LA GRAVITÉ LINÉAIRE REVISITÉE ET L'ÉLECTROMAGNÉTISME

Abdelmoumene Belabbas, Ahmed Bouda

LA GRAVITÉ LINÉAIRE REVISITÉE ET L’ÉLECTROMAGNÉTISME

Abdelmoumene BELABBAS(1), Ahmed BOUDA(2)
(1),(2)Laboratoire de Physique Théorique, Université de Béjaïa, Campus Targa Ouzemour, 06000 Béjaïa
belabbas.moumene@gmail.com

RÉSUMÉ : La Gravité Linéaire revisitée et les résultats remarquables de Barros nous ont permis, d'une part, de postuler l'existence d'une version électromagnétique des Equations d'Einstein qui se réduisent, dans le cas linéaire, aux Equations de Maxwell. D'autre part, nous avons proposé une extension du principe d'Equivalence pour l'interaction électromagnétique en absorbant l'effet du champ dans la métrique de l'espace-temps de manière à avoir une charge électrique libre se déplaçant suivant des géodésiques. L'équation des géodésiques se réduit, au premier ordre en v/c, à l'équation de mouvement de la charge d'épreuve soumise à la force de Lorentz. De plus, nous avons montré que les termes d'ordres supérieurs sont négligeables dans le domaine usuel d'application de l'électromagnétisme. Finalement, des corrections, à l'ordre 2 de la perturbation, ont été apportées aux équations de Maxwell et une analyse critique de cette nouvelle démarche a été envisagée.

MOTS-CLÉS : La Gravité Linéaire. Principe d'Equivalence. Conditions de jauge. Equations d'Einstein. Force de Lorentz.

1. Introduction

L’objet de cette contribution est d’essayer de fournir une description géométrique unifiée de la Gravité et de l’Electromagnétisme, à partir de laquelle on pourrait envisager l'unification des quatre interactions fondamentales.
Dans un travail récent [1]-[3], C.C.Barros est arrivé à décrire l'atome d'hydrogène de façon inédite, en se basant sur une idée selon laquelle les interactions non gravitationnelles se manifesteraient à travers une modification des propriétés de l'espace-temps. En effet, au lieu d'introduire l'effet du champ électromagnétique sur l'électron à travers l'adoption du couplage minimal, dans le contexte de la solution de Schwarzschild et de manière similaire à ce qui se fait en Relativité Générale pour la gravité, l'auteur incorpore plutôt le potentiel coulombien s'exerçant entre l'électron et le proton dans la métrique de l'espace-temps et arrive à reproduire le spectre relativiste de la théorie de Dirac, dans le cadre de l'approximation du champ faible.
L'analyse critique de l'approche de C.C.Barros a révélé deux points intéressants [4]

- Contrairement à la gravité, il n'y a pas d'argument similaire à l'égalité des masses inertielle et gravitationnelle en faveur d'une interprétation géométrique des interactions non gravitationnelles.
- Une adoption d'une métrique de Schwarzschild n'est pas également justifiée. En effet, une telle solution découle d'une utilisation des Equations d'Einstein, écrites exclusivement pour le champ de gravitation.

La recherche des analogies qui puissent exister entre la gravité et l'électromagnétisme nous ont poussé à nous pencher sur le domaine de la Gravité Linéaire (GL) où des phénomènes très intéressants ont lieu. En effet, en plus du champ de gravitation radial crée par une masse (champ gravitoéléctrique), il y a apparition d'un champ orthoradial qui jouerait le rôle d'un analogue au champ magnétique pour la gravitation (champ gravitomagnétique). L'analyse de l'approche standard de Huei [5] et celle de Wald [6], où il est montré que les équations d'Einstein linéarisées peuvent se mettre sous la forme d'équations de type Maxwell pour la gravité, nous a permis de souligner quelques imperfections

- La force de type Lorentz n'est obtenue que dans le régime stationnaire, de plus sa partie magnétique est entachée d'un facteur 4 indésirable.
- La relation entre les potentiels et le champ gravitoéléctrique, telle qu'elle est définie en électromagnétisme, n'est obtenue que dans le cas particulier de la jauge harmonique.

Soulignons qu'en redéfinissant les champs, Carroll [7] est parvenu à éliminer le facteur 4 indésirable, mais sans satisfaire pour autant les Equations de type Maxwell.

La communication est organisée comme suit. Dans la section 2, une version revisitée de la GL est présentée. Dans la section 3, le formalisme de la GL revisitée est appliqué à l'électromagnétisme et la section 4 est consacrée à une discussion des résultats.

2. La Gravité Linéaire revisitée

Nous proposons une version revisitée de la GL dans le but de surmonter les imperfections précédentes de l'approche standard et d'aboutir ainsi à une meilleure analogie entre la gravitation et l'électromagnétisme.

2. 1. Cadre théorique et hypothèses

Dans les régions où le champ gravitationnel est de faible intensité, il est possible d'adopter une approche perturbative de sorte à pouvoir étudier l'écart de la métrique de l'espace-temps par rapport à la métrique plate de Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{1}$$

où $\eta_{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)$ et $|h_{\mu\nu}| \langle\langle 1$. Avec un choix judicieux des composantes de la perturbation de la métrique, nous définissons les composantes des potentiels gravitationnels

$$\begin{cases} A_g^0 = ch^{00}/2 \\ A_g^i = ch^{0i} \end{cases} \tag{2}$$

où $i = 1,2,3$ et $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$ est la vitesse de la lumière. Le 4-vecteur potentiel $A_g^\mu(\phi_g / c, \vec{A})$, ainsi formé, permet de définir le tenseur antisymétrique

$$F_g^{\mu\nu} = \partial^\mu A_g^\nu - \partial^\nu A_g^\mu. \tag{3}$$

De manière analogue aux définitions employées en électromagnétisme, les trois composantes du champ gravitationnel type électrique $\vec{E}_g(E_g^1, E_g^2, E_g^3)$ sont données par

$$E_g^i = -cF_g^{0i}, \tag{4}$$

alors que les trois composantes du champ gravitationnel type magnétique $\vec{B}_g(B_g^1, B_g^2, B_g^3)$ sont données par

$$B_g^i = -\varepsilon^{ijk}(F_g)_{jk}/2, \tag{5}$$

où les ε^{ijk} représentent les composantes du tenseur complètement antisymétrique de Levi-Civita avec la convention $\varepsilon^{123} = +1$. Avec ces définitions, nous garantissons aux relations entre champs et potentiels d'être indépendantes de la jauge adoptée.

Contrairement à l'approche standard, où la jauge harmonique $\partial_\mu h_\nu^\mu - \partial_\nu h/2 = 0$ est utilisée, dans la version revisitée nous avons recours à un choix de jauge subtile. En effet, les trois "composantes" spatiales de la jauge harmonique sont maintenues

$$\partial_\mu h_i^\mu - \partial_i h/2 = 0, \tag{6}$$

alors que la composante temporelle est remplacée par la condition alternative

$$h_1^1 + h_2^2 + h_3^3 = 0, \tag{7}$$

de trace spatiale nulle. Avec ce choix de jauge, nous avons pu surmonter les imperfections de la version standard. En effet, les équations d'Einstein se mettent sous la forme d'équations de type Maxwell. De plus, l'équation des géodésiques se réduit, au premier ordre des vitesses v/c, à l'équation de mouvement de la particule d'épreuve, soumise à une force gravitationnelle de type Lorentz. La partie magnétique de la force n'est plus entachée d'un facteur 4 indésirable et l'étude n'est plus restreinte au régime stationnaire.

2. 2. Equations de la Gravitation de type Maxwell

Le premier groupe des équations type Maxwell est automatiquement vérifié

$$\partial^{\sigma} F_g^{\mu\nu} + \partial^{\nu} F_g^{\sigma\mu} + \partial^{\mu} F_g^{\nu\sigma} = 0, \tag{8}$$

compte tenu du caractère antisymétrique du tenseur $F_g^{\mu\nu}$. Il est possible de vérifier que les équations covriantes (8) sont équivalentes aux équations de type Maxwell

$$div\vec{B}_g = 0 \tag{9}$$

$$rot\vec{E}_g = -\frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}. \tag{10}$$

De plus, les équations d'Einstein linéarisées dans le vide

$$G_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\left(\partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\sigma} + \partial_{\nu}\partial_{\sigma}h_{\mu}^{\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\mu}h - \eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}h\right) = 0, \tag{11}$$

se réduisent au deuxième groupe d'équations de type Maxwell. En effet, compte tenu des conditions (6) et (7), il est montré dans [8] que

$$G^{0\nu} \approx -\frac{1}{2c}\partial_{\mu}F_g^{\mu\nu}. \tag{12}$$

Ainsi, dans le contexte de la GL revisitée, les équations d'Einstein $G^{0\nu} = 0$ se réduisent aux équations covariantes $\partial_{\mu}F_g^{\mu\nu} = 0$; celle-ci sont équivalentes aux équations de Maxwell

$$div\vec{E}_g = 0 \tag{13}$$

$$rot\vec{B}_g = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}. \tag{14}$$

2. 3. Force de Lorentz

Une particule test, se déplaçant suivant des géodésiques

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau} = 0, \tag{15}$$

est soumise à une force gravitationnelle de type Lorentz, dans le domaine des champs et vitesses faibles. En effet, dans le cas linéaire, les composantes de l'accélération sont données par

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^j}{d\tau^2} = c^2 \Bigg[& \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \partial^j h^{00} - \frac{1}{c}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \frac{\partial h^{0j}}{\partial t} \\ & - \frac{u_i}{c}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\left(\partial^i h^{0j} - \partial^j h^{0i}\right) - \frac{u_i}{c^2}\frac{dt}{d\tau}\frac{\partial h^{ij}}{\partial t} - \frac{u_i u_l}{c^2}\left(\partial^i h^{jl} - \frac{1}{2}\partial^j h^{il}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{16}$$

où les composantes du quadrivecteur vitesse $u^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$ sont données par $u^0 = \gamma_v c$ et $u^i = \gamma_v v^i$. Pour des faibles vitesses $v \langle\langle c$, où $(dt/d\tau) \rightarrow 1$ et $u^i \rightarrow v^i = dx^i/dt$, il est possible de négliger les termes proportionnels à c^{-2} dans (16), pour avoir finalement [8]

$$m_i \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m_g\left[\vec{E}_g + \left(\vec{v} \wedge \vec{B}_g\right)\right], \tag{17}$$

compte tenu de (2), (4), (5) et de l'égalité des masses inerte m_i et grave de la particule d'épreuve. Contrairement au modèle de Huei [5] et de Wald [6], la force gravitationnelle est obtenue dans le cas non stationnaire et sa partie magnétique ne souffre plus du facteur 4 indésirable.

3. Application à l'Electromagnétisme

Motivés par les résultats remarquables de C.C.Barros [1]-[3] et la version revisitée de la GL, nous avons proposé une nouvelle approche pour décrire l'interaction électromagnétique géométriquement. Dans le cas linéaire, nous avons montré que les équations de Maxwell découlent d'une version électromagnétique des équations d'Einstein, alors que l'Extension du Principe d'Equivalence (PE) à l'interaction électromagnétique nous a permis de postuler l'existence de géodésiques qui se réduisent, à faible vitesse, à l'équation de mouvement d'une charge test soumise à la force de Lorentz.

3.1. Cadre théorique et hypothèses adoptées

Avant d'appliquer le formalisme de la GL à l'électromagnétisme, il fallait d'abord étendre le PE aux interactions non gravitationnelles. Pour se faire, au lieu de chercher un argument similaire à l'égalité des masses inerte et pesante d'un même corps, il faut plutôt trouver le moyen d'annuler l'effet du champ au niveau du point où se trouve la particule ; autrement dit, la notion de localité, comme cadre de validité du PE, n'est rigoureusement exacte que dans le cas limite d'un point [8]. En particulier pour l'interaction électromagnétique, il faut absorber l'effet du champ agissant sur une charge test, de masse m et de charge q , dans la métrique de l'Espace-temps de manière à avoir une particule libre se déplaçant suivant des géodésiques.

Pour interpréter géométriquement l'interaction électromagnétique nous avons recours à l'approximation du champ faible (1). De manière analogue à (2), une judicieuse identification entre les composantes du 4-potentiel $A^\mu(\phi/c,\vec{A})$ et les composantes de la perturbation de la métrique

$$\begin{cases} A^0 = (m/q)ch^{00}/2 \\ A^i = (m/q)ch^{0i} \end{cases} \tag{18}$$

nous a permis de reprendre exactement les mêmes étapes entreprises dans le cadre de la GL revisitée. Techniquement, la seule différence réside dans le fait que pour la gravité $(m_i/m_g)=1$ alors que pour l'électromagnétisme le rapport de la masse inerte à la valeur de la charge (m/q) est une caractéristique intrinsèque de la particule.

3.2. Ordre 1 de la perturbation : Equations de Maxwell comme conséquence d'équations de type Einstein

Les champs électrique et magnétique sont définis à partir du tenseur électromagnétique, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, par les relations habituelles d'électromagnétisme, analogues à (4) et (5). Le premier groupe des équations de Maxwell est automatiquement vérifié

$$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} = 0. \tag{19}$$

De plus, la version électromagnétique des équations d'Einstein $G^{\mu\nu} = \chi_e T^{\mu\nu}$, où $G^{\mu\nu}$ représente le tenseur d'Einstein décrivant les propriétés géométriques de l'Espace-temps et $T^{\mu\nu}$ est un certain tenseur décrivant la présence des charges électriques et des courants, englobe dans le cas linéaire le deuxième groupe des équations de Maxwell. En effet, l'exploitation de l'analogie entre de gravitation et l'électromagnétisme, en considérant que la source est un fluide parfait, nous permet de poser dans le cas linéaire

$$T^{0\nu} = (qc/m)J^{\nu}. \tag{20}$$

En tenant compte des conditions de jauge (6) et (7), nous avons pu montrer que [8]

$$G^{0\nu} \approx -\frac{q}{2mc}\partial_{\mu}F^{\mu\nu}. \tag{21}$$

Pour pouvoir retrouver le deuxième groupe des équations de Maxwell $\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\nu}$, il suffit d'imposer que $\chi_e = -2\pi K/c^2$, avec $K = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}$. Le recours à l'approximation linéaire (1), pour décrire le champ électromagnétique, a été justifié [8]. En effet, en se plaçant dans le cas le plus défavorable des hautes tensions, pour des champs électriques $E^i \approx -(mc^2/q)(\partial^0 h^{0i} - \partial^i h^{00}/2)$ de l'ordre de $10^8 V.m^{-1}$ et des champs magnétiques $B^i \approx -(mc^2/2q)\varepsilon^{ijk}(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j})$ de l'ordre de $10T$, nous avons montré que pour des particules de poussière, de masse $m \approx 10^{-14}\,Kg$ et de charge $q \approx 10^{-18}\,C$, que les termes $\partial_{\nu}h^{0\mu}$ ne prennent que des valeurs très petites, de l'ordre de $10^{-11}m^{-1}$ à $10^{-13}m^{-1}$, ce qui implique que les $h^{0\mu}$ sont quasiment constantes. En exigeant la convergence asymptotique de la métrique de l'espace-temps vers la métrique plate de Minkowski, ces constantes prennent des valeurs très proches de zéro. Pour avoir des valeurs significatives de $\partial_{\nu}h^{0\mu}$ les masses sont si petites que les effets quantiques ne peuvent désormais plus être négligés.

3.3. Force de Lorentz

De façon analogue à la gravité, l'équation des géodésiques se réduit, au premier ordre de v/c, à l'équation de mouvement de la particule de masse m et de charge q soumise à la force de Lorentz

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\left[\vec{E} + \left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)\right]. \tag{22}$$

3.4. Ordres supérieurs de la perturbation

Le tenseur d'Einstein peut être développé à des ordres supérieurs de perturbation pour obtenir

$$G_{0\nu}{}^{(n)} = -(q/m)\partial^{\mu}F_{\mu\nu}/2c - (q/m)^2 f^{(2)} - (q/m)^3 f^{(3)} - \ldots - (q/m)^n f^{(n)}, \tag{23}$$

où $f^{(n)} (n = 1, 2, 3, \ldots)$ représentent les termes correctifs à l'ordre n en A^{μ}, ses dérivées et des champs analogues définis par les h^{ij}. Les équations d'Einstein $G_{0\nu} = 0$ impliquent que

$$\partial^{\mu}F_{\mu\nu}/2c + (q/m) f^{(2)} + (q/m)^2 f^{(3)} + \ldots + (q/m)^{n-1} f^{(n)} \approx 0. \tag{24}$$

Les termes linéaires de l'équation (24) représentent le deuxième groupe des équations de Maxwell, alors que les termes non linéaires sont représentés par les termes d'ordres supérieurs $(q/m)^{n-1} f^{(n)}$. Dans [9], nous avons pu expliciter les corrections, à l'ordre 2 de la perturbation, aux équations de Maxwell.

4. Discussion des résultats et Conclusion

Au terme de cette étude, quelques remarques et critiques s'imposent:

- Bien que la force de Lorentz, exprimée par définition à l'ordre v/c, soit obtenue dans le régime non stationnaire, néanmoins, elle n'est obtenue que pour des vitesses faibles. Pour des vitesses arbitraires, l'équation de mouvement d'une charge électrique soumise à la force de Lorentz ne pourrait jamais être écrite sous forme d'une géodésique, que si les composantes de la métrique ont une dépendance explicite de la vitesse (Géométrie de Finsler). Cependant, la force de Lorentz ne permet pas de rendre compte des effets d'interaction de la charge électrique avec son propre champ électromagnétique ni du rayonnement électromagnétique.

- Pour la gravité, le rapport q/m est remplacé par $(m_g/m_i)=1$, de sorte que l'analogue de (24) pour l'interaction gravitationnelle montre clairement que les termes d'ordre supérieurs $f^{(n)}$ demeurent toujours présents, ce qui fait de la gravité une interaction à caractère essentiellement non linéaire. Par contre, dans le cas de l'électromagnétisme, le rapport q/m ne prend pas la même valeur pour des particules différentes. En particulier, en choisissant une particule d'épreuve de telle sorte que $q \to 0$ et $m \neq 0$, tous les termes d'ordres supérieurs disparaissent de telle sorte que (24) se réduit aux équations de Maxwell $\partial^\mu F_{\mu\nu}=0$, et l'espace-temps devient minkowskien. Contrairement à la gravité, où la présence de la source M est suffisante pour affecter la structure de l'espace-temps, pour l'électromagnétisme, ce n'est qu'à travers une interaction de la source Q avec une charge test q que la métrique est affectée.
- La dépendance intrigante des champs vis-à-vis des propriétés de la particule test a déjà été signalée dans la Relativité Restreinte Déformée (DSR), où les lois de transformation des coordonnées doivent dépendre, à la fois, des impulsions et de l'énergie de la particule, pour garantir l'invariance de la longueur de Planck [10]; ce qui induit, à hautes énergies, une dépendance du champ électromagnétique des propriétés de la particule test [11].
- Le problème de la non invariance de jauge, au-delà de l'ordre 1, à été signalé [9].
- Plusieurs interprétations de la condition de trace spatiale nulle (7) ont été avancées [9] :

a). L'interprétation la plus plausible, à notre sens, est que c'est une condition nécessaire pour que la jauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu=0$ soit contenue dans la composante "temporelle" de la jauge harmonique. L'utilisation de la composante temporelle permettrait de découpler les équations de propagation des potentiels.

b). Elle peut être vue comme l'adoption d'un système de coordonnées particulier dans lequel la perturbation de la métrique prend une forme particulière.

c). Elle peut être vue comme la prépondérance de la composante temporelle h^{00} sur les composantes spatiales h^{ii}. Cette prépondérance peut s'expliquer par le fait d'avoir de façon individuelle $h^{00}\rangle\rangle h^{11}$, $h^{00}\rangle\rangle h^{22}$ et $h^{00}\rangle\rangle h^{33}$, ce qui impliquerait que $h \approx h^{00}$. Pour ce qui est des degrés de liberté supplémentaires h^{ij}, nous pensons qu'ils ne vérifient pas seulement la condition de champ faible $h^{ij}\langle\langle 1$, mais qu'ils sont négligeables devant les $h^{0\mu} \propto A^\mu$ de telle sorte que leurs effets ne soient pas détectés dans le domaine linéaire.

Références

[1] C.C.Jr. Barros: Eur. Phys. J. C 42, 119-126 (2005).
[2] C.C.Jr. Barros: Eur. Phys. J. C 45, 421-425 (2006).
[3] C.C.Jr. Barros: arXiv e-print: physics/0509011.
[4] A. Belabbas: Les potentiels non Gravitationnels et la Structure de l'Espace-temps, Magister Thesis, University of Béjaïa (2006), arXiv e-print: 0906.2519.
[5] P. Huei: Gen. Rel. Grav., 15, 725-735 (1983).
[6] R.M. Wald: General Relativity, chap. 4, The University of Chicago Press, Chicago (2004).
[7] S. Carroll: Spacetime and Geometry, chap. 7, Addison Wesley, San Fransisco (2004).
[8] A. Bouda, A. Belabbas, Int. J. Theor. Phys. 49, N^0 10 (2010) 2630-2639, arXiv e-print: gr-qc/1012.2245 v1 (2010).
[9] A. Belabbas, Les Interactions Fondamentales et la Structure de l'Espace-temps, PhD Thesis, University of Béjaïa, arXiv e-print:1401.0800 (2011).
[10] D. Kimberley, J. Magueijo, J. Madeiros, Phys. Rev. D 70, 084007 (2004).
[11] E. Harikumar, EPL 90 (2010) 21001.