widetilde{T}_i \circ R_i \circ P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(O_i)$ est bien définie et linéaire continue.
On a vu que, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $T_i \circ M_i(u) = 0$ sur $B(0,1) \cap \mathbb{R}^N_+$ hors de $\varphi_i(\mathrm{supp}(\gamma_i))$; on en déduit que $E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u) = 0$ sur $\mathbb{R}^N_+$ hors de $\varphi_i(\mathrm{supp}(\gamma_i))$ et, en notant r la réflexion par rapport à x_N ($r(x) = (x', -x_N)$) que $P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u) = 0$ sur $\mathbb{R}^N$ en dehors de $\varphi_i(\mathrm{supp}(\gamma_i)) \cup r(\varphi_i(\mathrm{supp}(\gamma_i))$ ([1]). $R \circ P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u)$ est donc nulle sur $B(0,1)$ en dehors de $K_i = \varphi_i(\mathrm{supp}(\gamma_i)) \cup r(\varphi_i(\mathrm{supp}(\gamma_i))$; comme $\varphi_i(\mathrm{supp}(\gamma_i))$ est un compact de $B(0,1)$ et r laisse $B(0,1)$ globalement invariante, K_i est un compact de $B(0,1)$. On a finalement $\widetilde{T}_i \circ R \circ P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u) = 0$ sur O_i en dehors de $\varphi_i^{-1}(K_i)$, compact de O_i; $\mathbb{R}^N \backslash \varphi_i^{-1}(K_i)$ est donc un ouvert de $\mathbb{R}^N$ qui contient ∂O_i et tel que $\widetilde{T}_i \circ R \circ P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u) = 0$ sur $O_i \cap (\mathbb{R}^N \backslash \varphi_i^{-1}(K_i))$; $\widetilde{T}_i \circ R \circ P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i$ est donc à valeurs dans $S(\mathbb{R}^N, O_i)$ et $E_{\mathbb{R}^N, O_i} \circ \widetilde{T}_i \circ R \circ P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ est bien définie et linéaire continue.

$\diamondsuit$ Etape 2: P est un opérateur de prolongement.
Sur Ω, on a $E_{\mathbb{R}^N, \Omega} \circ M_0(u) = M_0(u) = \gamma_0 u$.
Soit $i \in [1,k]$. Par définition de $E_{\mathbb{R}^N, O_i}$, hors de O_i, on a $E_{\mathbb{R}^N, O_i} \circ \widetilde{T}_i \circ R \circ P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u) = 0$; sur O_i, on trouve

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{R}^N, O_i} \circ \widetilde{T}_i \circ R \circ P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u) &= \widetilde{T}_i \circ R \circ P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u) \\ &= (R \circ P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u)) \circ \varphi_i \\ &= (P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u)) \circ \varphi_i \end{aligned}$$

(car R est la restriction à $B(0,1)$ et φ_i est à valeurs dans $B(0,1)$); or $\varphi_i(O_i \cap \Omega) = B(0,1) \cap \mathbb{R}^N_+$, donc, sur $O_i \cap \Omega$, $(P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u)) \circ \varphi_i = (T_i \circ M_i(u)) \circ \varphi_i = (M_i(u) \circ \varphi_i^{-1}) \circ \varphi_i = (\gamma_i u)_{|O_i \cap \Omega}$.
Ainsi, $E_{\mathbb{R}^N, O_i} \circ \widetilde{T}_i \circ R \circ P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u)$ étant nulle, tout comme $\gamma_i u$, sur $\Omega \backslash O_i$ et égale à $\gamma_i u$ sur $O_i \cap \Omega$, on a $E_{\mathbb{R}^N, O_i} \circ \widetilde{T}_i \circ R \circ P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u) = \gamma_i u$ sur Ω.
On en déduit que, sur Ω, $Pu = \sum_{i=0}^k \gamma_i u = (\sum_{i=0}^k \gamma_i) u = u$, ce qui conclut la preuve de ce théorème. ■

Théorème 3.1.3 *Si Ω est un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty[$, alors $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

Remarque 3.1.3 *Ici aussi la suite qui approche u est indépendante de p.*

DÉMONSTRATION: Soit $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ un opérateur de prolongement donné par le théorème 3.1.2; pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on prend $u_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui converge vers Pu dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. A fortiori, $u_{n\,|\Omega} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ converge vers $Pu_{|\Omega} = u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. ■

Proposition 3.1.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(p,q,r) \in [1,\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. L'application*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} W^{1,p}(U) \times W^{1,q}(U) & \longrightarrow & W^{1,r}(U) \\ (u,v) & \longrightarrow & uv \end{array} \right. \tag{3.1.1}$$

est bien définie, bilinéaire continue et on a, pour tout $(u,v) \in W^{1,p}(U) \times W^{1,q}(U)$ et tout $i \in [1,N]$, $D_i(uv) = D_i u\, v + u\, D_i v$.

DÉMONSTRATION:
On sait que, lorsque $(u,v) \in W^{1,p}(U) \times W^{1,q}(U) \subset L^p(U) \times L^q(U)$, on a $uv \in L^r(U)$.

$\diamondsuit$ Etape 1: preuve de $D_i(uv) = D_i u\, v + u\, D_i v$.

[1]Quitte à définir $P_0 \circ E_{\mathbb{R}^N_+, B(0,1)} \circ T_i \circ M_i(u)$ par 0 sur $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ — cette fonction n'ayant pas été définie sur cet ensemble de mesure nulle.

Cette formule étant locale, il suffit de la prouver sur toute boule B bornée incluse dans U (i.e. dans $\mathcal{D}'(B)$).

Supposons dans un premier temps que $p < \infty$ (ou $q < \infty$, quitte à inverser les rôles de p et q). Comme B est convexe, c'est un ouvert fortement lipschitzien, donc faiblement lipschitzien. Puisque $u \in W^{1,p}(B)$ et $p \in [1, \infty[$, il existe $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{B})$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(B)$.
Comme $u_n \in \mathcal{C}^\infty(B)$, on sait que $D_i(u_n v) = D_i u_n\, v + u_n\, D_i v$ (dérivée au sens des distributions d'une distribution multipliée par une fonction $\mathcal{C}^\infty$). Or $u_n \to u$ dans $L^p(B)$ et $v \in L^q(B)$, donc $u_n v \to uv$ dans $L^r(B)$ (donc dans $\mathcal{D}'(B)$); ainsi, $D_i(u_n v) \to D_i(uv)$ dans $\mathcal{D}'(B)$.
De plus, puisque $(D_i u_n, u_n) \to (D_i u, u)$ dans $(L^p(B))^2$ et $(v, D_i v) \in (L^q(B))^2$, on a $D_i(u_n v) = D_i u_n\, v + u_n\, D_i v \to D_i u\, v + u\, D_i v$ dans $L^r(B)$, donc dans $\mathcal{D}'(B)$.
En égalant les limites de $D_i(u_n v)$ dans $\mathcal{D}'(B)$, on trouve $D_i(uv) = D_i u\, v + u\, D_i v$ dans $\mathcal{D}'(B)$.

Si $p = q = \infty$, B étant bornée, $(u, v) \in W^{1,\infty}(B) \subset W^{1,2}(B)$. Ainsi, en appliquant le résultat précédent à $p = q = 2$ et $r = 1$, on trouve $D_i(uv) = D_i u\, v + u\, D_i v$ dans $\mathcal{D}'(B)$.

$\diamondsuit$ Etape 2: conclusion.
La formule pour $D_i(uv)$ montre que $uv \in W^{1,r}(\Omega)$ et que l'application (3.1.1) est donc bien définie; elle est trivialement bilinéaire et, pour montrer sa continuité, il suffit donc de montrer qu'il existe C tel que, pour tout $(u, v) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$, on a $||uv||_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}||v||_{W^{1,q}(\Omega)}$. Or, par la formule déjà établie, on a

$$\begin{aligned}
||uv||_{W^{1,r}(\Omega)} &= ||uv||_{L^r(\Omega)} + \sum_{i=1}^N ||D_i u\, v + u\, D_i v||_{L^r(\Omega)} \\
&\leq ||u||_{L^p(\Omega)}||v||_{L^q(\Omega)} + \sum_{i=1}^N ||D_i u||_{L^p(\Omega)}||v||_{L^q(\Omega)} + ||u||_{L^p(\Omega)}||D_i v||_{L^q(\Omega)} \\
&\leq (1 + 2N)||u||_{W^{1,p}(\Omega)}||v||_{W^{1,q}(\Omega)},
\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. ■

3.2 Injections de Sobolev

3.2.1 Cas de l'Espace Entier

Première Injection: $p < N$

Lemme 3.2.1 *Si $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$, alors la fonction*

$$v \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{N-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x' & \longrightarrow & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |u(x', x_N)|\, dx_N \end{array} \right.$$

est dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^{N-1})$ et on a

$$\nabla_{x'} v(x') = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(u(x', x_N)) \nabla_{x'} u(x', x_N)\, dx_N.$$

Démonstration:
v est continue à support compact dans $\mathbb{R}^{N-1}$ (le support de v est contenu dans la projection du support de u sur le premier facteur de $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$). Pour prouver que $v \in W^{1,1}(\mathbb{R}^{N-1})$, il suffit donc de montrer la formule pour $\nabla_{x'} v$ (car cette formule définit une fonction de $L^1(\mathbb{R}^{N-1})$).
La projection de $\operatorname{supp}(u)$ sur le deuxième facteur de $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ étant compacte, on peut prendre $\gamma \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur cette projection; on remarque que $v(x') = \int_{\mathbb{R}} \gamma(x_N)|u(x', x_N)|\, dx_N$. Pour

calculer la dérivée de v au sens des distributions dans la direction $i \in [1, N-1]$, prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$ et écrivons, grâce au théorème de Fubini et en notant $\psi(x', x_N) = \gamma(x_N)\varphi(x')$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-1}} v(x')\partial_i\varphi(x')\, dx' &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x', x_N)|\partial_i\psi(x', x_N)\, dx' dx_N \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{sgn}(u(x', x_N))D_i u(x', x_N)\gamma(x_N)\varphi(x')\, dx' dx_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \gamma(x_N)\mathrm{sgn}(u(x', x_N))D_i u(x', x_N)\, dx_N\right) \varphi(x')\, dx'
\end{aligned}$$

(on a utilisé le lemme de Stampacchia pour voir que $D_i(|u|) = \mathrm{sgn}(u)D_i u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$).
On en déduit que

$$D_i v = \int_{\mathbb{R}} \gamma(x_N)\mathrm{sgn}(u(\cdot, x_N))D_i u(\cdot, x_N)\, dx_N = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{sgn}(u(\cdot, x_N))D_i u(\cdot, x_N)\, dx_N \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{N-1})$$

(car $\mathrm{supp}(D_i u) \subset \mathrm{supp}(u)$ donc γ est aussi égal à 1 sur la projection de $\mathrm{supp}(D_i u)$ sur le deuxième facteur de $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$), c'est-à-dire ce que l'on voulait. ■

Théorème 3.2.1 *Si $p \in [1, N[$ et $p^* = Np/(N-p)$ alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continuement dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Plus précisément: pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on a*

$$||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{(N-1)p}{N-p} ||\, |\nabla u|\, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Démonstration:
◇ Etape 1: Réduction au cas régulier.
Supposons le résultat prouvé pour les fonctions de $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$ et prenons $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Il existe $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui converge dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et λ_N-presque partout vers u; on trouve donc, grâce au lemme de Fatou,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*}\, dx &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^{p^*}\, dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{(N-1)p}{N-p}\right)^{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x)|^p\, dx \\
&\leq \left(\frac{(N-1)p}{N-p}\right)^{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p\, dx.
\end{aligned}$$

Le résultat général se déduit donc du résultat pour les fonctions de $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$; nous supposons, à partir de maintenant, $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$.

◇ Etape 2: Pour $p = 1$.
La démonstration se fait par récurrence sur N.
◇◇$N = 1$: C'est un cas un peu particulier (puisqu'alors $N = p$). On écrit simplement

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} u'(s)\, ds,$$

pour constater que $||u||_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq ||u'||_{L^1(\mathbb{R})}$.
◇◇$N = 2$: On a, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2)\, dt \qquad \text{et} \qquad u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} \partial_2 u(x_1, t)\, dt.$$

On en déduit

$$|u(x_1, x_2)|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(t, x_2)|\, dt\right) \times \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x_1, t)|\, dt\right)$$

et, après intégration sur $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |u(x_1,x_2)|^2\,dx_1\,dx_2 &\le \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(t,x_2)|\,dt\,dx_2\right)\times\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x_1,t)|\,dt\,dx_1\right)\\ &\le \|\,|\nabla u|\,\|^2_{L^1(\mathbb{R}^2)},\end{aligned}$$

c'est-à-dire le résultat dans le cas $N=2$.
$\diamondsuit\diamondsuit N\ge 3$: Le cas $N=1$, appliqué à $u(x',\cdot)\in\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$, nous permet de voir que, pour tout $(x',x_N)\in\mathbb{R}^N$, $|u(x',x_N)|\le\int_{\mathbb{R}}|\partial_N u(x',t)|\,dt$; on en déduit, en écrivant $|u|^{N/(N-1)}=|u|^{1/(N-1)}|u|$,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u(x',x_N)|^{N/(N-1)}\,dx'\,dx_N\le\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}|\partial_N u(x',t)|\,dt\right)^{1/(N-1)}\left(\int_{\mathbb{R}}|u(x',x_N)|\,dx_N\right)\,dx',$$

soit, en utilisant l'inégalité de Hölder entre $N-1$ et $(N-1)'=\frac{N-1}{N-2}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|u(x',x_N)|^{N/(N-1)}\,dx'\,dx_N &\le \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_N u(x',t)|\,dt\,dx'\right)^{\frac{1}{N-1}}\\ &\quad\times\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}|u(x',x_N)|\,dx_N\right)^{\frac{N-1}{N-2}}dx'\right)^{\frac{N-2}{N-1}}.\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

Posons $v(x')=\int_{\mathbb{R}}|u(x',x_N)|\,dx_N$; par le lemme 3.2.1, on sait que $v\in W^{1,1}(\mathbb{R}^{N-1})$. En utilisant l'hypothèse de récurrence au rang $N-1$ et la formule pour $\nabla_{x'}v$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}|u(x',x_N)|\,dx_N\right)^{\frac{N-1}{N-2}}dx' &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}}|v(x')|^{\frac{N-1}{N-2}}\,dx'\\ &\le\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}}|\nabla_{x'}u(x',x_N)|\,dx_N\,dx'\right)^{\frac{N-1}{N-2}}.\end{aligned}$$

En injectant ceci dans (3.2.1), on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|u(x',x_N)|^{N/(N-1)}\,dx'\,dx_N &\le\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}}|\partial_N u(x',t)|\,dt\,dx'\right)^{\frac{1}{N-1}}\\ &\quad\times\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}}|\nabla_{x'}u(x',x_N)|\,dx_N\,dx'\right)\\ &\le\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x',x_N)|\,dx_N\,dx'\right)^{\frac{1}{N-1}+1},\end{aligned}$$

i.e. $\|u\|_{L^{N/(N-1)}(\mathbb{R}^N)}\le\|\,|\nabla u|\,\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$.

$\diamondsuit$ Etape 3: Pour $N>p>1$.
Posons $s=(p(N-1))/(N-p)\in]1,\infty[$; on remarque alors que $|u|^{s-1}u\in\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^N)$ dès que $u\in\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^N)$, et que l'on a $\partial_i(|u|^{s-1}u)=s|u|^{s-1}\mathrm{sgn}(u)\partial_i u$; on peut donc appliquer le résultat de la deuxième étape à cette fonction $|u|^{s-1}u$ pour obtenir

$$\|u\|^s_{L^{sN/(N-1)}(\mathbb{R}^N)}=\|\,|u|^{s-1}u\,\|_{L^{N/(N-1)}(\mathbb{R}^N)}\le s\|\,|u|^{s-1}\mathrm{sgn}(u)|\nabla u|\,\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Puis, grâce à Hölder appliqué entre p et p' au second membre de cette inégalité,

$$\|u\|^s_{L^{sN/(N-1)}(\mathbb{R}^N)}\le s\|\,|u|^{s-1}\,\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}\|\,|\nabla u|\,\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

On remarque maintenant que, par le choix de s, $sN/(N-1)=(s-1)p'=p^*$; on peut alors écrire $\|\,|u|^{s-1}\,\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}=\|u\|^{s-1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}$, ce qui donne $\|u\|^s_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\le s\|u\|^{s-1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\|\,|\nabla u|\,\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$, soit

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\le s\|\,|\nabla u|\,\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

et conclut cette démonstration. ■

Deuxième Injection: $p = N$

Lemme 3.2.2 *Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réel positifs et $\alpha \geq 1$, alors $\sum_{n\geq 1} a_n^\alpha \leq \left(\sum_{n\geq 1} a_n\right)^\alpha$.*

DÉMONSTRATION:
Si $\sum_{n\geq 1} a_n = 0$, alors chaque a_n est nul et le résultat est trivial. Sinon, on pose $b_n = a_n/(\sum_{i\geq 1} a_i)$, et l'on note que $b_n \in [0,1]$. Comme $\alpha \geq 1$, $b_n^\alpha \leq b_n$ et, en sommant,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a_n^\alpha}{\left(\sum_{i\geq 1} a_i\right)^\alpha}\right) &= \sum_{n\geq 1} b_n^\alpha \\
&\leq \sum_{n\geq 1} b_n \\
&\leq \frac{\left(\sum_{n\geq 1} a_n\right)}{\left(\sum_{i\geq 1} a_i\right)} = 1,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire l'inégalité souhaitée. ■

Théorème 3.2.2 *Si $p = N$, alors pour tout $q \in [N, +\infty[$, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continuement dans $L^q(\mathbb{R}^N)$.*

Remarque 3.2.1

1) *Nous verrons que, dans le cas $N = 1$, $W^{1,1}(\mathbb{R})$ s'injecte aussi continuement dans $L^\infty(\mathbb{R})$.*

2) *La preuve montre que la constante d'injection de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ est un $\mathcal{O}(q)$.*

DÉMONSTRATION:
On suppose, pour commencer, que $N \geq 2$. On remarque que l'on peut partitionner $\mathbb{R}^N$ en pavés C_n translatés de $[0,1[^N$: $\mathbb{R}^N = \coprod_{\alpha\in\mathbb{Z}^N}(\prod_{i=1}^N [\alpha_i, \alpha_i + 1[) = \coprod_{n\in\mathbb{N}} C_n$ (puisque $\mathbb{Z}^N$ est dénombrable); on note D_n l'intérieur de C_n. Prenons $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
♢ Etape 1: traitement du pavé de référence.
Soit $r \in [1, N[$ et $f \in W^{1,p}(]0,1[^N) \hookrightarrow W^{1,r}(]0,1[^N)$. Comme $]0,1[^N$ est convexe, il est fortement (donc faiblement) lipschitzien; soit $P : W^{1,r}(]0,1[^N) \to W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ un opérateur de prolongement. Par la première injection de Sobolev, $Pf \in L^{r^*}(\mathbb{R}^N)$ et

$$\begin{aligned}
||f||_{L^{r^*}(]0,1[^N)} &\leq ||Pf||_{L^{r^*}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \frac{(N-1)r}{N-r}||Pf||_{W^{1,r}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \frac{N-1}{N} r^* ||P||_{\mathcal{L}(W^{1,r}(]0,1[^N), W^{1,r}(\mathbb{R}^N))}||f||_{W^{1,r}(]0,1[^N)} \\
&\leq Cr^*||f||_{W^{1,r}(]0,1[^N)},
\end{aligned}$$

où C ne dépend que de N (par la remarque 3.1.2, $||P||_{\mathcal{L}(W^{1,r}(]0,1[^N), W^{1,r}(\mathbb{R}^N))}$ peut être majorée indépendamment de r). Mais, puisque la mesure de $]0,1[^N$ est 1, $||f||_{W^{1,r}(]0,1[^N)} \leq ||f||_{W^{1,p}(]0,1[^N)}$, et on obtient donc $||f||_{L^{r^*}(]0,1[^N)} \leq Cr^*||f||_{W^{1,p}(]0,1[^N)}$.
Or, lorsque r décrit $[1, N[$, r^* décrit $[N/(N-1), +\infty[\supset [N, +\infty[$ (car $N \geq 2$); ainsi, pour tout $q \in [N, +\infty[$ et tout $f \in W^{1,p}(]0,1[^N)$, on a

$$||f||_{L^q([0,1[^N)} \leq Cq||f||_{W^{1,p}(]0,1[^N)} \qquad (3.2.2)$$

(la mesure de $[0,1[^N \backslash]0,1[^N$ est nulle).

♢ Etape 2: on recolle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in \mathbb{Z}^N$ tel que $C_n - z_n = [0,1[^N$. Comme $u \in W^{1,p}(D_n)$, le théorème 1.4.1 nous permet de voir que $u_n = u(\cdot + z_n) \in W^{1,p}(]0,1[^N)$ et que $\nabla u_n = \nabla u(\cdot + z_n)$.

Soit $q \geq p = N$. (3.2.2) appliquée à u_n donne $||u_n||_{L^q([0,1[^N)} \leq Cq||u_n||_{W^{1,p}(]0,1[^N)}$, soit $||u||_{L^q(C_n)} \leq Cq||u||_{W^{1,p}(D_n)}$. Or, puisque $(C_n)_{n\in N}$ est une partition de $\mathbb{R}^N$, $||u||^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} ||u||^q_{L^q(C_n)}$ et on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
||u||^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} C^q q^q ||u||^q_{W^{1,p}(D_n)} \\
&\leq C^q q^q \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(||u||_{L^p(D_n)} + \sum_{i=1}^N ||D_i u||_{L^p(D_n)} \right)^q \\
&\leq C^q q^q \sum_{n\in\mathbb{N}} \left((1+N) \sup(||u||_{L^p(D_n)}, ||D_1 u||_{L^p(D_n)}, \ldots, ||D_N u||_{L^p(D_n)}) \right)^q \\
&\leq C^q q^q (1+N)^q \sum_{n\in\mathbb{N}} \sup(||u||^q_{L^p(D_n)}, ||D_1 u||^q_{L^p(D_n)}, \ldots, ||D_N u||^q_{L^p(D_n)}) \\
&\leq C^q q^q (1+N)^q \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(||u||^q_{L^p(D_n)} + \sum_{i=1}^N ||D_1 u||^q_{L^p(D_n)} \right) \\
&\leq C^q q^q (1+N)^q \sum_{n\in\mathbb{N}} ||u||^q_{L^p(D_n)} + C^q q^q (1+N)^q \sum_{i=1}^N \sum_{n\in\mathbb{N}} ||D_i u||^q_{L^p(D_n)} \\
&\leq C^q q^q (1+N)^q \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(||u||^p_{L^p(D_n)} \right)^{q/p} + C^q q^q (1+N)^q \sum_{i=1}^N \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(||D_i u||^p_{L^p(D_n)} \right)^{q/p}.
\end{aligned}$$

Comme $q \geq p$, on peut utiliser le lemme 3.2.2 avec $a_n = ||u||^p_{L^p(D_n)}$ ou $a_n = ||D_i u||^p_{L^p(D_n)}$ et $\alpha = q/p \geq 1$; on trouve alors

$$\begin{aligned}
||u||^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq C^q q^q (1+N)^q \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} ||u||^p_{L^p(D_n)} \right)^{q/p} + C^q q^q (1+N)^q \sum_{i=1}^N \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} ||D_i u||^p_{L^p(D_n)} \right)^{q/p} \\
&\leq C^q q^q (1+N)^q \left(||u||^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right)^{q/p} + C^q q^q (1+N)^q \sum_{i=1}^N \left(||D_i u||^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right)^{q/p} \\
&\leq C^q q^q (1+N)^{q+1} ||u||^q_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

ce qui conclut le théorème dans le cas $N \geq 2$.

$\diamondsuit$ Etape 3: cas $N = 1$.
On sait que si $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, alors $u(x) = \int_{-\infty}^x u'(s)\,ds$; on a alors $|u(x)| \leq ||u'||_{L^1(\mathbb{R})}$, ce qui prouve que $W^{1,1}(\mathbb{R})$ s'injecte continuement dans $L^\infty(\mathbb{R})$; comme $W^{1,1}(\mathbb{R})$ s'injecte continuement dans $L^1(\mathbb{R})$, et comme $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ s'injecte continuement dans $L^q(\mathbb{R})$ pour tout $q \in [1,\infty]$, on en déduit que $W^{1,1}(\mathbb{R})$ s'injecte continuement dans $L^q(\mathbb{R})$ pour tout $q \in [1,\infty]$. ■

Troisième Injection: $p > N$

Théorème 3.2.3 *Si $p \in]N, +\infty[$ alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continuement dans $\mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$.*

Remarque 3.2.1 *Pour $\alpha \in]0,1]$ et A partie de $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{C}^{0,\alpha}(A)$ est l'espace des fonctions α-höldériennes bornées sur A, muni de la norme*

$$||u||_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(A)} = \sup_A |u| + \sup_{(x,y)\in A^2,\, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Démonstration:
$\diamondsuit$ Etape 1: $u \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^N)$.
Soit B_r une boule euclidienne de $\mathbb{R}^N$ de rayon r (le diamètre de $\overline{B_r}$ est donc $2r$). En notant $V = \lambda_N(B(0,1))$ le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^N$, la mesure de B_r est $\lambda_N(B_r) = Vr^N$.

On écrit, pour tout $a \in \overline{B_r}$ et tout $z \in B_r$,

$$u(z) - u(a) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(u(z + t(a - z))\, dt = (a - z) \cdot \int_0^1 \nabla u(z + t(a - z))\, dt.$$

Or $|a - z| \leq 2r$ et on obtient donc, après intégration sur $z \in B_r$ et division par la mesure de B_r, en notant $\overline{u}^{B_r} = (Vr^N)^{-1} \int_{B_r} u(z)\, dz$,

$$|\overline{u}^{B_r} - u(a)| \leq 2r(Vr^N)^{-1} \int_0^1 \int_{B_r} |\nabla u(z + t(a - z))|\, dz\, dt. \tag{3.2.3}$$

Par le changement de variable $\xi = z + t(a - z) = ta + (1 - t)z$ (pour $t \in [0, 1[$) et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |\nabla u(z + t(a - z))|\, dz &= \int_{ta+(1-t)B_r} (1 - t)^{-N} |\nabla u(\xi)|\, d\xi \\
&\leq (1 - t)^{-N} \left(\int_{ta+(1-t)B_r} |\nabla u(\xi)|^p \right)^{1/p} \lambda_N(ta + (1 - t)B_r)^{1/p'} \\
&\leq (1 - t)^{-N} \left((1 - t)^N V r^N \right)^{1/p'} ||\, |\nabla u|\, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Utilisé dans (3.2.3), cela donne

$$\begin{aligned}
|\overline{u}^{B_r} - u(a)| &\leq 2V^{-1+1/p'} r^{1-N+N/p'} ||\, |\nabla u|\, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \int_0^1 (1 - t)^{N/p'-N}\, dt \\
&\leq \frac{2V^{-1/p}}{1 - N/p} ||\, |\nabla u|\, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)} r^{1-N/p}. \qquad (3.2.4)
\end{aligned}$$

Soit maintenant $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$; notons B_r la boule de rayon $r = |x - y|/2$ dont l'adhérence contient x et y. Grâce à (3.2.4) appliqué à $a = x$ et à $a = y$, on obtient

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - \overline{u}^{B_r}| + |u(y) - \overline{u}^{B_r}| \\
&\leq \frac{4V^{-1/p}}{1 - N/p} ||\, |\nabla u|\, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \left(\frac{|x - y|}{2} \right)^{1-N/p}. \qquad (3.2.5)
\end{aligned}$$

♢ Etape 2: Toujours pour $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$, on majore $||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.
Pour cela, on prend $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $|u(x_0)| = ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$; par (3.2.5), on voit que, lorsque $y \in B(x_0, 1)$,

$$|u(y)| \geq |u(x_0)| - \frac{4V^{-1/p}}{2^{1-N/p}(1 - N/p)} ||\, |\nabla u|\, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)} = ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} - \frac{4V^{-1/p}}{2^{1-N/p}(1 - N/p)} ||\, |\nabla u|\, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

soit, en intégrant sur $B(x_0, 1)$ (rappelons que V est la mesure de $B(0, 1)$, donc aussi celle de $B(x_0, 1)$),

$$\int_{B(x_0,1)} |u(y)|\, dy \geq V||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} - V \times \frac{4V^{-1/p}}{2^{1-N/p}(1 - N/p)} ||\, |\nabla u|\, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

d'où

$$\begin{aligned}
||u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\geq ||u||_{L^p(B(x_0,1))} \\
&\geq \frac{1}{V^{1/p'}} ||u||_{L^1(B(x_0,1))} \\
&\geq V^{1-1/p'} ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} - \frac{4}{2^{1-N/p}(1 - N/p)} ||\, |\nabla u|\, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq V^{-1/p} ||u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \frac{4V^{-1/p}}{2^{1-N/p}(1 - N/p)} ||\, |\nabla u|\, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.2.6}$$

(3.2.5) et (3.2.6) nous donnent alors, pour tout $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$,

$$||u||_{\mathcal{C}^{0,1-N/p}(\mathbb{R}^N)} \leq V^{-1/p}||u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \frac{8V^{-1/p}}{2^{1-N/p}(1-N/p)}||\,|\nabla u|\,||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq K||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}, \qquad (3.2.7)$$

où K ne dépend que de N et p.

♢ Etape 3: On conclut.
Prenons $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et λ_N-presque partout. Comme, pour tous $(n,m) \in \mathbb{N}^*$, $u_n - u_m \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$, on a, par (3.2.7),

$$||u_n - u_m||_{\mathcal{C}^{0,1-N/p}(\mathbb{R}^N)} \leq K||u_n - u_m||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

$(u_n)_{n\geq 1}$ étant de Cauchy dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, elle est donc aussi de Cauchy dans le Banach $\mathcal{C}^{0,1-N/p}(\mathbb{R}^N)$, et converge dans ce dernier espace vers une fonction v; la convergence dans cet espace impliquant la converge simple et $(u_n)_{n\geq 1}$ convergeant λ_N-presque partout vers u, on en déduit que $u = v$ λ_N-presque partout, i.e. que $u \in \mathcal{C}^{0,1-N/p}(\mathbb{R}^N)$ et que $u_n \to u$ dans $\mathcal{C}^{0,1-N/p}(\mathbb{R}^N)$.
On peut ensuite passer à la limite $n \to \infty$ dans l'estimation (3.2.7) valable pour chaque u_n pour voir que u vérifie aussi cette estimation, ce qui nous donne l'injection voulue (en fait, on constate aussi, en passant à la limite dans (3.2.5) et (3.2.6) appliqués à chaque u_n, que u vérifie aussi ces deux estimations). ■

Théorème 3.2.4 *$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^N)$ et les normes $||\cdot||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}$ et $||\cdot||_{\mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^N)}$ sont équivalentes.*

Démonstration:
♢ Etape 1: $\mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^N) \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ et $||\cdot||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq C||\cdot||_{\mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^N)}$.
Soit $u \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^N)$; par le corollaire 1.1.1 et la remarque 1.1.1, les dérivées de u sont dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et bornées par $\mathrm{Lip}(u)$.
Ainsi, u étant bornée sur $\mathbb{R}^N$, elle est dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ et on a

$$||u||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^N \mathrm{Lip}(u) \leq N||u||_{\mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^N)}.$$

♢ Etape 2: $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^N)$ et $||\cdot||_{\mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^N)} \leq C||\cdot||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}$.
Soit $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$; on prend $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta(0) = 1$; on note, pour $n \geq 1$, $\theta_n(x) = \theta(x/n)$.
Soit $u_n = \theta_n u$. $u_n \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ et est à support compact dans $\mathbb{R}^N$, donc $u_n \in \cap_{p>N} W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$; en appliquant alors (3.2.5) à u_n (on a remarqué, à la fin de la démonstration du théorème 3.2.3, que (3.2.5) était vérifié par toute fonction de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$), on trouve, pour tout $p \in]N,\infty[$, tout $n \geq 1$ et tous $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, en notant K_n le support (compact, donc de mesure finie) de θ_n

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u_n(y)| &\leq \frac{4V^{-1/p}}{2^{1-N/p}(1-N/p)}|x-y|^{1-N/p}||\,|\nabla u_n|\,||_{L^p(\mathbb{R}^N)} && (3.2.8) \\ &\leq \frac{4V^{-1/p}\lambda_N(K_n)^{1/p}}{2^{1-N/p}(1-N/p)}|x-y|^{1-N/p}||\,|\nabla u_n|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}. && (3.2.9) \end{aligned}$$

On constate que $\nabla u_n(x) = \theta(x/n)\nabla u(x) + \frac{1}{n}\nabla\theta(x/n)u(x)$, donc que $||\,|\nabla u_n|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq ||\,|\nabla u|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{n}||\,|\nabla\theta|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. Ainsi, en faisant $p \to \infty$ dans (3.2.9), on en déduit

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq 2|x-y|\left(||\,|\nabla u|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{n}||\,|\nabla\theta|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right).$$

Mais $u_n \to u$ simplement sur $\mathbb{R}^N$ (car $\theta(x/n) \to \theta(0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$), donc en passant à la limite $n \to \infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$|u(x) - u(y)| \leq 2|x-y|\,||\,|\nabla u|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

ce qui nous montre bien que u est lipschitzienne. Comme on sait qu'elle est bornée, u est donc dans $\mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^N)$ et on a

$$||u||_{\mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^N)} \leq ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + 2||\,|\nabla u|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 2||u||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)},$$

ce qui conclut cette démonstration. ■

3.2.2 Cas d'un Ouvert Faiblement Lipschitzien

Théorème 3.2.5 *Soit Ω un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$.*

i) Si $p \in [1, N[$ et $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$, alors $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuement dans $L^{p*}(\Omega)$.

ii) Si $p = N$ alors, pour tout $q \in [N, +\infty[$, $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuement dans $L^q(\Omega)$.

iii) Si $p \in]N, +\infty[$, alors $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuement dans $\mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$.

iv) $W^{1,\infty}(\Omega) = \mathcal{C}^{0,1}(\Omega)$ et les normes $||\cdot||_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ et $||\cdot||_{\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)}$ sont équivalentes.

Remarque 3.2.2

1) En fait, ce théorème est vérifié pour tout ouvert Ω tel qu'il existe un opérateur de prolongement $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

2) La preuve montre que, puisqu'on a un opérateur de prolongement P indépendant de p avec une borne (indépendante de p) sur $||P||_{\mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^N))}$, les constantes d'injection pour Ω dépendent de p de la même manière que les constantes d'injection pour $\mathbb{R}^N$.

Démonstration:
On utilise le prolongement $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ donné par le théorème 3.1.2.
Notons, pour $U = \Omega$ ou $\mathbb{R}^N$, $X(U)$ l'espace

- $L^{p*}(U)$ dans le cas $p \in [1, N[$,
- $L^q(U)$, pour un $q \in [N, +\infty[$ quelconque, dans le cas $p = N$,
- $\mathcal{C}^{0,1-N/p}(U)$ dans le cas $p \in]N, \infty]$.

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. On constate (grâce aux théorèmes 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 et 3.2.4) que $Pu \in X(\mathbb{R}^N)$; ainsi, puisque $Pu = u$ sur Ω, on a $u \in X(\Omega)$ avec $||u||_{X(\Omega)} \leq ||Pu||_{X(\mathbb{R}^N)}$.
Les théorèmes sus-cités nous donnent de plus C ne dépendant que de N et p (et de q dans le cas $p = N$) tel que, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} ||u||_{X(\Omega)} &\leq ||Pu||_{X(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C||Pu||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C||P||_{\mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega),W^{1,p}(\mathbb{R}^N))}||u||_{W^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration des points i), ii), iii) et d'une partie (la partie $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1}(\Omega)$) du point iv).
Il ne nous reste donc plus qu'à voir que $\mathcal{C}^{0,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$. Mais, si $u \in \mathcal{C}^{0,1}(\Omega)$, le lemme 1.1.1 et la remarque 1.1.1 nous permettent de voir que les dérivées de u sont dans $L^\infty(\Omega)$ et bornées par $\mathrm{Lip}(u)$; u étant bornée, on a bien $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $||u||_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq ||u||_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \mathrm{Lip}(u) \leq N||u||_{\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)}$. ■

3.3 Théorème de Rellich

Théorème 3.3.1 *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si Ω est un ouvert borné faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, alors $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^p(\Omega)$.*

Remarque 3.3.1

1) En fait, ce théorème n'est utile que pour $p \in [1, N]$; en effet, par le théorème 3.2.5, on sait que, lorsque $p > N$, $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuement dans un espace de fonctions höldériennes et, par le théorème d'Ascoli-Arzela, les espaces de fonctions höldériennes sur un ouvert borné Ω s'injectent compactement dans $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, donc dans $L^\infty(\Omega)$.

2) Lorsque $p \in [1, N[$, $W^{1,p}(\Omega)$ s'injectant continuement dans $L^{p^*}(\Omega)$ et compactement dans $L^p(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p^*[$; lorsque $p = N$, c'est la même chose pour tout $q \in [1, \infty[$.

DÉMONSTRATION:
Lorsque $p = \infty$, $W^{1,\infty}(\Omega) = \mathcal{C}^{0,1}(\Omega)$ (algébriquement et topologiquement) et, par le théorème d'Ascoli-Arzela, $\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^\infty(\Omega)$.
On suppose donc, dans la suite, $p \in [1, \infty[$.
◇ Etape 1: préliminaires.
Soit $h \in \mathbb{R}^N$. Si $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|v(x+h) - v(x)| = \left| \int_0^1 \nabla v(x+th) \cdot h \, dt \right| \le |h| \int_0^1 |\nabla v(x+th)| \, dt,$$

donc, par l'inégalité de Hölder et en intégrant sur $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v(x+h) - v(x)|^p \, dx \le |h|^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x+th)|^p \, dx \, dt.$$

En effectuant le changement de variable $\xi = x + th$ dans l'intégrale par rapport à x, et en notant $\tau_h v(x) = v(x+h)$, on trouve donc

$$||\tau_h v - v||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le |h| \times || \, |\nabla v| \, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.3.1}$$

Si $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, il existe $(v_n)_{n\ge1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui converge vers v dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$; comme $\tau_h v_n \to \tau_h v$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, on en déduit alors, en appliquant (3.3.1) à v_n pour tout n puis en passant à la limite $n \to \infty$, que v satisfait aussi (3.3.1).

◇ Etape 2: preuve du théorème.
Soit A un ensemble borné de $W^{1,p}(\Omega)$; nous souhaitons montrer que A est relativement compact dans $L^p(\Omega)$. Comme $p \in [1, \infty[$ et Ω est borné, nous pouvons appliquer le critère de Kolmogorov.
Soit $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ un opérateur de prolongement. Comme A est borné dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, et P est linéaire continu, $\{Pu \,, \; u \in A\}$ est borné (disons par M) dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, donc dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.
Pour tout $u \in A$, on a, en appliquant (3.3.1) à $v = Pu$, $||\tau_h Pu - Pu||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le |h| \times || \, |\nabla(Pu)| \, ||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le M|h|$, donc

$$\sup_{u\in A} ||\tau_h Pu - Pu||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0 \qquad \text{lorsque } h \to 0.$$

Le théorème de Kolmogorov nous dit alors que A est relativement compact dans $L^p(\Omega)$, ce qui conclut cette preuve. ■

Chapitre 4

Trace, Intégration par Parties

4.1 Trace

4.1.1 Trace dans le Demi-Espace

On se donne $p \in [1, \infty[$. On note $\mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0\}$; $\mathbb{R}^{N-1}$ est vu comme le bord de $\mathbb{R}^N_+$.

Théorème 4.1.1 *L'application linéaire*

$$\begin{cases} (\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+}), ||.||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}) & \longrightarrow & L^p(\mathbb{R}^{N-1}) \\ u & \longrightarrow & u_{|\partial\mathbb{R}^N_+} \end{cases}$$

est linéaire continue et se prolonge donc en une unique application linéaire continue $\gamma_0 : W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^{N-1})$.

DÉMONSTRATION:
$\diamondsuit$ Etape 1: Lorsque $p = 1$.
On prend $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ et on écrit, pour $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$,

$$\begin{aligned} |u(x', 0)| &= \left| -\int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t)\, dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t) \right| dt, \end{aligned}$$

ce qui nous donne, après intégration sur $\mathbb{R}^{N-1}$,

$$\begin{aligned} ||u_{|\partial\mathbb{R}^N_+}||_{L^1(\partial\mathbb{R}^N_+)} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x', 0)|\, dx' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N_+} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t) \right| dt\, dx' \\ &\leq ||u||_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N_+)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire exactement la continuité de $u \in (\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+}), ||.||_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N_+)}) \longrightarrow u_{|\partial\mathbb{R}^N_+} \in L^1(\partial\mathbb{R}^N_+)$.

$\diamondsuit$ Etape 2: Lorsque $1 < p < +\infty$.
Comme $p > 1$, $\varphi : s \in \mathbb{R} \to |s|^p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\varphi'(s) = p\,\mathrm{sgn}(s)|s|^{p-1}$ (c'est évident sur $\mathbb{R}^*$ et, en 0, il suffit d'utiliser $p > 1$ pour remarquer que $|h|^p/h \to 0$ lorsque $h \to 0$); φ est donc dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
On se donne $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+})$; on a, pour tout $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, $\varphi(u)(x', 0) = -\int_0^\infty \partial_N(\varphi(u))(x', t)\, dt$, soit

$$\begin{aligned} |u(x', 0)|^p &= -p \int_0^{+\infty} |u(x', t)|^{p-1} \mathrm{sgn}(u(x', t)) \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t)\, dt \\ &\leq p \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t) \right| |u(x', t)|^{p-1}\, dt, \end{aligned}$$

et, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$|u(x',0)|^p \leq p \left(\int_{\mathbb{R}^+} \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',t)\right|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^+} |u(x',t)|^p\,dt\right)^{1/p'}.$$

On en déduit, en intégrant cette inégalité sur $\mathbb{R}^{N-1}$ et en utilisant a nouveau l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
||u_{|\partial\mathbb{R}^N_+}||^p_{L^p(\partial\mathbb{R}^N_+)} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x',0)|^p\,dx' \\
&\leq p \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',t)\right|^p dt\,dx'\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |u(x',t)|^p\,dt\,dx'\right)^{1/p'} \\
&\leq p||u||^{1+\frac{p}{p'}}_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} = p||u||^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire la continuité de $u \in (\mathcal{C}^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+}), ||.||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}) \longrightarrow u_{|\partial\mathbb{R}^N_+} \in L^p(\partial\mathbb{R}^N_+)$. ■

Lemme 4.1.1 *Si $p \in [1,N[$, γ_0 est en fait linéaire continue $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \to L^p(\partial\mathbb{R}^N_+) \cap L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\mathbb{R}^N_+)$*

Remarque 4.1.1 *On a mis, sur $L^p(\partial\mathbb{R}^N_+) \cap L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\mathbb{R}^N_+)$, la norme égale à la somme des normes dans $L^p(\partial\mathbb{R}^N_+)$ et dans $L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\mathbb{R}^N_+)$, ce qui en fait un espace de Banach.*

Démonstration:
Il suffit de montrer que l'application linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left(\mathcal{C}^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+}), ||.||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}\right) & \longrightarrow & L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\mathbb{R}^N_+) \\ u & \longrightarrow & u_{|\partial\mathbb{R}^N_+} \end{array} \right. \tag{4.1.1}$$

est continue. En effet, supposons ce résultat démontré: on saura alors, grâce au théorème précédent, que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left(\mathcal{C}^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+}), ||.||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}\right) & \longrightarrow & L^p(\partial\mathbb{R}^N_+) \cap L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\mathbb{R}^N_+) \\ u & \longrightarrow & u_{|\partial\mathbb{R}^N_+} \end{array} \right.$$

est linéaire continue et admet donc une unique extension linéaire continue

$$\widetilde{\gamma_0} : W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \longrightarrow L^p(\partial\mathbb{R}^N_+) \cap L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\mathbb{R}^N_+).$$

Or, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, en prenant $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ on a, par définition de γ_0 et de $\widetilde{\gamma_0}$,

$$\begin{aligned}
&u_{n\,|\partial\mathbb{R}^N_+} \to \gamma_0(u) \text{ dans } L^p(\partial\mathbb{R}^N_+) \text{ lorsque } n \to \infty, \\
&u_{n\,|\partial\mathbb{R}^N_+} \to \widetilde{\gamma_0}(u) \text{ dans } L^p(\partial\mathbb{R}^N_+) \cap L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\mathbb{R}^N_+), \\
&\qquad\qquad \text{donc en particulier dans } L^p(\partial\mathbb{R}^N_+), \text{ lorsque } n \to \infty,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\gamma_0(u) = \widetilde{\gamma_0}(u)$ dans $L^p(\partial\mathbb{R}^N_+)$, i.e. $\gamma_0 = \widetilde{\gamma_0}$, et conclut le lemme.
Montrons donc que (4.1.1) définit bien une application linéaire continue.
On constate que, lorsque $p = 1$, $(N-1)p/(N-p) = 1$ et il n'y a donc rien à faire (c'est le resultat du théorème 4.1.1). Lorsque $p > 1$, on a $r = (N-1)p/(N-p) > 1$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(s) = |s|^r$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\phi'(s) = r\,\mathrm{sgn}(s)|s|^{r-1}$; ainsi, comme dans la démonstration du théorème précédent, on trouve, lorsque $u \in \mathcal{C}^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+})$,

$$\begin{aligned}
|u(x',0)|^r &= -r \int_0^{+\infty} |u(x',t)|^{r-1}\mathrm{sgn}(u(x',t)) \frac{\partial u}{\partial x_N}(x',t)\,dt \\
&\leq r \left(\int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',t)\right|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} |u(x',t)|^{p'(r-1)}\,dt\right)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Puisque $(r-1)p' = \frac{N(p-1)}{N-p}p' = \frac{Np}{N-p}$, en intégrant cette inégalité sur $\mathbb{R}^{N-1}$, en utilisant à nouveau l'inégalité de Hölder puis l'injection de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N_+)$ (valide par le point 1) de la remarque 3.2.2, puisqu'il existe un opérateur de prolongement $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$), on trouve C ne dépendant que de N et p tel que

$$\begin{aligned}
||u_{|\partial\mathbb{R}^N_+}||^{\frac{(N-1)p}{N-p}}_{L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\mathbb{R}^N_+)} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x',0)|^r\,dx' \\
&\leq r\left(\int_{\mathbb{R}^N_+}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',t)\right|^p dt\,dx'\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^N_+}|u(x',t)|^{\frac{Np}{N-p}}\,dt\,dx'\right)^{1/p'} \\
&\leq Cr||u||^{1+\frac{Np}{p'(N-p)}}_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \\
&\leq Cr||u||^{\frac{(N-1)p}{N-p}}_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire la continuité de $u \in (\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+}), ||.||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}) \longrightarrow u_{|\partial\mathbb{R}^N_+} \in L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\mathbb{R}^N_+)$. ■

Lemme 4.1.2 *Si $u \in \mathcal{C}_c(\overline{\mathbb{R}^N_+}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, alors $\gamma_0(u) = u_{|\partial\mathbb{R}^N_+}$.*

Démonstration:
Soit $(\rho_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ une approximation de l'unité telle que $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset \mathbb{R}^N_-$; u est la restriction à $\mathbb{R}^N_+$ d'un $v \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$. Soit $u_n = (v * \rho_n)_{|\mathbb{R}^N_+} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+})$.
Comme v est continue à support compact, $v * \rho_n \to v$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ et u_n converge donc vers u uniformément sur $\mathbb{R}^N_+$. En particulier, $u_{n\,|\partial\mathbb{R}^N_+} \to v_{|\partial\mathbb{R}^N_+} = u_{|\partial\mathbb{R}^N_+}$ uniformément sur $\partial\mathbb{R}^N_+$.
Comme le support de ρ_n est décentré sur $\mathbb{R}^N_-$, $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ (cf preuve de la proposition 3.1.1); ainsi, $\gamma_0(u_n) = u_{n\,|\partial\mathbb{R}^N_+} \to \gamma_0(u)$ dans $L^p(\partial\mathbb{R}^N_+)$ et λ_{N-1}-presque partout, quitte à extraire une suite. On en déduit que $\gamma_0(u) = u_{|\partial\mathbb{R}^N_+}$, et le lemme est donc démontré. ■

4.1.2 Trace dans B^N_+

p est toujours un réel dans $[1,\infty[$. On prend une norme quelconque sur $\mathbb{R}^N$; B^N représente la boule unité pour cette norme, $B^N_+ = B^N \cap \mathbb{R}^N_+$ et $B^{N-1} = B^N \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$ (cf définition 2.1.1).
Si $u \in W^{1,p}(B^N_+)$ est à support compact dans B^N, par le lemme 1.4.2, le prolongement $\widetilde{u}$ de u à $\mathbb{R}^N_+$ par 0 hors de B^N_+ est dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$; on peut donc définir $\gamma_0(\widetilde{u}) \in L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ (dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\mathbb{R}^{N-1})$ lorsque $p \in [1,N[$), dont la restriction à B^{N-1} est dans $L^p(B^{N-1})$ (dans $L^p(B^{N-1}) \cap L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(B^{N-1})$ lorsque $p \in [1,N[$). On a aussi

$$\begin{aligned}
||\gamma_0(\widetilde{u})_{|B^{N-1}}||_{L^p(B^{N-1})} &\leq ||\gamma_0(\widetilde{u})||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \\
&\leq ||\gamma_0||_{\mathcal{L}(W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+),L^p(\mathbb{R}^{N-1}))}||\widetilde{u}||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \\
&\leq ||\gamma_0||_{\mathcal{L}(W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+),L^p(\mathbb{R}^{N-1}))}||u||_{W^{1,p}(B^N_+)}
\end{aligned}$$

(avec, en plus, lorsque $p \in [1,N[$, la même chose en remplacant $L^p(B^{N-1})$ par $L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(B^{N-1})$ et $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ par $L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\mathbb{R}^{N-1})$).
L'application

$$\gamma_1 \left\{ \begin{array}{rcl} \{u \in W^{1,p}(B^N_+) \text{ à support compact dans } B^N\} & \longrightarrow & L^p(B^{N-1}) \\ u & \longrightarrow & \gamma_0(\widetilde{u})_{|B^{N-1}} \end{array}\right.$$

est donc linéaire continue. Lorsque $p \in [1,N[$, γ_1 est aussi continue à valeurs dans $L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(B^{N-1})$.
Si $u \in W^{1,p}(B^N_+)$ est à support compact dans B^N et continue sur $\overline{B^N_+}$, alors $\widetilde{u} \in \mathcal{C}_c(\overline{\mathbb{R}^N_+}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ et on sait donc que $\gamma_0(\widetilde{u}) = \widetilde{u}_{|\partial\mathbb{R}^N_+}$; ainsi, pour $u \in \mathcal{C}(\overline{B^N_+}) \cap W^{1,p}(B^N_+)$ à support compact dans B^N, on a $\gamma_1(u) = u_{|B^{N-1}}$.

4.1.3 Trace sur le Bord d'un Ouvert Faiblement Lipschitzien

Soit $p \in [1, +\infty[$ et Ω un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$; on se donne $C = (O_i, \varphi_i)_{i\in[1,k]}$ un système de cartes de Ω et $P = (\theta_i)_{i\in[1,k]}$ une partition de l'unité associée (i.e. une parition $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ de l'unité sur un voisinage de $\partial\Omega$ subordonnée au recouvrement $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^k O_i$).
On va commencer par définir une trace $\gamma_{C,P} : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ qui dépend *a priori* du système de cartes et de la partition de l'unité associée choisis, puis on montrera que $\gamma_{C,P}$ ne dépend en fait ni de C ni de P

On remarque que $\theta_i u \in W^{1,p}(O_i \cap \Omega)$ et, $\varphi_i^{-1} : B_+^N \to O_i \cap \Omega$ étant un homéomorphisme bilipschitzien, $(\theta_i u) \circ \varphi_i^{-1} \in W^{1,p}(B_+^N)$. De plus, θ_i étant à support compact dans O_i, $(\theta_i u) \circ \varphi_i^{-1}$ est à support compact dans B^N; on peut donc définir $\gamma_1\left((\theta_i u) \circ \varphi_i^{-1}\right) \in L^p(B^{N-1})$.
$\varphi_i : O_i \cap \partial\Omega \to B^{N-1}$ étant un homéomorphisme bilipschitzien, on en déduit que $\gamma_1\left((\theta_i u) \circ \varphi_i^{-1}\right) \circ \varphi_i \in L^p(O_i \cap \partial\Omega)$ et que donc, en notant $P_i : L^p(O_i \cap \partial\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ le prolongement par 0 hors de $O_i \cap \partial\Omega$, $P_i\left(\gamma_1\left((\theta_i u) \circ \varphi_i^{-1}\right) \circ \varphi_i\right) \in L^p(\partial\Omega)$.
On pose donc, pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\gamma_{C,P}(u) = \sum_{i=1}^k P_i\left(\gamma_1\left((\theta_i u)_{|O_i\cap\Omega} \circ \varphi_i^{-1}\right) \circ \varphi_i\right) \in L^p(\partial\Omega). \tag{4.1.2}$$

Comme, pour tout $i \in [1, k]$,

- la multiplication par θ_i de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$,
- la restriction $W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(O_i \cap \Omega)$,
- le transport par φ_i^{-1} de $W^{1,p}(O_i \cap \Omega)$ dans $W^{1,p}(B_+^N)$,
- la trace γ_1 de $W^{1,p}(B_+^N)$ dans $L^p(B^{N-1})$,
- le transport par φ_i de $L^p(B^{N-1})$ dans $L^p(O_i \cap \partial\Omega)$ et
- le prolongement P_i de $L^p(O_i \cap \partial\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$

sont linéaires continues, l'application $\gamma_{C,P} : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ est linéaire continue.

Pour montrer que cette application $\gamma_{C,P}$ ne dépend en fait pas du système de cartes C ni de la partition de l'unité associée P que l'on a choisis, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 4.1.3 *Soit C un système de cartes de $\partial\Omega$ et P une partition de l'unité associée. Si $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ alors $\gamma_{C,P}(u) = u_{|\partial\Omega}$.*

Démonstration:
Pour tout $i \in [1, k]$, $(\theta_i u)_{|O_i\cap\Omega} \in W^{1,p}(O_i \cap \Omega)$ est continue sur $\overline{O_i \cap \Omega}$ et à support compact dans O_i; ainsi, $(\theta_i u)_{|O_i\cap\Omega} \circ \varphi_i^{-1} \in W^{1,p}(B_+^N)$ est continue sur $\overline{B_+^N}$ et à support compact dans B^N, donc $\gamma_1\left((\theta_i u)_{|O_i\cap\Omega} \circ \varphi_i^{-1}\right) = ((\theta_i u)_{|O_i\cap\Omega} \circ \varphi_i^{-1})_{|B^{N-1}}$ et $\gamma_1\left((\theta_i u)_{|O_i\cap\Omega} \circ \varphi_i^{-1}\right) \circ \varphi_i = (\theta_i u)_{|O_i\cap\partial\Omega}$. Comme θ_i est nul en dehors de O_i, on en déduit que $P_i\left(\gamma_1\left((\theta_i u)_{|O_i\cap\Omega} \circ \varphi_i^{-1}\right) \circ \varphi_i\right) = (\theta_i u)_{|\partial\Omega}$. On peut donc conclure en écrivant

$$\begin{aligned} \gamma_{C,P}(u) &= \sum_{i=1}^k P_i\left(\gamma_1\left((\theta_i u)_{|O_i\cap\Omega} \circ \varphi_i^{-1}\right) \circ \varphi_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k \theta_{i\,|\partial\Omega}\right) u_{|\partial\Omega} = u_{|\partial\Omega}, \end{aligned}$$

puisque $(\theta_i)_{i\in[1,k]}$ est une partition de l'unité sur $\partial\Omega$. ■

On peut alors en déduire que, si C et C' sont deux systèmes de cartes de $\partial\Omega$ et P et P' sont deux partitions de l'unité associées, respectivement, à C et C', $\gamma_{C,P}$ et $\gamma_{C',P'}$ sont égales. En effet, sur $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, $\gamma_{C,P}$ et $\gamma_{C',P'}$ coincident (elles sont toutes deux égales à la restriction sur $\partial\Omega$, d'après le lemme 4.1.3); mais $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$ et $\gamma_{C,P}$, $\gamma_{C',P'}$ sont continues sur $W^{1,p}(\Omega)$: $\gamma_{C,P}$ et $\gamma_{C',P'}$ sont donc égales sur $W^{1,p}(\Omega)$.

L'application linéaire continue $\gamma_{C,P}$, qui ne dépend donc que de Ω, pas du système de cartes ni de la partition de l'unité associée choisis, est notée $\gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ (ou γ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur l'ouvert sur le bord duquel on prend la trace).

Remarque 4.1.2 *Si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega)$, on peut a priori définir deux traces $\gamma_p(u) \in L^p(\partial\Omega)$ et $\gamma_q(u) \in L^q(\partial\Omega)$, chacune correspondant aux applications linéaires continues de trace dans $W^{1,p}(\Omega)$ et dans $W^{1,q}(\Omega)$; en fait, en prenant $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$ et dans $W^{1,q}(\Omega)$ (cf théorème 3.1.3 avec la remarque 3.1.3) on constate que, puisque γ_p et γ_q sont continues et σ est une mesure finie sur $\partial\Omega$ (donc $L^p(\partial\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$),*

$$\begin{aligned} &u_{n\,|\partial\Omega} \to \gamma_p(u) \text{ dans } L^p(\partial\Omega), \text{ donc dans } L^q(\partial\Omega), \\ &u_{n\,|\partial\Omega} \to \gamma_q(u) \text{ dans } L^q(\partial\Omega), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\gamma_p(u) = \gamma_q(u)$ dans $L^q(\partial\Omega)$. C'est pour cela que l'on ne note jamais la dépendance de γ par rapport à p.

Proposition 4.1.1 *Si $\varphi : \Omega' \to \Omega$ est un homéomorphisme bilipschitzien entre ouverts faiblement lipschitziens de $\mathbb{R}^N$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $\gamma_{\Omega'}(u \circ \varphi) = \gamma_\Omega(u) \circ \varphi$.*

Remarque 4.1.3 *φ (respectivement φ^{-1}) étant lipschitzien sur Ω' (respectivement sur Ω), il se prolonge de manière unique en une application lipschitzienne sur $\overline{\Omega'}$ (respectivement sur $\overline{\Omega}$). Comme $\varphi\circ\varphi^{-1} = Id_\Omega$ et $\varphi^{-1} \circ \varphi = Id_{\Omega'}$, on a, par continuité, $\varphi \circ \varphi^{-1} = Id_{\overline{\Omega}}$ et $\varphi^{-1} \circ \varphi = Id_{\overline{\Omega'}}$; φ est donc aussi un homéomorphisme bilipschitzien entre $\overline{\Omega'}$ et $\overline{\Omega}$, ainsi qu'entre $\partial\Omega'$ et $\partial\Omega$.*

DÉMONSTRATION:
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. On voit alors que $u_n \circ \varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega'}) \cap W^{1,p}(\Omega')$ converge vers $u\circ\varphi$ dans $W^{1,p}(\Omega')$ (théorème 1.4.1); en particulier, $\gamma_{\Omega'}(u_n\circ\varphi) \to \gamma_{\Omega'}(u\circ\varphi)$ dans $L^p(\partial\Omega')$.
De plus, par le lemme 4.1.3, $\gamma_{\Omega'}(u_n \circ \varphi) = (u_n \circ \varphi)_{|\partial\Omega'} = u_{n\,|\partial\Omega} \circ \varphi_{|\partial\Omega'} = \gamma_\Omega(u_n) \circ \varphi_{|\partial\Omega'}$; mais $\gamma_\Omega(u_n) \to \gamma_\Omega(u)$ dans $L^p(\partial\Omega)$ et, φ étant un homéomorphisme bilipschitzien entre $\partial\Omega'$ et $\partial\Omega$, on en déduit que $\gamma_{\Omega'}(u_n \circ \varphi) = \gamma_\Omega(u_n) \circ \varphi_{|\partial\Omega'} \to \gamma(u) \circ \varphi_{|\partial\Omega'}$ dans $L^p(\partial\Omega')$.
En égalant les deux limites de $(\gamma_{\Omega'}(u_n \circ \varphi))_{n\geq 1}$, on trouve $\gamma_{\Omega'}(u \circ \varphi) = \gamma_\Omega(u) \circ \varphi$. ■

4.1.4 Trace dans le cas $p = \infty$

Lorsque $p = \infty$, on sait que $W^{1,\infty}(\Omega)$ est formé des fonctions lipschitziennes bornées sur Ω (et la norme $W^{1,\infty}$ est équivalente à la norme $\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)$), donc continues sur $\overline{\Omega}$. La trace de $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ sur $\partial\Omega$ est alors définie simplement en prenant la restriction de u à $\partial\Omega$, qui donne une fonction lipschitzienne sur $\partial\Omega$. De plus, la trace ainsi définie est linéaire continue $W^{1,\infty}(\Omega) \to \mathcal{C}^{0,1}(\partial\Omega)$.
La proposition 4.1.1 est aussi trivialement vérifiée dans ce cas.

4.1.5 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Théorème 4.1.2 *Si Ω est un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty[$, le noyau de la trace $\gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ est l'adhérence, notée $W_0^{1,p}(\Omega)$, de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION:
La trace étant continue, son noyau est un sous-espace fermé de $W^{1,p}(\Omega)$; comme il contient $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (pour une fonction régulière, la trace est égale à la restriction sur $\partial\Omega$, laquelle restriction est nulle pour les éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$), il contient son adhérence dans $W^{1,p}(\Omega)$.
Il reste donc a montrer l'inclusion inverse: $\ker(\gamma_\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire montrer que toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ de trace nulle est limite dans $W^{1,p}(\Omega)$ d'une suite de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

$\diamondsuit$ Etape 1: approximation par des fonctions à support borné.
Soit $\beta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\beta(0) = 1$ et $\text{supp}(\beta) \subset B(0,1)$; on note, pour $n \geq 1$, $\beta_n = \beta(\cdot/n)$.
Prenons $u \in W^{1,p}(\Omega)$ de trace nulle et posons $u_n = \beta_n u$; en approchant u par des fonctions $(f_m)_{m\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ on constate que $\gamma(u_n) = \lim_{m\to\infty}(\beta_n f_m)_{|\partial\Omega} = (\beta_n)_{|\partial\Omega} \lim_{m\to\infty}(f_m)_{|\partial\Omega} = (\beta_n)_{|\partial\Omega}\gamma(u) = 0$ (les limites étant prises dans $L^p(\partial\Omega)$). u_n est donc de trace nulle et à support dans $B(0,n)$.
On a $\beta_n \to 1$ sur $\mathbb{R}^N$, en étant majorée par $||\beta||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ donc, par convergence dominée, $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$. $\nabla u_n = \beta_n \nabla u + u\nabla\beta_n$; pour la même raison que précédemment, $\beta_n\nabla u \to \nabla u$ dans $(L^p(\Omega))^N$; comme $\nabla\beta_n = \frac{1}{n}\nabla\beta(\cdot/n)$, on a $||\,|\nabla\beta_n|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq ||\,|\nabla\beta|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}/n \to 0$ donc $u\nabla\beta_n \to 0$ dans $(L^p(\Omega))^N$; ainsi, $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $(L^p(\Omega))^N$, donc $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
On a montré que toute fonction de $W^{1,p}(\Omega)$ de trace nulle peut s'approcher, dans $W^{1,p}(\Omega)$, par des fonctions de trace nulle et à supports bornés. Pour conclure la démonstration, il suffit de prouver que toute fonction de $W^{1,p}(\Omega)$ de trace nulle et à support borné peut s'approcher, dans $W^{1,p}(\Omega)$, par des fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

$\diamondsuit$ Etape 2: approximation par des fonctions à supports compacts.
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ à support borné et telle que $\gamma(u) = 0$. Prenons une suite $(\theta_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ donnée par le lemme B.0.2 (voir Annexe B) et posons $u_n = \theta_n u$. Puisque $\theta_n \to 1$ sur Ω en étant majorée par 1, le théorème de convergence dominée nous donne $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$. On a $\nabla u_n = \theta_n\nabla u + u\nabla\theta_n$; pour la même raison que précédemment, on a $\theta_n\nabla u \to \nabla u$ dans $(L^p(\Omega))^N$. $\theta_n \equiv 1$ au voisinage de K_n, donc $\nabla\theta_n = 0$ sur K_n; comme le support de u est borné, on a, pour n assez grand, $(\mathbb{R}^N\backslash K_n) \cap \text{supp}(u) = (\Omega_{1/n} \cup (\mathbb{R}^N\backslash B(0,n)) \cap \text{supp}(u) = \Omega_{1/n} \cap \text{supp}(u) \subset \Omega_{1/n}$ (avec les notations du corollaire B.0.1 et du lemme B.0.2), donc

$$||u|\nabla\theta_n|\,||_{L^p(\Omega)} = ||u|\nabla\theta_n|\,||_{L^p(\Omega_{1/n})}.$$

Ainsi, grâce au corollaire B.0.1, il existe $C > 0$ et $\alpha \geq 1$ tel que, pour n assez grand,

$$||u|\nabla\theta_n|\,||_{L^p(\Omega)} \leq Mn||u||_{L^p(\Omega_{1/n})} \leq CM||\,|\nabla u|\,||_{L^p(\Omega_{\alpha/n})}.$$

Encore une fois par convergence dominée, on constate que $||\,|\nabla u|\,||_{L^p(\Omega_{\alpha/n})} \to 0$ (car, par définition de $\Omega_{\alpha/n}$, $\mathbf{1}_{\Omega_{\alpha/n}}\nabla u \to 0$ en étant majorée par $|\nabla u| \in L^p(\Omega)$), ce qui donne $||u|\nabla\theta_n|\,||_{L^p(\Omega)} \to 0$ et la convergence de ∇u_n vers ∇u dans $(L^p(\Omega))^N$.
On a donc montré que u est limite, dans $W^{1,p}(\Omega)$, de fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ à supports compacts dans Ω; il ne reste donc plus qu'à montrer que toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ à support compact dans Ω est limite, dans $W^{1,p}(\Omega)$, de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

$\diamondsuit$ Etape 3: approximation par des fonctions régulières.
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ à support compact dans Ω. Le lemme 1.4.2 nous dit que l'extension $\widetilde{u}$ de u à $\mathbb{R}^N$ par 0 hors de Ω est dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$; si $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est une suite régularisante, on sait alors (cf la démonstration du lemme 1.4.1) que $u_n = \widetilde{u} * \rho_n$ converge vers $\widetilde{u}$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, donc que $u_{n\,|\Omega} \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$; or $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ (convolution par une suite régularisante) et a son support dans $\text{supp}(\widetilde{u}) + \text{supp}(\rho_n)$, c'est-à-dire, pour n assez grand, un compact de Ω (car $\text{supp}(\widetilde{u}) = \text{supp}(u)$ est un compact de Ω et $\text{supp}(\rho_n) \subset B(0,1/n)$). Ainsi, pour n assez grand, $u_{n\,|\Omega} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et le théorème est démontré. ■

4.1.6 Espaces de Traces

Dans toute cette partie, Ω est un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$.

Définition 4.1.1 *Lorsque $p \in [1,+\infty]$, on définit l'espace vectoriel*

$$W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) = \gamma(W^{1,p}(\Omega)) = \left\{\gamma(u)\,,\ u \in W^{1,p}(\Omega)\right\},$$

que l'on munit de la norme

$$||f||_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)} = \inf\left\{||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \mid \gamma(u) = f\right\}.$$

Remarque 4.1.1

1) $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ est donc un sous-espace vectoriel de $L^p(\partial\Omega)$.

2) En fait on a $W^{0,1}(\partial\Omega) = L^1(\partial\Omega)$, algébriquement et topologiquement.

3) Pour mieux comprendre pourquoi on note ainsi l'espace des traces, et faire le lien avec les espaces de Sobolev fractionnaires, voir l'annexe C.

En fait, en notant $E = W^{1,p}(\Omega)$ et $F = \ker(\gamma)$ (sous-espace fermé de E, puisque $\gamma : E \to L^p(\partial\Omega)$ est continue), l'application linéaire continue surjective $\gamma : E \to W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ passe au quotient en une application linéaire bijective $\overline{\gamma} : E/F \to W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$. La norme $||.||_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)}$ ci-dessus est en fait choisie de telle sorte que $\overline{\gamma}$ soit un isomorphisme isométrique entre E/F et $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ (cf. Annexe A pour la définition de la norme sur E/F et les propriétés de E/F).
E/F et $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ sont donc isomorphes et on déduit, de l'Annexe A, les résultats suivants sur $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$.

Proposition 4.1.2

i) Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ est un espace de Banach.

ii) Pour tout $p \in]1, +\infty[$, $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ est réflexif.

Remarque 4.1.4 *On constate aussi aisément que $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ est continue de norme inférieure à 1.*

Lemme 4.1.4 *Lorsque $1 \le q < p \le +\infty$, $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ s'injecte continuement et densément dans $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$.*

Démonstration:
Comme $\partial\Omega$ est borné, il existe $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui vaut 1 sur un voisinage de $\partial\Omega$.
Soit $f \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$. Il existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tel que $\gamma(u) = f$ et $||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \le 2||f||_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)}$; en posant $v = \theta u$, on a aussi $\gamma(v) = f$ (car $\theta \equiv 1$ au voisinage de $\partial\Omega$) et il existe C ne dépendant que de θ tel que $||v||_{W^{1,p}(\Omega)} \le C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$.
$v \in W^{1,p}(\Omega)$ est à support de mesure fini (inclus dans le support de θ), donc, puisque $q \le p$, on a $v \in W^{1,q}(\Omega)$, de sorte que $f = \gamma(v) \in W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$. Enfin,

$$\begin{aligned} ||f||_{W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)} &\le ||v||_{W^{1,q}(\Omega)} \\ &\le \lambda_N(\mathrm{supp}(\theta))^{1/q-1/p}||v||_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &\le C\lambda_N(\mathrm{supp}(\theta))^{1/q-1/p}||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &\le 2C\lambda_N(\mathrm{supp}(\theta))^{1/q-1/p}||f||_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

L'injection de $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ dans $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$ est donc bien continue.
Montrons maintenant qu'elle est dense. Soit $f \in W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$ et $u \in W^{1,q}(\Omega)$ dont la trace sur $\partial\Omega$ est f. En prenant $(u_n)_{n\ge1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ qui converge vers u dans $W^{1,q}(\Omega)$ (rappelons que $q < \infty$), comme $\gamma : W^{1,q}(\Omega) \to W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$ est continue, $f_n = \gamma(u_n)$ converge vers f dans $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$. Mais, pour tout $n \ge 1$, $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$, de sorte que $f_n \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ et f est donc bien la limite, dans $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$, de fonctions de $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$. ■

Proposition 4.1.3 *Soient $(p, q, r) \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,q}(\Omega)$, alors $\gamma(uv) = \gamma(u)\gamma(v)$; en particulier, la fonction*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) \times W^{1-1/q,q}(\partial\Omega) & \longrightarrow & W^{1-1/r,r}(\partial\Omega) \\ (f, g) & \longrightarrow & fg \end{array} \right. \tag{4.1.3}$$

est bien définie et bilinéaire continue.

Démonstration:
On sait déjà (proposition 3.1.2) que $uv \in W^{1,r}(\Omega)$ et $\gamma(uv)$ est donc bien définie.

Supposons pour commencer $(p,q) \in]1,\infty[$. On peut alors approcher u dans $W^{1,p}(\Omega)$ par $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ et v dans $W^{1,q}(\Omega)$ par $(v_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$; on a alors $\gamma(u_n v_n) = (u_n v_n)_{|\partial\Omega} = u_{n|\partial\Omega} v_{n|\partial\Omega} = \gamma(u_n)\gamma(v_n)$. Or, par continuité de la trace, $\gamma(u_n) \to \gamma(u)$ dans $L^p(\partial\Omega)$ et $\gamma(v_n) \to \gamma(v)$ dans $L^q(\partial\Omega)$, donc $\gamma(u_n)\gamma(v_n) \to \gamma(u)\gamma(v)$ dans $L^r(\partial\Omega)$. De plus, par la proposition 3.1.2, $u_n v_n \to uv$ dans $W^{1,r}(\Omega)$ (le produit $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \to W^{1,r}(\Omega)$ est bilinéaire continu), donc $\gamma(u_n v_n) \to \gamma(uv)$ dans $L^r(\partial\Omega)$. en passant à la limite, on trouve donc $\gamma(uv) = \gamma(u)\gamma(v)$.

Si $p = \infty$ et $q < \infty$ (ou l'inverse, quitte à échanger les rôles de p et q), alors on approche v dans $W^{1,q}(\Omega)$ par $(v_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$; puisque u et v_n sont continues sur $\overline{\Omega}$, $\gamma(uv_n) = (uv_n)_{|\partial\Omega} = u_{|\partial\Omega} v_{n|\partial\Omega} = \gamma(u)\gamma(v_n)$; or, par continuité de la trace, $\gamma(v_n) \to \gamma(v)$ dans $L^q(\partial\Omega)$ et $\gamma(uv_n) \to \gamma(uv)$ dans $L^r(\partial\Omega)$ (car $uv_n \to uv$ dans $W^{1,r}(\Omega)$). On en déduit donc, en passant à la limite, $\gamma(uv) = \gamma(u)\gamma(v)$.

Si $p = q = \infty$, alors u et v étant continues sur $\overline{\Omega}$, le résultat est trivial: $\gamma(uv) = (uv)_{|\partial\Omega} = u_{|\partial\Omega} v_{|\partial\Omega} = \gamma(u)\gamma(v)$.

Soit $(f,g) \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) \times W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$; par définition, il existe $(u,v) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)$ tels que $||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 2||f||_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)}$, $||v||_{W^{1,q}(\Omega)} \leq 2||g||_{W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)}$, $\gamma(u) = f$ et $\gamma(v) = g$. Par le résultat précédent, $fg = \gamma(uv) \in W^{1-1/r,r}(\partial\Omega)$ (puisque $uv \in W^{1,r}(\partial\Omega)$) et, en notant C la norme de l'application bilineaire continue $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) \to W^{1,r}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} ||fg||_{W^{1-1/r,r}(\partial\Omega)} &\leq ||uv||_{W^{1,r}(\Omega)} \\ &\leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}||v||_{W^{1,q}(\Omega)} \\ &\leq 4C||f||_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)}||g||_{W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)}, \end{aligned}$$

ce qui conclut cette démonstration. ∎

Théorème 4.1.3 (Injection de Sobolev) *Soit Ω un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$.*

i) Si $p \in [1,N[$ alors $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ s'injecte continuement dans $L^{\frac{(N-1)p}{N-p}}(\partial\Omega)$.

ii) Si $p = N$ alors $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ s'injecte continuement dans $L^q(\partial\Omega)$, pour tout $q \in [1,+\infty[$.

iii) Si $p \in]N,+\infty[$ alors $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ s'injecte continuement dans $\mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\partial\Omega)$.

iv) $W^{1,\infty}(\partial\Omega) = \mathcal{C}^{0,1}(\partial\Omega)$, et les normes $||\cdot||_{W^{1,\infty}(\partial\Omega)}$ et $||\cdot||_{\mathcal{C}^{0,1}(\partial\Omega)}$ sont équivalentes.

Démonstration:
Commençons par le point iii): on sait que, puisque $p > N$, $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continuement dans $\mathcal{C}^{0,1-N/p}(\Omega)$; ainsi, les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ étant toutes continues sur $\overline{\Omega}$, leur trace sur $\partial\Omega$ est simplement leur restriction à $\partial\Omega$. Il suffit ensuite de constater (trivial) que la restriction à $\partial\Omega$ d'une fonction $(1-N/p)$-höldérienne sur $\overline{\Omega}$ est elle même $(1-N/p)$-hölderienne sur $\partial\Omega$, avec une norme dans $\mathcal{C}^{0,1-N/p}(\partial\Omega)$ majorée par la norme de la fonction dans $\mathcal{C}^{0,1-N/p}(\Omega)$.

Le point iv) est aussi facile à voir. Par le raisonnement ci-dessus, valable aussi pour $p = \infty$, on a déjà $W^{1,\infty}(\partial\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1}(\partial\Omega)$.
Il reste à voir la réciproque. Soit $f \in \mathcal{C}^{0,1}(\partial\Omega)$; par le lemme 1.1.2, f admet une extension lipschitzienne $\widetilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}$ de même constante de lipschitz que f et bornée par $||f||_{\mathcal{C}^0(\partial\Omega)}$. Par le point iv) du théorème 3.2.5, $\widetilde{f} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ avec $||\widetilde{f}||_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C||\widetilde{f}||_{\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)}$, où C ne dépend que de Ω; ainsi, $f = \gamma(\widetilde{f}) \in W^{1,\infty}(\partial\Omega)$ et on a $||f||_{W^{1,\infty}(\partial\Omega)} \leq C||\widetilde{f}||_{\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)} = C\sup_{\partial\Omega}|f| + C\mathrm{Lip}(f) = C||f||_{\mathcal{C}^{0,1}(\partial\Omega)}$, ce qui conclut cette partie.

Le point ii) est une simple conséquence du point i), puisque (par le lemme 4.1.4) $W^{1-1/N,N}(\partial\Omega)$ s'injecte continuement dans $W^{1-1/l,l}(\partial\Omega)$ pour tout $l \in [1,N[$ et, lorsque l décrit $[1,N[$, $(N-1)l/(N-l)$ décrit $[1,+\infty[$.

Il reste donc a voir le point i). Notons $r = (N-1)p/(N-p)$.
On revient à la définition de la trace γ: en prenant un système de cartes $(O_i, \varphi_i)_{i\in[1,k]}$ de Ω et une partition de l'unité associée $(\theta_i)_{i\in[1,k]}$, $\gamma(u)$ est donné par (4.1.2).
Mais, pour tout $i \in [1,k]$, les applications

- $u \in W^{1,p}(\Omega) \to (\theta_i u)_{|O_i\cap\Omega} \circ \varphi_i^{-1} \in W^{1,p}(B_+^N)$,
- $\gamma_1 : W^{1,p}(B_+^N) \to L^r(B^{N-1})$,
- $f \in L^r(B^{N-1}) \to f \circ \varphi_i \in L^r(O_i \cap \partial\Omega)$,
- $P_i : L^r(O_i \cap \partial\Omega) \to L^r(\partial\Omega)$

sont linéaires continues. Ainsi, γ est en fait linéaire continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^r(\partial\Omega)$; on en déduit que tout $f \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ est dans $L^r(\partial\Omega)$ (car $f = \gamma(u)$ avec $u \in W^{1,p}(\Omega)$) et, en notant C la norme de $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^r(\partial\Omega)$, on a, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tel que $\gamma(u) = f$, $||f||_{L^r(\partial\Omega)} \le C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$ soit, en prenant la borne inférieure sur tous ces u,

$$||f||_{L^r(\partial\Omega)} \le C||f||_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)},$$

et le théorème est donc démontré. ■

Théorème 4.1.4 *Soit Ω un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Si $p \in]1,+\infty]$, la trace $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ est compacte.*

Remarque 4.1.5 *Il revient au même de dire que $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^p(\partial\Omega)$.*

Démonstration:
◇ Etape 1: $p = \infty$.
Dans ce cas, par le théorème 4.1.3, $W^{1,\infty}(\partial\Omega) = \mathcal{C}^{0,1}(\partial\Omega)$ algébriquement et topologiquement; or, par le théorème d'Ascoli-Arzela, $\mathcal{C}^{0,1}(\partial\Omega)$ s'injecte compactement dans $\mathcal{C}^0(\partial\Omega)$, donc dans $L^\infty(\partial\Omega)$, ce qui conclut la preuve dans le cas $p = \infty$.

◇ Etape 2: un résultat technique.
Pour $h \in \mathbb{R}^{N-1}$ et $g : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ ou $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (auquel cas on considère aussi h comme un vecteur de $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$), on note $\tau_h g(\cdot) = g(\cdot + h)$.
On prend $p \in]1,\infty[$ et on souhaite montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}^{N-1}$ et tout $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$, on a

$$||\tau_h(\gamma_0(v)) - \gamma_0(v)||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \le (2p)^{1/p}|h|^{1-1/p}||v||_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)}. \tag{4.1.4}$$

Cette inégalité ne faisant intervenir que des expressions continues sur $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$, il suffit de la montrer pour v dans un sous-ensemble dense de $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$, par exemple $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$.
Soit $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$. Puisque $p > 1$, $s \in \mathbb{R} \to |s|^p \in \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$, donc

$$\begin{aligned}|v(x'+h,0) - v(x',0)|^p \;&=\; -\int_0^{+\infty} p|v(x'+h,x_N) - v(x',x_N)|^{p-1}\mathrm{sgn}(v(x'+h,x_N) - v(x',x_N))\\ &\qquad (\partial_N v(x'+h,x_N) - \partial_N v(x',x_N))\,dx_N,\end{aligned}$$

soit, après majoration et intégration sur $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, grâce à l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}&||\tau_h(\gamma_0(v)) - \gamma_0(v)||^p_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}\\ &\le\; p\int_{\mathbb{R}_+^N} |\tau_h(v) - v|^{p-1}(x',x_N)|\tau_h(\partial_N v) - \partial_N v|(x',x_N)\,dx'\,dx_N\\ &\le\; p||\tau_h(v) - v||^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}_+^N)}||\tau_h(\partial_N v) - \partial_N v||_{L^p(\mathbb{R}_+^N)}\\ &\le\; 2p||\partial_N v||_{L^p(\mathbb{R}_+^N)}||\tau_h(v) - v||^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}_+^N)}\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

(on a effectué le changement de variable $y = x + h$, de $\mathbb{R}^N_+$ dans $\mathbb{R}^N_+$ car $h \in \mathbb{R}^{N-1}$, pour trouver que la norme de $\tau_h(\partial_N v)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N_+)$ est égale à la norme de $\partial_N v$ dans ce même espace).
Or, toujours puisque $v \in \mathcal{C}^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+})$, on a

$$|v(x+h) - v(x)|^p = \left|\int_0^1 \nabla v(x+th) \cdot h\, dt\right|^p \le \int_0^1 |\nabla v(x+th)|^p |h|^p\, dt,$$

soit, en intégrant sur $x \in \mathbb{R}^N_+$ et en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$||\tau_h(v) - v||^p_{L^p(\mathbb{R}^N_+)} \le |h|^p \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla v(x+th)|^p\, dx\right) dt.$$

Mais, pour tout $t \in [0,1]$, le changement de variable $y = x + th$ (de $\mathbb{R}^N_+$ dans $\mathbb{R}^N_+$, puisque $h \in \mathbb{R}^{N-1}$) donne

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla v(x+th)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla v(y)|^p\, dy \le ||v||^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)},$$

et on trouve donc

$$||\tau_h(v) - v||_{L^p(\mathbb{R}^N_+)} \le |h| \times ||v||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)},$$

ce qui, associé à (4.1.5), donne (4.1.4).

$\diamondsuit$ Etape 3: conclusion pour $p < \infty$.
Soit $(u_n)_{n\ge1}$ une suite bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$. On prend $(O_i, \varphi_i)_{i\in[1,k]}$ un système de cartes de Ω et $(\theta_i)_{i\in[1,k]}$ une partition de l'unité associée; d'après la définition (4.1.2) de γ, il suffit de montrer que l'on peut, pour tout $i \in [1,k]$, extraire une suite de $(v_n^{(i)})_{n\ge1} = ((\theta_i u_n)_{|O_i\cap\Omega} \circ \varphi^{-1})_{n\ge1} \in W^{1,p}(B^N_+)$, encore notée $(v_n^{(i)})_{n\ge1}$, telle que $(\gamma_1(v_n^{(i)}))_{n\ge1}$ converge dans $L^p(B^{N-1})$ (car alors, par extraction diagonale, on pourra choisir une suite extraite commune à tous les $i \in [1,k]$, ce qui nous donnera, la composition par φ_i et l'extension P_i étant continues dans les espaces L^p, la convergence de $(\gamma(u_n))_{n\ge1}$).
Soit donc $i \in [1,k]$ et notons $f_n = \gamma_1(v_n^{(i)})$; nous voulons montrer que $(f_n)_{n\ge1}$ est relativement compacte dans $L^p(B^{N-1})$ en utilisant le théorème de Kolmogorov.
Comme $(u_n)_{n\ge1}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ et comme la multiplication par θ_i et la composition par φ_i^{-1} sont linéaires continues, $(v_n^{(i)})_{n\ge1}$ est bornée dans $W^{1,p}(B^N_+)$; de plus, pour tout $n \ge 1$, le support de $v_n^{(i)}$ est contenu dans $\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i)) = K_i$ compact de B^N. L'extension $E(v_n^{(i)})$ de $v_n^{(i)}$ à $\mathbb{R}^N_+$ par 0 hors de B^N_+ est donc dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.
Soit $P : L^p(B^{N-1}) \to L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ le prolongement par 0 hors de B^{N-1}; comme $(f_n)_{n\ge1}$ est bornée dans $L^p(B^{N-1})$ ($(v_n^{(i)})_{n\ge1}$ est bornée dans $W^{1,p}(B^N_+)$), $\{Pf_n\,,\ n \ge 1\}$ est borné dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$; il ne reste donc plus qu'à voir l'équicontinuité des translations.
On a $Pf_n = \gamma_0(E(v_n^{(i)}))$ ($f_n = \gamma_1(v_n^{(i)})$ dans $L^p(B^{N-1})$ et Pf_n tout comme $\gamma_0(E(v_n^{(i)}))$ sont nuls hors de B^{N-1}); puisque $E(v_n^{(i)})$ ainsi que son gradient sont nuls hors de B^N_+, par (4.1.4) appliqué à $E(v_n^{(i)}) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, on obtient

$$||\tau_h(Pf_n) - Pf_n||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \le (2p)^{1/p} |h|^{1-1/p} ||v_n^{(i)}||_{W^{1,p}(B^N_+)},$$

soit, en notant M une borne de $(v_n^{(i)})_{n\ge1}$ dans $W^{1,p}(B^N_+)$,

$$||\tau_h(Pf_n) - Pf_n||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \le (2p)^{1/p} M |h|^{1-1/p}.$$

p étant strictement supérieur à 1, cela donne l'équicontinuité des translations sur $\{Pf_n\,,\ n \ge 1\}$ et conclut cette preuve. ■

4.2 Intégration par Parties

4.2.1 Normale Extérieure à $\partial\Omega$

Dans toute cette partie, Ω est un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$.

Construction
On définit, pour $x \in \partial\Omega$, l'espace tangeant à $\partial\Omega$ en x par

$$T_x\partial\Omega = \{c'(0)\,;\ c :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \partial\Omega \text{ lipschitzienne}\,,\ c(0) = x\,,\ c \text{ dérivable en } 0\}.$$

On remarque que cette définition ne dépend que de $\partial\Omega$ (pas d'un système de paramétrisations de $\partial\Omega$).

Proposition 4.2.1 *Pour σ-presque tout $x \in \partial\Omega$, $T_x\partial\Omega$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^N$.*

DÉMONSTRATION:
Puisque $\partial\Omega$ peut être recouvert par un nombre fini de paramétrisations locales, il suffit de montrer que, pour toute paramétrisation locale $(\tau, O \cap \partial\Omega)$ de $\partial\Omega$, $T_x\partial\Omega$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^N$ pour σ-presque tout $x \in O \cap \partial\Omega$.
Par la proposition 2.2.1, on sait qu'il existe $A \subset B^{N-1}$ de mesure nulle tel que, pour tout $y \in B^{N-1}\backslash A$, τ est dérivable en y et $\frac{\partial\tau}{\partial y_1}(y) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\tau}{\partial y_{N-1}}(y) \neq 0$, c'est-à-dire que les vecteurs $(\frac{\partial\tau}{\partial y_1}(y), \ldots, \frac{\partial\tau}{\partial y_{N-1}}(y))$ sont libres; l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs, qui n'est autre que $\mathrm{Im}(\tau'(y))$, est alors un hyperplan. Nous allons voir que, pour tout $y \in B^{N-1}\backslash A$, $T_{\tau(y)}\partial\Omega = \mathrm{Im}(\tau'(y))$; comme

$$\sigma(\tau(A)) = \int_A \left|\frac{\partial\tau}{\partial y_1}(y) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\tau}{\partial y_{N-1}}(y)\right| dy = 0,$$

on en déduira bien que, pour σ-presque tout $x \in O\cap\partial\Omega$ (pour $x \in O\cap\partial\Omega\backslash\tau(A)$), $T_x\partial\Omega$ est un hyperplan.

Soit $y \in B^{N-1}\backslash A$ et $x = \tau(y)$.
Prenons $h \in \mathbb{R}^{N-1}$ et posons, pour $|t| < \mathrm{dist}(y, \mathbb{R}^{N-1}\backslash B^{N-1})/|h|$, $c(t) = \tau(y + th) \in \partial\Omega$; τ étant lipschitzienne et dérivable en y, c est lipschitzienne et dérivable en 0; ainsi, $c'(0) = \tau'(y)h \in T_x\partial\Omega$. Ceci étant vrai pour tout $h \in \mathbb{R}^{N-1}$, on en déduit $\mathrm{Im}(\tau'(y)) \subset T_x\partial\Omega$.
Prenons maintenant $c :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \partial\Omega$ lipschitzienne, valant x en 0 et dérivable en 0; quitte à réduire ε, on peut supposer que $c(]-\varepsilon,\varepsilon[) \subset O \cap \partial\Omega$; notons $\overline{c} = \tau^{-1} \circ c$. Par définition, $c(t) = x + c'(0)t + t\eta(t)$, avec $\eta(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$; par dérivabilité de τ en y, on a $\tau(\overline{c}(t)) = \tau(y) + \tau'(y)(\overline{c}(t) - y) + ||\overline{c}(t) - y||\widetilde{\eta}(\overline{c}(t) - y)$, où $\widetilde{\eta}(X) \to 0$ lorsque $X \to 0$. Comme $\tau(y) = x$ et $\tau(\overline{c}(t)) = c(t)$, on obtient donc $\tau'(y)(\overline{c}(t) - y) + ||\overline{c}(t) - y||\widetilde{\eta}(\overline{c}(t) - y) = tc'(0) + t\eta(t)$, soit, en divisant par $t > 0$,

$$c'(0) = \tau'(y)\left(\frac{\overline{c}(t) - y}{t}\right) + \left|\left|\frac{\overline{c}(t) - y}{t}\right|\right|\widetilde{\eta}(\overline{c}(t) - y) - \eta(t). \tag{4.2.1}$$

Or $\overline{c} = \tau^{-1} \circ c$ est, comme τ^{-1} et c, lipschitzienne, donc $(\frac{\overline{c}(t)-y}{t})_{t\in]0,\varepsilon[}$ est borné dans $\mathbb{R}^N$ (rappelons que $\overline{c}(0) = y$); il existe donc $t_n \to 0$ tel que $\frac{\overline{c}(t_n)-y}{t_n} \to \zeta \in \mathbb{R}^N$. En appliquant (4.2.1) avec t_n à la place de t puis en passant à la limite $n \to \infty$, on trouve donc $c'(0) = \tau'(y)\zeta \in \mathrm{Im}(\tau'(y))$. Ceci étant vrai pour toute courbe lipschitzienne c passant par x en 0 et dérivable en 0, on en déduit $T_x\partial\Omega \subset \mathrm{Im}(\tau'(y))$, ce qui conclut la démonstration. ■

On peut donc, pour σ-presque tout $x \in \partial\Omega$, définir une normale unitaire (pour la norme euclidienne) au bord de $\partial\Omega$, i.e. un vecteur unitaire de $(T_x\partial\Omega)^\perp$. Il faut cependant faire un choix (on a deux tels vecteurs possibles), de telle sorte que l'on obtienne une application $x \in \partial\Omega \to \mathbf{n}(x) \in (T_x\partial\Omega)^\perp \subset \mathbb{R}^N$ qui soit mesurable (et donc dans $(L^\infty(\partial\Omega))^N$ puisque, pour tout $x \in \partial\Omega$, $|\mathbf{n}(x)| = 1$).
Le choix que nous allons faire est intimement lié à la formule d'intégration par parties, seule justification de l'introduction de cette normale.
Pour définir cette normale, nous avons besoin du lemme suivant, qui sera aussi primordial pour démontrer la formule d'intégration par parties.

Lemme 4.2.1 *Si $\varphi : U \to V$ est un homéomorphisme localement lipschitzien entre deux ouverts connexes de $\mathbb{R}^N$, il existe $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ tel que, pour tout $x \in U$ point de dérivabilité de φ, on a $\varepsilon J\varphi(x) \geq 0$. Si de plus φ est bilipschitzien, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in U$ point de dérivabilité de φ, on a $\varepsilon J\varphi(x) \geq C$.*

Remarque 4.2.1

1) Le résultat de ce lemme (trivial dans le cas où φ est un difféomorphisme) est assez fort; en effet, le jacobien de φ est tout au plus L^∞, et il n'est donc pas du tout évident qu'il ait un signe.

2) En fait, seul le cas où φ est un homéomorphisme bilipschitzien entre deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$ nous intéressera. Cependant, nous citons ce lemme un peu plus général car il nous semble intéressant pour lui-même.

Démonstration:
La démonstration de ce lemme repose sur l'utilisation du degré topologique, que nous noterons d. Pour utiliser cet outil, nous devons donc dans un premier temps supposer que U est borné.

$\diamondsuit$ Etape 1: on suppose que W et W' sont des ouverts connexes de $\mathbb{R}^N$, que W est borné et que φ est un homéomorphisme localement lipschitzien entre W et W' ainsi qu'entre $\overline{W}$ et $\overline{W'}$ (en particulier, φ est continue sur $\overline{W}$ et on peut parler du degré de φ sur W en un point $y \in \mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial W)$).
On a alors $\varphi(\partial W) = \partial W'$.

Commençons par constater que, si $(y_0, y_1) \in W'$, alors $d(\varphi, W, y_0) = d(\varphi, W, y_1)$. En effet, W' étant un ouvert connexe, il est connexe par arc, donc il existe une application continue $y : [0,1] \to W'$ telle que $y(0) = y_0$ et $y(1) = y_1$; pour tout $t \in [0,1]$, on a donc $y(t) \notin \varphi(\partial W)$, puisque $\varphi(\partial W) = \partial W'$. Ainsi, par la propriété d'invariance du degré topologique par homotopie, $d(\varphi, W, y(t))$ est indépendant de t, ce qui donne bien $d(\varphi, W, y_0) = d(\varphi, W, y_1)$. Le degré de φ sur W en $y \in W'$ ne dépendant pas de y, nous le noterons $d(\varphi, W, W')$; c'est un entier relatif.

Soit $x_0 \in W$ point de dérivabilité de φ. Si $\varphi'(x_0) \notin \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$, alors $J\varphi(x_0) = 0$ et il n'y a rien à prouver (quel que soit le choix de ε que l'on fera dans $\{-1, 1\}$, on aura $\varepsilon J\varphi(x_0) \geq 0$).
On suppose donc que $\varphi'(x_0)$ est inversible. Dans ce cas, le lemme 1.2.1 nous dit que φ^{-1} est dérivable en $\varphi(x_0)$ (de dérivée $(\varphi'(x_0))^{-1}$); en particulier, il existe $M > 0$ et $O \subset W'$ voisinage de $\varphi(x_0)$ tels que, pour tout $z \in O$,

$$|\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(\varphi(x_0)) - (\varphi'(x_0))^{-1}(z - \varphi(x_0))| \leq M|z - \varphi(x_0)|,$$

ce qui implique

$$|\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(\varphi(x_0))| \leq (M + ||(\varphi'(x_0))^{-1}||)\,|z - \varphi(x_0)|.$$

Soit $x \in \varphi^{-1}(O)$; en appliquant cette dernière inégalité à $z = \varphi(x)$, on trouve donc

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \geq K|x - x_0|, \tag{4.2.2}$$

avec $K = 1/(M + ||(\varphi'(x_0))^{-1}||) > 0$.
Par définition de la dérivabilité de φ en x_0, $|\varphi(x) - \varphi(x_0) - \varphi'(x_0)(x - x_0)| \leq |x - x_0|\eta(|x - x_0|)$ avec $\eta(s) \to 0$ lorsque $s \to 0$. $\varphi^{-1}(O)$ étant un voisinage de x_0, on peut donc trouver $\alpha > 0$ tel que $\eta(\alpha) < K$ et $\overline{B(x_0, \alpha)} \subset \varphi^{-1}(O)$.
Comme $B(x_0, \alpha)$ et $\emptyset$ sont des ouverts disjoints de W et $\varphi(x_0) \notin \varphi(\overline{W} \backslash (B(x_0, \alpha) \cup \emptyset))$ ($\varphi : \overline{W} \to \overline{W'}$ étant un homéomorphisme, la seule solution $x \in \overline{W}$ de $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ est $x = x_0$), la propriété d'additivité du degré nous permet de voir que $d(\varphi, W, W') = d(\varphi, W, \varphi(x_0)) = d(\varphi, B(x_0, \alpha), \varphi(x_0)) + d(\varphi, \emptyset, \varphi(x_0)) = d(\varphi, B(x_0, \alpha), \varphi(x_0))$.
Soit $h : [0,1] \times \overline{B(x_0, \alpha)} \to \mathbb{R}^N$ définie par $h(t, x) = \varphi(x) + t(\varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) - \varphi(x))$. h est continue et, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(x_0) \notin h(t, \partial B(x_0, \alpha))$; en effet, dans le cas contraire, on aurait $x \in \partial B(x_0, \alpha)$ tel que $\varphi(x) - \varphi(x_0) = t(\varphi(x) - \varphi(x_0) - \varphi'(x_0)(x - x_0))$, soit, en prenant les normes et en utilisant (4.2.2),

$$\begin{aligned} K\alpha &= K|x - x_0| \\ &\leq |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \\ &\leq |\varphi(x) - \varphi(x_0) - \varphi'(x_0)(x - x_0)| \\ &\leq |x - x_0|\eta(|x - x_0|) = \alpha\eta(\alpha). \end{aligned}$$

En divisant par $\alpha > 0$, on en déduirait $\eta(\alpha) \geq K$, ce qui est une contradiction avec le choix de α. L'invariance du degré par homotopie nous donne donc $d(\varphi, W, W') = d(h(0, \cdot), B(x_0, \alpha), \varphi(x_0)) = d(h(1, \cdot), B(x_0, \alpha), \varphi(x_0)) = d(\varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(\cdot - x_0), B(x_0, \alpha), \varphi(x_0))$. Mais $\psi = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(\cdot - x_0)$ est

$\mathcal{C}^\infty$, n'a aucun point critique (car, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\psi'(x) = \varphi'(x_0)$ est inversible), et le seul antécédent de $\varphi(x_0)$ par ψ est x_0 (ψ est injective sur $\mathbb{R}^N$); donc, par construction du degré, $d(\psi, B(x_0, \alpha), \varphi(x_0)) = \mathrm{sgn}(J\psi(x_0)) = \mathrm{sgn}(\det(\varphi'(x_0))) = \mathrm{sgn}(J\varphi(x_0))$.

Ainsi, on a montré que, pour tout $x \in W$ point de dérivabilité de φ, on a soit $J\varphi(x) = 0$, soit $\mathrm{sgn}(J\varphi(x)) = d(\varphi, W, W')$; on en déduit que, s'il existe $x_0 \in W$ tel que $J\varphi(x_0) \neq 0$, alors $\varepsilon = d(\varphi, W, W')$ est dans $\{-1, +1\}$ et vérifie, pour tout $x \in W$ point de dérivabilité de φ, $\varepsilon J\varphi(x) \geq 0$.

$\diamondsuit$ Etape 2: on prouve la première partie du lemme.
Si, pour tout $x \in U$ point de dérivabilité de φ, on a $J\varphi(x) = 0$, il n'y a rien à prouver. Supposons donc que ce n'est pas le cas et prenons $x_0 \in U$ un point de dérivabilité de φ tel que $J\varphi(x_0) \neq 0$. On note $\varepsilon = \mathrm{sgn}(J\varphi(x_0)) \in \{-1, 1\}$. Nous allons montrer que ce ε convient, i.e. que pour tout $x \in U$ point de dérivabilité de φ, on a $\varepsilon J\varphi(x) \geq 0$.

Soit $x \in U$ point de dérivabilité de φ. U étant connexe, il est connexe par arc; il existe donc un arc C (donc un ensemble compact) dans U qui relie x à x_0. Soit $s < \mathrm{dist}(C, \mathbb{R}^N \backslash U)/2$ et $W = C + B(0, s)$; W est un ouvert relativement compact dans U (en effet, W est borné puisque C est borné et $\overline{W} = C + \overline{B(0, s)} \subset U$ par choix de s); W est de plus connexe (en effet, si $(a, b) \in W$, alors il existe $(a', b') \in C$ tels que $a \in a' + B(0, s)$ et $b \in b' + B(0, s)$; les boules étant connexes par arc, on peut relier a à a' par un arc dans $a' + B(0, s) \subset W$, ainsi que b à b' par un arc dans $b' + B(0, s) \subset W$; puisque $(a', b') \in C$, ces deux points sont reliables par un arc inclus dans W — cet arc est simplement un bout de C — , ce qui prouve que l'on peut finalement relier a à b par un arc dans W).
W étant connexe relativement compact dans U, on constate que $W' = \varphi(W)$ est un ouvert connexe dans V et que φ est un homéomorphisme entre W et W ainsi qu'entre $\overline{W}$ et $\overline{W'}$. Ainsi, par l'étape 1, comme $x_0 \in W$ est un point non-singulier de φ, il existe $\varepsilon_W \in \{-1, 1\}$ tel que, pour tout $y \in W$ point de dérivabilité de φ, on a $\varepsilon_W J\varphi(y) \geq 0$. Puisque $x_0 \in W$ est un point de dérivabilité de φ, on en déduit $\varepsilon_W J\varphi(x_0) = \varepsilon_W \varepsilon \geq 0$, donc $\varepsilon_W = \varepsilon$; et comme $x \in W$ est un point de dérivabilité de φ, on obtient finalement $\varepsilon J\varphi(x) = \varepsilon_W J\varphi(x) \geq 0$, ce qui conclut la démonstration de la première partie du lemme.

$\diamondsuit$ Etape 3: on suppose de plus que φ est bilipschitzienne.
Si φ est dérivable en x alors, en utilisant le caractère lipschitzien de φ^{-1} nous avons, pour tout $h \in \mathbb{R}^N$ et t assez petit, $|\varphi(x + th) - \varphi(x)| \geq (\mathrm{Lip}(\varphi^{-1}))^{-1}|th|$, soit, en divisant par t et en faisant tendre t vers 0, $|\varphi'(x)h| \geq (\mathrm{Lip}(\varphi^{-1}))^{-1}|h|$. Ainsi, $\varphi'(x)$ est inversible (elle est injective), d'inverse $A_x \in M_N(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $v \in \mathbb{R}^N$, $|A_x v| \leq \mathrm{Lip}(\varphi^{-1})|v|$ (c'est l'inégalité précédente appliquée à $h = A_x v$), donc $|A_x| \leq \mathrm{Lip}(\varphi^{-1})$. On a $J\varphi(x) = \det(\varphi'(x)) = (\det(A_x))^{-1}$; or le déterminant est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice, donc puisque $|A_x| \leq \mathrm{Lip}(\varphi^{-1})$, il existe C_1 ne dépendant que de $\mathrm{Lip}(\varphi^{-1})$ (pas de x) tel que $|\det(A_x)| \leq C_1$; on en déduit donc, pour tout x point de dérivabilité de φ, $|J\varphi(x)| \geq C > 0$, avec $C = 1/C_1$, ce qui conclut la démonstration du lemme. $\blacksquare$

Nous pouvons maintenant définir une normale unitaire à $\partial\Omega$, que nous dirons "extérieure" (voir la sous-section suivante pour une justification de cette terminologie).
Soit $C = (O_i, \varphi_i)_{i \in [1,k]}$ un système de cartes de Ω et $P = (\theta_i)_{i \in [1,k]}$ une partition de l'unité associée à C. Puisque, pour tout $i \in [1, k]$, $\varphi_i^{-1} : B^N \to O_i$ est un homéomorphisme bilipschitzien, il existe, par le lemme 4.2.1, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ tel que, lorsque φ_i^{-1} est dérivable en $x \in B^N$, $\varepsilon_i J\varphi_i^{-1}(x) > 0$.
En notant $\tau_i : B^{N-1} \to O_i \cap \partial\Omega$ la paramétrisation locale associée à φ_i (i.e. $\tau_i = {\varphi_i^{-1}}_{|B^{N-1}}$), on définit σ-presque partout sur $\partial\Omega$ une normale extérieure par

$$\mathbf{n}_{C,P}(x) = -\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \theta_i(x) \left(\frac{\frac{\partial \tau_i}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau_i}{\partial y_{N-1}}}{\left| \frac{\partial \tau_i}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau_i}{\partial y_{N-1}} \right|} \right) \circ \tau_i^{-1}(x).$$

(on a bien sûr étendu les fonctions $\theta_i \left(\frac{\frac{\partial \tau_i}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau_i}{\partial y_{N-1}}}{\left| \frac{\partial \tau_i}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau_i}{\partial y_{N-1}} \right|} \right) \circ \tau_i^{-1}$ par 0 hors de leur domaine de définition $O_i \cap \partial\Omega$). Clairement, $\mathbf{n}_{C,P} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ est mesurable et essentiellement bornée.
Comme, pour σ-presque tout $x \in O_i \cap \partial\Omega$,

$$\left(\frac{\partial \tau_i}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau_i}{\partial y_{N-1}} \right) (\tau_i^{-1}(x)) \perp T_x \partial\Omega$$

(cf la démonstration de la proposition 4.2.1: on a montré que, pour λ_{N-1}-presque tout $y \in B^{N-1}$, $T_{\tau_i(y)}\partial\Omega = \mathrm{Vect}(\frac{\partial \tau_i}{\partial y_1}(y), \ldots, \frac{\partial \tau_i}{\partial y_{N-1}}(y)))$, on a bien $\mathbf{n}_{C,P}(x) \perp T_x\partial\Omega$ pour σ-presque tout $x \in \partial\Omega$.
Pour l'instant, la normale que nous avons défini semble dépendre du système de cartes C et de la partition de l'unité associée P choisis. Supposons un instant que cette normale ne dépend pas de (C, P), i.e. qu'il existe $\mathbf{n} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ telle que, pour tout système de cartes C et toute partition de l'unité associée P, on ait $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{C,P}$ σ-presque partout sur $\partial\Omega$. Soit alors $C = (O_i, \varphi_i)_{i\in[1,k]}$ un système de cartes et $P = (\theta_i)_{i\in[1,k]}$ une partition de l'unité associée à C. Soit $i_0 \in [1, k]$ et K un compact de O_{i_0}; il existe $\Theta \in \mathcal{C}_c^\infty(O_i)$ telle que $0 \le \Theta \le 1$ et $\Theta \equiv 1$ sur K; $\widetilde{C} = ((O_{i_0}, \varphi_{i_0}), (O_1, \varphi_1), \ldots, (O_k, \varphi_k))$ (on répète la carte (O_{i_0}, φ_{i_0}) deux fois dans $\widetilde{C}$) est un système de cartes de Ω et $\widetilde{P} = (\Theta, (1-\Theta)\theta_1, \cdots, (1-\Theta)\theta_k)$ est une partition de l'unité associée à $\widetilde{C}$; on sait donc que $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{\widetilde{C},\widetilde{P}}$ σ-presque partout sur $\partial\Omega$; or, σ-presque partout sur $K \cap \partial\Omega$, on a

$$\mathbf{n}_{\widetilde{C},\widetilde{P}} = -\varepsilon_{i_0} \left(\frac{\frac{\partial \tau_{i_0}}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau_{i_0}}{\partial y_{N-1}}}{\left| \frac{\partial \tau_{i_0}}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \tau_{i_0}}{\partial y_{N-1}} \right|} \right) \circ \tau_{i_0}^{-1},$$

ce qui signifie que $|\mathbf{n}| = |\mathbf{n}_{\widetilde{C},\widetilde{P}}| = 1$ σ-presque partout sur $K \cap \partial\Omega$; ceci étant vrai pour tout $i_0 \in [1, k]$ et tout compact K de O_{i_0}, on en déduit $|\mathbf{n}| = 1$ σ-presque partout sur $\cup_{i=1}^k O_i \cap \partial\Omega = \partial\Omega$, i.e. que $\mathbf{n}$ est unitaire.
Nous verrons, au cours de la démonstration de la formule d'intégration par parties, que la normale ci-dessus est bien indépendante de (C, P). Modulo ce résultat, on a donc construit une normale unitaire extérieure $\mathbf{n} \in (L^\infty(\partial\Omega))^N$, qui ne dépend que de Ω.

Cas d'un Ouvert Fortement Lipschitzien

Lorsque Ω est fortement lipschitzien, les choses sont sensiblement plus simples; on peut en effet voir immédiatement le caractère intrinsèque de $\mathbf{n}$ et justifier le terme "extérieur".
Le problème revient donc à choisir de manière intrinsèque et mesurable, pour σ-presque tout $x \in \partial\Omega$, un vecteur unitaire $\widetilde{\mathbf{n}}(x)$ de $(T_x\partial\Omega)^\perp$.
Pour faire un tel choix mesurable, nous prendrons la "normale extérieure à $\partial\Omega$" dans le sens

$$\text{Pour } \sigma\text{-presque tout } x \in \partial\Omega,\ \exists \varepsilon_x > 0 \text{ tel que, } \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_x[\,,\ x + \varepsilon\widetilde{\mathbf{n}}(x) \notin \Omega. \tag{4.2.3}$$

Si ceci a un sens (i.e. si (4.2.3) définit bien une unique normale mesurable), cette définition ne dépend que de Ω, pas d'un eventuel système de cartes locales de $\partial\Omega$.

Afin de montrer qu'une telle normale existe et donne un choix unique et mesurable, nous allons utiliser un couple (V, η) donné par la définition de Ω fortement lipschitzien; prenons $x \in V \cap \partial\Omega$ tel que $T_x\partial\Omega = \mathrm{Im}(\tau'(y_x))$, où $(\tau, V \cap \partial\Omega)$ est la paramétrisation locale issue de (V, η) (i.e. $\tau(y) = (y, \eta(y))$) et $y_x = \tau^{-1}(x)$. Par la démonstration de la proposition 4.2.1, on sait que σ-presque tout $x \in V \cap \partial\Omega$ satisfait cette égalité.
On a donc

$$\begin{aligned} T_x\partial\Omega &= \mathrm{Im}(\tau'(y_x)) \\ &= \mathrm{Im}(Id_{\mathbb{R}^{N-1}}, \eta'(y_x)) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\left(e_i + \left(0, \ldots, 0, \frac{\partial \eta}{\partial y_i}(y_x)\right)\right)_{i\in[1,N-1]} \right). \end{aligned}$$

Les vecteurs normaux unitaires à $T_x\partial\Omega$ sont donc

$$\widetilde{\mathbf{n}}_+(x) = \frac{(\nabla\eta(\tau^{-1}(x)), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla\eta(\tau^{-1}(x))|^2}} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\mathbf{n}}_-(x) = -\frac{(\nabla\eta(\tau^{-1}(x)), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla\eta(\tau^{-1}(x))|^2}}.$$

Nous allons montrer que seul $\widetilde{\mathbf{n}}_+$ vérifie la condition (4.2.3), ce qui nous permettra de voir que n est définie de manière unique et est mesurable (car $x \to \widetilde{\mathbf{n}}_+(x)$ est mesurable sur $V \cap \partial\Omega$).
Par définition de $\nabla\eta$, on a $\eta(y_x + r\nabla\eta(y_x)) = \eta(y_x) + r|\nabla\eta(y_x)|^2(1 + \delta(r))$, avec $\delta(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$.
Donc, en prenant $\kappa \in \{-1, +1\}$, on a, pour $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V$,

$$x + \varepsilon\widetilde{\mathbf{n}}_\kappa(x) \notin \Omega \iff \left(y_x + \kappa\frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + |\nabla\eta(y_x)|^2}}\nabla\eta(y_x), \eta(y_x) + \kappa\frac{-\varepsilon}{\sqrt{1 + |\nabla\eta(y_x)|^2}} \right) \notin \Omega$$

$$\iff \quad \eta\left(y_x + \kappa\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+|\nabla\eta(y_x)|^2}}\nabla\eta(y_x)\right) \geq \eta(y_x) + \kappa\frac{-\varepsilon}{\sqrt{1+|\nabla\eta(y_x)|^2}}$$

$$\iff \quad \kappa\frac{|\nabla\eta(y_x)|^2}{\sqrt{1+|\nabla\eta(y_x)|^2}}(1+\overline{\delta}(\varepsilon)) \geq \kappa\frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla\eta(y_x)|^2}}$$

(où $\overline{\delta}(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$). La condition“$x + \varepsilon\widetilde{\mathbf{n}}_\kappa(x) \notin \Omega$ pour tout ε assez petit” n'est donc réalisée que dans le cas $\kappa = +1$ (dans le cas $\kappa = -1$, la dernière inégalité n'est pas réalisée lorsque $\varepsilon \to 0$; dans le cas $\kappa = +1$, elle est réalisée dès que $\overline{\delta}(\varepsilon) \geq -1$, i.e. pour tout ε assez petit).

La normale ainsi construite dans le cas fortement lipschitzien est bien sûr la même que celle que l'on a construite dans la partie précédente; en effet, une fois que l'on sait que $\mathbf{n}_{C,P}$ construit dans la partie précédente ne dépend pas de (C, P), on peut calculer localement $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{C,P}$ dans la paramétrisation $(\tau, V \cap \partial\Omega)$ adaptée à (V, η).
On commence par constater que la carte locale (O, φ) adaptée à (V, η) est, à une translation et une homothétie près, $O = V$ et $x \to (x', x_N - \eta(x'))$; le jacobien de φ est donc du même signe que

$$\begin{vmatrix} Id & 0 \\ -\eta' & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

c'est-à-dire positif; le ε associé à φ dans la définition de $\mathbf{n}_{C,P}$ est donc $+1$.
De plus,

$$\frac{\partial\tau}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\tau}{\partial y_{N-1}} = (e_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial y_1} \end{pmatrix}) \wedge \cdots \wedge (e_{N-1} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial y_{N-1}} \end{pmatrix}).$$

Or le vecteur $(\nabla\eta, -1)$ est orthogonal à chaque vecteur $(e_i + (0, \ldots, 0, \frac{\partial\eta}{\partial y_i}))_{i\in[1,N-1]}$, donc proportionnel à $\frac{\partial\tau}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\tau}{\partial y_{N-1}}$; de plus, la N-ème composante de

$$(e_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial y_1} \end{pmatrix}) \wedge \cdots \wedge (e_{N-1} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial y_{N-1}} \end{pmatrix})$$

est

$$(e_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial y_1} \end{pmatrix}) \wedge \cdots \wedge (e_{N-1} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial y_{N-1}} \end{pmatrix}) \cdot e_N = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial y_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial\eta}{\partial y_{N-1}} & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

et on peut donc en déduire $\frac{\partial\tau}{\partial y_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\tau}{\partial y_{N-1}} = -(\nabla\eta, -1)$, soit, σ-presque partout sur $V \cap \partial\Omega$, $\mathbf{n}_{C,P} = \widetilde{\mathbf{n}}$.

4.2.2 Intégration par Parties

Nous commençons par prouver quelques lemmes techniques préliminaires avant de citer et démontrer le théorème principal.

Lemme 4.2.2 *Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$; on note, pour $(i,j) \in [1,N]^2$ et $x \in \mathbb{R}^N$, $\Delta^\psi_{i,j}(x)$ le mineur (i,j) de $\psi'(x)$, c'est-à-dire*

$$\Delta^\psi_{i,j}(x) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_{j-1}}(x) & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_{j+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_N}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial x_{j-1}}(x) & \frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial x_{j+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial x_N}(x) \\ \frac{\partial\psi_{i+1}}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\psi_{i+1}}{\partial x_{j-1}}(x) & \frac{\partial\psi_{i+1}}{\partial x_{j+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial\psi_{i+1}}{\partial x_N}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\psi_N}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\psi_N}{\partial x_{j-1}}(x) & \frac{\partial\psi_N}{\partial x_{j+1}}(x) & \cdots & \frac{\partial\psi_N}{\partial x_N}(x) \end{vmatrix}.$$

On a alors, pour tout $(i,j) \in [1,N]^2$ *et* $x \in \mathbb{R}^N$,

i) $\sum_{k=1}^N \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k}(x)\Delta_{i,k}^{\psi}(x) = \delta_{i,j} J\psi(x)$ *(où* $\delta_{i,j}$ *est le symbole de Krönecker),*

ii) $\sum_{k=1}^N \frac{\partial \Delta_{i,k}^{\psi}}{\partial x_k}(x) = 0$.

DÉMONSTRATION:
♢ Preuve du point i).
Lorsque $i = j$, la formule est simplement l'expression du développement du déterminant $J\psi(x)$ par rapport à la i-ème ligne.
Lorsque $i \neq j$, le déterminant D obtenu en remplacant la i-ème ligne $(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_N}(x))$ de $\psi'(x)$ par la j-ème ligne $(\frac{\partial \psi_j}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial \psi_j}{\partial x_N}(x))$ est nul (les lignes i et j de D sont identiques); en développant D par rapport à sa i-ème ligne, on trouve alors $\sum_{k=1}^N \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k}(x)\Delta_{i,k}^{\psi}(x) = 0$.

♢ Preuve du point ii).
Introduisons d'abord quelques notations pour simplifier les calculs. i étant fixé, on note

$$f = (\psi_1, \ldots, \psi_{i-1}, \psi_{i+1}, \ldots, \psi_N)^T$$

et, lorsque $l \in [1, N-1]$,

$$\begin{array}{l} \text{pour } l < k,\ X_{k,l} = \partial_l f \\ \text{pour } l \geq k,\ X_{k,l} = \partial_{l+1} f, \end{array}$$

de sorte que

$$(-1)^i \Delta_{i,k}^{\psi} = (-1)^k \det(X_{k,1}, \ldots, X_{k,N-1}).$$

On a alors, par multilinéarité du déterminant,

$$(-1)^i \partial_k \Delta_{i,k}^{\psi} = \sum_{l=1}^{N-1} (-1)^k \det(X_{k,1}, \ldots, X_{k,l-1}, \partial_k X_{k,l}, X_{k,l+1}, \ldots, X_{k,N-1})$$

d'où, en notant $a_{k,l} = (-1)^k \det(X_{k,1}, \ldots, X_{k,l-1}, \partial_k X_{k,l}, X_{k,l+1}, \ldots, X_{k,N-1})$,

$$\begin{aligned} (-1)^i \sum_{k=1}^N \partial_k \Delta_{i,k}^{\psi} &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{N-1} a_{k,l} \\ &= \sum_{(k,l)\in E} a_{k,l} + \sum_{(k,l)\in F} a_{k,l}, \end{aligned}$$

où $E = \{(k,l) \in [1,N] \times [1,N-1] \mid k > l\}$ et $F = \{(k,l) \in [1,N] \times [1,N-1] \mid k \leq l\}$.
Or l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (a,b) & \longrightarrow & (b, a-1) \end{array} \right.$$

est bien définie et c'est une bijection. En effet, si $(a,b) \in E$, alors $a > 1$ et $a \leq N$, donc $a-1 \in [1, N-1]$, ce qui implique $(b, a-1) \in [1,N] \times [1,N-1]$; de plus, puisque $a > b$, on a bien $b \leq a-1$, donc $(b, a-1) \in F$. L'inverse de cette application est $(a,b) \to (b+1, a)$, qui va bien de F dans E: si $(a,b) \in F$, alors $a \leq b \leq N-1$, donc $(b+1, a) \in [1,N] \times [1,N-1]$ et, puisque $a \leq b$, on a bien $b+1 > a$, c'est-à-dire $(b+1, a) \in E$.
Ainsi, $\sum_{(k,l)\in F} a_{k,l} = \sum_{(k,l)\in E} a_{l,k-1}$, ce qui nous donne

$$(-1)^i \sum_{k=1}^N \partial_k \Delta_{i,k}^{\psi} = \sum_{(k,l)\in E} (a_{k,l} + a_{l,k-1}). \tag{4.2.4}$$

Soit $(k,l) \in E$. On a alors $a_{l,k-1} = (-1)^l \det(X_{l,1}, \ldots, X_{l,k-2}, \partial_l X_{l,k-1}, X_{l,k}, \ldots, X_{l,N-1})$.
De plus:

- si $b < l < k$, alors $X_{l,b} = \partial_b f = X_{k,b}$,

- si $l \leq b < k-1$, alors $X_{l,b} = \partial_{b+1} f = X_{k,b+1}$ (car $b+1 < k$),
- puisque $k-1 \geq l$, $X_{l,k-1} = \partial_k f$ donc, par le théorème de Schwarz, $\partial_l X_{l,k-1} = \partial_k \partial_l f = \partial_k X_{k,l}$ (toujours car $k > l$),
- si $b \geq k > l$, alors $X_{l,b} = \partial_{b+1} f = X_{k,b}$.

En utilisant ces propriétés, on voit donc que

$$a_{l,k-1} = (-1)^l \det(X_{k,1}, \dots, X_{k,l-1}, X_{k,l+1}, \dots, X_{k,k-1}, \partial_k X_{k,l}, X_{k,k}, \dots, X_{k,N-1}). \tag{4.2.5}$$

Lorsque $l = k-1$, la partie $X_{k,l+1}, \dots, X_{k,k-1}$ de cette expression est vide, et on a alors $a_{k-1,k-1} = -(-1)^k \det(X_{k,1}, \dots, X_{k,k-2}, \partial_k X_{k,k-1}, X_{k,k}, \dots, X_{k,N-1}) = -a_{k,k-1}$. Lorsque $l < k-1$, en permutant, dans le déterminant de (4.2.5), les colonnes $(k-1, k-2)$ (celles de $X_{k,k-1}$ et $\partial_k X_{k,l}$), puis les colonnes $(k-2, k-3)$ et ainsi de suite jusqu'aux colonnes $(l+1, l)$ (donc en effectuant $k-l-1$ permutations), on trouve

$$\begin{aligned} a_{l,k-1} &= (-1)^l (-1)^{k-l-1} \det(X_{k,1}, \dots, X_{k,l-1}, \partial_k X_{k,l}, X_{k,l+1}, \dots, X_{k,k-1}, X_{k,k}, \dots, X_{k,N-1}) \\ &= -a_{k,l}. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $(k,l) \in E$, $a_{l,k-1} = -a_{k,l}$, ce qui, grâce à (4.2.4), nous permet de conclure la démonstration. ■

Lemme 4.2.3 *Soit $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application lipschitzienne et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que $\varphi(\partial B^N) \cap \mathrm{supp}(f) = \emptyset$. On a alors, en notant $\tau = \varphi_{|\mathbb{R}^{N-1}} : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^N$, pour tout $i \in [1, N]$,*

$$\int_{B_+^N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi(x) J\varphi(x)\, dx = -\int_{B^{N-1}} f \circ \tau(y) \left(\frac{\partial \tau}{\partial y_1}(y) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \tau}{\partial y_{N-1}}(y) \right)_i dy$$

(où X_i désigne la i-ème composante d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^N$).

Démonstration:
◇ Etape 1: on suppose pour commencer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Par le point i) du lemme 4.2.2, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \Delta_{i,k}^\varphi \partial_k (f \circ \varphi) &= \sum_{k=1}^N \Delta_{i,k}^\varphi \sum_{j=1}^N \partial_j f \circ \varphi \partial_k \varphi_j \\ &= \sum_{j=1}^N \partial_j f \circ \varphi \sum_{k=1}^N \Delta_{i,k}^\varphi \partial_k \varphi_j \\ &= \sum_{j=1}^N \partial_j f \circ \varphi \delta_{i,j} J\varphi \\ &= \partial_i f \circ \varphi J\varphi \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{B_+^N} \partial_i f \circ \varphi J\varphi = \sum_{k=1}^N \int_{B_+^N} \Delta_{i,k}^\varphi \partial_k (f \circ \varphi)$$

Or, par hypothèse, les compacts $\varphi(\partial B^N)$ et $\mathrm{supp}(f)$ sont disjoints, donc à distance $\delta > 0$ l'un de l'autre; ainsi, pour tout $x \in \partial B^N + B(0, \delta/2\mathrm{Lip}(\varphi))$, c'est-à-dire $x = x_0 + h$ où $x_0 \in \partial B_N$ et $|h| < \delta/2\mathrm{Lip}(\varphi)$ on a $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \delta/2$, ce qui implique $\varphi(x) \in \varphi(\partial B^N) + B(0, \delta/2)$ donc $\varphi(x) \notin \mathrm{supp}(f)$; la fonction $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(B^N)$ est donc nulle au voisinage de ∂B^N, ce qui implique que son extension $\widetilde{f \circ \varphi}$ à $\mathbb{R}^N$ par 0 hors de B^N est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.
On a de plus

$$\int_{B_+^N} \partial_i f \circ \varphi J\varphi = \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}_+^N} \Delta_{i,k}^\varphi \partial_k (\widetilde{f \circ \varphi}). \tag{4.2.6}$$

Soit $k \neq N$; on a

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \Delta^\varphi_{i,k}\partial_k(f\circ\varphi) = \int_{\mathbb{R}^{N-2}}\int_{\mathbb{R}^+}\left(\int_{\mathbb{R}} \Delta^\varphi_{i,k}(x)\partial_k(\widetilde{f\circ\varphi})(x)\,dx_k\right) dx_N\,dx_1\cdots dx_{k-1}dx_{k+1}\cdots dx_{N-1}.$$

Or, pour tout $(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_N)\in\mathbb{R}^{N-1}$, $\widetilde{f\circ\varphi}(x_1,\dots,x_{k-1},\cdot,x_{k+1},\dots,x_N)\in\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$, et $\Delta^\varphi_{i,j}(x_1,\dots,x_{k-1},\cdot,x_{k+1},\dots,x_N)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$; une intégration par parties dans $\mathbb{R}$ nous donne donc

$$\begin{aligned}\int_{B^N_+}\Delta^\varphi_{i,k}\partial_k(\widetilde{f\circ\varphi}) &= -\int_{\mathbb{R}^{N-2}}\int_{\mathbb{R}^+}\left(\int_{\mathbb{R}}(\partial_k\Delta^\varphi_{i,k})(x)\widetilde{f\circ\varphi}(x)\,dx_k\right)dx_N\,dx_1\cdots dx_{k-1}dx_{k+1}\cdots dx_N\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N_+}(\partial_k\Delta^\varphi_{i,k})\widetilde{f\circ\varphi}\\ &= -\int_{B^N_+}(\partial_k\Delta^\varphi_{i,k})f\circ\varphi. \qquad (4.2.7)\end{aligned}$$

Etudions maintenant $k=N$. On a

$$\int_{\mathbb{R}^N_+}\Delta^\varphi_{i,N}\partial_N(\widetilde{f\circ\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^+}\Delta^\varphi_{i,N}(x)\partial_N(\widetilde{f\circ\varphi})(x)\,dx_N\right)dx_1\cdot\cdots\cdot dx_{N-1}.$$

Pour tout $(x_1,\dots,x_{N-1})\in\mathbb{R}^{N-1}$, on a $\Delta^\varphi_{i,N}(x_1,\dots,x_{N-1},\cdot)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\widetilde{f\circ\varphi}(x_1,\dots,x_{N-1},\cdot)\in\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$; une intégration par parties dans $\mathbb{R}^+$ donne donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N_+}\Delta^\varphi_{i,N}\partial_N(\widetilde{f\circ\varphi}) &= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\Delta^\varphi_{i,N}(y,0)\widetilde{f\circ\varphi}(y,0)\,dy\\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^+}(\partial_N\Delta^\varphi_{i,N})(x)\widetilde{f\circ\varphi}(x)\,dx_N\right)dx_1\cdot\cdots\cdot dx_{N-1}\\ &= -\int_{B^{N-1}}\Delta^\varphi_{i,N}(y,0)f\circ\tau(y)\,dy-\int_{B^N_+}(\partial_N\Delta^\varphi_{i,N})f\circ\varphi. \qquad (4.2.8)\end{aligned}$$

(4.2.6), (4.2.7), (4.2.8) et le point ii) du lemme 4.2.2 donnent donc

$$\int_{B^N_+}\partial_i f\circ\varphi J\varphi = -\int_{B^{N-1}}\Delta^\varphi_{i,N}(y,0)f\circ\tau(y).$$

Or

$$\begin{aligned}\Delta^\varphi_{i,N}(y,0) &= (-1)^{i+N}\begin{vmatrix}\partial_1\varphi_1(y,0) & \cdots & \partial_{N-1}\varphi_1(y,0)\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1\varphi_{i-1}(y,0) & \cdots & \partial_{N-1}\varphi_{i-1}(y,0)\\ \partial_1\varphi_{i+1}(y,0) & \cdots & \partial_{N-1}\varphi_{i+1}(y,0)\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1\varphi_N(y,0) & \cdots & \partial_{N-1}\varphi_N(y,0)\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}\partial_1\varphi_1(y,0) & \cdots & \partial_{N-1}\varphi_1(y,0) & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \partial_1\varphi_{i-1}(y,0) & \cdots & \partial_{N-1}\varphi_{i-1}(y,0) & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ \partial_1\varphi_{i+1}(y,0) & \cdots & \partial_{N-1}\varphi_{i+1}(y,0) & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \partial_1\varphi_N(y,0) & \cdots & \partial_{N-1}\varphi_N(y,0) & 0\end{vmatrix}. \qquad (4.2.9)\end{aligned}$$

Par définition du produit vectoriel,

$$\begin{array}{rcl}(\partial_1\tau(y)\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau(y))_i &=& \partial_1\tau(y)\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau(y)\cdot e_i\\ &=& \det(\partial_1\tau(y),\cdots,\partial_{N-1}\tau(y),e_i)\\ &=& \left|\begin{array}{cccc}\partial_1\tau_1(y) & \cdots & \partial_{N-1}\tau_1(y) & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \partial_1\tau_{i-1}(y) & \cdots & \partial_{N-1}\tau_{i-1}(y) & 0\\ \partial_1\tau_i(y) & \cdots & \partial_{N-1}\tau_i(y) & 1\\ \partial_1\tau_{i+1}(y) & \cdots & \partial_{N-1}\tau_{i+1}(y) & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \partial_1\tau_N(y) & \cdots & \partial_{N-1}\tau_N(y) & 0\end{array}\right|.\end{array}$$

En retranchant, dans ce dernier déterminant et pour tout $j\in[1,N-1]$, $\partial_j\tau_i(y)$ fois la dernière colonne à la j-ème colonne, on trouve donc

$$(\partial_1\tau(y)\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau(y))_i=\left|\begin{array}{cccc}\partial_1\tau_1(y) & \cdots & \partial_{N-1}\tau_1(y) & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \partial_1\tau_{i-1}(y) & \cdots & \partial_{N-1}\tau_{i-1}(y) & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ \partial_1\tau_{i+1}(y) & \cdots & \partial_{N-1}\tau_{i+1}(y) & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \partial_1\tau_N(y) & \cdots & \partial_{N-1}\tau_N(y) & 0\end{array}\right|. \tag{4.2.10}$$

Or, pour $j\in[1,N-1]$, $\partial_j\tau(y)=\partial_j\varphi(y,0)$; ainsi on déduit de (4.2.9) et (4.2.10) que $\Delta^{\varphi}_{i,N}(y,0)=(\partial_1\tau(y)\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau(y))_i$ pour tout $y\in B^{N-1}$, ce qui conclut la démonstration lorsque φ est régulière.

$\diamondsuit$ Etape 2: on suppose φ seulement lipschitzienne, mais vérifiant: il existe $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $x'\in\mathbb{R}^{N-1}$ et $|x_N|<\varepsilon$, $\varphi(x',x_N)=\varphi(x',0)=\tau(x')$.
Soit $(\rho_n)_{n\geq1}$ une approximation de l'unité dans $\mathbb{R}^{N-1}$ et $(\varrho_n)_{n\geq1}$ une approximation de l'unité dans $\mathbb{R}$, dont le support est inclus dans $]-\varepsilon,\varepsilon[$; on pose, pour $x\in\mathbb{R}^N$, $\zeta_n(x)=\rho_n(x')\varrho(x_N)$; la suite $(\zeta_n)_{n\geq1}$ est une approximation de l'unité dans $\mathbb{R}^N$.

Posons $\varphi_n=\varphi*\zeta_n\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$. On a $\varphi_n\to\varphi$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$; en effet, par le caractère lipschitzien de φ, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}^N$, $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leq\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi(x-t)-\varphi(x)|\zeta_n(t)\,dt\leq\mathrm{Lip}(\varphi)\varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n=\int_{\mathbb{R}^N}|t|\zeta_n(t)\leq\sup\{|t|\,,\ t\in\mathrm{supp}(\zeta_n)\}$ indépendant de x qui converge vers 0 lorsque $n\to\infty$.
Comme $\partial_i f$ est lipschitzienne, on en déduit que $(\partial_i f)\circ\varphi_n\to(\partial_i f)\circ\varphi$ uniformément sur B^N_+; en effet, pour tout $x\in B^N_+$, $|\partial_i f(\varphi_n(x))-\partial_i f(\varphi(x))|\leq\mathrm{Lip}(\partial_i f)|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leq\mathrm{Lip}(\partial_i f)\sup_{\mathbb{R}^N}|\varphi_n-\varphi|\to0$ lorsque $n\to\infty$.
De plus, pour tout $j\in[1,N]$, $\partial_j\varphi_n=\partial_j\varphi*\zeta_n$, donc $(\partial_j\varphi_n)_{n\geq1}$ est borné dans $(L^\infty(\mathbb{R}^N))^N$ (par $||\,|\partial_j\varphi|\,||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$) et converge dans $(L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))^N$ vers $\partial_j\varphi$; quitte à extraire une suite, encore notée $(\varphi_n)_{n\geq1}$, on peut donc supposer que les dérivées de φ_n convergent λ_N-presque partout sur $\mathbb{R}^N$ vers les dérivées de φ en restant bornées dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$; le jacobien étant une fonction continue des dérivées, on en déduit que $J\varphi_n\to J\varphi$ λ_N-presque partout sur $\mathbb{R}^N$ en restant borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$; par convergence dominée, on a donc $J\varphi_n\to J\varphi$ dans $L^1(B^N_+)$.
Puisque $\partial_i f\circ\varphi_n\to\partial_i f\circ\varphi$ uniformément sur B^N_+, on en déduit

$$\int_{B^N_+}\partial_i f\circ\varphi_n J\varphi_n\to\int_{B^N_+}\partial_i f\circ\varphi J\varphi. \tag{4.2.11}$$

On a aussi (et c'est ici que sert l'hypothèse supplémentaire de cette étape sur φ), pour tout $n\geq1$ et tout $y\in\mathbb{R}^{N-1}$, comme $\varphi(x',\cdot)$ est constante sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$ pour tout $x'\in\mathbb{R}^{N-1}$ et comme $\mathrm{supp}(\varrho_n)\subset]-\varepsilon,\varepsilon[$,

$$\begin{array}{rcl}\tau_n(y) &=& \varphi_n(y,0)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}}\varphi(y-t',-t_N)\rho_n(t')\varrho_n(t_N)\,dt_N\,dt'\\ &=& \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\tau(y-t')\rho_n(t')\,dt'\times\int_{\mathbb{R}}\varrho_n(t_N)\,dt_N\\ &=& \tau*\rho_n(y).\end{array}$$

Ainsi, comme pour φ_n (τ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^{N-1}$), on constate que $\tau_n \to \tau$ uniformément sur $\mathbb{R}^{N-1}$ (ceci est aussi une conséquence triviale de la convergence de φ_n vers φ), mais surtout que les dérivées de τ_n convergent (à une sous-suite près) λ_{N-1}-presque partout sur $\mathbb{R}^{N-1}$ vers les dérivées de τ en restant bornées dans $L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$; ainsi, le produit vectoriel étant une fonction continue des dérivées, on en déduit que

$$(\partial_1\tau_n(y) \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1}\tau_n(y))_i \to (\partial_1\tau(y) \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1}\tau(y))_i$$

λ_{N-1}-presque partout sur B^{N-1} en restant borné dans $L^\infty(B^{N-1})$; la convergence a donc aussi lieu dans $L^1(B^{N-1})$.
Puisque f est lipschitzienne, $f \circ \tau_n \to f \circ \tau$ uniformément sur B^{N-1} et on a donc

$$\int_{B^{N-1}} f \circ \tau_n(y)(\partial_1\tau_n(y) \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1}\tau_n(y))_i \, dy \to \int_{B^{N-1}} f \circ \tau(y)(\partial_1\tau(y) \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1}\tau(y))_i \, dy. \quad (4.2.12)$$

Par hypothèse, les compacts $\varphi(\partial B^N)$ et $\mathrm{supp}(f)$ sont disjoints, donc à une distance δ strictement positive. Soit n_0 assez grand tel que, pour $n \geq n_0$, $||\varphi_n - \varphi||_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \delta/2$; on constate alors que, pour tout $x \in \partial B^N$, puisque $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \delta/2$, $\varphi_n(x) \in \varphi(\partial B^N) + B(0, \delta/2)$, ce qui implique $\varphi_n(x) \notin \mathrm{supp}(f)$. Ainsi, pour n assez grand, on peut appliquer les résultats de l'étape 1 à φ_n (fonction régulière qui vérifie $\varphi_n(\partial B^N) \cap \mathrm{supp}(f) = \emptyset$), et on en déduit donc

$$\int_{B_+^N} \partial_i f \circ \varphi_n J\varphi_n = -\int_{B^{N-1}} f \circ \tau_n(\partial_1\tau_n \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1}\tau_n)_i.$$

Grâce à (4.2.11) et (4.2.12), on peut passer à la limite dans cette expression et on en déduit le résultat pour φ.

♢ Etape 3: φ est seulement lipschitzienne.
Soit, pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^N$, $\gamma_n(x) = (x', x_N - T_{1/n}(x_N)) = x - (0, T_{1/n}(x_N))$, avec $T_{1/n}(x_N) = \sup(-1/n, \inf(x_N, 1/n))$. Nous avons vu, dans la démonstration du lemme 1.1.2, que $T_{1/n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne; $\gamma_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est donc 2-lipschitzienne (en fait, il n'est pas dur de vérifier que γ_n est aussi 1-lipschitzienne). On a aussi $\gamma_n \to Id$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ (car, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $|T_{1/n}(s)| \leq 1/n$).

Posons $\varphi_n = \varphi \circ \gamma_n$. φ_n est une fonction lipschitzienne et $\varphi_n \to \varphi$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ (en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \mathrm{Lip}(\varphi)|\gamma_n(x) - x| \leq \mathrm{Lip}(\varphi)|| \, |\gamma_n - Id| \, ||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \to 0$). Comme dans l'étape précédente, cette convergence uniforme nous permet de voir que, pour n assez grand, on a $\varphi_n(\partial B^N) \cap \mathrm{supp}(f) = \emptyset$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $|x_N| < 1/n$, on a $\varphi_n(x) = \varphi(\gamma_n(x)) = \varphi(x', 0) = \varphi_n(x', 0)$.
On peut donc appliquer le résultat de la partie précédente à φ_n (pour n assez grand), et on a donc

$$\int_{B_+^N} \partial_i f \circ \varphi_n J\varphi_n = -\int_{B^{N-1}} f \circ \tau_n(\partial_1\tau_n \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1}\tau_n)_i.$$

Or $\tau_n = \varphi_{n|\mathbb{R}^{N-1}} = \varphi_{|\mathbb{R}^{N-1}} = \tau$, donc on trouve finalement, pour n assez grand,

$$\int_{B_+^N} \partial_i f \circ \varphi_n J\varphi_n = -\int_{B^{N-1}} f \circ \tau(\partial_1\tau \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1}\tau)_i. \quad (4.2.13)$$

Notons $E_n = \{x \in B_+^N \mid x_N > 1/n\}$. Pour tout $j \in [1, N]$ et tout $x \in B_+^N$ tel que φ soit dérivable en $(x', x_N - 1/n)$, $\partial_j\varphi_n(x)\mathbf{1}_{E_n}(x) = \partial_j\varphi(x', x_N - 1/n)\mathbf{1}_{E_n}(x) = (\mathcal{T}_{-e_N/n}\partial_j\varphi)(x)\mathbf{1}_{E_n}(x)$, où, pour $h \in \mathbb{R}^N$ et $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\mathcal{T}_h g$ désigne la fonction $x \in \mathbb{R}^N \to g(x+h)$.
On sait, puisque $\partial_j\varphi \in (L^\infty(\mathbb{R}^N))^N \subset (L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))^N$, que $\mathcal{T}_h\partial_j\varphi \to \partial_j\varphi$ dans $(L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))^N$ lorsque $h \to 0$; ainsi, $\mathcal{T}_{-e_N/n}\partial_j\varphi \to \partial_j\varphi$ dans $(L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))^N$, et donc, à une sous-suite près, λ_N-presque partout sur $\mathbb{R}^N$.
Or $\mathbf{1}_{E_n} \to \mathbf{1}_{B_+^N}$ simplement, donc, à une sous-suite près, $\partial_j\varphi_n\mathbf{1}_{E_n} \to \partial_j\varphi\mathbf{1}_{B_+^N}$ λ_N-presque partout sur $\mathbb{R}^N$; de plus, φ_n étant lipschitzienne de constante de lipschitz $2\mathrm{Lip}(\varphi)$ (γ_n est 2-lipschitzienne), on sait que $(\partial_j\varphi_n\mathbf{1}_{E_n})_{n\geq1}$ est bornée, dans $(L^\infty(\mathbb{R}^N))^N$, par $2\mathrm{Lip}(\varphi)$.
Comme on a

$$\begin{aligned} J\varphi_n\mathbf{1}_{E_n} &= \det(\partial_1\varphi_n, \ldots, \partial_N\varphi_n)\mathbf{1}_{E_n} \\ &= \det(\partial_1\varphi_n\mathbf{1}_{E_n}, \ldots, \partial_N\varphi_n\mathbf{1}_{E_n}), \end{aligned}$$

et comme le déterminant est une fonction continue sur $(\mathbb{R}^N)^N$, on en déduit que $J\varphi_n \mathbf{1}_{E_n}$ converge λ_N-presque partout vers $\det(\partial_1\varphi\mathbf{1}_{B_+^N}, \ldots, \partial_N\varphi\mathbf{1}_{B_+^N}) = J\varphi\mathbf{1}_{B_+^N}$ en restant bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$; par convergence dominée, on a donc $J\varphi_n\mathbf{1}_{E_n} \to J\varphi$ dans $L^1(B_+^N)$.
Or, comme dans l'étape précédente, puisque $\varphi_n \to \varphi$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ et $\partial_i f$ est lipschitzienne, on a $\partial_i f \circ \varphi_n \to \partial_i f \circ \varphi$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$. Ainsi,

$$\int_{E_n} \partial_i f \circ \varphi_n J\varphi_n = \int_{B_+^N} \partial_i f \circ \varphi_n J\varphi_n \mathbf{1}_{E_n} \to \int_{B_+^N} \partial_i f \circ \varphi J\varphi. \tag{4.2.14}$$

$(\partial_j\varphi_n)_{n\geq 1}$ étant, pour tout $j \in [1, N]$, bornée dans $(L^\infty(\mathbb{R}^N))^N$, $J\varphi_n = \det(\partial_1\varphi_n, \ldots, \partial_N\varphi_n)$ est borné (disons par M) dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
Ainsi,

$$\left|\int_{B_+^N\backslash E_n} \partial_i f \circ \varphi_n J\varphi_n\right| \leq M||\partial_i f||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \lambda_N(B_+^N\backslash E_n). \tag{4.2.15}$$

Mais $B_+^N\backslash E_n = \{x \in B_+^N \mid x_N \leq 1/n\}$, donc $\mathbf{1}_{B_+^N\backslash E_n} \to 0$ en étant majorée par $\mathbf{1}_{B_+^N} \in L^1(\mathbb{R}^N)$; par convergence dominée, on a donc $\int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{1}_{B_+^N\backslash E_n} = \lambda_N(B_+^N\backslash E_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

De (4.2.14) et (4.2.15), on déduit donc que

$$\int_{B_+^N} \partial_i f \circ \varphi_n J\varphi_n = \int_{E_n} \partial_i f \circ \varphi_n J\varphi_n + \int_{B_+^N\backslash E_n} \partial_i f \circ \varphi_n J\varphi_n \to \int_{B_+^N} \partial_i f \circ \varphi J\varphi.$$

Ainsi, en passant à la limite dans (4.2.13), on trouve

$$\int_{B_+^N} \partial_i f \circ \varphi J\varphi = -\int_{B^{N-1}} f \circ \tau(\partial_1\tau \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1}\tau)_i,$$

ce qui conclut cette démonstration. ■

Corollaire 4.2.1 *Soit Ω un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors, pour tout $i \in [1, N]$,*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_{\partial\Omega} f\mathbf{n}_i \, d\sigma.$$

Remarque 4.2.1 *Nous verrons, dans la dernière partie de cette démonstration, que la normale $\mathbf{n}_{C,P}$ que nous avons construite dans la sous-section 4.2.1 ne dépend pas du système de cartes C ni de la partition de l'unité associée P choisis.*

Démonstration:
Soit $C = (O_j, \varphi_j)_{j\in[1,k]}$ un système de cartes de Ω et $P = (\theta_j)_{j\in[1,k]}$ une partition de l'unité associée.
On a alors, en notant $\Theta = 1 - \sum_{j=1}^k \theta_j$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i f &= \sum_{j=1}^k \int_\Omega \partial_i(\theta_j f) + \int_\Omega \partial_i(\Theta f) \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{O_j\cap\Omega} \partial_i(\theta_j f) + \int_\Omega \partial_i(\Theta f).\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Comme $\Theta f \equiv 0$ au voisinage de $\partial\Omega$, l'extension $\widetilde{\Theta f}$ de Θf à $\mathbb{R}^N$ par 0 hors de Ω est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (rappelons que f est à support compact) et on a donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i(\Theta f) &= \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i(\widetilde{\Theta f}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_\mathbb{R} \partial_i(\widetilde{\Theta f})(x)\, dx_i\right) dx_1 \ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_N = 0\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

(car, pour tout $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_N)\in\mathbb{R}^{N-1}$, $(\widetilde{\Theta f})(x_1,\dots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\dots,x_N)\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$).

Soit maintenant $j\in[1,k]$; par le lemme 4.2.1, on sait que $J\varphi_j^{-1}$ a un signe ε_i sur B^N; par le théorème de changement de variable lipschitzien, on obtient donc

$$\int_{O_j\cap\Omega}\partial_i(\theta_j f)=\int_{B_+^N}\partial_i(\theta_j f)\circ\varphi_j^{-1}|J\varphi_j^{-1}|=\varepsilon_j\int_{B_+^N}\partial_i(\theta_j f)\circ\varphi_j^{-1}J\varphi_j^{-1}$$

$\varphi_j^{-1}:B^N\to\mathbb{R}^N$ étant lipschitzienne, elle admet une extension lipschitzienne $\psi_j:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$; de plus, $f_j=\theta_j f\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et, comme $\psi_j(\partial B^N)=\partial O_j$ (cf remarque 4.1.3: φ_j^{-1} sétend de manière unique en une application continue qui envoie ∂B^N sur ∂O_j), on a $\psi_j(\partial B^N)\cap\operatorname{supp}(f_j)=\emptyset$ (le support de f_j est inclus dans celui de θ_j, compact de O_j). On peut donc appliquer le lemme 4.2.3:

$$\begin{aligned}\int_{O_j\cap\Omega}\partial_i(\theta_j f)&=\varepsilon_j\int_{B_+^N}\partial f_j\circ\psi_j J\psi_j\\&=-\varepsilon_j\int_{B^{N-1}}(\theta_j f)\circ\widetilde{\tau}_j(\partial_1\widetilde{\tau}_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\widetilde{\tau}_j)_i,\end{aligned}$$

avec $\widetilde{\tau}_{j|B^{N-1}}=\psi_{j|B^{N-1}}=\varphi_j^{-1}{}_{|B^{N-1}}=\tau_j$. Puisque $|\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j|$ est non-nul λ_{N-1}-presque partout sur B^{N-1} (proposition 2.2.1), on obtient finalement

$$\int_{O_j\cap\Omega}\partial_i(\theta_j f)=-\varepsilon_j\int_{B^{N-1}}(\theta_j f)\circ\tau_j\left(\frac{\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j}{|\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j|}\right)_i\circ\tau_j^{-1}\circ\tau_j|\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j|.$$

Or, par définition de l'intégrale sur $O_i\cap\partial\Omega$, on a

$$\begin{aligned}&\int_{B^{N-1}}(\theta_j f)\circ\tau_j\left(\frac{\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j}{|\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j|}\right)_i\circ\tau_j^{-1}\circ\tau_j|\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j|\\&=\int_{O_j\cap\partial\Omega}\theta_j f\left(\frac{\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j}{|\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j|}\right)_i\circ\tau_j^{-1}\,d\sigma.\end{aligned}$$

On en déduit donc, en étendant $\theta_j\left(\frac{\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j}{|\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j|}\right)_i\circ\tau_j^{-1}$ naturellement par 0 sur $\partial\Omega$ hors de O_i,

$$\int_{O_j\cap\Omega}\partial_i(\theta_j f)=-\varepsilon_j\int_{\partial\Omega}\theta_j f\left(\frac{\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j}{|\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j|}\right)_i\circ\tau_j^{-1}\,d\sigma. \tag{4.2.18}$$

(4.2.16), (4.2.17) et (4.2.18) nous donnent donc

$$\int_\Omega\partial_i f=\int_{\partial\Omega}f\sum_{j=1}^k-\varepsilon_j\theta_j\left(\frac{\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j}{|\partial_1\tau_j\wedge\cdots\wedge\partial_{N-1}\tau_j|}\right)_i\circ\tau_j^{-1}\,d\sigma=\int_{\partial\Omega}f(\mathbf{n}_{C,P})_i\,d\sigma$$

par définition de $\mathbf{n}_{C,P}$.

Il ne reste plus qu'à voir que $\mathbf{n}_{C,P}$ ne dépend pas de (C,P) pour conclure la démonstration.
Soit donc C' un autre système de cartes et P' une partition de l'unité associée à C'. Le raisonnement précédent peut être effectué avec (C',P') à la place de (C,P), et on obtient donc, pour toute fonction $f\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et tout $i\in[1,N]$,

$$\int_{\partial\Omega}f(\mathbf{n}_{C,P})_i\,d\sigma=\int_{\partial\Omega}f(\mathbf{n}_{C',P'})_i\,d\sigma \tag{4.2.19}$$

(car ces deux quantités sont égales à $\int_\Omega\partial_i f$, qui ne dépend ni du système de cartes ni de la partition de l'unité associée choisis).
Soit K un compact de $\partial\Omega$; il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq1}\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_n\to\mathbf{1}_K$ partout sur $\mathbb{R}^N$ et, pour tout $n\geq1$, $0\leq f_n\leq1$. Comme $\mathbf{n}_{C,P}$ et $\mathbf{n}_{C',P'}$ sont dans $(L^\infty(\partial\Omega))^N$, le théorème de convergence dominée donne, en passant à la limite $n\to\infty$ dans (4.2.19) appliqué à f_n,

$$\int_K(\mathbf{n}_{C,P})_i-(\mathbf{n}_{C',P'})_i\,d\sigma=0. \tag{4.2.20}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\kappa \in \{-1,+1\}$ et $A = \{x \in \partial\Omega \mid \kappa((\mathbf{n}_{C,P})_i - (\mathbf{n}_{C',P'})_i) > \varepsilon\}$; pour tout compact $K \subset A$, en multipliant (4.2.20) par κ on trouve alors $\varepsilon\sigma(K) = 0$, donc $\sigma(K) = 0$; ceci étant vrai pour tout compact $K \subset A$, et σ étant régulière, on en déduit que $\sigma(A) = 0$; comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, cela nous donne donc $\sigma(\{x \in \partial\Omega \mid \kappa((\mathbf{n}_{C,P})_i - (\mathbf{n}_{C',P'})_i) > 0\}) = 0$; en appliquant ceci à $\kappa = -1$ puis $\kappa = +1$, on en déduit $\sigma(\{x \in \partial\Omega \mid (\mathbf{n}_{C,P})_i - (\mathbf{n}_{C',P'})_i \neq 0\}) = 0$, c'est-à-dire $(\mathbf{n}_{C,P})_i = (\mathbf{n}_{C',P'})_i$ σ-presque partout sur $\partial\Omega$, ce qui conclut la démonstration de ce corollaire. ■

Nous pouvons maintenant citer et démontrer le théorème général d'intégration par parties.

Théorème 4.2.1 *Soit Ω un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1,\infty]$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ alors, pour tout $i \in [1,N]$, on a*

$$\int_\Omega u\, D_i v = \int_{\partial\Omega} \gamma(u)\gamma(v)\mathbf{n}_i\, d\sigma - \int_\Omega D_i u\, v.$$

Démonstration:
Considérons $f = uv$; par la proposition 3.1.2, $f \in W^{1,1}(\Omega)$. Donc, par le théorème 3.1.3, il existe $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ qui converge vers f dans $W^{1,1}(\Omega)$.
En appliquant le corollaire 4.2.1 à f_n on a

$$\int_\Omega D_i f_n = \int_{\partial\Omega} \gamma(f_n)\mathbf{n}_i\, d\sigma. \tag{4.2.21}$$

Or $D_i f_n \to D_i f = D_i u\, v + u\, D_i v$ dans $L^1(\Omega)$ et $\gamma(f_n) \to \gamma(f) = \gamma(u)\gamma(v)$ dans $L^1(\partial\Omega)$ (proposition 4.1.3). Comme $\mathbf{n}_i \in L^\infty(\partial\Omega)$, on peut passer à la limite $n \to \infty$ dans (4.2.21) pour trouver

$$\int_\Omega D_i u\, v + \int_\Omega u\, D_i v = \int_{\partial\Omega} \gamma(u)\gamma(v)\mathbf{n}_i\, d\sigma,$$

ce qui conclut la démonstration. ■

Références

[1] Adams R.A., "Sobolev Spaces", Academic Press (1975).

[2] Aze D., "Eléments d'analyse convexe et variationnelle", Ellipses, 1997.

[3] Deimling K., "Nonlinear functional analysis", Springer (1985).

[4] Evans L.C., Gariepy R.F., "Measure Theory and Fine Properties of Functions", CRC PRESS, 1992.

[5] Grisvard P., "Elliptic Problems in Nonsmooth Domain", Pitman, Londre, 1985.

[6] Nečas J., "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson (1967).

Annexe A

Un peu d'Analyse Fonctionnelle

Lemme A.0.1 *Si E et F sont deux espaces de Banach isomorphes et E est réflexif, alors F est réflexif.*

DÉMONSTRATION:
Soit $\phi : E \to F$ un isomorphisme entre E et F; l'application duale de ϕ, $\phi^* : F' \to E'$ est aussi un isomorphisme (d'inverse $(\phi^{-1})^*$, car $\phi^*(l) = l \circ \phi$), ainsi que l'application duale de ϕ^*, $\phi^{**} : E'' \to F''$. En notant $J_E : E \to E''$ et $J_F : F \to F''$ les injections naturelles de ces espaces dans leur biduaux, nous allons montrer, de manière générale, que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & F \\ J_E \downarrow & & \downarrow J_F \\ E'' & \xrightarrow{\phi^{**}} & F'' \end{array} \tag{A.0.1}$$

On déduira aisément de cette commutativité le résultat du lemme; en effet, si E est réflexif, J_E est surjectif et, ϕ^{**} étant un isomorphisme (donc surjectif), $J_F = \phi^{**} \circ J_E \circ \phi^{-1}$ est aussi surjectif, ce qui donne la réflexivité de F.
Pour montrer que (A.0.1) est commutatif, on prend $x \in E$ et on cherche à montrer que $J_F \circ \phi(x) = \phi^{**} \circ J_E(x)$. Soit $L \in F''$; par définition, on a

$$\begin{aligned} \langle J_F(\phi(x)), L\rangle_{F'',F'} = \langle L, \phi(x)\rangle_{F',F} &= \langle \phi^*(L), x\rangle_{E',E} \\ &= \langle J_E(x), \phi^*(L)\rangle_{E'',E'} \\ &= \langle \phi^{**}(J_E(x)), L\rangle_{F'',F'}. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $L \in F''$, on en déduit $J_F \circ \phi(x) = \phi^{**} \circ J_E(x)$, c'est-à-dire la relation voulue. ■

Lemme A.0.2 *Soit E un espace de Banach. E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

DÉMONSTRATION:
On note, comme précédemment, J_E l'injection naturelle de E dans E'' et $J_{E'}$ l'injection naturelle de E' dans E'''.

♢ Etape 1: on suppose E réflexif et on veut montrer que E' est réflexif.
Pour cela, nous allons montrer que $J_{E'} = (J_E^{-1})^*$; E étant réflexif, J_E (donc J_E^{-1}) est un isomorphisme, ce qui implique que $(J_E^{-1})^* = J_{E'}$ est aussi un isomorphisme, c'est à dire la réflexivité de E'.
Soit $l \in E'$; pour tout $T \in E''$, on a

$$\langle (J_E^{-1})^*(l), T\rangle_{E''',E''} = \langle l, J_E^{-1}(T)\rangle_{E',E}.$$

Or, par définition de J_E et de $J_{E'}$, on a

$$\langle l, J_E^{-1}(T)\rangle_{E',E} = \langle J_E(J_E^{-1}(T)), l\rangle_{E'',E} = \langle T, l\rangle_{E'',E} = \langle J_{E'}(l), T\rangle_{E''',E''}.$$

On en déduit donc $\langle (J_E^{-1})^*(l), T\rangle_{E''',E''} = \langle J_{E'}(l), T\rangle_{E''',E''}$; ceci étant vrai pour tout $T \in E''$ et tout $l \in E'$, on obtient bien $J_{E'} = (J_E^{-1})^*$.

$\diamondsuit$ Etape 2: on suppose E' réflexif et on veut montrer que E est réflexif.
$J_E : E \to E''$ est une isométrie (conséquence classique de Hahn-Banach) et, E étant un Banach, $J_E(E)$ est donc un sous-espace complet de E''. Ainsi, $J_E(E)$ est fermé dans E''.
Soit $L \in E''$; si $L \notin J_E(E)$, comme ce sous-espace est fermé, il existe $T \in E'''$ qui sépare L de $J_E(E)$, i.e. $T \equiv 0$ sur $J_E(E)$ et $\langle T, L\rangle_{(E'')',E''} \neq 0$; $J_{E'}$ étant surjective, il existe $l \in E'$ tel que $J_{E'}(l) = T$. On a donc $l \in E'$ telle que $\langle L, l\rangle_{E'',E'} \neq 0$ et, pour tout $x \in E$, $\langle J_E(x), l\rangle_{E'',E'} = \langle l, x\rangle_{E',E} = 0$. Cette dernière propriété nous dit en fait que $l \equiv 0$ sur E, i.e. que $l = 0$ dans E', ce qui est une contradiction avec $\langle L, l\rangle_{(E')',E'} \neq 0$. ■

Lemme A.0.3 *Soit E un espace réflexif. Si F est un sous-espace fermé de E, alors F est réflexif.*

DÉMONSTRATION:
On cherche encore une fois à montrer la surjectivité de $J_F : F \to F''$.
Soit $L \in F''$, i.e. $L : F' \to \mathbb{R}$ linéaire continue; L définit une forme linéaire continue $\widetilde{L} : E' \to \mathbb{R}$ de la manière suivante: pour tout $l \in E'$,

$$\langle \widetilde{L}, l\rangle_{E'',E'} = \langle L, l_{|F}\rangle_{F'',F'}$$

(cette définition est valide puisque, si $l \in E'$, $l_{|F} : F \to \mathbb{R}$ est aussi linéaire continue, donc un élément de F', et $\widetilde{L}$ ainsi définie est linéaire continue $E' \to \mathbb{R}$ puisque, si $l \in E'$, $||l_{|F}||_{F'} \leq ||l||_{E'}$).
E étant réflexif, il existe $x \in E$ tel que $J_E(x) = \widetilde{L}$, c'est-à-dire, pour tout $l \in E'$,

$$\langle L, l_{|F}\rangle_{F'',F'} = \langle l, x\rangle_{E',E}.$$

Si $l \in E'$ est nulle sur F, on a donc $\langle l, x\rangle_{E',E} = 0$; ceci nous permet de voir que $x \in F$: en effet, si $x \in E\backslash F$, comme F est fermé, il existerait $l \in E'$ tel que $l \equiv 0$ sur F et $\langle l, x\rangle_{E',E} \neq 0$, ce qui serait une contradiction.
Nous pouvons enfin vérifier que $J_F(x) = L$; en effet, pour tout $\phi \in F'$, par Hahn-Banach, il existe $l \in E'$ telle que $l_{|F} = \phi$ et, x étant dans F, on en déduit

$$\langle L, \phi\rangle_{F'',F'} = \langle L, l_{|F}\rangle_{F'',F'} = \langle l, x\rangle_{E',E} = \langle \phi, x\rangle_{F',F} = \langle J_F(x), \phi\rangle_{F'',F'},$$

c'est-à-dire exactement $J_F(x) = L$. ■

Lorsque E est un espace de Banach et F est un sous-espace fermé de E, on munit E/F de la norme

$$||f||_{E/F} = \inf \{||u||_E \mid \pi(u) = f\},$$

où $\pi : E \to E/F$ est la projection canonique. Il est assez simple de voir que ceci définit une norme, dont la topologie associée est la topologie quotient de E/F (la plus petite pour laquelle π est continue, i.e. dont les ouverts sont les ensembles $U \subset E/F$ tels que $\pi^{-1}(U)$ soit un ouvert de E).
$\pi : E \to E/F$ est donc linéaire continue, de norme inférieure à 1.

Proposition A.0.1 *Si E est un espace de Banach et F est un sous-espace fermé de E alors E/F est un espace de Banach.*

DÉMONSTRATION:
On utilise le critère des séries absolument convergentes.
Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une série absolument convergente dans E/F alors, par définition de la norme dans cet espace, il existe $(u_n)_{n\geq 1} \in E$ tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\pi(u_n) = f_n \text{ et } ||u_n||_E \leq ||f_n||_{E/F} + \frac{1}{n^2}.$$

La série des $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc absolument convergente dans l'espace de Banach E et converge donc dans cet espace vers u; comme $\pi : E \to E/F$ est linéaire continue, on en déduit que $\pi(u) = \pi(\sum_n u_n) = \sum_n \pi(u_n) = \sum_n f_n$, i.e. que la série des $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\pi(u)$ dans E/F. ■

Définition A.0.1 *Soit E un espace vectoriel normé. Le polaire d'un sous-espace fermé F de E est $F^\circ = \{l \in E' \mid l \equiv 0 \text{ sur } F\} \subset E'$.*

Lemme A.0.4 *Soit E un espace vectoriel normé. Si F est un sous-espace fermé de E, l'application*

$$\Phi \left\{ \begin{array}{rcl} (E/F)' & \longrightarrow & F^\circ \subset E \\ l & \longrightarrow & l \circ \pi \end{array} \right.$$

est un isomorphisme isométrique.

DÉMONSTRATION:
On constate tout d'abord que cette application est bien définie car $\pi : E \to E/F$ est linéaire continue et $\pi(u) = 0$ pour tout $u \in F$.
Vérifions que Φ est une isométrie (cela nous donnera en plus le caractère injectif de Φ). Soit $l \in F^\circ$; pour tout $u \in E$, on a

$$\langle \Phi(l), u \rangle_{E',E} = \langle l, \pi(u) \rangle_{(E/F)',E/F} \leq ||l||_{(E/F)'} ||\pi(u)||_{E/F} \leq ||l||_{(E/F)'} ||u||_E,$$

ce qui nous donne $||\Phi(l)||_{E'} \leq ||l||_{(E/F)'}$. De plus, pour tout $f \in E/F$ et tout $u \in E$ tel que $\pi(u) = f$, on a

$$\langle l, f \rangle_{(E/F)',E/F} = \langle \Phi(l), u \rangle_{E',E} \leq ||\Phi(l)||_{E'} ||u||_E,$$

soit, en prenant la borne inférieure sur les $u \in E$ tels que $\pi(u) = f$, $\langle l, f \rangle_{(E/F)',E/F} \leq ||\Phi(l)||_{E'} ||f||_{E/F}$, c'est-à-dire $||l||_{(E/F)'} \leq ||\Phi(l)||_{E'}$ et le caractère isométrique de Φ est donc prouvé.
Montrons maintenant que Φ est surjective. Soit $L \in F^\circ$: comme $F \subset \ker(L)$, L passe au quotient en une application linéaire continue $l : E/F \to \mathbb{R}$, et on a exactement, par définition du passage au quotient, $l \circ \pi = \Phi(l) = L$. ■

Corollaire A.0.1 *Si E est un espace de Banach réflexif et F est un sous-espace fermé de E, alors E/F est réflexif.*

DÉMONSTRATION:
E étant réflexif, E' est réflexif. En tant que sous-espace fermé de E', F° est donc aussi réflexif. On en déduit alors la réflexivité de $(E/F)'$, qui est isomorphe à F°, et donc celle de E/F, en tant qu'espace de Banach dont le dual est réflexif. ■

Annexe B

Quelques Lemmes Techniques pour la Caractérisation de $W_0^{1,p}(\Omega)$

Dans toute cette partie, la norme considérée sur $\mathbb{R}^N$ est la norme du supremum; ainsi, $B^N =]-1,1[^N$ (rappelons que les cartes locales qui caractérisent les ouverts faiblement lipschitziens peuvent être écrites avec les boules de n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^N$).

Lemme B.0.1 *Si $p \in [1,+\infty[$ et $u \in W^{1,p}(B_+^N)$ est nulle (au sens de la trace) sur B^{N-1}, alors on a, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ et en notant $B_\varepsilon = \{x \in B^N \mid 0 < x_N < \varepsilon\} = B^{N-1} \times]0,\varepsilon[$,*

$$\left(\int_{B_\varepsilon} |u|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon \left(\int_{B_\varepsilon} |D_N u|^p\right)^{1/p}.$$

Démonstration: On montre en fait quelque chose de plus général.
Prenons, pour commencer, $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{B_+^N})$. On écrit, pour $x \in B_\varepsilon$,

$$u(x) - u(x', 0) = \int_0^{x_N} D_N u(x', s)\, ds,$$

soit, avec l'inégalité de Hölder,

$$|u(x) - u(x', 0)| \leq \left(\int_0^\varepsilon |D_N u(x', s)|^p\, ds\right)^{1/p} \varepsilon^{1/p'}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{B^{N-1}} |u(x', x_N) - u(x', 0)|^p\, dx' &\leq \varepsilon^{p/p'} \int_{B^{N-1}} \int_0^\varepsilon |D_N u(x', s)|^p\, ds\, dx' \\
&\leq \varepsilon^{p/p'} \int_{B_\varepsilon} |D_N u|^p,
\end{aligned}$$

et, en intégrant sur $x_N \in]0,\varepsilon[$,

$$\int_{B_\varepsilon} |u(x) - \widetilde{\gamma}(u)(x)|^p\, dx \leq \varepsilon^{1+p/p'} \int_{B_\varepsilon} |D_N u|^p = \varepsilon^p \int_{B_\varepsilon} |D_N u|^p, \tag{B.0.1}$$

où $\widetilde{\gamma}(u) : B_+^N \to \mathbb{R}$ est la fonction $\widetilde{\gamma}(u)(x', x_N) = \gamma(u)(x') = u(x', 0)$, γ représentant la trace sur B^{N-1}.
Si $u \in W^{1,p}(B_+^N)$, on prend $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{B_+^N})$ qui approche u dans $W^{1,p}(B_+^N)$; $(\gamma(u_n))_{n\geq 1}$ approche alors $\gamma(u)$ dans $L^p(B^{N-1})$, ce qui nous donne immédiatement que $(\widetilde{\gamma}(u_n))_{n\geq 1}$ tend vers $\widetilde{\gamma}(u)$ (définie par $\widetilde{\gamma}(u)(x', x_N) = \gamma(u)(x')$) dans $L^p(B_+^N)$; ainsi, en passant à la limite $n \to \infty$ dans (B.0.1) appliquée à u_n, on voit que cette équation est aussi vérifiée par les fonctions de $W^{1,p}(B_+^N)$. Lorsque $u \in W^{1,p}(B_+^N)$ vérifie $\gamma(u) = 0$, alors $\widetilde{\gamma}(u) = 0$ et le lemme est démontré. ■

Corollaire B.0.1 *Soit Ω un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1,+\infty[$. Il existe $C > 0$, $\alpha \geq 1$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ vérifiant $\gamma_\Omega(u) = 0$ et tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$, en notant $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < \varepsilon\}$, on a*

$$\left(\int_{\Omega_\varepsilon} |u|^p\right)^{1/p} \leq C\varepsilon \left(\int_{\Omega_{\alpha\varepsilon}} |\nabla u|^p\right)^{1/p}.$$

DÉMONSTRATION:
Soit $(O_i,\varphi_i)_{i\in[1,k]}$ un système de cartes de Ω. On peut trouver, pour chaque $i \in [1,k]$, un ouvert U_i relativement compact dans O_i tel que $(U_i)_{i\in[1,k]}$ soit un recouvrement de $\partial\Omega$ (on écrit $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^k \cup_{h>0}\{x \in O_i \mid \operatorname{dist}(x,\partial O_i) > h\}$, puis on extrait un recouvrement fini de ce recouvrement ouvert: en prenant h_0 le plus petit h apparaissant dans ce recouvrement fini, on a $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^k\{x \in O_i \mid \operatorname{dist}(x,\partial O_i) > h_0\}$ et $\{x \in O_i \mid \operatorname{dist}(x,\partial O_i) > h_0\}$ est un ouvert relativement compact dans O_i).
Notons $\Omega_{i,\varepsilon} = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, U_i \cap \partial\Omega) < \varepsilon\}$; comme $(U_i)_{i\in[1,k]}$ recouvre $\partial\Omega$, on a $\Omega_\varepsilon \subset \cup_{i=1}^k \Omega_{i,\varepsilon}$. Soit $\varepsilon_0 = \inf_{i\in[1,k]} \operatorname{dist}(\overline{U_i \cap \partial\Omega}, \mathbb{R}^N\backslash O_i)$ (ε_0 est strictement positif car, pour tout $i \in [1,k]$, $\overline{U_i \cap \partial\Omega}$ est un compact de O_i); si $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors, pour tout $i \in [1,k]$, on a $\Omega_{i,\varepsilon} \subset O_i$.
Par le théorème de changement de variable lipschitzien, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{i,\varepsilon}} |u|^p &= \int_{\varphi_i(\Omega_{i,\varepsilon})} |u\circ\varphi_i^{-1}|^p |J\varphi_i^{-1}| \\ &\leq ||J\varphi_i^{-1}||_{L^\infty(B^N)} \int_{\varphi_i(\Omega_{i,\varepsilon})} |u\circ\varphi_i^{-1}|^p.\end{aligned}$$

Mais, grâce au caractère lipschitzien de φ_i et puisque (O_i,φ_i) est une carte locale, en notant $L_i = \operatorname{Lip}(\varphi_i)$, on a $\varphi_i(\Omega_{i,\varepsilon}) \subset B_{L_i\varepsilon}$, où B_η est défini, pour $\eta > 0$, dans le lemme B.0.1. Comme $\gamma_\Omega(u) = 0$, il n'est pas dur de voir (par la même technique que la dans preuve de la proposition 4.1.1) que $u\circ\varphi_i^{-1} \in W^{1,p}(B_+^N)$ est nulle sur B^{N-1}; on a alors, grâce au lemme B.0.1 (et quitte à réduire ε_0 de sorte que $L_i\varepsilon_0 < 1$ pour tout $i \in [1,k]$),

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{i,\varepsilon}} |u|^p &\leq ||J\varphi_i^{-1}||_{L^\infty(B^N)}(L_i\varepsilon)^p \int_{B_{L_i\varepsilon}} |D_N(u\circ\varphi_i^{-1})|^p \\ &\leq ||J\varphi_i^{-1}||_{L^\infty(B^N)}(L_i\varepsilon)^p \int_{B_{L_i\varepsilon}} \left|\sum_{j=1}^N D_j u\circ\varphi_i^{-1}\, D_N(\varphi_i^{-1})_j\right|^p \\ &\leq N^p||J\varphi_i^{-1}||_{L^\infty(B^N)}(L_i\varepsilon)^p \sup_{j\in[1,N]} ||D_N(\varphi_i^{-1})_j||_{L^\infty(B^N)} \int_{B_{L_i\varepsilon}} \sum_{j=1}^N \left|D_j u\circ\varphi_i^{-1}\right|^p \\ &\leq N^p||J\varphi_i^{-1}||_{L^\infty(B^N)}(L_i\varepsilon)^p \sup_{j\in[1,N]} ||D_N(\varphi_i^{-1})_j||_{L^\infty(B^N)} \int_{\varphi_i^{-1}(B_{L_i\varepsilon})} \sum_{j=1}^N |D_j u|^p\, |J\varphi_i| \\ &\leq C_i\varepsilon^p \int_{\varphi_i^{-1}(B_{L_i\varepsilon})} \sum_{j=1}^N |D_j u|^p,\end{aligned}$$

où C_i ne dépend que de φ_i, N et p.
Or, comme φ_i^{-1} est lipschitzienne, en notant $L_i' = \operatorname{Lip}(\varphi_i^{-1})$, on a $\varphi_i^{-1}(B_{L_i\varepsilon}) \subset O_i \cap \Omega_{L_i'L_i\varepsilon}$; ainsi, en notant $\alpha_i = L_iL_i'$ (qui ne dépend que de φ_i), on a

$$\int_{\Omega_{i,\varepsilon}} |u|^p \leq C_i\varepsilon^p \int_{\Omega_{\alpha_i\varepsilon}\cap O_i} N|\nabla u|^p \leq C'\varepsilon^p \int_{\Omega_{\alpha\varepsilon}} |\nabla u|^p,$$

où $C' = N\sup_{i\in[1,k]} C_i$ et $\alpha = \sup_{i\in[1,k]} \alpha_i$ (C' et α ne dépendent donc que de Ω, N et p). Sommer toutes ces inégalités sur $i \in [1,k]$ donne le résultat recherché, avec $C = (kC')^{1/p}$. ■

Lemme B.0.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$; on note, pour $n \geq 1$,*

$$K_n = \{x \in \Omega \mid |x| \leq n\,,\ \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \geq 1/n\}.$$

Il existe $M > 0$ et $(\theta_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tels que, pour tout $n \geq 1$, on a: $0 \leq \theta_n \leq 1$, $\theta_n \equiv 1$ au voisinage de K_n, et $|| \, |\nabla\theta_n| \, ||_{L^\infty(\Omega)} \leq Mn$.

DÉMONSTRATION:
Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ positive, d'intégrale égale à 1 et de support inclus dans $B(0,1)$. On pose, pour $n \geq 1$, $\rho_n(\cdot) = n^N \rho(n\cdot)$.
Posons $\theta_n = \mathbf{1}_{K_{2n}} * \rho_{4n}$.
$\theta_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et a son support dans $C_n = \mathrm{supp}(\mathbf{1}_{K_{2n}}) + \mathrm{supp}(\rho_{4n}) = K_{2n} + \mathrm{supp}(\rho_{4n})$ compact de $\mathbb{R}^N$.
Pour tout $x \in K_{2n}$, on a $B(x, 1/2n) \cap \partial\Omega = \emptyset$; comme $x \in \Omega$, par connexité, cela implique $B(x, 1/2n) \subset \Omega$, donc $x + \mathrm{supp}(\rho_{4n}) \subset B(x, 1/4n) \subset \Omega$; C_n est donc un compact de Ω, et on en déduit que $\theta_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.
Le fait que $0 \leq \theta_n \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$ est immédiat à partir de la définition de θ_n.
On a $\nabla\theta_n = \mathbf{1}_{K_{2n}} * \nabla\rho_{4n} = 4n\mathbf{1}_{K_{2n}} * ((4n)^N \nabla\rho(4n\cdot))$, donc

$$|| \, |\nabla\theta_n| \, ||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 4n||(4n)^N \, |\nabla\rho(4n\cdot)| \, ||_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 4n|| \, |\nabla\rho| \, ||_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que $\theta_n \equiv 1$ sur un voisinage de K_n. Soit $x \in K_n + B(0, 1/4n)$. On a $|x| \leq n + 1/4n$ et $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/n - 1/4n$, donc

$$\forall y \in B\left(x, \frac{1}{4n}\right), \ |y| \leq n + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} \leq 2n \text{ et } \mathrm{dist}(y, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2n}; \tag{B.0.2}$$

on en déduit que $B(x, 1/4n) \cap \partial\Omega = \emptyset$ et, par connexité (puisque $x \in \Omega$), que $B(x, 1/4n) \subset \Omega$. Cette inclusion et (B.0.2) donnent donc $B(x, 1/4n) \subset K_{2n}$. Comme $\mathrm{supp}(\rho_{4n}(x - \cdot)) \subset B(x, 1/4n)$, on obtient

$$\theta_n(x) = \int_{K_{2n}} \rho_{4n}(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{4n}(x-y)\, dy = 1,$$

soit $\theta_n \equiv 1$ sur $K_n + B(0, 1/4n)$, ce qui conclut cette démonstration. ∎

Annexe C

Une Autre Définition de $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$

Dans la littérature, $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ n'est pas défini comme l'image par la trace de $W^{1,p}(\Omega)$, mais plutôt de manière intrinsèque, à l'aide de la théorie des espaces de Sobolev fractionnaires.

Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^{N-1}$ ($N \geq 2$) ou bien un ouvert de $\partial\Omega$ avec Ω ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. On munit E de sa mesure naturelle (i.e. la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{N-1}$ dans le premier cas, ou la mesure σ construite précédemment dans le deuxième cas). Lorsque $s \in]0,1[$ et $p \in [1,\infty[$, on définit $\mathcal{W}^{s,p}(E)$ comme étant l'ensemble des fonctions $f \in L^p(E)$ telles que

$$\int_E \int_E \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{N-1+sp}}\, dxdy < \infty.$$

Cet espace est muni de la norme ([1])

$$||f||_{\mathcal{W}^{s,p}(E)} = ||f||_{L^p(E)} + \left(\int_E \int_E \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{N-1+sp}}\, dxdy\right)^{1/p}.$$

Nous allons prouver dans cette annexe que, lorsque Ω est un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ et $p \in]1,\infty[$, alors, algébriquement et topologiquement, on a $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) = \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$. Nous verrons aussi que l'on peut construire un inverse à droite pour la trace $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$.

C.1 Le cas du demi-espace

Proposition C.1.1 *Soit $p \in]1,\infty[$. La trace $\gamma_0 : W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \to L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ est en fait linéaire continue $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$.*

Démonstration:
Soit $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+})$. On a, pour tout $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, $\xi \in S^{N-2}$ et $\rho > 0$,

$$\begin{aligned} u(x'+\rho\xi,0) - u(x',0) &= -\int_0^\rho (D_N u(x'+\rho\xi,s) - D_N u(x',s))\, ds + u(x'+\rho\xi,\rho) - u(x',\rho) \\ &= -\int_0^\rho (D_N u(x'+\rho\xi,s) - D_N u(x',s))\, ds + \int_0^\rho \nabla_{x'} u(x'+s\xi,\rho)\cdot\xi\, ds, \end{aligned}$$

donc

$$|u(x'+\rho\xi,0) - u(x',0)| \leq \int_0^\rho |D_N u(x'+\rho\xi,s) - D_N u(x',s)|\, ds + \int_0^\rho |\nabla_{x'} u(x'+s\xi,\rho)|\, ds$$

et

$$\begin{aligned} &||u(\cdot+\rho\xi,0) - u(\cdot,0)||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \\ &\quad\leq \left|\left|\int_0^\rho |D_N u(\cdot+\rho\xi,s) - D_N u(\cdot,s)|\, ds\right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} + \left|\left|\int_0^\rho |\nabla_{x'} u(\cdot+s\xi,\rho)|\, ds\right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}. \end{aligned}$$

[1]Pour $f \in L^p(E)$ et $g : E\times E \to \mathbb{R}$ définie presque partout par $g(x,y) = (f(x)-f(y))/|x-y|^{(N-1)/p+s}$, cette expression est $||f||_{L^p(E)} + ||g||_{L^p(E\times E)}$ et, comme $f \to g$ est linéaire, la définition de $||f||_{\mathcal{W}^{s,p}(E)}$ donne bien une norme sur $\mathcal{W}^{s,p}(E)$.

Mais, lorsque $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^+$ est dans $L^p(\mathbb{R}^N)=L^p(\mathbb{R};L^p(\mathbb{R}^{N-1}))$ (2), on a, pour tout $\rho>0$,

$$\left|\left|\int_0^\rho f(\cdot,s)\,ds\right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}\leq\int_0^\rho ||f(\cdot,s)||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})},$$

donc

$$\begin{aligned}
&||u(\cdot+\rho\xi,0)-u(\cdot,0)||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}\\
\leq\;&\int_0^\rho ||D_Nu(\cdot+\rho\xi,s)-D_Nu(\cdot,s)||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}\,ds+\int_0^\rho ||\,|\nabla_{x'}u(\cdot+s\xi,\rho)|\,||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}\,ds\\
\leq\;&2\int_0^\rho ||D_Nu(\cdot,s)||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}\,ds+\rho||\,|\nabla_{x'}u(\cdot,\rho)|\,||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}\\
\leq\;&\rho(F_1(\rho)+F_2(\rho))
\end{aligned}\tag{C.1.1}$$

où

$$F_1(\rho)=\frac{2}{\rho}\int_0^\rho ||D_Nu(\cdot,s)||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}\,ds\quad\text{ et }\quad F_2(\rho)=||\,|\nabla_{x'}u(\cdot,\rho)|\,||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Par un changement de variables en polaires, et en notant σ_0 la mesure sur S^{N-2},

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\frac{|u(x',0)-u(y',0)|^p}{|x'-y'|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dx'\,dy'\\
=\;&\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\frac{|u(x'+h,0)-u(x',0)|^p}{|h|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dx'\,dh\\
=\;&\int_0^\infty\int_{S^{N-2}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\frac{\rho^{N-2}|u(x'+\rho\xi,0)-u(x',0)|^p}{\rho^{N-1+p-1}}\,dx'd\rho d\sigma_0(\xi)\\
=\;&\int_0^\infty\int_{S^{N-2}}\frac{||u(\cdot+\rho\xi,0)-u(\cdot,0)||^p_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}}{\rho^p}\,d\rho d\sigma_0(\xi)\\
\leq\;&\int_0^\infty\int_{S^{N-2}}(F_1(\rho)+F_2(\rho))^p\,d\sigma_0(\xi)\,d\rho\\
\leq\;&\sigma_0(S^{N-2})||F_1+F_2||^p_{L^p(\mathbb{R}^+)},
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\frac{|u(x',0)-u(y',0)|^p}{|x'-y'|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dx'\,dy'\right)^{1/p}&\leq\sigma_0(S^{N-2})^{1/p}||F_1+F_2||_{L^p(\mathbb{R}^+)}\\
&\leq\sigma_0(S^{N-2})^{1/p}(||F_1||_{L^p(\mathbb{R}^+)}+||F_2||_{L^p(\mathbb{R}^+)}).
\end{aligned}$$

Or

$$||F_2||^p_{L^p(\mathbb{R}^+)}=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{N-1}}|\nabla_{x'}u(x',\rho)|^p\,dx'\,d\rho=||\,|\nabla_{x'}u|\,||^p_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}$$

et, puisque $\rho\to||D_Nu(\cdot,\rho)||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}$ est dans $L^p(\mathbb{R}^+)$ (la norme dans $L^p(\mathbb{R}^+)$ de cette fonction est $||D_Nu||_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}$), par le lemme de Hardy ($p\in]1,\infty[$), on a

$$||F_1||_{L^p(\mathbb{R}^+)}\leq 2p'||D_Nu||_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Ainsi, on a montré que pour tout $u\in\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+})$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\frac{|\gamma_0(u)(x')-\gamma_0(u)(y')|^p}{|x'-y'|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dx'\,dy'\right)^{1/p}\leq(1+2p')\sigma_0(S^{N-2})^{1/p}||\,|\nabla u|\,||_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}.\tag{C.1.2}$$

Soit maintenant $u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$; on prend $(u_n)_{n\geq1}\in\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$. On sait alors que $\gamma_0(u_n)\to\gamma_0(u)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ donc, quitte à extraire une suite, presque partout

[2] Voir la formule (1.2.3) dans le polycopié gm3-02 “Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles”, disponible à l'adresse web `http://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-02`.

sur $\mathbb{R}^{N-1}$; en passant à la limite $n \to \infty$ dans (C.1.2) appliqué à u_n, on en déduit par le lemme de Fatou que u vérifie aussi (C.1.2). Comme on sait déjà qu'il existe $C > 0$ indépendant de u tel que $||\gamma_0(u)||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \le C||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}$, on obtient donc, pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$,

$$||\gamma_0(u)||_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})} \le (C + (1+2p')\sigma_0(S^{N-2})^{1/p})||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)},$$

ce qui conclut cette preuve. ■

On va maintenant montrer que la trace est surjective à valeurs dans $\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$, en exhibant (théorème C.1.1) un inverse à droite de la trace; avant de citer et prouver ce résultat, nous établissons un petit lemme technique.

Lemme C.1.1 *Soit $p \in]1,\infty[$, $f \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$, $g \in \mathcal{C}^0_c(B^{N-1})$ et $\beta \in \mathcal{C}^0_c(]-1,1[)$. En posant, pour $x \in \mathbb{R}^N_+$,*

$$F(x) = \frac{|\beta(x_N)|}{x_N^N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(y) - f(x')| \left| g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| dy,$$

on a

$$||F||^p_{L^p(\mathbb{R}^N_+)} \le \frac{||g||^{p/p'}_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} ||\beta||^p_{L^\infty(\mathbb{R})} ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})}}{N+p-2} ||f||^p_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Démonstration:
Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|\beta(x_N)|^p}{x_N^{Np}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(y)-f(x')| \left|g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| dy\right)^p dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|\beta(x_N)|^p}{x_N^{Np}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(y)-f(x')| \left|g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right|^{1/p} \left|g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right|^{1/p'} dy\right)^p dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|\beta(x_N)|^p}{x_N^{Np}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(y)-f(x')|^p \left|g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| dy\right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left|g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| dy\right)^{p/p'} dx.
\end{aligned}$$

Or, par changement de variable,

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left|g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| dy = x_N^{N-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |g(z)|\, dz$$

donc, puisque $(N-1)p/p' = (N-1)(p-1) = Np - N - p + 1$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|\beta(x_N)|^p}{x_N^{Np}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(y)-f(x')| \left|g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| dy\right)^p dx \\
&\le ||g||^{p/p'}_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|\beta(x_N)|^p}{x_N^{N+p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(y)-f(x')|^p \left|g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| dy\right) dx \\
&\le ||g||^{p/p'}_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(x')-f(y)|^p \int_0^\infty \frac{|\beta(x_N)|^p}{x_N^{N+p-1}} \left|g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| dx_N\, dx' dy. \quad \text{(C.1.3)}
\end{aligned}$$

De plus, puisque $g((x'-y)/x_N) = 0$ lorsque $x_N \le |x'-y|$ et $\beta(x_N) = 0$ lorsque $x_N > 1$, on a, lorsque $|x'-y| > 1$,

$$\int_0^\infty \frac{|\beta(x_N)|^p}{x_N^{N+p-1}} \left|g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| dx_N = 0$$

et, lorsque $|x'-y| \le 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{|\beta(x_N)|^p}{x_N^{N+p-1}} \left|g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| dx_N &\le ||\beta||^p_{L^\infty(\mathbb{R})} ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} \int_{|x'-y|}^1 x_N^{-N-p+1} \\
&= \frac{||\beta||^p_{L^\infty(\mathbb{R})} ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})}}{N+p-2} \left(\frac{1}{|x'-y|^{N+p-2}} - 1\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas,

$$\int_0^\infty \frac{|\beta(x_N)|^p}{x_N^{N+p-1}}\left|g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| dx_N\, dx'dy \leq \frac{||\beta||^p_{L^\infty(\mathbb{R})}||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})}}{N+p-2}\frac{1}{|x'-y|^{N+p-2}}$$

et on a donc, par (C.1.3),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N_+}|F|^p &\leq \frac{||g||^{p/p'}_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}||\beta||^p_{L^\infty(\mathbb{R})}||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})}}{N+p-2}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\frac{|f(x')-f(y)|^p}{|x'-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\\ &\leq \frac{||g||^{p/p'}_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}||\beta||^p_{L^\infty(\mathbb{R})}||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})}}{N+p-2}||f||^p_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})},\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule souhaitée. ■

Théorème C.1.1 *Soit $p \in]1,\infty[$. Il existe une application linéaire continue $\mathcal{R}_0 : \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1}) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ telle que $\gamma_0 \circ \mathcal{R}_0 = Id_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})}$.*

Remarque C.1.1

1) *Cette application est appelé un relèvement de la trace.*
2) *En fait, nous verrons que, pour tout $f \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$, la fonction $\mathcal{R}_0 f$ que l'on construit est en fait dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N_+)$.*

DÉMONSTRATION:
Soit $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(B^{N-1})$ positive telle que $\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\rho(x')\,dx' = 1$. On pose, pour $t > 0$, $\rho_t(x') = t^{-(N-1)}\rho(x/t)$ ($(\rho_t)_{t>0}$ est une approximation de l'unité dans $\mathbb{R}^{N-1}$). Prenons $\beta \in \mathcal{C}^\infty_c(]-1,1[)$ telle que $\beta(0) = 1$.
Soit $f \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$. Posons, pour $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ et $x_N > 0$, $\mathcal{R}_0 f(x', x_N) = \beta(x_N)(f * \rho_{x_N})(x')$; par le théorème de dérivation sous l'intégrale, on constate que $\mathcal{R}_0 f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N_+)$. L'application $f \to \mathcal{R}_0 f$ est de plus linéaire.

Par l'inégalité de Young, on a, pour $x_N > 0$,

$$||\mathcal{R}_0 f(\cdot, x_N)||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \leq |\beta(x_N)|\,||f||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})},$$

donc

$$\begin{aligned}||\mathcal{R}_0 f||_{L^p(\mathbb{R}^N_+)} &= \left(\int_0^\infty ||\mathcal{R}_0 f(\cdot,x_N)||^p_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}\,dx_N\right)^{1/p}\\ &\leq ||\beta||_{L^p(\mathbb{R}^+)}||f||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})}.\end{aligned} \tag{C.1.4}$$

Par dérivation sous l'intégrale, on remarque que, pour $i \in [1, N-1]$ et $x \in \mathbb{R}^N_+$,

$$\partial_i(\mathcal{R}_0 f)(x) = \frac{\beta(x_N)}{x_N^N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(y)\partial_i\rho\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\,dy.$$

Mais $\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\partial_i\rho((x'-y)/x_N)\,dy = x_N^{N-1}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\partial_i\rho(z)\,dz = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N_+$, donc

$$\partial_i(\mathcal{R}_0 f)(x) = \frac{\beta(x_N)}{x_N^N}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}(f(y)-f(x'))\partial_i\rho\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\,dy$$

et on a alors, par le lemme C.1.1 appliqué à $g = |\partial_i\rho|$,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N_+}|\partial_i(\mathcal{R}_0 f)(x)|^p\,dx\\ &\leq \frac{||\partial_i\rho||^{p/p'}_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}||\beta||^p_{L^\infty(\mathbb{R})}||\partial_i\rho||_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})}}{N+p-2}||f||^p_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})} < \infty,\end{aligned} \tag{C.1.5}$$

ce qui règle le cas des dérivées parallèles à $\mathbb{R}^{N-1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^N_+$, on a $\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \rho_{x_N}(x'-y)\,dy = 1$, donc

$$\mathcal{R}_0 f(x) - \beta(x_N) f(x') = \beta(x_N) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (f(y) - f(x'))\rho_{x_N}(x'-y)\,dy.$$

En dérivant cette expression par rapport à x_N, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\partial_N(\mathcal{R}_0 f)(x) - \beta'(x_N) f(x') \\
&= \beta'(x_N) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (f(y) - f(x'))\rho_{x_N}(x'-y)\,dy \\
&\quad + \beta(x_N) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (f(y) - f(x')) \left(\frac{-(N-1)}{x_N^N} \rho\left(\frac{x'-y}{x_N}\right) + \frac{1}{x_N^{N-1}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{y_i - x'_i}{x_N^2} \partial_i \rho\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right) dy \\
&= \beta'(x_N) f * \rho_{x_N}(x') - \beta'(x_N) f(x') \\
&\quad + \frac{\beta(x_N)}{x_N^N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (f(y) - f(x')) \left(-(N-1)\rho\left(\frac{x'-y}{x_N}\right) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{y_i - x'_i}{x_N} \partial_i \rho\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right) dy.
\end{aligned}$$

Mais, pour tout $i \in [1, N-1]$, si $\partial_i \rho((x'-y)/x_N) \neq 0$, on a $|x'-y| \leq x_N$, donc $|x'_i - y_i| \leq x_N$ et on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N_+$ et $y \in \mathbb{R}^{N-1}$,

$$\left| -(N-1)\rho\left(\frac{x'-y}{x_N}\right) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{y_i - x'_i}{x_N} \partial_i \rho\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| \leq (N-1)\left|\rho\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| + \sum_{i=1}^{N-1} \left|\partial_i \rho\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right|.$$

En posant

$$g(z) = (N-1)|\rho(z)| + \sum_{i=1}^{N-1} |\partial_i \rho(z)| \in \mathcal{C}^0_c(B^{N-1})$$

(qui ne dépend pas de f), on obtient alors

$$|\partial_N(\mathcal{R}_0 f)(x)| \leq |h(x)| + \frac{|\beta(x_N)|}{x_N^N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f(y) - f(x')| \left| g\left(\frac{x'-y}{x_N}\right)\right| dy,$$

où $h(x) = \beta'(x_N) f * \rho_{x_N}(x')$.
En appliquant le lemme C.1.1, et puisque

$$||h||^p_{L^p(\mathbb{R}^N_+)} = \int_0^\infty |\beta'(x_N)|^p ||f * \rho_{x_N}||^p_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \leq ||f||^p_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} ||\beta'||^p_{L^p(\mathbb{R}^+)},$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
||\partial_N(\mathcal{R}_0 f)||_{L^p(\mathbb{R}^N_+)} &\leq ||f||_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} ||\beta'||_{L^p(\mathbb{R}^+)} \\
&\quad + \left(\frac{||g||^{p/p'}_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} ||\beta||^p_{L^\infty(\mathbb{R})} ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})}}{N+p-2} \right)^{1/p} ||f||_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})} \\
&\leq C ||f||_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})} < \infty
\end{aligned}$$

où C ne dépend pas de f. En rassemblant cette inégalité, (C.1.4) et (C.1.5), on constate que

$$\mathcal{R}_0 : \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1}) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$$

est bien définie et linéaire continue.

Il ne reste plus qu'à montrer que, pour tout $f \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})$, on a $\gamma_0(\mathcal{R}_0 f) = f$.
Soit $t > 0$ et, pour $x \in \overline{\mathbb{R}^N_+}$, $\tau_t(\mathcal{R}_0 f)(x) = \mathcal{R}_0 f(x', x_N + t)$; l'application $\tau_t(\mathcal{R}_0 f)$ est bien définie et dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ (car $\mathcal{R}_0 f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N_+)$). Puisque $\mathcal{R}_0 f \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$, il est bien connu que $\tau_t(\mathcal{R}_0 f) \to \mathcal{R}_0 f$ dans

$L^p(\mathbb{R}^N_+)$ lorsque $t \to 0$; de plus, $\nabla(\tau_t(\mathcal{R}_0 f)) = \tau_t(\nabla(\mathcal{R}_0 f))$ (ces dérivées sont des dérivées classiques, les fonctions étant régulières) et, puisque $\nabla(\mathcal{R}_0 f) \in (L^p(\mathbb{R}^N_+))^N$, $\tau_t(\nabla(\mathcal{R}_0 f)) \to \nabla(\mathcal{R}_0 f)$ dans $(L^p(\mathbb{R}^N_+))^N$ lorsque $t \to 0$. Ainsi, $\tau_t(\mathcal{R}_0 f) \to \mathcal{R}_0 f$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ et on a donc $\gamma_0(\tau_t(\mathcal{R}_0 f)) \to \gamma_0(\mathcal{R}_0 f)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$.
Mais $\tau_t(\mathcal{R}_0 f) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}^N_+}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, donc $\gamma_0(\tau_t(\mathcal{R}_0 f))(x') = \tau_t(\mathcal{R}_0 f)(x', 0) = \mathcal{R}_0 f(x', t) = \beta(t) f * \rho_t(x')$; comme $f * \rho_t \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ lorsque $t \to 0$ (car $f \in L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ et $(\rho_t)_{t>0}$ est une approximation de l'unité) et $\beta(t) \to 1$ lorsque $t \to 0$, on en déduit que $f = \gamma_0(\mathcal{R}_0 f)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$. ■

C.2 Cas d'un Bord d'Ouvert Faiblement Lipschitzien

C.2.1 Préliminaires

Nous établissons tout d'abord quelques lemmes qui nous aideront à prouver les résultats principaux de cette annexe.

Lemme C.2.1 *Soit $p \in]1, \infty[$, Ω et Ω' deux ouverts faiblement lipschitziens de $\mathbb{R}^N$. On se donne $\varphi : U \cap \partial\Omega' \to V \cap \partial\Omega$ un homéomorphisme bilipschitzien entre deux ouverts de leur bords. Alors l'application $f \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(V \cap \partial\Omega) \to f \circ \varphi \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(U \cap \partial\Omega')$ est bien définie et c'est un isomorphisme.*

Démonstration:
On sait déjà que cette application est un isomorphisme $L^p(V \cap \partial\Omega) \to L^p(U \cap \partial\Omega')$ (proposition 2.2.2). Notons C la norme de cette application.

Prenons $f \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(V \cap \partial\Omega)$, on définit $F : V \cap \partial\Omega \times V \cap \partial\Omega \to \mathbb{R}$ σ-presque partout par

$$F(x,y) = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{(N-1)/p + (1-1/p)}}.$$

Par hypothèse, $F \in L^p(V \cap \partial\Omega \times V \cap \partial\Omega)$ donc, par le théorème de Fubini, pour σ-presque tout $x \in V \cap \partial\Omega$, $F(x, \cdot) \in L^p(V \cap \partial\Omega)$; on sait alors que

$$||F(x, \varphi(\cdot))||^p_{L^p(U\cap\partial\Omega')} = \int_{U\cap\partial\Omega'} \frac{|f(x) - f\circ\varphi(y)|^p}{|x - \varphi(y)|^{N-1+(1-1/p)p}} \, d\sigma(y) \le C^p ||F(x,\cdot)||^p_{L^p(V\cap\partial\Omega)}.$$

Toujours par le théorème de Fubini, la fonction $G(x) = ||F(x, \varphi(\cdot))||_{L^p(U\cap\partial\Omega')}$ est dans $L^p(V \cap \partial\Omega)$ (car $F(\cdot, \varphi(\cdot)) \in L^p(V \cap \partial\Omega \times U \cap \partial\Omega')$ par l'inégalité précédente) et on a

$$\begin{aligned}
&\int_{U\cap\partial\Omega'} \int_{U\cap\partial\Omega'} \frac{|f\circ\varphi(x) - f\circ\varphi(y)|^p}{|\varphi(x) - \varphi(y)|^{N-1+(1-1/p)p}} \, d\sigma(y) d\sigma(x) \\
&= \quad ||G \circ \varphi||^p_{L^p(U\cap\partial\Omega')} \\
&\le \quad C^p ||G||^p_{L^p(V\cap\partial\Omega)} \\
&\le \quad (C^p)^2 ||F||^p_{L^p(V\cap\partial\Omega\times V\cap\Omega)} \\
&\le \quad C^{2p} \int_{V\cap\partial\Omega} \int_{V\cap\partial\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}} \, d\sigma(y) d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Or φ étant lipschitzienne, il existe $D > 0$ tel que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le D|x - y|$ pour tous $(x, y) \in (U \cap \partial\Omega')^2$, donc

$$\begin{aligned}
&\int_{U\cap\partial\Omega'} \int_{U\cap\partial\Omega'} \frac{|f\circ\varphi(x) - f\circ\varphi(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}} \, d\sigma(y) d\sigma(x) \\
&\le \quad D^{N-1+(1-1/p)p} \int_{U\cap\partial\Omega'} \int_{U\cap\partial\Omega'} \frac{|f\circ\varphi(x) - f\circ\varphi(y)|^p}{|\varphi(x) - \varphi(y)|^{N-1+(1-1/p)p}} \, d\sigma(y) d\sigma(x) \\
&\le \quad D^{N-1+(1-1/p)p} C^{2p} ||f||^p_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(V\cap\partial\Omega)}.
\end{aligned}$$

Cela prouve que l'application de transport par φ est linéaire continue

$$\mathcal{W}^{1-1/p,p}(V \cap \partial\Omega) \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(U \cap \partial\Omega').$$

Son inverse évident étant l'application de transport par φ^{-1} qui est linéaire continue

$$\mathcal{W}^{1-1/p,p}(U\cap\partial\Omega')\to\mathcal{W}^{1-1/p,p}(V\cap\partial\Omega)$$

(φ^{-1} vérifie les mêmes propriétés que φ en intervertissant le role de $V\cap\partial\Omega$ et $U\cap\partial\Omega'$), cela conclut le lemme. ■

De manière générale, lorsque $\mathcal{E}$ est un espace de fonctions et K est un compact, $\mathcal{E}_K$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathcal{E}$ qui sont nulles hors de K; cet espace est muni de la même norme que $\mathcal{E}$.

Lemme C.2.2 *Soit $E=\mathbb{R}^{N-1}$ ou $E=\partial\Omega$ (avec Ω ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$); on munit E de sa mesure m naturelle (la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{N-1}$ dans le premier cas, la mesure σ dans le second cas). Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Si K est un compact de O, alors l'extension sur E par 0 hors de $E\cap O$ est linéaire continue $\mathcal{W}^{1-1/p,p}(E\cap O)_K\to\mathcal{W}^{1-1/p,p}(E)$.*

Démonstration:
Cette extension est clairement linéaire continue $\mathcal{W}^{1-1/p,p}(E\cap O)_K\to L^p(E)$.
Soit maintenant $f\in\mathcal{W}^{1-1/p,p}(E\cap O)_K$ et notons g son extension sur E par 0 hors de $E\cap O$. On a

$$\begin{aligned}
&\int_E\int_E\frac{|g(x)-g(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dm(x)\,dm(y)\\
=\ &\int_{E\cap O}\int_{E\cap O}\frac{|g(x)-g(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dm(x)\,dm(y)+\int_{E\cap O}\int_{E\backslash O}\frac{|g(x)-g(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dm(x)\,dm(y)\\
&+\int_{E\backslash O}\int_{E\cap O}\frac{|g(x)-g(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dm(x)\,dm(y)+\int_{E\backslash O}\int_{E\backslash O}\frac{|g(x)-g(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dm(x)\,dm(y)\\
=\ &\int_{E\cap O}\int_{E\cap O}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dm(x)\,dm(y)+2\int_{E\cap O}\int_{E\backslash O}\frac{|f(x)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dm(x)\,dm(y)\\
\leq\ &||f||^p_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(E\cap O)}+2\int_K|f(x)|^p\int_{E\backslash O}\frac{1}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dm(y)\,dm(x).
\end{aligned}\tag{C.2.1}$$

Or, lorsque $x\in K$ et $y\notin O$, on a $|x-y|\geq\mathrm{dist}(K,\mathbb{R}^N\backslash O)>0$.
Supposons dans un premier temps que $E=\mathbb{R}^{N-1}$; on a alors, par changement de variable $z=x-y$ et pour tout $x\in K$,

$$\int_{E\backslash O}\frac{1}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dm(y)\leq\int_{|z|\geq\mathrm{dist}(K,\mathbb{R}^N\backslash O)}\frac{1}{|z|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dm(z)=C$$

où $C<\infty$ (car $N-1+(1-1/p)p>N-1$) ne dépend que de K, O, p et N.
Supposons maintenant que $E=\partial\Omega$ pour Ω ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$; alors, pour tout $x\in K$,

$$\int_{E\backslash O}\frac{1}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dm(y)\leq\frac{\sigma(\partial\Omega)}{\mathrm{dist}(K,\mathbb{R}^N\backslash O)^{N-1+(1-1/p)p}}=C$$

où $C<\infty$ ne dépend que de Ω, K, O, N et p.

En injectant ceci dans (C.2.1), on a C indépendant de f tel que

$$\begin{aligned}
&\int_E\int_E\frac{|g(x)-g(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,dm(x)\,dm(y)\\
&\leq\ ||f||^p_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(E\cap O)}+C||f||^p_{L^p(O\cap E)}\leq\sup(1,C)||f||^p_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(E\cap O)},
\end{aligned}$$

ce qui conclut cette preuve. ■

Lemme C.2.3 *Soit Ω un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ et $p\in]1,\infty[$. Si $\theta\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors la multiplication par θ est linéaire continue $\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)\to\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$.*

Démonstration:
Soit $f \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$. On a $\theta f \in L^p(\partial\Omega)$ avec $||\theta f||_{L^p(\partial\Omega)} \leq ||\theta||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||f||_{L^p(\partial\Omega)}$.
On a de plus, par le caractère lipschitzien de θ,

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|\theta(x)f(x)-\theta(y)f(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) \\
&\leq \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{(|\theta(x)-\theta(y)||f(x)|+|\theta(y)||f(x)-f(y)|)^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) \\
&\leq 2^p \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|\theta(x)-\theta(y)|^p|f(x)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) + 2^p \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|\theta(y)|^p|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) \\
&\leq 2^p \mathrm{Lip}(\theta)^p \int_{\partial\Omega} |f(x)|^p \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\,d\sigma(y)\,d\sigma(x) + 2^p||\theta||^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||f||^p_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)}. \qquad \text{(C.2.2)}
\end{aligned}$$

Soit $(\tau_i, O_i \cap \partial\Omega)_{i\in[1,k]}$ un système de paramétrisations de $\partial\Omega$ et $(\zeta_i)_{i\in[1,k]}$ une partition de l'unité $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ associée. Fixons $x \in \partial\Omega$.
Si $x \in O_i$ alors, par le caractère bilipschitzien de τ_i, il existe $C_i > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
&\int_{B^{N-1}} \zeta_i \circ \tau_i(z) \frac{1}{|\tau_i(\tau_i^{-1}(x))-\tau_i(z)|^{N-2}} \left|\frac{\partial\tau_i}{\partial z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\tau_i}{\partial z_{N-1}}\right|(z)\,dz \\
&\leq C_i \int_{B^{N-1}} \zeta_i \circ \tau_i(z) \frac{1}{|\tau_i^{-1}(x)-z|^{N-2}}\,dz \\
&\leq C_i||\zeta_i||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{2B^{N-1}} \frac{1}{|z|^{N-2}}\,dz = D_i < \infty
\end{aligned}$$

(D_i ne dépend pas de x).
Si $x \notin O_i$, alors pour tout $z \in B^{N-1}$ tel que $\zeta_i(\tau_i(z)) \neq 0$, on a $|x-\tau_i(z)| \geq \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(\zeta_i), \mathbb{R}^N\backslash O_i) > 0$ donc, par le caractère lipschitzien de τ_i, il existe C_i tel que

$$\begin{aligned}
&\int_{B^{N-1}} \zeta_i \circ \tau_i(z) \frac{1}{|x-\tau_i(z)|^{N-2}} \left|\frac{\partial\tau_i}{\partial z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\tau_i}{\partial z_{N-1}}\right|(z)\,dz \\
&\leq \frac{C_i}{\mathrm{dist}(\mathrm{supp}(\zeta_i), \mathbb{R}^N\backslash O_i)^{N-2}}||\zeta_i||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}|B^{N-1}| = D_i < \infty
\end{aligned}$$

(D_i ne dépend pas de x).

On a donc, pour tout $x \in \partial\Omega$,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\,d\sigma(y) = \sum_{i=1}^k \int_{B^{N-1}} \zeta_i \circ \tau_i(z) \frac{1}{|x-\tau_i(z)|^{N-2}} \left|\frac{\partial\tau_i}{\partial z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial\tau_i}{\partial z_{N-1}}\right|(z)\,dz \leq \sum_{i=1}^k D_i = D$$

avec D ne dépendant pas de x. En injectant ceci dans (C.2.2), on en déduit

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|\theta(x)f(x)-\theta(y)f(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-1/p)p}}\,d\sigma(x)\,d\sigma(y) \leq 2^p\mathrm{Lip}(\theta)^p D||f||^p_{L^p(\partial\Omega)} + 2^p||\theta||^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}||f||^p_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)},$$

ce qui implique le résultat du lemme. ■

C.2.2 Résultats Principaux

Proposition C.2.1 *Si Ω est un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ et $p \in]1,\infty[$, alors la trace $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ est en fait linéaire continue $W^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$.*

Démonstration:
On revient à la définition de la trace. Rappelons que la trace d'une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est définie, en prenant $(O_i, \varphi_i)_{i\in[1,k]}$ un système de cartes de $\partial\Omega$ et $(\theta_i)_{i\in[1,k]}$ une partition de l'unité sur $\partial\Omega$ associée, comme

$$\gamma(u) = \sum_{i=1}^k P_i\left(\gamma_0\left(E((\theta_i u)_{|O_i\cap\Omega} \circ \varphi_i^{-1})\right)_{|B^{N-1}} \circ \varphi_i\right)$$

où γ_0 est la trace dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, E est l'extension à $\mathbb{R}^N_+$ par 0 hors de B^N_+ d'une fonction de $W^{1,p}(B^N_+)$ à support compact dans B^N et P_i est l'extension à $\partial\Omega$ par 0 hors de $O_i \cap \Omega$ d'une fonction de $L^p(O_i \cap \partial\Omega)$. On voit que

- La multiplication par θ_i est linéaire continue
$$W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)_{\mathrm{supp}(\theta_i)},$$
- La restriction est linéaire continue
$$W^{1,p}(\Omega)_{\mathrm{supp}(\theta_i)} \to W^{1,p}(O_i \cap \Omega)_{\mathrm{supp}(\theta_i)},$$
- Le transport par φ_i^{-1} est linéaire continu (théorème 1.4.1)
$$W^{1,p}(O_i \cap \Omega)_{\mathrm{supp}(\theta_i)} \to W^{1,p}(B_N^+)_{\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))},$$
- L'extension E est linéaire continue (lemme 1.4.2)
$$W^{1,p}(B_N^+)_{\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))} \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)_{\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))},$$
- La trace γ_0 est linéaire continue (proposition C.1.1),
$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)_{\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))} \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})_{\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))},$$
- La restriction à B^{N-1} est linéaire continue
$$\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1})_{\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))} \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(B^{N-1})_{\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))},$$
- Le transport par φ_i est linéaire continu (lemme C.2.1)
$$\mathcal{W}^{1-1/p,p}(B^{N-1})_{\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))} \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(O_i \cap \partial\Omega)_{\mathrm{supp}(\theta_i)},$$
- Le prolongement P_i est linéaire continu (lemme C.2.2)
$$\mathcal{W}^{1-1/p,p}(O_i \cap \partial\Omega)_{\mathrm{supp}(\theta_i)} \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega).$$

Ainsi, la trace est effectivement linéaire continue $W^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$. ■

Proposition C.2.2 *Soit Ω un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ et $p \in]1,\infty[$. Il existe un relèvement de la trace $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$, c'est à dire une application linéaire continue*
$$\mathcal{R} : \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$$
telle que, pour tout $f \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$, $\gamma(\mathcal{R}f) = f$.

Démonstration:
Soit $(O_i, \varphi_i)_{i\in[1,k]}$ un système de cartes de $\partial\Omega$ et $(\theta_i)_{i\in[1,k]}$ une partition $\mathcal{C}^\infty_c$ de l'unité associée.
On prend $\Theta \in \mathcal{C}^\infty_c(B^N)$ qui vaut 1 au voisinage de $\cup_{i=1}^k \varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))$ (pour tout $i \in [1,k]$, comme $\mathrm{supp}(\theta_i)$ est un compact de O_i, $\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))$ est un compact de B^N).
Grâce aux résultats précédents, on constate que, pour tout $i \in [1,k]$,

- La multiplication par θ_i est linéaire continue (lemme C.2.3)
$$\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega) \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)_{\mathrm{supp}(\theta_i)},$$
- La restriction à $O_i \cap \partial\Omega$ est linéaire continue
$$\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)_{\mathrm{supp}(\theta_i)} \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(O_i \cap \partial\Omega)_{\mathrm{supp}(\theta_i)},$$

- Le transport par φ_i^{-1} est linéaire continu (lemme C.2.1)

$$\mathcal{W}^{1-1/p,p}(O_i \cap \partial\Omega)_{\mathrm{supp}(\theta_i)} \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(B^{N-1})_{\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))},$$

- L'extension P à $\mathbb{R}^{N-1}$ par 0 hors de B^{N-1} est linéaire continue (lemme C.2.2)

$$\mathcal{W}^{1-1/p,p}(B^{N-1})_{\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))} \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1}),$$

- Il existe un relèvement $\mathcal{R}_0$ linéaire continu (théorème C.1.1)

$$\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{N-1}) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+),$$

- La multiplication par Θ est linéaire continue

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)_{\mathrm{supp}(\Theta)},$$

- La restriction à B^N_+ est linéaire continue

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)_{\mathrm{supp}(\Theta)} \to W^{1,p}(B^N_+)_{\mathrm{supp}(\Theta)},$$

- Le transport par φ_i est linéaire continu (théorème 1.4.1)

$$W^{1,p}(B^N_+)_{\mathrm{supp}(\Theta)} \to W^{1,p}(O_i \cap \Omega)_{\varphi_i^{-1}(\mathrm{supp}(\Theta))}$$

- L'extension E_i à Ω par 0 hors de $O_i \cap \Omega$ est linéaire continue (lemme 1.4.2, $\varphi_i^{-1}(\mathrm{supp}(\Theta))$ étant un compact de O_i)

$$W^{1,p}(O_i \cap \Omega)_{\varphi_i^{-1}(\mathrm{supp}(\Theta))} \to W^{1,p}(\Omega).$$

Ainsi, lorsque $f \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$,

$$\mathcal{R}f = \sum_{i=1}^{k} E_i((\Theta\mathcal{R}_0(P((\theta_i f)_{|O_i\cap\partial\Omega} \circ \varphi_i^{-1})))_{|B^N_+} \circ \varphi_i)$$

définit une application linéaire continue $\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$. Il reste à voir qu'il s'agit bien d'un relèvement de la trace.

Avant de faire cela, établissons un petit résultat annexe: pour tout $i \in [1,k]$, si $v \in W^{1,p}(B^N_+)$ est à support compact dans B^N, alors

$$\gamma(E_i(v \circ \varphi_i)) = 0 \text{ hors de } O_i \qquad \text{et} \qquad \gamma(E_i(v \circ \varphi_i)) = (\gamma_0(Ev))_{|B^{N-1}} \circ \varphi_{i|O_i\cap\partial\Omega} \text{ sur } O_i \cap \partial\Omega \tag{C.2.3}$$

(où E est l'application de prolongement à $\mathbb{R}^N_+$ par 0 hors de B^N_+ d'une fonction de $W^{1,p}(B^N_+)$ à support compact dans B^N).

Pour voir cela, on approche v par une suite de $(v_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{B^N_+})$ à supports dans un compact fixé de B^N (ce qui est possible: il suffit de convoler $Ev \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ par des noyaux régularisants décentrés sur $\mathbb{R}^N_-$) et on constate, grâce aux propriétés de continuité de E_i et du transport par φ_i, que $E_i(v_n \circ \varphi_i) \to E_i(v \circ \varphi_i)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, donc que $\gamma(E_i(v_n \circ \varphi_i)) \to \gamma(E_i(v \circ \varphi_i))$ dans $L^p(\partial\Omega)$. Or $E_i(v_n \circ \varphi_i)$ étant aussi continue sur $\overline{\Omega}$ (car v_n est continue à support compact dans B^N et $\varphi_i : O_i \to B^N$ est un homéomorphisme, donc $v_n \circ \varphi_i$ est continue à support compact dans O_i: son extension à $\mathbb{R}^N$ par 0 hors de O_i est donc continue), on a $\gamma(E_i(v_n \circ \varphi_i)) = (E_i(v_n \circ \varphi_i))_{|\partial\Omega}$; ceci permet déjà de voir que $\gamma(E_i(v_n \circ \varphi_i)) = 0$ hors de O_i (car E_i est l'extension par 0 hors de O_i) donc, en passant à la limite, que $\gamma(E_i(v \circ \varphi_i)) = 0$ hors de O_i. Sur $O_i \cap \partial\Omega$, on a $\gamma(E_i(v_n \circ \varphi_i)) = (v_n \circ \varphi_i)_{|O_i\cap\partial\Omega} = (v_n)_{|B^{N-1}} \circ \varphi_{i|O_i\cap\partial\Omega} = \gamma_0(Ev_n)_{|B^{N-1}} \circ \varphi_{i|O_i\cap\partial\Omega}$ (v_n étant continue à support compact dans B^N, on a $\gamma_0(Ev_n)_{|B^{N-1}} = (v_n)_{|B^{N-1}}$); or, par les propriétés de continuité de γ_0 et E, $\gamma_0(Ev_n) \to \gamma_0(Ev)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$ donc $\gamma_0(Ev_n)_{|B^{N-1}} \to \gamma_0(Ev)_{|B^{N-1}}$ dans $L^p(B^{N-1})$ et $\varphi_{i|O_i\cap\partial\Omega}$ étant un homéomorphisme bilipschitzien entre $O_i \cap \partial\Omega$ et B^{N-1}, on en déduit que $\gamma_0(Ev_n)_{|B^{N-1}} \circ \varphi_{i|O_i\cap\partial\Omega} \to \gamma_0(Ev)_{|B^{N-1}} \circ \varphi_{i|O_i\cap\partial\Omega}$ dans $L^p(O_i \cap \partial\Omega)$. Cela donne donc bien le résultat (C.2.3).

Soit $f \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ et $i \in [1,k]$. En appliquant (C.2.3) à $v = (\Theta\mathcal{R}_0(P((\theta_i f)_{|O_i\cap\partial\Omega} \circ \varphi_i^{-1})))_{|B_+^N}$, on a, hors de O_i,

$$\gamma(E_i((\Theta\mathcal{R}_0(P((\theta_i f)_{|O_i\cap\partial\Omega} \circ \varphi_i^{-1})))_{|B_+^N} \circ \varphi_i)) = 0$$

et, puisque $Ev = \Theta\mathcal{R}_0(P((\theta_i f)_{|O_i\cap\partial\Omega} \circ \varphi_i^{-1}))$ (car $\mathrm{supp}(\Theta) \subset B^N$), sur $O_i \cap \partial\Omega$,

$$\gamma(E_i((\Theta\mathcal{R}_0(P((\theta_i f)_{|O_i\cap\partial\Omega} \circ \varphi_i^{-1})))_{|B_+^N} \circ \varphi_i)) = (\gamma_0(\Theta\mathcal{R}_0(P((\theta_i f)_{|O_i\cap\partial\Omega} \circ \varphi_i^{-1}))))_{|B^{N-1}} \circ \varphi_{i|O_i\cap\partial\Omega}.$$

Mais, Θ étant régulière, par la proposition 4.1.3 et la définition de $\mathcal{R}_0$,

$$\begin{aligned}\gamma_0(\Theta\mathcal{R}_0(P((\theta_i f)_{|O_i\cap\partial\Omega} \circ \varphi_i^{-1}))) &= \Theta_{|\mathbb{R}^{N-1}}\gamma_0(\mathcal{R}_0(P((\theta_i f)_{|O_i\cap\partial\Omega} \circ \varphi_i^{-1}))) \\ &= \Theta_{|\mathbb{R}^{N-1}} P((\theta_i f)_{|O_i\cap\partial\Omega} \circ \varphi_i^{-1}),\end{aligned}$$

donc par définition de P,

$$(\gamma_0(\Theta\mathcal{R}_0(P((\theta_i f)_{|O_i\cap\partial\Omega} \circ \varphi_i^{-1}))))_{|B^{N-1}} = \Theta_{|B^{N-1}}(\theta_i f)_{|O_i\cap\partial\Omega} \circ {\varphi_i^{-1}}_{|B^{N-1}}$$

et on a donc, sur $O_i \cap \partial\Omega$,

$$\gamma(E_i((\Theta\mathcal{R}_0(P((\theta_i f)_{|O_i\cap\Omega} \circ \varphi_i^{-1})))_{|B_+^N} \circ \varphi_i)) = \Theta_{|B^{N-1}} \circ \varphi_{i|O_i\cap\partial\Omega}\theta_i f.$$

Comme $\Theta = 1$ au voisinage de $\varphi_i(\mathrm{supp}(\theta_i))$, on en déduit que, sur $O_i \cap \partial\Omega$,

$$\gamma(E_i((\Theta\mathcal{R}_0(P((\theta_i f)_{|O_i\cap\partial\Omega} \circ \varphi_i^{-1})))_{|B_+^N} \circ \varphi_i)) = \theta_i f.$$

Comme $\theta_i f = 0$ sur $\partial\Omega$ hors de O_i, cette égalité est en fait vérifiée partout sur $\partial\Omega$ (i.e. dans $L^p(\partial\Omega)$).

Par linéarité de la trace et définition de $\mathcal{R}f$, on trouve finalement, puisque $(\theta_i)_{i\in[1,k]}$ est une paritition de l'unité sur $\partial\Omega$,

$$\gamma(\mathcal{R}f) = \sum_{i=1}^k \theta_i f = \left(\sum_{i=1}^k \theta_i\right) f = f,$$

ce qui conclut cette preuve. ■

Théorème C.2.1 *Soit Ω un ouvert faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ et $p \in]1,\infty[$. Algébriquement et topologiquement, on a $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) = \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$.*

Démonstration:
L'injection continue de $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ dans $\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ se déduit de la proposition C.2.1. En effet, si $f \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ alors, en prenant $u \in W^{1,p}(\Omega)$ dont la trace sur $\partial\Omega$ est f, on a $f = \gamma(u) \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ et, en notant C la norme de la trace $W^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$, $||f||_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$; cette inégalité étant vraie pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ayant pour trace f, on obtient, par définition de la norme sur $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$, $||f||_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)} \leq C||f||_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)}$.
L'injection continue de $\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ dans $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ se déduit de la proposition C.2.2. En effet, si $f \in \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$, en notant $\mathcal{R} : \mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$ un relèvement de la trace, on a $f = \gamma(\mathcal{R}f) \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ et, par définition de la norme sur $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$,

$$||f||_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)} \leq ||\mathcal{R}f||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq ||\mathcal{R}||_{\mathcal{L}(\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega),W^{1,p}(\Omega))}||f||_{\mathcal{W}^{1-1/p,p}(\partial\Omega)},$$

ce qui conclut cette preuve. ■