Définition du topos d'un espace connectif

Stéphane Dugowson

Définition du topos d'un espace connectif

Stéphane Dugowson *

21 décembre 2016

Résumé. Cette courte note définit le topos de Grothendieck associé à un espace connectif.

Mots clés. Topos de Grothendieck. Espaces connectifs.

Abstract. The Topos Of A Connectivity Space — In this short note, a topos — called *the topos of the connectivity space* — is associated with every such space.

Key words. Grothendieck Topos. Connectivity spaces.

MSC 2010 : 18B25, 54A05.

L'objet de cette note est de définir le *topos associé à un espace connectif*. Pour les notations et les définitions, on se reportera à [1]. Soit $X = (X, \mathcal{K})$ un espace connectif, que nous ne supposons pas nécessairement intègre.

L'ensemble ordonné $(\mathcal{K}, \subset)$ s'identifie à une catégorie que nous noterons encore $\mathcal{K}$. Bien entendu, on peut considérer le topos des préfaisceaux sur cet ensemble ordonné, mais ce n'est pas celui-là (en général) que nous appellerons le topos associé à $\mathcal{K}$. Pour tout connexe $K \in \mathcal{K}$, on note $\mathbf{c}(K)$ l'ensemble des cribles sur K. Tout crible sur K sera identifié à l'ensemble de parties connexes de K que sont les domaines des flèches du crible en question.

Remarque 1. Pour tout connexe $A \in \mathcal{K}$, la structure connective induite sur A, que nous noterons $\mathcal{K}_{|A}$ et qui est donnée par

$$\mathcal{K}_{|A} = \mathcal{K} \cap \mathcal{P}A$$

constitue le crible maximal sur A :

$$c_{\max}(A) = \mathcal{K}_{|A}.$$

Pour tout $A \in \mathcal{K}$, on pose

$$J(A) = \{c \in \mathbf{c}(A), [c]_0 = \mathcal{K}_{|A}\},$$

où $[c]_0$ désigne la structure connective [1] engendrée par l'ensemble $c \subset \mathcal{K}$. Anticipant l'annonce du théorème 2 ci-dessous, pour tout connexe $A \in \mathcal{K}$, les éléments de $J(A)$ seront appelés les *cribles couvrants* A (ou les cribles qui recouvrent A).

*s.dugowson@gmail.com

1. Non nécessairement intègre.

Remarque 2. Les points ne couvrent qu'eux-mêmes : les connexes non réduits à un point ne sont jamais engendrés par les singletons seuls.

La proposition suivante, dans laquelle $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ désigne l'ensemble des connexes irréductibles, découle immédiatement des définitions.

Proposition 1. *Une partie connexe $K \in \mathcal{K}$ de X est irréductible si et seulement si $J(K)$ est un singleton, seul le crible maximal étant alors couvrant :*

$$(K \in \mathcal{I}_{\mathcal{K}}) \Leftrightarrow J(K) = \{c_{\max}(K)\}.$$

Remarque 3. Pour tout connexe $K \subset X$, il y a deux cribles distincts d'union la partie vide — toujours connexe — de K : le crible vide $\varnothing$ et le crible $\{\varnothing\}$ dont le seul élément est l'injection canonique $\varnothing \hookrightarrow K$. Si $K = \varnothing$, ces deux cribles couvrent $\varnothing$: ainsi, $J(\varnothing)$ a deux éléments — le crible maximal et le crible vide — et la partie vide $\varnothing \subset X$ n'est donc pas irréductible.

Théorème 2. *J constitue une topologie de Grothendieck sur la catégorie $\mathcal{K}$.*

Démonstration. En effet,

— Pour tout $A \in \mathcal{K}$, le crible maximal $c_{\max}(A)$ recouvre trivialement A,

— La restriction à un connexe $B \subset A$ d'un crible couvrant A est couvrante pour B, puisque $\mathcal{K}_B$ est engendré par des éléments du crible, qui sont eux-mêmes nécessairement inclus dans B,

— Toute couverture de chacun des connexes d'une famille couvrant K détermine une famille couvrante de K puisque la structure connective engendrée par celle-ci, contenant nécessairement ceux qui appartiennent à celle-là, contient également la structure que ces derniers engendrent.

□

Définition 1. Le *site de $\mathcal{K}$* est le site $(\mathcal{K}, J)$. Le topos $\mathcal{T}_{(X,\mathcal{K})} = \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ associé à un espace connectif $(X, \mathcal{K})$ est le topos des faisceaux d'ensembles sur le site $(\mathcal{K}, J_{\mathcal{K}})$.

Exemple 1. On prend sur $X = \{a, b, c, d, e\}$ la structure connective

$$\mathcal{K} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}.$$

Tous les $J(K)$ sont réduits au crible maximal sur K, à l'exception du vide $\varnothing$ et de $\{a, b, c, d\}$ qui est déjà couvert par le crible $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$.

Exemple 2. Soit $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}$ la structure connective usuelle sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des intervalles. Pour tout intervalle I et tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des sous-intervalles de I de longueur $< \epsilon$ est un crible couvrant.

Conclusion Naturellement, parmi les nombreuses questions qui se posent d'emblée, se pose en particulier celle de savoir s'il est possible d'associer un morphisme géométrique à un morphisme connectif.

Références

[1] Stéphane Dugowson. On connectivity spaces. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, LI(4) :282–315, 2010. `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00446998/fr`.