Pavages, carrelages, forçage, hypomorphie et classification de Gallaï dans les relations binaires

Jean Hagendorf

Pavages, carrelages, forçage, hypomorphie et classification de Gallaï dans les relations binaires

Par Jean Guillaume Hagendorf

Résumé

Nous étudions les liens entre les concepts voisins d'hypomorphie, de pavages et de forçage. Nous introduisons la notion de « carrelages » grâce à laquelle nous montrons la stabilité de la classification de Gallaï face à la $\leq 3/2-$hypomorphie c'est à dire le fait que si une relation binaire se trouve dans une des catégories de cette classification toute relation qui lui est $\leq 3/2-$hypomorphe se trouve dans la même, résultat étonnant vu l'absence de lien a priori entre cette classification et la $\leq 3/2-$hypomorphie. En fait un lien est établi entre la catégorie de la classification de Gallaï où se range chaque relation et la façon dont elle peut être recouverte par un carrelage. La compatibilité du carrelage avec l'hypomorphie provenant de leur définition même, nous arrivons à nos fins, alors qu'une démonstration directe semble impraticable. Nous montrons qu'avec des conditions d'hypomorphie infinie renforçant la ≤3/2-hypomorphie, les classes de différence qui sont aussi des classes d'identité ne peuvent être que des dilatées de chaines, cas de figure qui est effectivement réalisable. Chemin faisant nous démontrons que si deux relations binaires sont (≤3/2)-hypomorphes, tout intervalle de R qui ne serait pas intervalle de S est un dilaté de chaîne, résultat voisin d'un théorème obtenu par Boussaïri et Ille en [3].

Classification AMS : 05C20, 05C60, 05C63, 06A05

Mots clés : Relation, Binaire, Graphe, Chaîne, Intervalle, Robuste, Indécomposable, Hypomorphie, Hémimorphie, Forçage, Pavage, Gallaï, Classe de différence, Classe d'identité.

§0

Définitions et rappels.

On appelle *relation binaire* R de *base* E (base qui sera notée |R|) une application de E^2 dans un ensemble arbitraire à deux éléments : {+,-}. Toutes les relations considérées ici seront supposées binaires et si on veut irréflexives : on peut les voir comme des *digraphes.* Les éléments de la base pourront être appelés *sommets* de R. L'assertion « R(a,b)=+ » pourra se lire « R(a,b) est *vraie* ». R* désigne la duale de R : R*(x,y)=R(y,x). Si F est une partie de la base de R on note R|F la restriction de R à F. Si a et b sont dans la base la paire {a,b} sera appelée une *arête* qu'on pourra noter [a,b] (qui ne se distingue alors pas de [b,a]). On dit d'une arête [a,b] qu'elle est *orientée* (*modulo* R) ou qu'elle est une *flèche* si R(a,b)≠R(b,a). Sinon elle est dite *neutre* : *pleine* si R(a,b)=R(b,a)=+, *vide* si R(a,b)=R(b,a)= - . Une relation pourra aussi être qualifiée de *pleine* si toutes ses arêtes sont pleines, idem pour « vide ». Un *tournoi* est une relation binaire sans arête neutre. Une *chaîne* est un ordre total. Un 3-emble {x,y,z} sera plus joliment appelé un *triplet.* Un triplet contenant une flèche, une arête pleine et une vide est appelé un *drapeau tricolore.* On parlera simplement de *drapeau* si le triplet contient une flèche et deux arêtes neutres de natures éventuellement différentes. Un triplet {a,b,u} est appelé un *pic* si [a,b] est neutre [a,u] et [b,u] étant des flèches vérifiant R(a,u)=R(b,u). Un *3-cycle* est un triplet {a,b,c} (noté aussi (a,b,c)) formé de 3 flèches où R(a,b)=R(b,c)=R(c,a). Une *3-consécutivité* est un triplet {a,b,c} où [a,c] est neutre alors que [a,b] et [b,c] sont des flèches telles que R(a,b)=R(b,c). On désigne par ω le type de l'ordre « $<$ » sur $\mathbb{N}$ et par Ω le type de la *consécutivité* sur $\mathbb{N}$ définie par le fait que, modulo cette consécutivité C, [n,n+1] est orienté avec C(n,n+1)=+, les arêtes formées de deux sommets non consécutifs étant toutes vides ou toutes pleines (voir [9] pour plus de précisions).

On notera « a<b mod R » si a≠b avec [a,b] R-orienté et R(a,b)=+ (et donc R(b,a)= -) ; on dira que « b *majore* a » (sous-entendu, comme toujours ici, « *strictement* ») ou encore que « a est *minorant*

de b », ou encore que [a,b] est orienté de a vers b ; on dira alors que (a,b) est un *arc* de R. Le dual de l'arc e=(a,b) est (b,a) noté e*. Si [a,b] est neutre on notera encore a|b. Soient R et R' deux relations binaires de même base, on dit d'une arête [a,b] orientée (mod R et mod R') qu'elle *change* ou s'*inverse* (en passant de R à R') si R(a,b)≠R'(a,b) (et donc R(a,b)=R'(b,a)). On dira qu'un extremum *change* s'il est maximum pour une des relations R ou R' et minimum pour l'autre. De même on parlera de « minorant ou majorant changeant » d'un ensemble pour dire d'un élément qu'il majore cet ensemble modulo une des relations R ou R' et le minore modulo l'autre.

Deux relations R et R' de même base seront dites $\leq$ *k-hypomorphes* où k est un entier si les restrictions de R et R' à toute partie de $\leq k$ éléments sont isomorphes. Deux relations R et R' de même base seront dites $\leq$ *k-hémimorphes* ou encore $\leq k/2$-*hypomorphes* si les restrictions de R et R' à toute partie de $\leq k$ éléments sont isomorphes ou anti-isomorphes (c.-à-d. chacune isomorphe au dual de l'autre). On dira de deux relations R et R' de même base qu'elles sont ω-*hypomorphes* si, pour toute partie N de la base, R|N est de type ω si est seulement si il en va de même de R'|N. Idem pour ω^*, Ω et Ω^*. Deux relations R et R' de même base seront dites ω-*hémimorphes* ou encore $\omega/2$-*hypomorphes* si, pour toute partie N de la base, R|N est de type ω ou ω^* si est seulement quand il en va de même de R'|N. De même pour Ω.

Soient *R* et *R'* deux relations (≤ 2)-hémimorphes et $a = (u,\ v)$ un arc de *R*. Il est clair que R'$(u,\ v)$ $\neq$ *R'*$(v,\ u)$. Si a (resp. $a^{*)}$ est un arc de *R'*, on dit que l'arc a de *R* est préservé (resp. inversé) dans *R'*.

Soit un entier $k \geq 2$ et soient $a_1 = (u_1,\ v_1)$ et $a_2 = (u_2,\ v_2)$ deux arcs distincts de *R*. On dit que l'arc a_1 *k-force* l'arc a_2 lorsque pour toute relation *R'* qui est ($\leq k$)-hémimorphe à *R*, si l'arc a_1 est inversé dans *R'*, alors l'arc a_2 est aussi inversé dans *R'*. Par ailleurs, disons (comme Boussaïri et -voir [3]-) que la relation *R* est *k-forçable* si les seules relations qui lui sont ($\leq k$)-hémimorphes sont *R* et sa duale R^*.

Dans une relation binaire R appelons *chemin de flèches* une suite finie d'arêtes ($[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$) notée $[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ où $[x_q,x_{q+1}]$ est, pour $0\leq q<n$, une flèche mod R. Un tel chemin est dit *monotone* si l'arête (x_p,x_{p+1}) est orientée comme (x_q,x_{q+1}) pour tous p, q<n. Un tel chemin monotone $[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ est dit *minimal* si on ne peut en extraire un chemin monotone de mêmes extrémités x_0 et x_n, obtenu en sautant des escales, comme $[x_0,\ldots,x_p,x_{p+q},\ldots,x_n]$ pour un q>1. La *longueur* d'un chemin est le nombre de ses arêtes.

Une relation binaire est dite *connexe* si un chemin de flèches (appelé *chemin de connexité*) relie deux sommets quelconques. Une partie de la base de cette relation sera dite *connexe* si la restriction de la relation à cette partie l'est.

La suite du §0 est due à Youssef Boudabbous.

Lemme. *Étant donnés un entier $k \geq 2$ et une relation binaire R, la relation de k-forçage entre les arcs distincts de R est une relation symétrique.*

Preuve. Supposons, par l'absurde, qu'un arc a_2 ne k-force pas un arc a_1, qui, lui-même, k-force a_2. Par définition, il existe alors une relation *R'* qui est ($\leq k$)-hémimorphe à *R* et dans laquelle l'arc a_2 est inversé alors que l'arc a_1 est préservé. Considérons alors la relation $R'' = (R')^*$, la duale de *R'*. Comme *R"* est trivialement ($\leq k$)-hémimorphe à sa duale *R'* qui est, à son tour, ($\leq k$)-hémimorphe à *R*, alors *R"* est ($\leq k$)-hémimorphe à *R*. D'autre part, il est clair que dans la relation *R"*, l'arc a_1 est inversé, alors que l'arc a_2 est préservé ; ce qui contredit le fait que a_1 k-force a_2. □

Corollaire. *Étant données un entier $k \geq 2$ et une relation binaire non symétrique R, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) La relation R est k-forçable.

(ii) Il existe un arc (de R) qui k-force tous les autres arcs (de R).

(iii) Tout arc (de R) k-force tous les autres arcs (de R).

Soient R et R' deux relations $\leq$ 3-hypomorphes. $D_{R,R'}$ désigne le graphe symétrique qui entre x et y vaut + si R(x,y)≠R'(x,y). $D_{R,R'}$ engendre des classes d'équivalence appelée *classes de différence* (voir [14]). Son complémentaire, $D_{R^*,R'}$, engendre des classes dites d'*identité*. On appelle *classe de (≤p)-hypomorphie* une relation R telle qu'existe, de même base que R, une relation R', (≤p)-hypomorphe à R, ne formant avec R qu'une seule classe de différence. Idem avec ω etc ... à la place de (≤p). Idem pour les classes d'identité.

Remarque. *Étant donnés un entier $k \geq 2$, une relation binaire non symétrique R et deux arcs distincts $a_1 = (u_1,\ v_1)$ et $a_2 = (u_2,\ v_2)$ de R, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) L'arc a_1 k-force l'arc a_2.

(ii) L'arc a_2 k-force l'arc a_1.

(iii) Pour toute relation R' ($\leq k$)-hémimorphe à R, les paires e_1 =$\{u_1, v_1\}$ et e_2 = $\{u_2, v_2\}$ sont toutes deux des arêtes du graphe (symétrique) de différence $D_{R,R'}$ ou de son complémentaire.

Remarquons que dans la relation R°, obtenue en remplaçant les arêtes vides de R par des pleines, le forçage est le même que dans R : f force g mod R revient au même que f force g mod R° car sur un triplet T si R°|T et R°'|T sont isomorphes ou anti-isomorphes alors R|T et R'|T sont isomorphes ou anti-isomorphes. La réciproque est vraie.

§1

Un *intervalle* I d'une relation R de base |R| est une partie de la base telle que tout a fixé de la base, extérieur à I, R(a,x) est constant ainsi que R(x,a) pour tout x dans I. Le vide, les singletons et la base entière sont des intervalles dit *triviaux*. On dit *propres* les intervalles différents de la base entière. Une relation R est dite *dilatée* de S si elle est obtenue à partir de S en y remplaçant certains sommets par un R-intervalle. Une relation est dite *indécomposable* si ses seuls intervalles sont les intervalles triviaux.

Un intervalle *fort* est un intervalle qui ne chevauche aucun autre intervalle ; les singletons et la base entière sont forts ainsi que l'ensemble vide.

Introduisons la notion de *robustesse* d'une relation binaire d'une façon un peu différente de celle de [1] qui ne permet pas les abus de langage que nous nous autoriserons.

Un *intervalle fort* I d'une relation R est dit *robuste* s'il est réduit au vide ou à un singleton ou s'il vérifie les deux conditions équivalentes suivantes :

1. .Il existe deux éléments x et y (distincts) dans la base tels que I est l'intersection de tous les intervalles forts contenant x et y.
2. .Parmi les sous-intervalles propres forts de I il en existe un (ou plusieurs) qui est maximal.

Ces énoncés devront être pris au pied de la lettre pour permettre aux dilatés de chaîne d'être robustes : s'il n'y a pas du tout de sous-intervalle propre fort de I dans l'énoncé 2. alors I est (trivialement) robuste.

Une relation R est dite *robuste* si elle vérifie une des deux conditions équivalentes suivantes :

(i) Sa base |R| est un intervalle fort robuste (au sens précédemment défini) de R.

(ii) Les intervalles propres forts maximaux de R (que certains appellent les *blocs*) forment une partition (dite *canonique*) de la base.

Les relations non robustes sont dites *limites.*

Proposition 1. Soit F un intervalle fort de la base de R. F est robuste si et seulement si R|F est aussi robuste.

La base toute entière d'une relation n'est pas nécessairement robuste.

Gallaï a énoncé pour les graphes non orientés finis ([7]) un théorème qui a été étendu aux graphes orientés finis par William H. Cunningham ([6]), puis par Kelly ([13]) aux graphes non orientés infinis puis enfin aux relations binaires quelconques :

Théorème. *Une relation binaire est soit*

i) dilatée de relation de card >2 aux arêtes toutes vides ou toutes pleines (une des partitions en intervalles dilatants est la plus fine)*, soit*

ii) dilatée par des intervalles forts propres maximaux (appelés « blocs ») d'une relation indécomposable (appelée « squelette »), soit

iii) dilatée de chaine de card >2, soit

iv) réunion emboitée d'une famille croissante sans dernier élément d'intervalles forts (sans maximum). On peut prendre à la place de cette famille un ordinal limite qui lui est cofinal.

Les cas i), ii) et iii) correspondent aux relations robustes le cas iv) aux relations non robustes c.-à-d. limites.

On verra plus loin que la $\leq 3/2$-hypomorphie préserve cette classification : chacun des cas obtenus dans la décomposition de Gallaï (non robuste, dilaté de chaine, dilaté de plein, dilaté de vide ou dilaté de squelette indécomposable) est stable par $\leq 3/2$-hypomorphie, par exemple une relation $\leq 3/2$-hypomorphe à une relation indécomposable ne sera peut-être plus indécomposable mais restera dilatée d'une indécomposable. Autre exemple sur {a,b,c,d} où R, indécomposable, est défini par a<b, a<c, {a,d} vide, b<c, {b,d} plein, {c,d} vide ; alors R', qui ne diffère de R* que par b<c mod R', n'est pas indécomposable puisque {a,c} est un intervalle de R' qui est un dilaté de chaine, R' étant lui-même dilaté de l'indécomposable R'|{a,b,d}, {a,c} dilatant a.

Le type même de la relation non robuste est la relation $\mathbb{Z}'$, construite à partir de $(\mathbb{Z},<)$ en y inversant les arêtes {n,-n}. Les intervalles forts de cette relation sont les intervalles $[-n,n]$ qui ne forment pas une partition mais sont au contraire emboités les uns dans les autres sans intervalle fort maximal.

§2

Définition pour ce paragraphe.

Etant donnée une relation binaire R appelons dans ce paragraphe *pavage* (la définition a évolué par rapport à [9] pour s'adapter aux besoins de la problématique de ce paragraphe 2 -voir [12]-) tout ensemble P d'arêtes de R vérifiant la condition suivante : si u et v sont deux arêtes de l'ensemble P il existe une suite $C_1,C_2,\ldots,C_n$ de 3-cycles, 3-consécutivités ou de pics dont les arêtes sont dans P, chacun adjacent à *un* précédent par une arête orientée, telle que u est une arête de C_1 et v une arête de C_n. Les *extrémités* des arêtes du pavage P (c.-à-d. les éléments des paires constituant le pavage), sont dites *couvertes* par le pavage. On notera abusivement $(C_1,C_2,\ldots,C_n)$ le pavage formé par les arêtes des $C_1,C_2,\ldots,C_n$.

Il est clair qu'un pavage est une classe de forçage, la réciproque est fausse comme on le verra plus bas bien que dans un *tournoi* les classes de forçage soient effectivement des pavages.

Disons d'un pavage qu'il est (sommet-)*maximal* s'il ne peut être prolongé en un pavage couvrant plus de sommets. Un pavage est dit *arête-maximal* s'il ne se prolonge pas en un ensemble d'arêtes plus grand couvrant le même ensemble de sommets.

Définition. Dans une relation R les R°-intervalles sont appelés *presque-intervalles.*

Proposition 1. *Les pavages maximaux par 3-cycles, 3-consécutivités et pics sont des presque-intervalles.*

Preuve. Fastidieuse et triviale à la fois. Considérons un pavage P dans R, dont l'ensemble des sommets est maximal, contenant f et montrons que l'ensemble des sommets couverts est un R-presque-intervalle ce qui conduira à une contradiction car en inversant les flèches incluses dans ce presque-intervalle et en conservant les autres on obtient une relation R' $\leq 3/2$-hypomorphe à R où f s'inverse et pas ces autres.

1[er] cas : A= $\{a_1,a_2,a_3\}$ est une consécutivité avec $a_1<a_2$, $a_2<a_3$ $[a_1,a_3]$ neutre, dans le pavage et x un élément extérieur au pavage.

- premier sous-cas : $\{a_2,x\}$ est orienté ; pour éviter une consécutivité ou un pic ou un 3-cycle sur $\{x,a_1,a_2\}$ il faut que $\{x,a_1\}$ soit orienté et comme $\{x,a_2\}$. Même raisonnement pour $\{a_2,a_3\}$. au lieu de $\{a_1,a_2\}$.

- 2[ème] sous-cas : $[a_2,x]$ est neutre ; pour éviter pic ou consécutivité sur $\{x,a_1,a_2\}$ il faut que $[x,a_1]$ soit neutre. De même pour $[x,a_3]$.

2[ème] cas : $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ est un pic où $[a_1,a_3]$ est neutre.

- 1[er] sous cas : $[x,a_2]$ est orienté ; pour éviter un pic ou une consécutivité sur $\{x,a_1,a_2\}$ il faut que $[a_1,x]$ soit orienté. De même pour $[x,a_3]$. Apparait alors sur $\{x,a_1,a_3\}$ un pic ou une consécutivité contraire à la maximalité du pavage.

- 2[ème] sous-cas : $[x,a_2]$ est neutre ; pour éviter consécutivité et pics sur $\{x,a_2,a_3\}$ il est nécessaire que $[x,a_1]$ soit neutre. De même pour $[x,a_3]$.

3[ème] cas : $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ est un cycle ;

- 1[er] sous-cas : $[a_2,x]$ est neutre il est nécessaire que $[a_1,x]$ et $[a_3,x]$ le soient aussi.

- 2[ème] sous-cas : $[a_2,x]$ est orienté il est nécessaire que $[a_1,x]$ et $[a_3,x]$ le soient aussi. Pour fixer les idées supposons que $a_1<a_2$, $a_2<a_3$, $a_3<a_1$ et $x<a_2$. Si $[a_1,x]$ est orienté de a_1 vers x on obtient soit un 3-cycle sur $\{x,a_1,a_3\}$ si $x<a_3$ soit, si $x>a_3$, un 3-cycle sur $\{x,a_2,a_3\}$.

Tous les cas et sous-cas sont donc traités. □

Dans un tournoi chaque classe de forçage est un pavage. *On peut se demander si dans une relation R binaire quelconque où une flèche f force une flèche g il existe, reliant f à g, un pavage formé de 3-cycles, 3-consécutivités et pics.*

Voici donc un contrexemple : on prend 4 sommets a,b,c,d avec a<c, b<c, b<d, c<d, autres arêtes pleines. Alors il est immédiat que [a,c] force [c,b] et aussi [c,b] mais [a,c] force aussi [b,d] bien que ce ne soit pas évident. Et la classe de forçage des 4 flèches ainsi obtenues n'est pas un pavage reliant [a,c] à [b,d].

Il faudrait rajouter les 3-chaines comme pavés pour espérer obtenir un pavage qui aurait la propriété indiquée mais alors de tels pavages ne seraient plus des classes de forçage.

On peut tout de même, comme pour tous les types de pavages, se poser le problème de l'unicité d'un pavage arête-maximal couvrant un ensemble donné de sommets.

Voici un contrexemple dû à Gérard Lopez pour les pavages par seuls 3-cycles : la relation suivante R est couverte par deux pavages par 3-cycles arête-maximaux sans arête commune et R' est obtenue par inversion d'un des pavages, R et R' étant non 3-hypomorphes :

Prenons R avec 17 sommets : 1, 2, 3, ..., 17. Les seules arêtes non vides sont celles des 3-cycles des deux pavages :

Liste des 3-cycles du pavage dit « bleu » : (1,3,5), (3,5,7), (5,7,9), (7,9,11), (9,11,13), (11,13,15), (13,15,17), (15,17,2), (17,2,4), (2,4,6), (4,6,8), (6,8,10), (8,10,12), (10,12,14), (12,14,16).

Liste des 3-cycles du pavage dit « rouge » : (1,4,7), (4,7,10), (7,10,13), (10,13,16), (13,16,2), (16,2,5), (2,5,8), (5,8,11), (8,11,14), (11,14,17), (14,17,3) (17,3,6), (3,6,9), (6,9,12), (9,12,15), (12,15,1).

Ces pavages sont maximaux et sans arête commune.

La restriction { 4, 7, 9} contient une arête bleue : [7, 9], une arête rouge [4, 7] et une arête vide [4, 9]. Inversons le pavage rouge : on n'a pas la $\leq 3/2$-hypomorphie sur cette restriction entre le pavage bleu et l'inverse du rouge.

Néanmoins Habib [8] et Clarou [5] ont démontré que dans un tournoi indécomposable les classes de forçage sont les pavages par 3-cycles arêtes-maximaux. Vérifions le pour les tournois quelconques en guise de :

Proposition 2. *Dans un tournoi les classes de forçage sont les pavages par 3-cycles arêtes-maximaux.*

Preuve. Les pavages arête-maximaux d'un tournoi indécomposable forment l'ensemble de tous les 3-cycles. Quant aux dilatés d'indécomposables suivant un squelette indécomposable ce sont les 3-cycles du squelette qui définissent les pavages arête-maximaux. Le cas des dilatées de chaine étant évident puisque celles-ci ne sont pas pavables pas plus que les relations limites comme on le voit facilement. □

Deux pavages (par 3-cycles) arête-maximaux d'un tournoi sont identiques. L'arête-maximalité est nécessaire : prenons par exemple le tournoi $\mathbb{T}_2$ sur {1,2,...,5} défini par les astreintes 1<2, 2<3, 3<1, auxquelles on fait subire une permutation circulaire. Alors considérons tous les 3-cycles à l'exception de {1,2,3} : ces pavages ne forment pas un pavage arête-maximum car [1,3] en est absent aussi n'y a-t-il pas unicité puisqu'on peut aussi bien enlever [2,4] de $\mathbb{T}_2$ au lieu de [1,3] et avoir un autre pavage couvrant le même ensemble de sommets.

.

Ainsi dans le tournoi $\mathbb{Z}$' obtenu à partir de ($\mathbb{Z}$,<) en inversant les arêtes [-n,n] (n∈$\mathbb{N}$), les pavages sont les ensembles de 3-cycles {-n,p,n} où −n<p<n ; ce sont les classes de forçage de $\mathbb{Z}$'. $\mathbb{Z}$', tournoi fortement connexe, n'est pas pavable car il est infini alors que les tournois finis fortement connexes sont pavables.

Dans une relation toute partie finie peut être dilatée de chaine alors que le tout est du type limite c'est-à-dire non robuste c'est-à-dire encore réunion d'une famille emboitée croissante sans maximum d'intervalles forts. Prenons un *a* qu'on duplicate en *a'* et on pose *a*<*a'*. Ensuite on duplicate A={a,a'} en un A' et on pose A<A'. Ensuite on duplicate B=A∪A' en un B' en posant toujours B<B'. On continue oméga fois et on considère la réunion R ainsi obtenue. R relève du cas Gallaï limite : famille emboitée d'intervalles forts alors que chaque partie finie est dilatée de chaine. La stabilité des dilatées de chaine par $\leq 3/2$-hypomorphie est donc plus complexe.

Donnons un exemple d'une relation limite : R est de base $\mathbb{Z}$, posons -n<n mod R, si p et q sont négatifs ou nuls [p,q] est vide, si p et q sont positifs ou nuls [p,q] est plein, si p<0<q mod $\mathbb{Z}$ et |p|<|q| alors [p,q] est plein, si p<0<q mod $\mathbb{Z}$ et |p|>|q| alors [p,q] est vide. Remarquons que R est limite alors que R° est dilaté d'un plein.

Nous cherchons à étendre à la ≤3/2-hypomorphie l'étude déjà faite pour la ≤3-hypomorphie. Nous ferons intervenir les classes de *versatilité* qui étaient superflues en cas de ≤3-hypomorphie (voir [9]). Nous commençons par transposer aux relations binaires quelconques le travail précédemment effectué sur les tournois.

Une relation binaire R est dite une *classe d'hypomorphie* s'il existe une relation R' de même base qui vérifie les conditions d'hypomorphie sous-entendues et qui forme avec R une seule classe de différence. On pourra préciser classe de *(R,R')-hypomorphie* pour désigner R ou *classe de (≤3/2 ....)-(R,R')-hypomorphie.*

Une relation R binaire est dite une classe de ≤3/2-*versatilité* s'il existe un R' qui lui est ≤3/2-hypomorphe forme avec R une classe de différence et une classe d'identité. On parlera de (R,R')-classe versatilité pour une classe de (R,R')-différence qui est aussi une classe de (R,R')-identité.

§3.

Relations fortement connexes.

Revenons à notre ancienne définition des pavages introduite dans [9] et [12]. Etant donnée une relation binaire R appelons *pavage* tout ensemble P d'arêtes de R vérifiant la condition suivante : si u et v sont deux arêtes de l'ensemble P il existe une suite $C_1,C_2,\ldots,C_n$ de 3-cycles ou 3-consécutivités dont les arêtes sont dans P, chacun adjacent à *un* précédent par une arête neutre ou orientée, telle que u est une arête de C_1 et v une arête de C_n. Les *extrémités* des arêtes du pavage P (c.-à-d. les éléments des paires constituant le pavage), sont dites *couvertes* par le pavage. On notera abusivement $(C_1,C_2,\ldots,C_n)$ le pavage formé par les arêtes des $C_1,C_2,\ldots,C_n$.

Disons qu'une relation binaire R est *fortement connexe* si deux sommets distincts quelconques sont reliés par un chemin (de flèches) monotone (les singletons sont considérés comme étant fortement connexes). On définit de manière évidente les composantes fortement connexes d'une relation binaire.

Par exemple les consécutivités sont pavables sans être fortement connexes : chaque composante fortement connexe est réduite à un singleton.

Proposition. *Dans une classe de ≤3-hypomorphie les composantes fortement connexes sont des presque-intervalles.*

Preuve. Soit A une telle composante et x un élément extérieur tel que x<a pour un a∈A. Il existe un b dans A tel que b<a. Si on avait b<x, x serait dans la composante A puisqu'existe, dans A, un chemin monotone allant a à b et orienté de a vers b ; Si [b,x] était neutre {b,a,x} serait un pic ; on conclut que x<b. De proche en proche l'énoncé est démontré. □

Cet énoncé n'est plus vrai dans une classe de ≤3-hémimorphie : prenons (a,b,c) un cycle, et x un élément extérieur vérifiant x<a, x<b, [x,c] neutre. Le cycle est une composante fortement connexe qui n'est pas un presque-intervalle. La relation R' est ici R^*.

Pré-lemme 0. *Soit R et R' deux relations binaires ≤3/2-hypomorphes. Prenons un chemin monotone minimal liant deux sommets fixés. Si une arête du chemin monotone minimal change, tout le chemin change.*

Preuve facile.

Un pavage P est dit *arête-maximal* si l'ensemble de ses arêtes ne peut être prolongé (proprement) par l'ensemble des arêtes d'un pavage P' couvrant les même sommets et contenant en plus d'autres arêtes que celles déjà dans P. Disons qu'un pavage est (sommet-) *maximal* si il n'est pas inclus dans un pavage contenant en plus d'autres sommets.

Remarque. Dans une relation binaire, les composantes fortement connexes qui sont aussi des pavages maximaux, sont des presque-intervalles. Etre un pavage maximal ne suffit pas : prendre une relation à 4 éléments définie par a<c, a|b, a>d, b<d, b<c, c>d : {a,b,c} est un pavage maximal qui n'est pas un intervalle. Cet exemple montre aussi la nécessité d'imposer à R d'être sans pic dans le lemme suivant.

Lemme 1. *Soit C un pavage maximal dans une relation binaire R et a un sommet extérieur au pavage. Les arêtes orientées liant a et C, sont orientées dans le même sens.*

Preuve. Elle se fait de proche en proche sur la construction du pavage. Soit {x,y,z} la base d'une consécutivité où x<y et y<z. Soit a un élément extérieur au pavage. Supposons d'abord a<x. Pour que a soit extérieur au pavage il faut que a<y et de même a<z. Supposons maintenant x<a. Si [a,z] est orienté il faut que z<a. Si [a,y] est orienté par a<y alors {a,y,z} est une consécutivité quand [a,z] est neutre, et un cycle sinon - contradiction. Si {x,y,z} est un cycle le raisonnement est le même. □

Lemme 2. *Dans une relation R binaire sans pic, tout pavage maximal est un presque-intervalle (et un tournoi s'il ne couvre pas toute la base).*

Preuve. Soit (1<2,2<3) une consécutivité du pavage et a un élément extérieur lié par une flèche à un des éléments de la consécutivité. L'absence de pic, jointe à l'utilisation du lemme 1 permet de conclure à une absurdité. Reste le cas où le pavage est pavable par des 3-cycles, mais ce cas a déjà été traité en [9] §4 lemme 5. □

Corollaire 1. *Dans une relation binaire sans pic, les ensembles de sommets couverts par des pavages maximaux ne se chevauchent pas.*

Preuve. Il suffit de savoir que la différence entre un presque-intervalle U' et un autre U" le chevauchant est un presque-intervalle U'-U" dont la frontière avec U" ne peut être franchie par un 3-cycle ni par une 3-consécutivité. □

Dans une relation binaire connexe sans pic, introduisons la relation suivante : x∼y signifie, par définition, qu'il existe une suite C_1,C_2,...,C_n de 3-cycles ou 3-consécutivités formés d'arêtes du pavage, chacun adjacent à un précédent par une arête orientée, de sorte que x soit un sommet de C_1 et y un sommet de C_n . Le fait que dans une relation sans pic les pavages maximaux ne se chevauchent pas se traduit par la transitivité de la relation ∼. Et ce malgré la non concaténation des pavages.

Disons d'une relation qu'elle est *presque-indécomposable* si elle est sans presque-intervalle non trivial. C'est une condition *plus forte* que la simple indécomposabilité. Pour une classe de ≤ 3-hypomorphie il revient au même d'être presque-indécomposable ou d'être sans drapeau tricolore.

Corollaire 2. *Une relation binaire presque-indécomposable, ou connexe et indécomposable, et sans pic est pavable.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate des lemmes précédents. □

Lemme 3. *Soit C est un pavage maximal changeant dans un couple de relations binaires ≤3/2-hypomorphes (R,R'). Soit a un élément extérieur à C, qui est majorant (ou minorant) non changeant d'un sommet de C, alors C est un a-intervalle mod R et R', autrement dit a est un majorant (ou minorant) de tout C.*

Preuve. Soit a un élément extérieur à C et (x,y,z) un cycle ou une consécutivité du pavage. Supposons par exemple x<y, y<z, x|z et a<x mod R. Si on avait y|a le pavage pourrait être prolongé par la consécutivité (x,y,a) et contenir ainsi a. Supposons x<y, y<z, z|x et x<a mod R. (y,a) doit être orienté et pour éviter un R'-cycle il faut que y<a mod R'. Du coup z<a mod R' pour que a soit extérieur au pavage. La ≤3/2-hypomorphie impose alors z<a mod R. Et pour éviter un R-cycle on doit avoir y<a mod R. De proche en proche l'énoncé est démontré. □

Lemme 4. *Soit R une relation binaire fortement connexe. Soit C un pavage maximal, dans la relation R, possédant un minimum (hors du pavage). Alors C est proprement inclus dans l'ensemble des sommets d'un pavage.*

Preuve. Appelons x le minorant de C, extérieur à C. La forte connexité impose l'existence, pour chaque c de C, d'un chemin monotone minimal [c,..,c',y,...,x_2 ,x_1 ,x] avec c'∈C et y∉C, dont les flèches sont dirigées de c vers x.

Si pour tout c de C on a toujours x > ou |c, C∪{x} est pavable. Reste le cas où pour un c_1 de C on a $x_1 < c_1$, et donc pour tous les c tels que [x_1,c] est orienté, d'après le lemme 1. Du coup x_1 jouerait le même rôle que x et on pourrait recommencer le raisonnement pour x_1 . A x_2 correspond un c_2 . Jusqu'à ce qu'on arrive à x_p =y : aucun [y,c] ne peut être orienté par y<c d'après le lemme 1. En notant c_0 un des éléments de C liés à x par des flèches, on obtient finalement un pavage ({x_1,x,c_0},{x,x_1,x_2},{x_2 ,x_1 ,c_1 },(x_1 ,x_2 ,x_3), {x_3 ,x_2 ,c_2 }, ... {x_p ,x_{p-1} ,c_{p-1} }). □

En particulier une relation binaire fortement connexe finie est pavable. En effet le processus décrit dans la proposition précédente aboutit en un nombre fini d'étapes à un pavage dont l'ensemble des sommets est exactement égal à la base.

Proposition 2. *Si dans une relation binaire existe un chemin monotone liant un x de la base à un y (≠x) de la base et dirigé de x vers y, alors il existe une suite de pavés, adjacents chacun à un précédent par une arête orientée tel que x et y se trouvent chacun dans un des pavés.*

Preuve. Considérons un chemin monotone minimal [x,x_1, ... ,x_n=y], dirigé de x vers y. Par argument de minimalité, [x,x_2] est soit neutre soit orienté par x_2 <x ; {x,x_1,x_2} est donc soit une consécutivité soit un cycle. La famille ({x,x_1,x_2}, {x_1,x_2,x_3},..., {x_{n-2},x_{n-1},x_n}) constitue un pavage qui répond à la question. □

En particulier :

Lemme préalable. *Une relation binaire fortement connexe possède un 3-cycle ou une 3-consécutivité.*

Corollaire du lemme 4 . *La forte connexité d'une relation binaire est préservée par ≤3/2-hypomorphie.*

Comme pour les tournois on obtient :

Proposition 3. *Soit R une relation binaire fortement connexe. Soit C un intervalle propre dans la relation R. Alors C est proprement inclus dans l'ensemble des sommets d'un pavage.*

Preuve. Soit M l'ensemble des minorants de C, M' celui des majorants et N celui des éléments liés à C par une arête neutre. Soit il existe un m' de M' et un m de M tel que m'<m, soit il existe un n de N et un m de M tel que n<m. A chaque fois la conclusion est assurée. □

Lemme 5. *Une relation binaire fortement connexe R ne peut être formée d'une seule classe de (≤3/2, ω, ω*)-versatilité.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde en supposant l'unicité de la classe d'identité et de différence. Un pavage maximal P, proprement inclus dans R, et par exemple changeant, possède par exemple, d'après le lemme des pavages interdits, un minimum non changeant. D'après le lemme 4, il existe un pavage maximal P' (changeant) dont l'ensemble C des sommets contient ceux de P. P' ne peut, à son tour, être dans une (R,R')-classe de différence que si C possède un majorant ou minorant changeant m qui, par construction du pavage, est en dehors des sommets du pavage P. Nous reprenons avec P' le même raisonnement qu'avec P : [a,m] est changeant et le pavage P' ne peut être dans une même classe d'identité que si existe hors de C∪{m} un m' qui est minorant ou majorant non changeant de l'ensemble C' des sommets couverts par P', [a,m'] sera alors non changeant. Mais à l'étape suivante apparaitra un m" tel que [a,m"] sera de nouveau changeant. La construction se poursuit indéfiniment montrant par là que R ne peut être fini. Même s'il est infini on termine en constatant que dans le graphe de différence a est de degré infini ce qui est contraire à la (≤3/2, ω, ω*)-hypomorphie de l'ensemble {m,m',m",...} qui est une chaîne, pour la quelle la (≤3/2, ω, ω*)-hypomorphie est équivalente à la (≤3,ω, ω*)-hypomorphie. □

Lemme 6. *Soit C un pavage maximal changeant et C' un pavage maximal non changeant, ayant au moins un sommet commun avec C, dans un couple de relations binaires ≤3/2-hypomorphes (R,R'). Alors un des ensembles de sommets de C ou C' contient l'autre.*

Preuve. Soit (x,y,z) un pavé de C, et (x',y',z') un pavé de C' avec par exemple pour fixer les idées : z=x', x<y, y<z, z<y',y'<z' mod R. On doit avoir y<y' mod R. Si y est hors de C', on doit avoir y<C' mod R et le contraire mod R' puisque [y,z] est changeant (lemme 3) ; or le changement de [y,z] est incompatible avec le non changement de [y,z']. De même si y' est hors de C, on doit avoir C<y' mod R et mod R' puisque [x',y'] est non changeant. Le seul cas restant est celui où y est dans C' ou y' dans C. On conclut en raisonnant de proche en proche. □

Définition. Disons qu'une relation binaire R est *localement pavable* si pour tout x et y de la base il existe une suite de pavés, adjacents chacun à un précédent par une arête orientée telle que x et y se trouve chacun dans un des pavés. Cette propriété, par ailleurs compatible avec la $\leq 3/2$-hypomorphie, est intermédiaire entre la connexité et la forte connexité.

Lemme 7. *Soit R et R' deux relations binaires ($\leq 3/2$)-hypomorphes localement pavables. Soit C une partie pavable non changeante, dotée d'un minorant m changeant. Alors $C \cup \{m\}$ est contenue dans une partie pavable de la base.*

Preuve. Soit c un élément de C. Les éléments c et m sont reliés par un pavage. D'après le lemme 6 il suffit de montrer que ce pavage P est changeant. Sinon, comme [m,c'] est changeant pour tout c' de C hors de P, on a c'>c mod R et mod R'. Mais si un pavage contenant c' et m ne contient pas un élément c de C, l'échange des rôles de c et c' donne une contradiction. □

Lemme 8. *Une relation binaire formée d'une seule classe de ($\leq 3/2,\omega,\omega^*$)-versatilité ne peut pas être localement pavable.*

Preuve. Même technique que pour les tournois. □

§4

Remarquons qu'un tournoi limite ne peut être pavable. On verra que les tournois pavables sont exactement ceux qui sont dilatés d'indécomposables.

Le lemme suivant est tout à fait capital pour la suite.

Lemme 1. *Une classe de (R,R')-différence contenant ω, n'est formée que d'une seule classe d'identité dès que R et R' sont ($\leq 3/2,\omega$)-hypomorphes.*

Preuve. Soit C l'ensemble de type ω. C contient une partie infinie d'une classe d'identité infinie, partie obtenue en prenant un x_0 puis un $x_1 > x_0$ mod R et R' puis un $x_2 > x_1$ mod R et R' et ainsi de suite.

S'il existe plusieurs (R,R')-classes d'identité, alors, ces classes d'identité étant des presque-intervalles l'une d'elles contient un presque-intervalle infini I de R-type ω de C, et sa réunion $I \cup \{x\}$ avec un singleton $\{x\}$ bien choisi de la classe de différence (le premier après la sortie d'un chemin de différence hors de la classe d'identité) donne un ensemble de R-type ω et de R'-type $\omega+1$ (ou le contraire). □

On a vu en [9] §4 lemme 3 :

Lemme 2. *Une classe de (R,R')-différence infinie n'est formée que d'une seule classe d'identité dès que R et R' sont (≤ 3, ω, ω^*,Ω, Ω^*)-hypomorphes.*

On a dit qu'un tournoi est *fortement* connexe si la base est un singleton, ou si pour tous x et y distincts, il existe un chemin monotone allant de x à y, formé de flèches orientées dans le sens du chemin. Il va de soi que dans un tournoi, l'ensemble des sommets d'un pavage est fortement connexe. Dans un tournoi, la réunion de deux parties fortement connexes étant encore fortement connexe, il existe des parties fortement connexes maximales qui reçoivent le nom de *composantes* fortement connexes. Ces composantes partitionnent la base en intervalles.

Rappelons qu'entre tournois la (≤ 3)-hypomorphie est bien sûr équivalente à la ($\leq 3/2$)-hypomorphie. La forte connexité d'un tournoi R est préservée par $\leq 3/2$-hypomorphie : prendre un R-chemin monotone minimal $[x,x_1 ,x_2 ,\ldots]$, (x,x_1,x_2) est un cycle globalement conservé par $\leq 3/2$-hypomorphie et donc ($[,x_1 ,x_2 ,\ldots]$ ou $[x,x_2 ,\ldots]$ est un R'-chemin monotone si R' est $\leq 3/2$-hypomorphe à R (mais la minimalité peut être perdue). Remarquons que si une flèche d'un chemin monotone minimal change, alors tout le chemin change aussi.

Proposition 0. *Un tournoi est fortement connexe si et seulement si il n'est pas dilaté de chaîne.*

Preuve. Il suffit de considérer les composantes fortement connexes, elles sont des intervalles, ces intervalles forment une chaîne si et seulement si le tournoi n'est pas fortement connexe. □

Proposition 1. *Soit T et T' deux tournois ≤ 3-hypomorphes. Soit A une partie de la base qui est un T-intervalle, telle que $T|A$ n'est pas dilaté de chaîne. Alors A est aussi un T'-intervalle.*

Preuve. Soit a et b deux éléments de A et x un élément extérieur. Montrons que l'orientation entre x et a est conservée quand a parcourt les escales d'un chemin monotone minimal $[a,a_1,\ldots,a_{n-1},b]$ reliant a à b où $a<a_1$ $,a_1<a_2$, ... dont on fait en sorte qu'il ne passe pas par x (ce qui est possible que A soit dilaté de chaîne ou pas). Pour cela supposons par exemple que [x,a] ne change pas, ni le sens du chemin et qu'on a $x<a$: il est immédiat que $T'(x,a)=T'(x,a_1)$. Si, au contraire, le sens du chemin change et pas [x,a] raisonnons comme suit en supposant $x<a$ mod T. On a nécessairement $b<a_1$ mod T (et donc $b>a_1$ mod T') par minimalité du chemin, si celui-ci tout au moins comporte au moins deux arêtes. Si on avait $x>b$ mod T' on serait contraint à la position $x>a_1$ mod T' pour éviter un T'-cycle sur $\{x,b,a_1\}$. Mais alors on se doit d'éviter un T'-cycle sur $\{x,a_1,a_2\}$ en imposant $a_2<x$ mod T'. Mais un T'-cycle apparait alors inévitablement sur $\{a,a_2,x\}$. Dans le cas où le chemin ne possède que deux étapes, l'inversion du chemin entraîne celle de [a,b] qui rend impossible l'inversion de [x,b].

Le cas où [x,a] change et pas le chemin se traite de même. Reste le cas où les deux changent qui se traite comme le premier cas. □

Petit lemme. *Si un tournoi est fortement connexe, sa base ne peut être partitionnée en deux intervalles propres non vides.*

La preuve de cette condition, d'ailleurs suffisante (sauf pour les singletons), est facile. Elle s'étendra aux relations binaires quelconques.

Lemme 3.

Si C est un pavage maximal dans un tournoi R, l'ensemble de ses sommets est un R-intervalle.

Preuve. Soit a un élément extérieur à C et (x,y,z) un cycle du pavage. Supposons par exemple $x<y,y<z,z<x$ et $a<x$. Si on avait $y<a$ le pavage pourrait être prolongé par le cycle (c,y,a) et contenir a. De proche en proche l'énoncé est démontré. □

Corollaire 1*. Un tournoi indécomposable de cardinal >2 est pavable.*

Preuve. En effet, n'étant pas une chaîne, ce tournoi possède un 3-cycle. Lequel engendre un pavage maximal dont la base ne peut être que celle du tournoi entier. □

Par suite : *Un tournoi est pavable si et seulement si il est dilaté d'indécomposable.*

Corollaire 2. *Dans un tournoi deux pavages maximaux distincts ne peuvent avoir leur ensemble de sommets qui se chevauchent.*

Preuve. Il suffit de voir que si l'ensemble |P| des sommets du pavage P chevauche l'ensemble |P'| des sommets de P' alors |P|-|P'| et |P'|-|P| sont des intervalles ainsi que $|P|\cap|P'|$. Ceci contredit le petit lemme. □

Remarque. *Soit, dans un tournoi T, deux pavages maximaux, P et P' ayant au moins un sommet commun. Il existe un pavage P" prolongeant P ou P' et couvrant entre autres tous les sommets de P comme ceux de P'.*

Enoncé conjecturable si T n'est pas supposé être un tournoi.

Indication de preuve. L'ensemble des sommets du pavage maximal est un intervalle de la base. Quand cet intervalle est propre l'exercice est facile. Dans le cas contraire il est évident. □

Corollaire 3 (Boussaïri). *Soit T un tournoi indécomposable de cardinal >1. T est pavable, et tout tournoi T', $\leq 3/2$-hypomorphe à T, est égal ou opposé à T ; donc est $(\omega,\omega^*)/2$-hypomorphe à T et indécomposable.*

Preuve. Le tournoi étant indécomposable, n'est pas une chaîne. Il possède un 3-cycle et il est donc couvert par un pavage maximal. Si le pavage est conservé mod T', la base ne peut être une classe de différence d'après le lemme des pavages interdits ; les classes de différence sont donc les singletons, et T'=T. Si le pavage est changeant un raisonnement analogue permet d'aboutir. □

Corollaire 4. *Dans un tournoi, l'inversion d'une arête d'un pavage maximal ne se contamine obligatoirement qu'à des arêtes dont les sommets sont dans le pavage (mais peut-être pas à toutes).*

Preuve. Soit C le pavage. Si a est extérieur à l'ensemble des sommets de C, ce dernier est un R-intervalle et l'inversion du pavage est compatible avec la conservation de la position de a par rapport au pavage. □

Par contre, dans une relation qui n'est pas un tournoi, un pavage par 3-cycles maximal, n'est pas nécessairement un presque-intervalle.

.

On a vu en [9] §4 proposition 2 que :

Lemme 4.

Soit R un tournoi fortement connexe, tout intervalle propre non vide est proprement inclus dans l'ensemble des sommets d'un pavage.

Preuve. Soit M l'ensemble des minorants de C, M' celui des majorants et N celui des éléments liés à C par une arête neutre. Soit il existe un m' de M' et un m de M tel que m'<m, soit il existe un n de N et un m de M tel que n<m. A chaque fois la conclusion est assurée. □

Du lemme 2 on peut tirer.

Proposition 2. Toute classe de ($\leq$3,ω)-hypomorphie contenant ω est dilatée de chaîne infinie par des tournois finis. Cette classe est donc décomposable.

Preuve. Une telle classe R est formée d'une seule classe de R-versatilité. □

Dans la preuve du théorème, seul intervient le fait que ω ne se mute jamais en ω* et réciproquement, or cette condition est garantie par la ω-hypomorphie.

Une classe de ($\leq$3,ω,ω^*,Ω, Ω^*)-hypomorphie peut effectivement être de type ω ou ω^* ou $\omega^*+\omega$.

Dans [10] on appelle *guirlande* la donnée de R et du graphe de différence S de deux relations R et R' ($\leq$3,ω,ω*,Ω,Ω*)-hypomorphes de type ω, ω^* ou $\omega^*+\omega$, dont la base n'est formée d'une seule (R,R')-classe de différence. Nous appelons technique de la guirlande la recette consistant à définir S (et par là R') grâce à la succession d'arches vue en [10] p.482 (ou toute autre succession d'arches analogue), technique fonctionnant aussi bien pour $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}$* que pour $\mathbb{N}$.

Remarque. *Soit A un R-intervalle vérifiant x<A<y. Si {x}+A+{y} est (5/2)-hypomorphe à A+{x}+{y} alors A est une chaîne.*

Remarque. *Deux tournois T et T', ($\leq$3,5/2)-hypomorphes, qui ne sont pas dilatés de chaînes, sont sur chaque classe de différence, ($\leq$3,ω/2,ω*/2)-hypomorphes.*

Indication de preuve utilisant la proposition 1 du §4. Si T est dilaté d'indécomposable, aucune des composantes ne contient ω ni ω*. Supposons T limite et de la forme $\cup U_i$ où les U_i forment une famille d'intervalles propres emboîtés. A partir d'un certain i_0 , U_{i_0} n'est pas une chaîne puisque T n'est pas elle-même une chaîne. Cet U_{i_0} est un tournoi contenant un 3-cycle. Les diamants passant par ce 3-cycle s'inversent tous ou aucun en vertu de la $\leq$5/2-hypomorphie et de la précédente remarque. Aucune couronne U_{i+1} -U_i ne pouvant contenir de chaîne infinie, le résultat est acquis. □

Rappelons le résultat cité en [9] et qui découle de [10].

Proposition 3. *Deux relations binaires ($\leq$3/2,ω,ω*)-hypomorphes sont isomorphes sur leurs restrictions qui sont des chaînes.*

De telles relations isomorphes sur leurs restrictions qui sont des chaînes, seront dites (chaînes)-hypomorphes. La ($\leq$3/2,ω,ω*,Ω,Ω*)-hypomorphie peut donc aussi bien être rebaptisée ($\leq$3/2, chaînes, consécutivités)-hypomorphie.

Preuve de la proposition. Contentons-nous de deux restrictions C et C' de même base qui sont des chaînes. Il suffit de partager la base des deux chaînes en classes de différence, qui sont des intervalles. Si ces chaînes sont formées d'une seule classe, celle-ci est finie ou de type ω, ω* ou $\omega^*+\omega$ et elles sont isomorphes mod R et mod R'. Si elles sont formées de plusieurs classes, le recollement des isomorphismes définis sur chaque classe donne l'isomorphisme souhaité. □

En guise de corollaire donnons le :

Théorème de comparabilité. *Soit R et R' deux relations binaires (≤3,ω,ω*)-hypomorphes, dont la première R est indécomposable, sans drapeaux tricolores. Alors R=R' ou R=R'** . (Résultat amélioré plus loin en ne conservant que la ≤3/2-hypomorphie et qui redémontrera le théorème 4 de [4]).

Preuve. Si la conclusion était fausse, au moins une flèche de R se conserverait dans R' et au moins une s'inverserait. Les classes d'identité ne peuvent donc être toutes triviales, pas plus que les classes de différence. Comme elles sont des R-intervalles, elles ne peuvent être que la base entière. Le lemme 8 du §4 de [9] affirme alors que R et R' sont des dilatés de chaîne ce qui est contraire à l'indécomposabilité. □

En fait, dans les énoncés précédents, la (ω,ω*)-hypomorphie s'avérera inutile.

Ce théorème était d'ailleurs connu avant le théorème dont il découle ici. Il permet de mieux comprendre le pourquoi du théorème 2 du §4 de [9]. Donnons pour le voir une conséquence de ce théorème.

Corollaire 2. *Soit T et T' deux tournois, $(\leq 3,\omega,\omega^*)$-hypomorphes dont le premier est dilaté d'indécomposable. T' l'est alors aussi et admet la même décomposition en blocs que T.*

Preuve. Choisissons dans chaque bloc B un élément x_B . L'ensemble des x est T-indécomposable. Soit A un bloc dont nous voulons démontrer qu'il est un x-T'-intervalle pour tout x∉A. L'ensemble $\{x_A |B\neq A\}\cup\{x_A\}$ est T-indécomposable et donc d'après le précédent théorème, s'inverse ou se conserve dans T'. Il en va de même quand x_A parcourt A. Or, quand x_A parcourt A, les divers $\{x_A |B\neq A\}\cup\{x_A\}$ ont des arêtes communes. Ces arêtes soit se conservent soit s'inversent indépendamment du chois de x_A dans A. Donc les arêtes de $\{x_A |B\neq A\}\cup\{x_A\}$ dont une extrémité est dans A s'inversent toutes ou se conservent toutes. *A* reste donc un intervalle même mod T'. □

Au stade où nous en sommes nous pouvons aller un peu plus loin : Considérons un x-intervalle F d'un tournoi T, et un tournoi T' (≤ 3)-hypomorphe à T. Nous souhaitons savoir si F est aussi un x-T'-intervalle. D'après ce que nous venons de faire, il suffit pour cela de constater que pour un f dans F (et donc pour tous), il existe un indécomposable de card >2 contenant x et f.

Annonçons donc que :

Proposition 3. *Soit F un intervalle non trivial d'une relation binaire R qui n'est pas dilatée de chaîne ou de plein ou de vide. F est un intervalle fort si et seulement si pour tout x∉F il existe un indécomposable de card >2 contenant x et un élément de F.*

Ce que nous montrerons en étendant aux carrelages (§5 et §6) la preuve suivante faite pour les tournois :

Proposition 4. *Soit F un intervalle non trivial d'un tournoi fortement connexe T. F est un intervalle fort si et seulement si pour tout x extérieur à F il existe un indécomposable de card >2 contenant x et un élément de F.*

Preuve. Considérons un chemin monotone minimal allant de x à un élément de F (et dont seul le dernier élément est dans F). Adjoignons lui un chemin de retour minimal (un des deux chemins : aller ou retour, est formé d'une seule arête). Vérifions maintenant que l'ensemble des sommets de ce circuit est indécomposable. On vérifie aisément qu'un intervalle non trivial de ce chemin ne peut qu'être formé de x et d'un élément de F. Cet intervalle chevauchant F, ce dernier n'est pas un intervalle fort. La condition suffisante est plus facile. □

Seule la condition nécessaire nous importe ici, elle nous permet d'affirmer que :

Proposition 5. *Deux tournois (≤3,ω,ω*)-hypomorphes ont les mêmes intervalles forts.*

Preuve. Le seul cas à voir est celui des tournois qui sont dilatés de chaînes et où les intervalles forts sont donc les composantes fortement connexes. □

On verra plus loin qu'il en va de même des relations binaires (≤3/2,ω,ω*)-hypomorphes.

§5

Carreaux

Introduisons une définition préalable. On appelle *presque-chemin monotone* allant de b vers a, une suite notée $[b=x_0 ,x_1 ,...,x_n =a]$ constituée de sommets distincts et telle que chaque arête $[x_p ,x_{p+1}]$ est soit neutre, soit orientée dans le sens allant de x_0 vers x_n .

Une relation binaire sera dite *presque fortement connexe* si pour tous sommets x et y il existe un presque-chemin monotone allant de x vers y (et réciproquement du coup). On définit à la suite les composantes presque fortement connexes. Celles-ci sont des intervalles et le quotient est une chaîne. On peut montrer que la chaîne des composantes presque fortement connexes d'une relation R est la plus fine des décompositions de R en chaîne d'intervalles.

Un *carreau* est l'ensemble des arêtes reliant entre eux les différents sommets x_p ($0 \leq p \leq n$) d'un presque chemin monotone minimal [x_0 ,x_1 ,...,x_n] où [x_0 ,x_n] est une arête neutre ou orientée de x_n vers x_0 (minimal quant à l'impossibilité de le court-circuiter) parmi les presque-chemins monotones d'au moins 2 arêtes reliant x_0 à x_n , et ceci pour exclure le retour direct de x_0 vers x_n quand l'arête [x_n ,x_0] est neutre). L'arête [x_n ,x_0] est appelée l'*axe* du carreau. Les arêtes [x_p ,x_{p+1}] sont appelées *externes*, les autres sont dites *internes* au carreau. Si une arête interne {x_p,x_q} vérifie p<q-1 alors elle est orientée et de $x_q$vers x_p.

Il est fastidieux mais aisé de montrer que si deux relations sont ($\leq 3/2$)-hypomorphes tout carreau C de R est encore carreau de R' (avec peut-être inversion des flèches). La démonstration peut se faire par récurrrence sur le nombre d'arêtes externes.

Les seuls triplets à être des carreaux sont les cycles, les consécutivités et les relations formées de trois arêtes neutres. Hormis les triplets d'arètes toutes neutres, les drapeaux sont les seuls carreaux de card >2 non connexes. La flèche du drapeau sera dite *composante connexe* du drapeau, si le carreau n'est formé que d'arêtes neutres sa composante connexe sera vide.

Un *carrelage* est un graphe (partiel) dans R c'est à dire un ensemble C d'arêtes, vérifiant la condition suivante : si u et v sont deux arêtes de l'ensemble C, il existe une suite C_1 ,C_2 ,...,C_n de carreaux formés d'arêtes de l'ensemble C, chacun adjacent à un précédent par une arête neutre ou orientée, de sorte que u soit une arête de C_1 et v une arête de C_n . Il va de soi que l'ensemble des sommets d'un carreau C peut être couvert par un "pavage" de 3-cycles, 3-consécutivités ou drapeaux ou triplets neutres à savoir celui formé d'ensembles de 3 sommets consécutifs de la famille : ({b=x_0 ,x_1 ,x_2 }, {x_1,x_2,x_3},...,{x_{n-2} ,x_{n-1} ,x_n =a}). Mais toutes les arêtes du carrelage ne sont pas nécessairement atteignables de cette façon ! Voici un exemple typique de tel carrelage couvert par un pavage. Sur la base {a,b,c,d,e} de R on a mod R : a<b, a>c, a>d, a>e, b<c, b>d, b>e, c<d, c>e, d<e. La flèche v=[a,b] n'est pas dans le pavage engendré par u=[e,c], mais bien dans le carrelage que la flèche u engendre (grâce au presque-chemin [b,c,d,e,a]) ; de même pour w=[e,b] et w'=[a,c]. Remarquons que l'inversion de u entraine celle de (v,w,w').

Chaque arête neutre est considérée à elle seule comme un carreau et donc comme un carrelage.

Les éléments qui sont sommets d'une arête d'un carrelage sont dits *couverts* par le carrelage. L'ensemble des sommets couverts par un carrelage C est encore appelé sa *base* et est noté |C|.

Une relation est dite *carrelable* si l'ensemble de ses sommets est la base d'un carrelage.

La question de l'unicité d'un carrelage arête-maximal couvrant un ensemble donné de sommets n'est pas plus résolue que dans le cas des pavages.

Définition 1: Un carrelage C est dit *inextensif* s'il couvre un ensemble |C| de sommets et est tel que pour toute famille de sommets (S_i) hors de |C|, $|C| \cup \bigcup_i \{S_i\}$ n'est pas carrelable. On convient que la base toute entière est inextensive si cette base est couverte par un carrelage.

Définition 2: Un carrelage C est dit *sommet*-maximal s'il couvre un ensemble |C| de sommets et est tel que pour toute famille de sommets (S_i) hors de |C| il n'existe pas de carrelage de base $|C| \cup \bigcup \{S_i\}$ qui prolonge C c'est à dire qui contient toutes les arêtes de C.

Il est simple mais fastidieux de démontrer:

Lemme 1. *L'ensemble des sommets d'un carrelage sommet-maximal est un intervalle orienté.*

Preuve. Ilustrons la preuve par une situation typique. Supposons qu'un carrelage C contienne deux sommets x, y et qu'un élément extérieur au carrelage a est tel que {a,x} est plein et {a,y} vide. Une arête d'un carreau passe par x. Notons la {u,x} en supposant par exemple u→x et x←y alors on prend pour presque chemin monotone [u,x,a,y,x] et a est couvert par le carrelage. □

Les indécomposables sont carrelables puisque les carrelages sommets-maximaux ont pour base des intervalles. Une relation binaire R est dite *localement* carrelable si pour tout x et y il existe une restriction de R contenant x et y, qui est carrelable.

Considérons dans une relation les bases de carrelages, maximales pour l'inclusion. Trois cas seulement sont réalisables:

. Il n'y a pas de tel ensemble maximal; auquel cas la relation est limite. C'est exactement le cas des relations non carrelables mais localement carrelables .

. Il y en a exactement 1 auquel cas la relation est dilatée d'un squelette indécomposable; (on laisse tomber les cas trivial des dilatés de pleins ou de vides). C'est exactement le cas des relations carrelables.

. Il y en a plusieurs, ils forment une chaine et la relation est dilatée de chaine. C'est exactement le cas des relations non localement carrelables.

Aucune autre éventualité n'est réalisable (bases se chevauchant par exemple) car toute autre des trois éventualités précédentes empêcherait la relation d'être dans une des classes imposées par la classification de Gallaï.

Finalement les relations carrelables sont exactement les dilatées de pleins, de vides ou d'indécomposables. Les non-carrelables localement carrelables sont les relations limites et les non localement carrelables sont les dilatées de chaine. Les carrelages étant conservés par ($\leq 3/2$)-hypomorphie chacune des catégories de la classification de Gallaï l'est aussi.

Une relation R', $\leq 3/2$-hypomorphe à R, n'a pas forcément les mêmes intervalles que R : si ces intervalles diffèrent on va voir que ce sont des dilatés de chaines. Par exemple sur {a,b,c,d} R est décrit comme suit: {a,d} et {d,b} vides, {d,c} plein, $a<b$ et $a<c$ mod R et R', $c<b$ mod R et $c>b$ mod R'. Alors {a,b}, qui est un R'-intervalle, n'est pas un R-intervalle mais est une R-chaine. Le R'-intervalle {a,b} n'est pas un intervalle mod R mais c'est un dilaté de chaine : les R'-intervalles sont des R-dilatés de chaine.

Affirmons donc en reprenant la preuve de la proposition 1 du §4 que:

Proposition 0. *Un R-intervalle qui n'est pas un intervalle mod un R' qui est $\leq 3/2$-hypomorphe à R est un dilaté de chaine (mod R et R').*

Preuve. Pour voir qu'un R-dilatant qui n'est pas R'-dilatant est dilaté de chaine il faut le décomposer en carrelages sommets-maximaux qui restent des carrelages mod R'. S'ils sont tous deux carrelables par un seul carrelage, ce sont des intervalles puisque les bases des carrelages sommets-maximaux sont des intervalles. S'ils ne sont pas carrelables, ce sont donc des dilatés de chaine (ou des relations *limite*s qui sont des réunions croissantes d'ensembles de sommets de R-carrelages qui restent des R'-carrelages). □

A ce propos posons une question: Si I est un intervalle fort de R', $\leq 3/2$-hypomorphe à R, et est aussi un intervalle de R, alors en est-ce un intervalle fort?

On a donc prouvé

Théorème. *Si R et R', deux relations binaires de même base, sont $\leq 3/2$-hypomorphes, elles sont dans la même catégorie de la classification du théorème de Gallaï.*

En effet les carreaux et donc les carrelages sont les mêmes suivant R ou R', et R et R' se retrouvent donc dans la même catégorie.

Propriétés des carrelages:

1) Pour tous sommets x et y d'une relation S carrelée par P, il existe un presque chemin monotone formé d'arêtes de P, dirigé de x vers y, et réciproquement en échangeant les rôles de x et de y.

On peut alors montrer comme annoncé l'assertion suivant la proposition 3 du §4.

2) Toute flèche de P se trouve dans un presque-chemin minimal d'au moins deux arêtes. Il est clair que les pavages sont des carrelages. Les pics ne sont pas carrelables pas plus que les dilatés de chaînes.

On peut montrer qu'une relation binaire limite ne peut être carrelable. Rappelons qu'une relation binaire R est dite *localement* carrelable si pour tout x et y il existe une restriction de R contenant x et y, qui est carrelable. Autant dire que le cardinal de R est >2 et qu'il existe un presque-chemin monotone allant de x vers y et un allant de y vers x (autrement dit R est "presque fortement connexe").

On peut imiter la preuve correspondante de [9] pour montrer qu'une relation localement carrelable finie est carrelable.

Proposition 1. *Les sommets couverts par des carrelages maximaux forment des intervalles orientés (c.-à-d. que pour tout x hors d'un carrelage C et c dans C, [x,c] est orienté).*

Preuve. Prenons un élément u extérieur à un carrelage dont on se fixe un carreau d'axe [a,b] ; ce carreau sera noté $[a,b,b_1,b_2\ ,...,a]$, comme le presque-chemin monotone minimal apparaissant dans la définition. Supposons que u<b. Si b<b_1 on a nécessairement u<b_1 . Si b|b_1 , u doit aussi être <b_1 . De proche en proche u minore le carreau. On passe ensuite à un carreau adjacent. □

Corollaire 1. *Une relation binaire indécomposable est carrelable.*
Preuve. Le seul cas à voir est celui où la relation ne contiendrait aucun carreau, c'est à dire nécessairement un dilaté de chaîne. □

Comme vu au lemme 3 du §4 pour les tournois pavables on peut affirmer:
Une relation binaire est carrelable si et seulement si elle est dilatée de relation pleine, vide ou indécomposable.

Lemme 2. *Les ensembles de sommets couverts par deux carrelages maximaux ne peuvent se chevaucher.*
Preuve. Soit C et D deux carrelages (sommets-) maximaux dans R. Soit [c,c_1,...,c_2,c'] un presque-chemin croissant où c,c'∈C et c_1 ,...,c_2 ∈D. D étant un presque-intervalle on a R(c,c_1)=...=R(c,c_2) et R(c_1 ,c)=...=R(c_2 ,c) à ceci près que certaines de ces arêtes peuvent être vides et d'autres pleines. Comme C-D est un presque intervalle, il y a une contradiction dans l'égalité R(c,c_2)=R(c_2,c') (et R(c_2,c)= R(c',c_2)) dès que [c,c_1] ou [c_2 ,c'] est orientée. Si une de ces arêtes est neutre on peut prolonger le carrelage D. □

Proposition 2. *Une relation binaire de cardinal >2 est dilatée de chaîne si et seulement si elle n'est pas localement carrelable.*
Preuve. Il est immédiat que dans un dilaté de chaîne, il n'existe pas de presque-chemin monotone partant d'un x et aboutissant vers un y<x.
Nous allons montrer la réciproque: Partons d'une relation qui n'est pas localement carrelable et dont on aura préalablement vidé toutes les arêtes pleines. Examinons ses carrelages maximaux. Ceux-ci sont des intervalles - propres, par hypothèse. La non carrelabilité locale oblige la relation à être non limite. Dans ce cas la relation est dilatée de chaîne puisque ne peut exister entre ces intervalles d'arêtes neutres ni de 3-cycles. □

Lemme 3. *Soit R et R' deux relations ≤3/2-hypomorphes. Soit C un presque-chemin minimal de R. Tout le chemin s'inverse dès qu'une arête orientée externe au presque-chemin s'inverse. Il en va de même quand une arête orientée interne au presque-chemin s'inverse.*
Preuve. Si (b,b_1 ,b_2) est un cycle formé d'éléments consécutifs du presque chemin, l'inversion de [b,b_1] se contamine à [b_1 ,b_2]. De même si c'est une consécutivité. On raisonne ensuite de proche en proche. □

§6

Considérons les carrelages maximaux d'une relation binaire. Ils forment pour l'inclusion soit une chaîne de cardinal >1 soit un singleton soit une famille emboitée sans maximum.
Rappelons que les intervalles d'une chaîne ne sont évidemment pas conservés par (≤3/2)-hypomorphie.

Lemme 1. *Soit R et R' deux relations binaires (≤3/2)-hypomorphes. Tout majorant changeant des deux extrémités de l'axe d'un carreau non changeant est majorant changeant de tout le carreau.*
Preuve. Soit [a_0 ,a_1 ,...,a_n] un tel carreau avec a_0 <a_1 ,a_1 <... mod R et R', et b un R-minorant changeant de a_0 . Comme a_2 <a_0 mod R et mod R' il faut que a_2 <b mod R'. Si cette dernière orientation était conservée mod R, on devrait avoir a_1<b mod R et donc aussi mod R'; et du coup a_3 <b mod R (examiner {a_0 ,a_3 ,b}) et de même mod R' (examiner {a_1 ,a_3 ,b}). □

Lemme 2. *Soit S une relation de base A∪{m} formée par un ensemble A et un majorant non changeant m de A, hors de A. On suppose que A est presque fortement connexe. R est obtenu en rajoutant à S un élément n qui sera majorant changeant d'une arête [n,a] pour un a dans A. Alors tout S est majoré par* *le majorant changeant n. De même en remplaçant indépendamment m et n par des minorants, de même en faisant changer m et pas n.*

Preuve. Soit b un autre élément de A tel que a<b mod R' ou [a,b] neutre. Il est clair que [n,b] est orienté et que b<n mod R (examiner {n,b,m}). Comme [a,b] est neutre ou orienté par a<b mod R', on a n<b mod R' (examiner {n,a,b}). De proche en proche tout S est majoré par le majorant changeant n. □

Rappelons qu'un *drapeau tricolore* est par définition une relation binaire sur un triplet {x,y,z} où [x,y] est orienté par y<x, où [x,z] est vide et [y,z] plein; et que la flèche {x,y} est appelée *composante connexe* du drapeau.

Pour les drapeaux tricolores on a un énoncé légèrement différent du lemme analogue, relatif aux 3-consécutivités et aux 3-cycles, différence due aux problèmes de connexité:

Drapeaux et (≤3/2)-hypomorphie.

Sous-lemme des chemins minimaux pour les drapeaux. *Soit R et R' deux relations binaires (≤3/2)-hypomorphes ne formant qu'une classe de (R,R')-différence et contenant un drapeau formé de deux arêtes neutres et d'une flèche non changeante. Les extrémités de cette flèche sont liées par un chemin de différence de longueur 2.*

Preuve. Soit {x,y,z} le drapeau où y<x. L'énoncé est immédiat si existe un chemin de différence de 2 arêtes liant x à z. Nous raisonnons par l'absurde en supposant l'inexistence d'un tel chemin. Un chemin de différence $[x,x_1,x_2 ,\ldots,x_p ,z]$ est donc de longueur >2. Plaçons nous par exemple dans le cas où $x<x_1$ mod R'. Nécessairement $y<x_1$ mod R' et donc aussi mod R par hypothèse du raisonnement par l'absurde. Retenons que par minimalité $R(x_2 ,x)=R'(x_2 ,x)$. Puisque la flèche (x_1 ,x_2) s'inverse, l'examen de $\{x_1 ,x_2 ,y\}$ montre que $[y,x_2]$ est orienté. L'examen de $\{x_2 ,x,y\}$ montre que cette orientation se conserve sauf si $x_2<x$ mod R et R'; observons que cette dernière éventualité est irréalisable puisque les arêtes internes du chemin sont neutres. Donc $[y,x_2]$ conserve la même orientation dans R' et de proche en proche $[y,x_p]$ est orienté de la même manière mod R et mod R'. Ce qui donne une contradiction sur $\{x_p ,y,z\}$. □

Lemme 4 des drapeaux interdits. *Soit R et R' deux relations binaires (≤3/2)-hypomorphes. Dans une classe de (R,R')-différence, la composante connexe d'un drapeau doté d'une flèche non changeante, possède un majorant (ou minorant) changeant.*

Preuve. L'examen de l'ensemble $\{y,x,x_1\}$ du sous-lemme précédent montre que x_1 est précisément ce minorant ou majorant recherché. □

Scolie. *Remarquons accessoirement (mais utilement pour la suite) que la première escale de tout chemin de différence liant x à z est un majorant ou minorant changeant tel que spécifié dans le précédent sous-lemme des chemins minimaux.*

Preuve. Nous disposons d'un majorant ou minorant changeant m. Si [m,z] est orienté l'énoncé est démontré. Sinon [m,z] ne peut être vide car {z,m,y} serait un drapeau; ni plein car {x,m,z} serait un drapeau tricolore, autant d'obstruction à l'inversion de [m,y] et [m,x]. □

Autre sous-lemme des chemins minimaux. *Soit R et R' deux relations binaires (≤3)-hypomorphes ne formant qu'une classe de (R,R')-différence et contenant un drapeau tricolore. Tout chemin de différence minimal liant les extrémités de la flèche du drapeau est de longueur 2, et passe donc par un sommet m qui est majorant ou minorant changeant de cette flèche.*

Scolie. *Qui plus est ce sommet m forme avec chaque arête neutre du drapeau une 3-consécutivité.*

Preuve. Gardons les mêmes notations. On considère un chemin de différence minimal $[x,x_1 ,\ldots,x_p =a,y]$ allant de x à y et dont la dernière escale avant d'arriver sur y est a. Supposons sans perte de généralité a<y mod R et le contraire mod R'. L'examen de {a,z,y} montre que soit [a,z] est neutre soit il est orienté changeant. Si le chemin n'était pas de longueur 2 on aurait a<x mod R et aussi a<x mod R'. Ce qui exclut pour [a,z] la possibilité d'être orienté. Nous allons voir que cette neutralité se contamine tout au long du chemin. On montrerait de même que $[x_{p-1} ,z]$ est neutre ou orienté changeant. Dans ce dernier cas l'examen de {z,a,x} donne une contradiction. Est donc acquis que toutes les arêtes $[y,x_p]$

sont neutres et, par 3-hypomorphie, de même nature puisque le chemin s'inverse. D'où la contradiction tant attendue. □

Preuve de la scolie. Nous disposons maintenant d'un majorant ou minorant changeant m. Si [m,z] est orienté l'énoncé est démontré. Sinon [m,z] ne peut être vide car {z,m,y} serait un drapeau tricolore; ni plein car {x,y,m} serait un drapeau tricolore, autant d'obstructions à l'inversion de [m,y] et [m,x]. □

Corollaire 1. *Dans une classe de $\leq$3-hypomorphie les consécutivités de >2 arêtes ne peuvent pas adhérer à un drapeau tricolore par une arête neutre; En termes moins énigmatiques une arête neutre d'un drapeau tricolore ne peut lier les extrémités d'une consécutivité de >2 arêtes.*

Preuve. Conservons encore les mêmes notations. Soit {y,z,x} un drapeau tricolore où y<x mod R, où [y,z] est plein et [z,x] vide. Soit [z,...,u,v,y] une consécutivité z<.,...,u<v,v<y mod R d'au moins 3 arêtes, qui est nécessairement changeante d'après le lemme 4 du §4 de [9]. Comme [v,y] s'inverse et pas [y,x], il faut orienter [v,x] par v<x mod R, et comme {v,z,x} est un drapeau tricolore, par v<x mod R'. Pour la même raison [u,x] est orienté par u<x mod R et {u,y,x} est absurdement un pic.

On a donc renforcé le corollaire du lemme des drapeaux tricolores interdits en précisant que toute consécutivité liant les extrémités d'une arête neutre est de longueur 2 et passe par un minorant ou majorant changeant de la flèche, réciproquement tout chemin de différence minimal liant les extrémités de la flèche est de longueur 2 et passe par un minorant ou majorant changeant de cette flèche, lequel forme avec chaque arête neutre une 3-consécutivité changeante.

Corollaire 2. *Dans une classe de $\leq$3-hypomorphie les consécutivités (même de 2 arêtes) ne peuvent adhérer à un drapeau tricolore par une flèche; En d'autres termes une arête orientée d'un drapeau tricolore ne peut être arête orientée d'une consécutivité (de $\leq$2 arêtes)*

Preuve. Gardons les notations du corollaire précédent. Soit [a<y, y<x] une 3-consécutivité. La flèche {y,x} possède par exemple un majorant changeant m qui minore z. On voit que [m,a] doit être orienté par a<m mod R. Par suite {a,x,m} est un pic. □

Les deux précédents corollaires peuvent se résumer ainsi: Un "pavage" par des consécutivités et des drapeaux tricolores ne peut se réaliser, dans une classe de $\leq$3-hypomorphie, que par l'adjacence d'une 3-consécutivité sur une arête neutre de drapeau tricolore

Proposition 1. *Dans une classe de $\leq$3-hypomorphie, un triplet ne peut posséder deux arêtes neutres de nature différente que si ce triplet est un drapeau tricolore.*

Indication de preuve. Supposons par l'absurde l'existence d'un triplet {u,v,w} formé de deux arêtes pleines [v,u] et [v,w] et d'une arête vide [u,w]. Soit [v,a,...,c,w] une consécutivité changeante liant v à w par v<a, a<..., c<a. Si cette consécutivité est formée de deux arêtes la conclusion est immédiate si on se souvient que la flèche d'un drapeau tricolore ne peut changer. Supposons donc que la longueur de cette consécutivité est >2. Si [u,a] était orienté on devrait avoir u>a mod R pour éviter les pics, mais alors {u,a,w} est un drapeau tricolore qui empêche l'inversion de [u,a]. [u,a] est donc neutre et ne peut qu'être plein, sans quoi {u,v,a} serait un drapeau tricolore et [v,a] ne pourrait changer. De proche en proche [u,c] est plein; {u,c,w} est alors un drapeau tricolore et [c,a] ne peut changer. Absurde. □

Lemme 5 des carreaux interdits. *Soit R et R' deux relations binaires ($\leq$3/2)-hypomorphes. Un carreau d'axe (y,x) orienté non changeant ne peut être dans une classe de différence que si sa composante connexe possède un majorant ou minorant changeant.*

Preuve. La propriété est en fait connue des drapeaux, 3-cycles et 3-consécutivités. Il suffit de voir qu'elle est compatible avec le recollement de ces drapeaux, 3-cycles et 3-consécutivités. Le seul cas délicat est celui du recollement de drapeaux. Prenons un carreau d'axe [y,x] avec y<x dont un presque chemin monotone minimal est [x,x_1,x_2,x_3,y]. {x_2,x,x_1} est un drapeau dont la composante connexe {x,x_2} a pour minorant changeant a qui a été choisi comme escale d'un chemin de différence [x,a,x_1] d'après la scolie du lemme des chemins minimaux pour les drapeaux. Supposons d'abord que a>x_1 mod R. Comme x_3<x mod R et R', on doit avoir x_3<a mod R et (puisque [a,x_2] change) le contraire mod R'. L'ensemble {a,x_3,x} est alors un R'-cycle. Cette contradiction montre que a<x mod R et aussi a<x mod R. On

peut donc poursuivre la démarche de proche en proche pour prouver l'existence du majorant ou minorant changeant requis dans l'énoncé. □

Théorème 1 . *Si deux relations binaires R et R' de même base et ($\leq 3/2,\omega,\omega^*$)-hypomorphes ne forment qu'une classe de différence et une classe d'identité ce sont des dilatées de chaîne.*

Preuve. Soit R et R' deux relations binaires ($\leq 3/2,\omega,\omega^*$)-hypomorphes dont la base forme une classe de (R,R')-versatilité. Supposons que R n'est pas dilatée de chaîne. Partons d'un carreau A supposé connexe (sa non-connexité ne nous ferait perdre qu'un pas dans la preuve par induction qui va suivre). Comme la relation est dans une unique classe de différence il existe (d'après le lemme des carreaux interdits) un sommet a' extérieur au carreau A tel que par exemple a<A mod R et le contraire mod R'. La relation n'étant pas dilaté de chaîne, il existe, pour tout a sommet de A, un presque chemin monotone minimal [a,a_1 ,a_2 ,...,a'] dirigé de a vers a'. On peut d'ailleurs supposer que a_1 est le premier élément hors de A. Le carreau [a,a_1 ,a_2 ,...,a'] est changeant et ne peut être dans une classe d'identité que s'il existe un a" R-majorant (par exemple) non changeant du carreau A d'après le lemme précédent. Appelons A' l'ensemble des sommets de ces presque chemins monotones minimaux dirigés des a de A vers a'. Les flèches [a,a'] sont donc non changeantes ce qui exclut pour a' la possibilité d'être sommet de A'. Rien de nous empêche plus de répéter le précédent raisonnement avec A' au lieu de A; la technique déjà expérimentée lors des tournois permet alors d'aboutir. □

Ce théorème 1 peut s'améliorer en utilisant la proposition 2 du §2 (p295) de notre article “Classes de (≤ 3, ω, ω^*, Ω, Ω^*)-hypomorphie infinies” ([9]),

On obtient alors un:

Théorème 1'. *Si deux relations binaires ($\leq 3/2$, $\omega/2$, $\omega^*/2$)-hypomorphes R et R' ont une base commune qui ne forme qu'une classe de (R,R')-différence et une classe de (R,R')-identité alors elles sont des dilatées de chaînes.*

Nous ignorons si une seule des deux conditions $\omega/2$ ou $\omega^*/2$ suffit.

Du lemme 4 du §4 de [9] on tire:

Proposition 2. *Une classe de ($\leq 3/2,\omega$)-hypomorphie contenant ω, est un dilaté de chaîne.*

Preuve. Une telle classe est une classe de versatilité. □

Dans la preuve du théorème, seule intervient en vérité le fait que ω ne se mute jamais en ω^* et réciproquement, or cette condition est assurée par la ω-hypomorphie.

Nous concluons donc par le théorème suivant :

Théorème 2. *Si deux relations R et R', qui sont $\leq 3/2$-hypomorphes, où les R-types ω ne sont jamais de R'-type ω^* (resp. ou réciproquement) et qui en outre forment une classe de différence et une classe d'identité, sont des dilatées de chaînes. Elles ne sont pas nécessairement ($\leq 3/2,\omega$)-hypomorphes (resp. ($\leq 3/2,\omega^*$)-hypomorphes).*

Exemple : prendre un dilaté de chaîne a<b<c<d mod R avec mod R' les inversions (a,b),(c,d),(a,d) et dilatons d par une chaine de R-type ω : $0<1<2<\ldots<n<\ldots$ où 0 va, mod R', être $>$ tous les $n\neq 0$.

Mais on peut aussi espérer améliorer le théorème précédent par la conjecture:

Une classe de ($\leq 3/2,\omega/2$)-versatilité est un dilaté de chaîne.

On peut espérer aussi le même résultat avec pour seule hypothèse en plus de la ($\leq 3/2$)-hypomorphie) l'hypothèse directe que tout ensemble de R-type ω est de R'-type ω ou ω^*. L'hypothèse directe n'entraine pas l'hypothèse réciproque qui dirait que tout ensemble de R'-type ω est de R-type ω ou ω^*(dans le cas d'une unique classe de différence et d'une unique classe d'identité, cette seule hypothèse directe suffirait à affirmer qu'on a déjà alors affaire à des dilatés de chaîne). Donnons un exemple de cette non réciprocité:

Les deux relations R et R' sont basées sur un même ensemble $\mathbb{Z}$: R est ($\mathbb{Z}$,<) et R' est la chaine 0<-1<1<-2<2<-3<3<... Alors tout ensemble de R-type ω est aussi de R'-type ω mais la réciproque n'est pas vraie: la base toute entière de R'-type ω est de R-type $\omega^*+\omega$. Pourtant R et R' ne forment qu'une classe de différence et une classe d'identité: par exemple pour aller de 0 vers 1, [0,1] est chemin d'identité et [0,-2,1] est un chemin de différence; pour aller de 0 vers -1, [0,-1] est un chemin de différence et [0,1,-1] est un chemin d'identité.

Proposition 3. *Une classe de (≤4/2,ω)-hypomorphie contenant ω, est un dilaté de chaîne par des tournois.*

Preuve. Supposons l'existence de deux éléments incomparables u et v dans une composante de la dilatation. Les éléments u et v forment avec tout x d'une autre composante, un pic qui s'inverse d'après le corollaire du lemme de multiplicité des classes de [9] §3. Soit x_n une suite croissante d'éléments d'un ensemble de type ω, qui sont >u mod R. La (4/2)-hypomorphie appliquée à $\{u,v,x_n ,x_{n+1}\}$ montre que les x_n sont <u mod R'. Le type ω+1 étant interdit, l'ensemble des x_n doit être de type ne contenant pas ω, contrairement à ce qu'affirme la ω-hypomorphie. □

Le corollaire suivant étend une proposition précédente.

Corollaire 3 ([4]). *Soit R et R' deux relations binaires (≤3/2)-hypomorphes. Si R est indécomposable et sans drapeau tricolore alors on a R'=R ou R'=R^* .*

Preuve. La relation étant indécomposable, elle n'est formée que d'une seule classe de différence dès que R'≠R. Si les relations R ou R' contiennent ω ou ω*, elles sont des dilatés de chaîne ce qui contre l'indécomposabilité; R et R' sont donc (≤3/2,ω,ω*)-hypomorphes. Les classes de différence comme celles d'identité sont des presque-intervalles. Ces classes d'identité, étant connexes, sont des intervalles puisqu'il n'existe pas de drapeau tricolore. R étant indécomposable ces classes ne peuvent être que des singletons ou toute la base. Or R n'est pas dilaté de chaîne (laissons tomber le cas inintéressant où card R=2). La base ne peut donc être toute entière une classe de différence et une classe d'identité. Par suite, soit les classes d'identité sont des singletons et donc R'=R^*, soit ce sont les classes de différence qui sont des singletons et dans ce cas R'=R. □

Donnons un exemple où l'existence de drapeau tricolore empêche la conclusion d'être vraie. La base est formée de 4 éléments a,b,c,d et on a mod R a<c et d<b, [a,b] est plein et les autres arêtes vides. R' est identique à R sauf que b<d mod R'. Alors R et R' (non connexes) ne sont ni identiques ni opposés. Autre exemple sur {a,b,c,d}: {a,b} plein ainsi que {c,d}, {a,d} vide ainsi que {b,c} et a<c ainsi que b<d.

Donnons un autre exemple où R est connexe et même une (R,R')-classe de différence: on a mod R a<b, a<c, a>d, b<c, {b,d} plein, {c,d} vide; R' diffère de R par l'inversion de toutes les flèches sauf {b,c}. La base est bien une classe de (R',R*)-identité.

Proposition 4 ([2] 3.2.2). *Soit R et R' deux relations binaires (≤4/2)-hypomorphes dont la première est indécomposable. Pour toute composante connnexe C de R on a R'|C=R|C ou R'|C=R^*|C .*

Preuve. On s'inspire du raisonnement précédent en se servant des résultats connus qui disent que les classes de (≤4/2)-différence proprement incluses dans une composante connexe sont des intervalles. □

Montrons par un exemple que la ≤ 3/2-hypomorphie ne suffit pas:

R est défini sur une base {a,b,c,d,e} ainsi: a<c,b<d b<e, d<e, [a,b] plein, autres arêtes vides. R' est identique à R sauf que d<b mod R'. Alors {d,e} est un R-intervalle tandis que R' est indécomposable. La relation R n'est pas connexe.

Voici un exemple de deux relations R et R', connexes sur une base {a,b,c,d}, qui sont ≤3/2-hypomorphes et ni égales ni duales toutes les deux indécomposables: a<c, b<d d<c, d<a mod R avec [b,c] vide et [a,b] plein. Et, mod R', on inverse toutes les flèches sauf [a,c]. On notera la présence d'un drapeau tricolore {a,b,c}.

Voici un R et un R', <=3/2-hypomorphes, connexes, R est décomposable et pas R': Sur 5 éléments {a,b,c,d,e}: mod R on a a<c, a<d, a<e ,b<d, b<e, c<d, c<e, e<d ,[a,b] plein et [b,c] vide. Alors {d,e} est un R-intervalle. R' est obtenu en inversant [a,c], [a,e], [b,e], [c,e]; R' est alors indécomposable alors que R ne l'est pas.

Voici un autre exemple avec R et R' décomposables mais en intervalles très différents: mod R on a a<c, a<d ,a<e, b<d, b<e , c<e, e<d, [a,b] plein et [b,c] vide. Mod R' on inverse [a,c], [a,d], [b,d], [c,d], [d,e] . Alors {d,e} est un R-intervalle alors que mod R' c'est {a,b,c,d} qui en est un.

En voici un autre. R est défini sur {a,b,c,d,e} par a<c,b<d b<e, d<e, c<d, a<d, a<e, c<e, [a,b] plein, autres arêtes vides (il ne reste que [b,c]). R' est identique à R sauf qu'on inverse [a,c], [a,d], [c,d] et [d,b]. Alors {d,e} est un R-intervalle mais pas un R'-intervalle.

.

Corollaire 4. *Soit R et R' deux relations binaires connexes (≤4/2)-hypomorphes. Si R est indécomposable on a R'=R ou R'=R* .*

Corollaire 5. *Si une relation binaire connexe est indécomposable, toute R' qui lui est ($\leq$4/2)-hypomorphe l'est aussi.*

Proposition 5. *Soit R dilaté d'un squelette indécomposable et I un R-intervalle qui ne serait pas S-intervalle pour un S $\leq$3/2-hypomorphe à R. Alors I est un dilaté de chaine.*

Preuve. Supposons que I n'est pas dilaté de chaine et donc en première option un carrelage noté i_1, i_2, ... jusqu'au retour en i_1. Soit x un élément extérieur à I. Si [i_1, i_2] est neutre, {x,i_1} est orienté comme {x,i_2}. Si [i_1, i_2] est n'est pas neutre {x,i_2} peut changer d'orientation par rapport à {x,i_1}. Dans ce cas, passons à {x,i_3} et continuons éventuellement à tourner en rond jusqu'au retour à {x,i_1} ce qui à un moment ou un autre provoquera une contradiction. En seconde option I est limite, prenons-en alors un intervalle assez grand pour nos besoins. □

A. Boussaïri et P. Ille ont trouvé dans [3] (corollaire 9) un résultat voisin: *si une relation binaire indécomposable R est $\leq$3/2-hypomorphe à S non indécomposable alors tout intervalle propre de S est une chaîne.* Aucun de ces deux résultats ne semble se déduire de l'autre.

Corollaire 6. *Soit R et R' deux relations binaires ($\leq$3/2)-hypomorphes ne formant qu'une seule classe de différence, et de même pour la paire R et R". Alors R' et R" ne forment qu'une classe d'identité.*

Supposons que les relations ne sont pas des dilatées de chaines. On part d'une relation R dilatée d'indécomposable et on enlève toutes les arêtes pleines pour obtenir R°. R° est dilaté de ce qu'on peut appeler un "presque squelette" indécomposable R^ (constater que R° est connexe et vérifier que R° ne peut pas être limite). Les dilatants pemettant de retrouver R° peuvent être appelés des *presque-blocs* de R. Dans ce presque squelette R^ il n'y a pas de drapeau tricolore et R'^° est l'inverse de R^°. De même pour R^"°. Donc R"^° est identique à R'^°. Il ne reste plus qu'à remettre les arêtes pleines là où elles étaient pour conclure que la base est une classe de (R',R")-identité.

Si R est dilatée de chaine on obtient le résultat directement puisque les classes d'identité sont des intervalles en en prenant deux jointifs. □

On démontre de même que:

Corollaire 7. *Toute relation ($\leq$3,ω,ω*,Ω,Ω*)/2-hypomorphe à une classe de ($\leq$3,ω,ω*,Ω,Ω*)- hypomorphie en est encore une.*

§7.

Théorème de décomposition:

Les relations binaires qui sont des classes de ($\leq$3/2,ω,ω^*,Ω,Ω^*)-hypomorphie se répartissent en 2 catégories disjointes:

i) les dilatées de chaines,

ii) les relations n'abritant ni ω ni ω et qui sont dilatées d'indécomposable*

Preuve. Il suffit de s'assurer qu'une relation binaire connexe limite contient un type ω ou ω^*. □

Illustrons le théorème par l'exemple suivant: la relation en zigzag 0>1<2>3<4>5<6>7<... avec liens vides ailleurs entre dans le cas ii). Cette relation est en fait indécomposable.

Exemple de relation qui n'entre dans aucune de ces catégories car elle n'est pas une classe de ($\leq$3/2,ω,ω*)-hypomorphie. Soit R la relation de base $\mathbb{N}\cup${e} définie par e<2p mod R et e>2p+1 mod R pour tout p entier. Il n'existe alors pas de relation R', ($\leq$3/2,ω)-hypomorphe à R telle que la base soit formée d'une seule classe. La raison en est que chaque arète devrait s'inverser ce qui inverserait ω.

§8. Multiplicité des classes et héréditarité des classes de différence.

Lemme de multiplicité des classes. *Soit R et R' deux relations binaires ($\leq$3,ω,ω*)/2-hypomorphes ne formant qu'une seule classe de différence. Pour toute partie connexe F de la base, les restrictions S=R/F et S'=R'/F vérifient une des conditions suivantes:*

1) ou bien S et S' ne forment qu'une classe de différence

2) ou bien il existe dans R un majorant ou minorant changeant de F

3) ou bien R/F est dilaté de chaine ainsi que R'/F.

La (ω,ω*)/2-hypomorphie s'avérera plus loin inutile.

Preuve du lemme. Si R est dilaté de chaine montrons que R|F l'est aussi si on est dans aucun des cas 1) ou 2). Si ce n'était pas le cas F serait inclus dans une seule composante du dilaté R. Cette composante est incidente à une flèche changeante dont l'autre extrémité est un majorant ou minorant changeant et on se retrouve dans le cas 2).

Si R n'est pas dilaté de chaine on applique le théorème de décomposition. Si F est inclus dans un bloc on se trouve dans le cas 2). Si F est à cheval sur deux blocs (ou plus), ces classes sont liées par un chemin de connexité formé de flèches changeantes, chemin grâce auquel (S,S') forme une classe de différence. □

Nous allons maintenant démontrer ce lemme sans hypothèse d'hypomorphie infinie. En même temps nous le reformulons sous la forme d'un théorème d'héréditarité des classes de différence qui stipule:

Théorème d'héréditarité. *Soit R et R' deux relations binaires ($\leq 3/2$)-hypomorphes qui ne sont pas dilatées de chaine et qui ne forment qu'une seule classe de différence. Si F est une partie connexe, alors F est formée d'une seule classe de (R/F,R'/F)-différence, sauf s'il existe dans R un majorant ou minorant changeant de F.*

Illustrons par des exemples cet énoncé.

1. Prendre pour R la relation $\mathbb{Z}$' du §1 et, pour obtenir R', y inverser les arêtes {x,p}, {x,-p}, {p,-p} où x∈]-p,p[pour tous les p positifs pairs. Prenons pour |S| l'ensemble des pairs.

2. Même exemple en supposant les {q,q'} neutres pour tout q≥0.

3. Dans la guirlande du [10] p482 prenons F={0,1,2}. F est formé de deux (S,S')-classes de différence: {0,1} et {2}; bien que l'ensemble F ne possède pas de majorant ni de minorant changeant.

Preuve du théorème. Seul reste à voir le cas où R est limite. Sa base s'écrit comme réunion croissante d'une famille U_i de R- et R'-intervalles forts, i étant un ordinal. Prenons une partie connexe F de la base. Si F est inclus dans un U_i pour un i assez grand, il existe nécessairement puisque R est connexe, un m dans la couronne U_{i+1}-U_i qui est majorant ou minorant changeant de F.

Supposons donc que F possède des éléments dans des couronnes U_{i+1}-U_i pour des i arbitrairement grands. Les (S,S')-classes de différence ne chevauchent aucun des U_i, donc chacune est entièrement incluse dans une couronne U_{i+1}-U_i.

Considérons une chaine maximale d'intervalles forts U_i de réunion |R|. Il va de soi que U_{i+1} est dilaté d'indécomposable. Les flèches chevauchant U_i, s'inversent toutes ou se conservent toutes dans R'. Pour que (R,R') ne soit formé que d'une classe de différence, il est nécessaire qu'au moins pour des i arbitrairement grands, elles s'inversent. On contredit alors l'alinéa précédent. □

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Youssef Boudabbous, Christian Delhommé : Prechains and self duality. Discrete Mathematics 312(10), (2012), pp. 1743-1765.

[2] Abderrahim Boussaïri, Décomposabilité, dualité et groupes finis en théorie des relations, Thèse de doctorat de mathématiques soutenue à l'Université Claude Bernard, le 12 Juin 1995.

[3] Abderrahim Boussaïri et Pierre Ille, The recognition of the class of indecomposable digraphs under low hemimorphy, Discrete Math. 309 (2009) pp. 3404-3407.

[4] Abderrahim Boussaïri, Pierre Ille, Gérard Lopez, Stéphane Thomassé, Hypomorphie et inversion locale entre graphes, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I t. 317 (1993), pp. 125–128.

[5] Emmanuel Clarou, Une hiérarchie de forçage pour les tournois indécomposables, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon I, 25 juin 1996.

[6] William H. Cunningham, Decomposition of directed graphs, SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 3 (1982), pp. 214–228.

[7] Tibor Gallaï, Transitiv orientierbare Graphen. Acta Math. Acad. Sci. Hungar 18, (1967), pp. 25-66. Traduit en englais : F. Maffray, M. Preissmann, A translation of Tibor Gallai's paper: Transitiv orientierbare Graphen. In: Perfect graphs, J.L. Ramirez-Alfonsin and B.A. Reed Eds., J. Wiley (2001), pp. 25-66.

[8] Michel Habib, Substitution des structures combinatoires, théorie et algorithmes, Thèse Paris VI, 13 octobre 1981.

[9] Jean Guillaume Hagendorf, Classes de ($\leq$ 3, ω, ω*, Ω, Ω*)-hypomorphie infinies, Proyecciones Journal of Mathematics Vol. 33, No 3, pp. 287-313, September 2014. Universidad Católica del Norte Antofagasta - Chile proyecciones. Accessible à
http://dx.doi.org/10.4067/S0716-09172014000300005 ou
http://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0716-09172014000300005&script=sci_arttext&tlng=e .

[10] Jean Guillaume Hagendorf, Restriction respectueuse et reconstruction des chaînes et des relations infinies, Z. Math. Logic Grundlagen Math. 38 (1992), pp. 457-490. Accessible en *http://docslide.fr/download/link/restriction-respectueuse-et-reconstruction-des-chaines-et-des-relations-infinites* .

[11] Jean Guillaume Hagendorf, Gérard Lopez, La demi-reconstructibilité des relations binaires d'au moins 13 éléments, C. R. Acad. Sci. Paris, t.317, Série I (1993) pp. 7-12.

[12] Jean Guillaume Hagendorf, Gérard Lopez and Claire Rauzy, Pavages d'une relation binaire [Tilings of binary relations], C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, t321, (1995), pp. 1281-1286.

[13] David Kelly, Comparability graphs. In: Rival, I. ed. (1985) Graphs and Order. Reidel, Dordrecht, pp. 3-40.

[14] Gérard Lopez, L'indéformabilité des relations et multirelations binaires, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 24, no. 4, (1978), pp. 303-317.

E-mail: jean.hagendorf@sfr.fr