

LE "LEMME D'ABHYANKAR" PERFECTOIDE

Yves André

▶ **To cite this version:**

Yves André. LE "LEMME D'ABHYANKAR" PERFECTOIDE. 2016. hal-01357331

HAL Id: hal-01357331
https://hal.science/hal-01357331

Preprint submitted on 29 Aug 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE « LEMME D'ABHYANKAR » PERFECTOIDE

YVES ANDRÉ

RÉSUMÉ. Nous étendons le théorème de « presque-pureté » de Faltings-Scholze-Kedlaya-Liu sur les extensions étales finies d'algèbres perfectoïdes au cas des extensions ramifiées, sans restriction sur le discriminant. Le point clé est une version perfectoïde du théorème d'extension de Riemann. Au préalable, nous revenons sur les aspects catégoriques des algèbres de Banach uniformes et des algèbres perfectoïdes.

ABSTRACT. We extend Faltings's "almost purity theorem" on finite etale extensions of perfectoid algebras (as generalized by Scholze and Kedlaya-Liu) to the ramified case, without restriction on the discriminant. The key point is a perfectoid version of Riemann's extension theorem. Categorical aspects of uniform Banach algebras and perfectoid algebras are revisited beforehand.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction. 2
1. Préliminaires de presque-algèbre. 4
2. La catégorie bicomplète des algèbres de Banach uniformes. 9
3. La catégorie bicomplète des algèbres perfectoïdes. 28
4. Analyse perfectoïde autour du « théorème d'extension de Riemann ». 42
5. Le « lemme d'Abhyankar » perfectoïde. 50
Index des symboles 54
Références 54

Date: 23 août 2016.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 11S15, 14G20.

Key words and phrases. non-archimedean uniform Banach algebra, perfectoid algebra, almost finite etale extension, perfectoid Abhyankar lemma.

INTRODUCTION.

0.1. La théorie des extensions presque étales de G. Faltings trouve sa source dans les travaux de J. Tate sur les extensions profondément ramifiées de corps locaux, et son aboutissement dans l'étude de la cohomologie étale p-adique des variétés algébriques ou analytiques sur un corps p-adique (*cf. e.g.* [8][24]). Elle utilise le langage de la « presque-algèbre » introduit par Faltings à ce propos, dont le principe consiste, dans le cadre $(\mathfrak{V}, \mathfrak{m})$ constitué d'un anneau et d'un idéal idempotent, à « négliger » les $\mathfrak{V}$-modules annulés par $\mathfrak{m}$ [13].

Cette théorie a été renouvelée par l'approche perfectoïde de P. Scholze. Un corps $\mathcal{K}$ complet pour une valuation p-adique non discrète, d'anneau de valuation $\mathcal{K}^o$ et d'idéal de valuation $\mathcal{K}^{oo}$, est dit *perfectoïde* si l'élévation à la puissance p est surjective sur $\mathcal{K}^o/p\mathcal{K}^o$. Une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est dite *perfectoïde* si elle est uniforme (*i.e.* si la sous-$\mathcal{K}^o$-algèbre $\mathcal{A}^o$ des éléments dont les puissances sont bornées est bornée), et si l'élévation à la puissance p est surjective sur $\mathcal{A}^o/p\mathcal{A}^o$.

0.2. Le théorème de « presque-pureté » de Faltings, sous la forme générale que lui ont donnée Scholze d'une part [29], et K. Kedlaya et R. Liu d'autre part [19], affirme que *si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde et $\mathcal{B}$ une $\mathcal{A}$-algèbre étale finie, alors $\mathcal{B}$ est perfectoïde et $\mathcal{B}^o$ est presque étale finie sur $\mathcal{A}^o$ dans le cadre* $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$, de sorte que $tr_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ envoie $\mathcal{B}^o$ presque surjectivement dans $\mathcal{A}^o$ si $\mathcal{B}^o$ est un $\mathcal{A}^o$-module fidèle.

0.3. L'objectif de l'article est de généraliser ce théorème au *cas ramifié*, en s'inspirant du lemme d'Abhyankar. Rappelons que dans la situation d'un anneau local régulier d'inégale caractéristique $(0, p)$ et d'une extension finie plate, ramifiée le long d'un diviseur à croisements normaux défini par une équation $pg = 0$, d'indices de ramification premiers à p, ce lemme assure qu'on peut « rendre l'extension étale » sans inverser pg, par l'adjonction de racines de pg d'ordre divisible par tous les indices de ramification, suivie du passage à la fermeture intégrale.

Notre résultat principal peut être vu comme un analogue perfectoïde du lemme d'Abhyankar, sans hypothèse de croisements normaux ni condition sur les indices de ramification, au prix de remplacer « étale » par « presque étale » (dans un cadre qui, contrairement à l'usage, n'est pas celui d'un anneau de valuation et de son idéal maximal).

0.3.1. **Théorème.** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre perfectoïde sur un corps perfectoïde $\mathcal{K}$ de caractéristique résiduelle p. On suppose que $\mathcal{A}$ contient une suite de racines p^m-èmes compatibles d'un élément $g \in \mathcal{A}^o$ non diviseur de zéro, ce qui permet de voir $\mathcal{A}^o$ comme $\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}]$-algèbre en envoyant $T^{\frac{1}{p^i}}$ sur $g^{\frac{1}{p^i}}$. On se place dans le cadre* $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], T^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^{oo}[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$.

Soit $\mathcal{B}'$ une $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$-algèbre étale finie.

(1) Il existe une plus grande algèbre perfectoïde $\mathcal{B}$ comprise entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}'$, telle que l'inclusion $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ soit continue. On a $\mathcal{B}[\frac{1}{g}] = \mathcal{B}'$, et $\mathcal{B}^o$ est contenue dans la fermeture intégrale de $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o$ dans $\mathcal{B}'$ et lui est presque isomorphe,

(2) Pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\mathcal{B}^o/p^m$ est presque étale finie sur $\mathcal{A}^o/p^m$ (et $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$ est presque étale finie sur $\mathcal{A}^o[\frac{1}{g}]$ dans le cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$).

(3) Si $\mathcal{B}'$ est un $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$-module fidèle, le morphisme trace $tr_{\mathcal{B}'/\mathcal{A}[\frac{1}{g}]}$ envoie $\mathcal{B}^o$ presque surjectivement dans $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o$.

Ce résultat présente un double aspect heuristique : pour toute extension finie d'une algèbre perfectoïde, $i)$ *la ramification géométrique est presque supprimée par adjonction des racines p^∞-ièmes du discriminant, complétion et passage à une fermeture intégrale* (en analogie avec le lemme d'Abhyankar), et $ii)$ *il en est alors essentiellement de même de*

la ramification arithmétique (ce qui étend le théorème de presque-pureté de Faltings *et al.* qui traite du cas géométriquement non ramifié).

En ce qui concerne le point (2), on peut naturellement se demander si $\mathcal{B}^o$ est presque étale finie sur $\mathcal{A}^o$. C'est plausible, mais nous ne l'avons pas démontré, le problème étant celui de la presque finitude de $\mathcal{B}^o$ sur $\mathcal{A}^o$, *cf.* rem. 5.2.1.

0.4. Nous démontrerons ce théorème à partir du cas étale, appliqué aux « localisations affinoïdes » $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}$, $\lambda \in \mathcal{K}^{oo} \setminus 0$ (c'est-à-dire, en termes géométriques, aux complémentaires de voisinages tubulaires du lieu des zéros de g dans le spectre analytique de $\mathcal{A}$). Le passage crucial à la limite $\lambda \to 0$ repose sur des résultats du type « théorème d'extension de Riemann » : *pour $(\mathcal{A}, g)$ comme ci-dessus, $\lim_{j\to\infty} \mathcal{A}\{\frac{p^j}{g}\}^o$ est la fermeture complètement intégrale de $\mathcal{A}^o$ dans $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$, qui n'est autre que $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o$* (th. 4.2.2).

Inversement, *étant donné un système projectif d'algèbres perfectoïdes $(\mathcal{A}^j)$ qui se déduisent les unes des autres par localisation ($\mathcal{A}^i\{\frac{p^j}{g}\} \cong \mathcal{A}^j$) et contiennent les racines $g^{\frac{1}{p^m}}$, l'algèbre de Banach uniforme $\mathcal{A} := (\lim_{j\to\infty} \mathcal{A}^{j\,o})[\frac{1}{p}]$ est presque perfectoïde* (*i.e.* l'élévation à la puissance p est presque surjective sur $\mathcal{A}^o/p\mathcal{A}^o$) (th. 4.4.2).

0.5. Il nous a paru nécessaire de faire précéder la preuve de ces résultats d'un examen approfondi, assorti de maint exemple, des techniques de construction et des aspects catégoriques des algèbres de Banach uniformes et des algèbres perfectoïdes. Ces deux catégories admettent limites et colimites, et le plongement de celle-ci dans celle-là admet un adjoint à droite. Les colimites s'y calculent donc de même manière, mais pas les limites (*cf.* §3.9). C'est le nœud du problème dans les passages à la limite ci-dessus.

Nous ferons grand usage de techniques galoisiennes (*cf.* 1.9, 3.4, 5.2), qui permettent entre autre de simplifier la preuve du théorème de « presque-pureté ».

0.6. Le théorème 0.3.1 fournit un moyen aussi économique que général pour *associer à toute $\mathcal{K}$-algèbre affine ou affinoïde réduite une algèbre (presque) perfectoïde à l'aide d'une normalisation de Noether, en adjoignant les racines p^∞-ièmes des coordonnées et d'un discriminant, complétant et prenant une fermeture intégrale*. Dans une certaine mesure, ce moyen libère la construction d'algèbres perfectoïdes du « carcan torique » habituel (*cf.* 5.4).

Dans un article suivant, nous appliquerons le lemme d'Abhyankar perfectoïde à l'étude de la conjecture du facteur direct de M. Hochster en algèbre commutative.

Remerciements. Je suis très reconnaissant à O. Gabber de m'avoir envoyé toute une liste d'erreurs, corrections, simplifications et suggestions (les éventuelles erreurs restantes sont évidemment de ma seule responsabilité). Je remercie aussi B. Bhatt et P. Scholze de leur intérêt pour ce travail.

Je remercie le Laboratoire Fibonacci et la Scuola Normale Superiore de Pise où j'ai effectué une partie de ce travail dans les meilleures conditions.

1. PRÉLIMINAIRES DE PRESQUE-ALGÈBRE.

Nous ferons appel à quelques résultats de cette théorie initiée par G. Faltings et développée dans l'ouvrage fondamental de O. Gabber et L. Ramero [13].

1.1. **Cadre.** Un *cadre* [1] pour la presque-algèbre consiste en la donnée d'un anneau commutatif unitaire $\mathfrak{V}$ et d'un idéal idempotent $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$.

Comme dans [13], nous supposerons que $\tilde{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{V}} \mathfrak{m}$ *est plat sur* $\mathfrak{V}$. Cette hypothèse est stable par changement de base [13, rem. 2.1.4], et plus faible que la platitude de $\mathfrak{m}$ (qui entraîne $\mathfrak{m} \cong \tilde{\mathfrak{m}}$). La platitude de $\mathfrak{m}$ est acquise si $\mathfrak{m}$ est de la forme $\pi^{\frac{1}{p^\infty}}\mathfrak{V}$, où $(\pi^{\frac{1}{p^i}})$ est une suite compatible de racines p^i-ièmes d'un élément π non-diviseur de zéro de l'anneau $\mathfrak{V}$ (cas qui suffirait dans la suite de l'article).

1.2. **$\mathfrak{V}^a$-modules.** La catégorie des $\mathfrak{V}^a$-modules (ou $(\mathfrak{V},\mathfrak{m})^a$-modules, s'il y a lieu de préciser) est la catégorie des $\mathfrak{V}$-modules localisée par la sous-catégorie de Serre des modules de $\mathfrak{m}$-torsion : un $\mathfrak{V}$-module est *presque nul* s'il est annulé par $\mathfrak{m}$.

On a $Hom_{\mathfrak{V}^a}(M,N) = Hom_{\mathfrak{V}}(\tilde{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathfrak{V}} M, N)$, *cf.* [13, §2.2.2].

On dit qu'un morphisme de $\mathfrak{V}$-modules est presque injectif (*resp.* presque surjectif) si son noyau (*resp.* conoyau) est annulé par $\mathfrak{m}$; cela revient à dire qu'il est un monomorphisme (*resp.* épimorphisme) de $\mathfrak{V}^a$-modules.

La catégorie des $\mathfrak{V}^a$-modules est abélienne. En particulier, un morphisme de $\mathfrak{V}$-modules est à la fois presque injectif et presque surjectif si et seulement s'il est un presque-isomorphisme. Le foncteur de localisation $M \mapsto M^a$, qui est l'identité sur les objets, admet [2]

— un adjoint à droite : $N \mapsto N_* := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{V}^a}(\mathfrak{V}^a, N)$ (module des *presque-éléments*),

— un adjoint à gauche $N_! := \tilde{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathfrak{V}} N_*$.

En particulier, il commute aux limites et aux colimites. On a en outre $(N_*)^a \cong N$ et $(M^a)_* \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{V}}(\tilde{\mathfrak{m}}, M)$ (qu'on écrira parfois abusivement M_* pour alléger). Le foncteur $(\ )_*$ n'est pas exact à droite, mais $N \to N'$ est un épimorphisme si et seulement si $N_* \to N'_*$ est presque surjectif.

1.3. **Lemmes de Mittag-Leffler et de Nakayama.** Le lemme de Mittag-Leffler vaut dans ce contexte : *si* (N^n) *un système projectif de* $\mathfrak{V}^a$*-modules dont les morphismes de transition sont des épimorphismes, alors* $\lim N^n \to N^0$ *est un épimorphisme*. Cela se déduit du cas des $\mathfrak{V}$-modules en appliquant successivement les foncteurs exacts à droite $(\ )_!$ et $(\ )^a$ (dont le composé est l'identité de $\mathfrak{V}^a$-$\mathbf{Mod}$).

Au demeurant, la catégorie abélienne $\mathfrak{V}^a$-$\mathbf{Mod}$ est bicomplète (*i.e.* admet limites et colimites) et admet $\mathfrak{V}$ comme générateur, les produits d'épimorphismes y sont des épimorphismes, donc les $\lim^i$ se comportent comme dans la catégorie des groupes abéliens [27] ; en particulier, elles s'annulent pour $i > 1$ dans le cas d'un système indexé par un ensemble ordonné dénombrable. La localisation commute aux $\lim^1$, qui se calculent comme conoyau du télescope habituel.

La version du lemme de Nakayama pour les modules complets vaut aussi dans ce contexte ([13, lem. 5.3.3]) : *soit* $\mathfrak{I}$ *un idéal de* $\mathfrak{V}$ *et soit* $f : M \to N$ *un morphisme entre* $\mathfrak{V}^a$*-modules* $\mathfrak{I}$*-adiquement complets ; alors* f *est un épimorphisme s'il l'est mod.* $\mathfrak{I}$.

En effet, on a un diagramme commutatif à flèches horizontales épimorphiques

$$\begin{array}{ccc} gr_{\mathfrak{I}}\mathfrak{V} \otimes_{\mathfrak{V}/\mathfrak{I}} M/\mathfrak{I}M & \longrightarrow & gr_{\mathfrak{I}}M \\ {\scriptstyle 1\otimes\bar{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle gr_{\mathfrak{I}}f} \\ gr_{\mathfrak{I}}\mathfrak{V} \otimes_{\mathfrak{V}/\mathfrak{I}} N/\mathfrak{I}N & \longrightarrow & gr_{\mathfrak{I}}N, \end{array}$$

1. "Basic setting" dans *loc. cit.*

2. l'existence et les propriétés de $(\ )_*$ font partie de la théorie générale de la localisation [12] ; en revanche, l'existence de $(\ )_!$ est spécifique à la presque-algèbre.

donc l'hypothèse entraîne que $gr_{\mathfrak{I}} f$ est un épimorphisme. Ceci implique que $M/\mathfrak{I}^n M \xrightarrow{f_n} N/\mathfrak{I}^n N$ est un épimorphisme, de même que $\ker f_{n+1} \to \ker f_n$ par le lemme du serpent. Passant à la limite, f est donc un épimorphisme d'après Mittag-Leffler.

1.4. **$\mathfrak{V}^a$-algèbres.** Les $\mathfrak{V}^a$-algèbres sont les monoïdes dans $\mathfrak{V}^a$-$\mathbf{Mod}$. Le foncteur $(\ )^a$ envoie $\mathfrak{V}$-$\mathbf{Alg}$ vers $\mathfrak{V}^a$-$\mathbf{Alg}$ et admet (la restriction de) $(\ )_*$ comme adjoint à droite. Il admet aussi un adjoint à gauche noté $(\ )_{!!}$ [13, §2.2.25].

La catégorie $\mathfrak{V}^a$-$\mathbf{Alg}$ admet des sommes amalgamées, et $(\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{C})^a \cong \mathfrak{B}^a \otimes_{\mathfrak{A}^a} \mathfrak{C}^a$.

Si $\mathfrak{A}$ est une $\mathfrak{V}^a$-algèbre, on définit des catégories $\mathfrak{A}$-$\mathbf{Mod}$ et $\mathfrak{A}$-$\mathbf{Alg}$ [13, 2.2.12]. Le foncteur $(\ )^a$ envoie $\mathfrak{A}_*$-$\mathbf{Alg}$ vers $\mathfrak{A}$-$\mathbf{Alg}$ et admet $(\ )_*$ comme adjoint à droite.

Rappelons que la catégorie des $\mathcal{K}$-algèbres (associatives commutatives unifères) admet des (petites) limites et colimites, et que le foncteur module sous-jacent préserve les limites, ainsi que les colimites filtrantes. Via $(\ )^a$, il en est de même pour les presque algèbres. Une décomposition en produit fini $\mathfrak{B} = \prod \mathfrak{B}_i$ correspond à un système complet d'idempotents orthogonaux $e_i \in \mathfrak{B}_*$.

La catégorie $\mathfrak{A}$-$\mathbf{Mod}$ admet un produit tensoriel $\otimes_{\mathfrak{A}}$, qui induit le coproduit de $\mathfrak{A}$-$\mathbf{Alg}$.

Soit $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un morphisme dans $\mathfrak{V}^a$-$\mathbf{Alg}$. C'est un monomorphisme si et seulement si ϕ_* est presque injectif ; on dit alors que $\mathfrak{B}$ est une *extension* de $\mathfrak{A}$.

1.4.1. *Exemple.* La presque-algèbre s'introduit naturellement dans le contexte suivant. Soient $\mathcal{K}$ un corps complet pour une valuation non discrète, $\mathfrak{V} = \mathcal{K}^o$ son anneau de valuation, $\mathfrak{m} = \mathcal{K}^{oo}$ son idéal de valuation, ϖ un élément non nul de $\mathfrak{m}$, et $\mathfrak{A}$ une $\mathfrak{V}$-algèbre sans ϖ-torsion ni élément infiniment ϖ-divisible. On peut alors munir la $\mathcal{K}$-algèbre $\mathfrak{A}[\frac{1}{\varpi}]$ d'une norme canonique, dont la boule unité, en général distincte de $\mathfrak{A}$ mais presque isomorphe à $\mathfrak{A}$, est $(\mathfrak{A})^a_*$, *cf.* sorite 2.3.1 (2b).

1.5. **Recadrage.** Au rebours de la pratique en presque-algèbre, dans le présent travail, le cadre ne sera pas fixé une fois pour toutes ; au contraire, nous utiliserons de manière essentielle des changements de cadre $(\mathfrak{V}, \mathfrak{m}) \to (\mathfrak{V}', \mathfrak{m}')$ (homomorphismes d'anneaux envoyant $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{m}'$). Le foncteur exact de restriction des scalaires $\mathfrak{V}'$-$\mathbf{Mod} \to \mathfrak{V}$-$\mathbf{Mod}$ induit un foncteur exact

$$(\mathfrak{V}', \mathfrak{m}')^a\text{-}\mathbf{Mod} \to (\mathfrak{V}, \mathfrak{m})^a\text{-}\mathbf{Mod};$$

si $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}' = \mathfrak{m}'$, c'est le foncteur $(\ )^a$. On a de même un foncteur $(\mathfrak{V}', \mathfrak{m}')^a$-$\mathbf{Alg} \to (\mathfrak{V}, \mathfrak{m})^a$-$\mathbf{Alg}$, qui est l'identité sur les anneaux sous-jacents. Si $\mathfrak{A}'$ correspond à $\mathfrak{A}$ par ce dernier foncteur, on a des foncteurs de *recadrage*

$$\mathfrak{A}'\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathfrak{A}\text{-}\mathbf{Mod},\ \mathfrak{A}'\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathfrak{A}\text{-}\mathbf{Alg}$$

qui sont l'identité sur les objets (vus comme modules, *resp.* algèbres, sur l'anneau sous-jacent à $\mathfrak{A}$) ; si $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}' = \mathfrak{m}'$, il s'agit encore du foncteur $(\ )^a$. Ces foncteurs sont des isomorphismes si $\mathfrak{m}$ engendre $\mathfrak{m}'$, puisque la presque-nullité d'un module sur l'anneau sous-jacent à $\mathfrak{A}$ n'est pas modifiée. On a une transformation naturelle de *recadrage*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{V}'}(\tilde{\mathfrak{m}}', N) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{V}}(\tilde{\mathfrak{m}}, N)$$

entre foncteurs des presque-éléments et des presque-éléments du recadré, respectivement.

Heuristiquement, le sens de « presque » devient plus grossier par recadrage (passage de $\mathfrak{m}'$ à $\mathfrak{m}$), mais ne change pas si l'image de $\mathfrak{m}$ engendre $\mathfrak{m}'$.

1.6. **Platitude.** Un $\mathfrak{A}$-module M est dit *plat* si l'endofoncteur $- \otimes_{\mathfrak{A}} M$ de $\mathfrak{A}$-$\mathbf{Mod}$ est exact.

On dit que ϕ est *(fidèlement) plat* si $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} - : \mathfrak{A}\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathfrak{B}\text{-}\mathbf{Mod}$ est (fidèle) exact ; ϕ est plat (*resp.* fidèlement plat) si et seulement si $\mathfrak{B}$ est un $\mathfrak{A}$-module plat (*resp.* ϕ est un monomorphisme et $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ est un $\mathfrak{A}$-module plat [13, 3.1.2 (vi)]) - c'est le cas en particulier si ϕ_* est plat (*resp.* fidèlement plat). En outre, ϕ est fidèlement plat si et seulement si $\phi_{!!}$ l'est [13, 3.1.3 ii]. Toute colimite filtrante d'extensions (fidèlement) plates est (fidèlement) plate.

1.7. **$\mathfrak{A}$-Modules projectifs finis.** Passons à de plus subtiles propriétés qui, contrairement aux précédentes, ne sont pas purement catégoriques.

1.7.1. Soit $\mathfrak{A}$ une $\mathfrak{V}^a$-algèbre. Un $\mathfrak{A}$-module P est *projectif fini* [3] si pour tout $\eta \in \mathfrak{m}$, il existe $n \in \mathbf{N}$ et des morphismes $P \to \mathfrak{A}^n \to P$ dont le composé est $\eta 1_P$ (cette notion ne dépend que de la classe d'isomorphisme de P dans $\mathfrak{A}$-$\mathbf{Mod}$).

Il revient au même ([13, 2.3.10 (i), 2.4.15]) de dire que

(a) P est *presque projectif*, *i.e.* pour tout module N, et tout $i > 0$, $\mathfrak{m}\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}(P, N) = 0$,

(b) P est *presque de type fini*, *i.e.* pour tout $\eta \in \mathfrak{m}$, il existe un morphisme $\mathfrak{A}^{n(\eta)} \to P$ de conoyau annulé par η.

1.7.2. *Remarques.* (1) Tout module P presque projectif est plat [13, 2.4.18], et fidèlement plat si P est un $\mathfrak{A}$-module fidèle (*i.e.* $\mathfrak{A} \to End(P)^a$ est un monomorphisme) [4].

(2) Si P est projectif fini, il en de même de ses puissances extérieures. On dispose d'un morphisme trace $tr_{P/A} : (\mathrm{End}\, P)^a \to A$ [13, 4.1.1].

(3) Soit $\mathfrak{A}'$ une $\mathfrak{A}$-algèbre fidèlement plate. Alors $\mathfrak{P}$ est un $\mathfrak{A}$-module projectif fini si et seulement si $P \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}'$ est un $\mathfrak{A}'$-module projectif fini [13, 3.2.26 iii].

1.7.1. **Lemme.** *Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathfrak{A}$ pour lequel $\mathfrak{A}$ est $\mathfrak{I}$-adiquement complète. Alors tout module projectif fini P est $\mathfrak{I}$-adiquement complet.*

Démonstration. [5] Il s'agit de voir que $P \to \hat{P} := \lim P/\mathfrak{I}^n$ est un isomorphisme. Pour tout $\eta \in \mathfrak{m}$, il existe $n \in \mathbf{N}$ et un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & \mathfrak{A}^n & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{P} & \longrightarrow & \hat{\mathfrak{A}}^n & \longrightarrow & \hat{P} \end{array}$$

où les deux flèches composées horizontales sont la multiplication par η et la flèche verticale du milieu est un isomorphisme. Chassant, on trouve que le noyau et le conoyau de $P \to \hat{P}$ sont annulés par η. □

1.7.3. Un $\mathfrak{A}$-module projectif fini P est *de rang (constant)* r si $\bigwedge^{r+1} P = 0$ et $\bigwedge^{r} P$ est un $\mathfrak{A}$-module inversible [13, 4.3.9]. D'après [13, 4.4.24], un tel module est localement libre de rang r pour la topologie fpqc (nous n'utiliserons pas ce résultat).

1.8. **$\mathfrak{A}$-algèbres étales finies.** Une $\mathfrak{A}$-algèbre $\mathfrak{B}$ est *étale finie* (*resp. étale finie de rang* r) si (a) $\mathfrak{B}$ est un $\mathfrak{A}$-module projectif fini (*resp.* projectif fini de rang r),

(b) $\mathfrak{B}$ est *non ramifiée*, *i.e.* on a une décomposition de $\mathfrak{A}$-algèbre $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ dans laquelle la première projection (dans le membre de droite) s'identifie au morphisme de multiplication $\mu_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$.

Sous (a), la condition (b) équivaut à la platitude de $\mu_{\mathfrak{B}}$ [13, 3.1.2 vii, 3.1.9].

1.8.1. *Remarques.* (1) Toute extension étale finie $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ est fidèlement plate.

(2) Si $\mathfrak{B}$ est étale finie sur $\mathfrak{A}$, on dispose d'une trace $Tr_{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ (morphisme de $\mathfrak{A}$-modules) définie comme trace de l'endomorphisme de multiplication par b. Il commute au changement de base, et la composition avec la multiplication de $\mathfrak{B}$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{B}$ sur son dual $\mathfrak{B}^\vee$ [13, 4.1.14] (d'où aussi un isomorphisme entre $\mathfrak{B}_*$ et son $\mathfrak{A}_*$-dual). Si $\mathfrak{B}$ est une extension étale finie, c'est un épimorphisme [13, 4.1.7, 4.1.8, 4.1.11].

3. Nous adoptons les simplifications terminologiques de Scholze [29, 4.10, 4.13] ; ce n'est d'ailleurs pas là la définition de *loc. cit.* mais c'en est une caractérisation *cf.* [13, lemma 2.4.15].

4. Le critère équivalent donné dans [13, 2.4.28] est que le morphisme « dual » $End(P)^a \to \mathfrak{A}$ soit un épimorphisme.

5. voir aussi [13, 5.3.5].

(3) Soient $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}$ deux $\mathfrak{A}$-algèbres. On suppose $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}'$ fidèlement plat. Alors $\mathfrak{B}$ est étale finie (resp étale finie de rang r) sur $\mathfrak{A}$ si et seulement si $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}'$ l'est sur $\mathfrak{A}'$ [13, 2.4.18, 3.2.26 (ii)].

1.8.2. L'« *équivalence remarquable* » de Grothendieck vaut dans ce contexte, du moins si $\mathfrak{m}$ est de la forme $\pi^{\frac{1}{p^\infty}}\mathfrak{V}$ et si $\mathfrak{A}$ soit π-adiquement complète : la réduction modulo π induit alors une équivalence entre $\mathfrak{A}$-algèbres étales finies et $\mathfrak{A}/\pi$-algèbres étales finies [13, th. 5.3.27].

1.9. **Extensions galoisiennes.**

1.9.1. Soient $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{C}$ des extensions, et soit X un ensemble de $\mathfrak{A}$-homomorphismes de $\mathfrak{B}$ vers $\mathfrak{C}$. On a alors un morphisme canonique de $\mathfrak{C}$-algèbres

$$\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{C} \to \prod_{\chi \in X} \mathfrak{C}, \quad b \otimes c \mapsto (\chi(b)c)_{\chi \in X} .$$

En particulier, si G un groupe fini de $\mathfrak{A}$-automorphismes de $\mathfrak{B}$, on a un morphisme canonique de $\mathfrak{B}$-algèbres (pour l'action à droite de $\mathfrak{B}$ sur le membre de gauche)

$$\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \to \prod_{\gamma \in G} \mathfrak{B}, \quad b \otimes b' \mapsto (\gamma(b)b')_{\gamma \in G}.$$

Si n est l'ordre de G, et si l'on numérote les éléments de G pour identifier le groupe de ses permutations à $\mathfrak{S}_n$, le produit en couronne[6] $\mathfrak{S}_n \wr G$ agit par $\mathfrak{A}$-automorphismes de $\prod \mathfrak{B}$ via $(\sigma, (\gamma_1, \dots, \gamma_n))(b_1, \dots, b_n) = (\gamma_{\sigma^{-1}(1)}(b_{\sigma^{-1}(1)}), \dots, \gamma_{\sigma^{-1}(n)}(b_{\sigma^{-1}(n)}))$.

On note $\mathfrak{B}$ la $\mathfrak{A}$-algèbre des G-invariants de $\mathfrak{B}$ (en tant que $\mathfrak{A}$-module, c'est le noyau de $\mathfrak{B} \overset{(\cdots, \gamma - 1, \cdots)}{\to} \prod_G \mathfrak{B}$).

1.9.2. On dit que l'extension $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ est *galoisienne* de groupe G si $\mathfrak{B}^G = \mathfrak{A}$ *et si le morphisme canonique* $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \to \prod_G \mathfrak{B}$ *est un isomorphisme* (de $\mathfrak{B}$-modules à droite). Comme $(\ )$ commute aux limites, il revient au même de requérir que $(\mathfrak{B}_*)^G = \mathfrak{A}_*$ et que $(\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B})_* \to \prod_G \mathfrak{B}_*$ soit un isomorphisme[7]. Le groupe $G \times G$ d'automorphismes de $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \cong \prod_G \mathfrak{B}$ s'identifie alors à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n \wr G$ par

$$(\gamma, 1) \mapsto (r_{\gamma^{-1}}, (1, \dots, 1)), \quad (1, \gamma) \mapsto (\ell_\gamma , (\gamma, \dots, \gamma)), \tag{1.1}$$

où ℓ, r désignent les translations à gauche et à droite respectivement.

1.9.1. **Proposition.** *(1) Toute extension galoisienne de groupe G est étale finie, de rang l'ordre de G. La trace est donnée par la somme des conjugués.*

(2) Soit $\mathfrak{A}'$ une $\mathfrak{A}$-algèbre. Si $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ est une extension galoisienne de groupe G, il en est de même de $\mathfrak{A}' \hookrightarrow \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}'$, et réciproquement si $\mathfrak{A}'$ est fidèlement plate.

(3) Si $\mathfrak{C}$ est une extension intermédiaire telle que $\mathfrak{C} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ est galoisienne de groupe $H < G$, le morphisme canonique de $\mathfrak{B}$-algèbres $\mathfrak{C} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \to \prod_{G/H} \mathfrak{B}$ est un isomorphisme, et $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{C}$ est étale finie, de rang $|G/H|$.

Démonstration. (1) Le point est que $\mathfrak{B}$ est un $\mathfrak{A}$-module projectif fini, comme nous allons le voir (il s'agit d'un décalque de l'argument classique en théorie de Galois des anneaux). Notons $t_{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}} : \mathfrak{B}_* \to \mathfrak{B}_*^G = \mathfrak{A}_*$ la somme des conjugués. Voyons $\mathfrak{B}$ comme $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}$-algèbre via le premier facteur de la décomposition (autrement dit, via le morphisme de multiplication). Comme $\mathfrak{B}_* \otimes_{\mathfrak{A}_*} \mathfrak{B}_* \to (\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B})_*$ est un presque-isomorphisme, on

6. *i.e.* le produit $\mathfrak{S}_n \times G^n$ muni de la multiplication $(\sigma, (\gamma_1, \dots, \gamma_n))(\sigma', (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n)) = (\sigma\sigma', (\gamma_{\sigma'(1)}\gamma'_1, \dots, \gamma_{\sigma'(n)}\gamma'_n))$.

7. cela n'entraîne ni que $\mathfrak{B}_*$ soit galoisienne sur $\mathfrak{A}_*$ (car $(\ )_*$ ne commute pas au produit tensoriel), ni que $\mathfrak{B}_{!!}$ soit galoisienne sur $\mathfrak{A}_{!!}$ (car $(\ )_{!!}$ ne commute pas aux produits finis).

obtient, pour tout $\eta \in \mathfrak{m}$, un élément $e_\eta \in \mathfrak{B}_* \otimes_{\mathfrak{A}_*} \mathfrak{B}_*$ tel que $e_\eta^2 = \eta e_\eta$, qui annule le noyau de la multiplication $\mathfrak{B}_* \otimes_{\mathfrak{A}_*} \mathfrak{B}_* \to \mathfrak{B}_*$ et que celle-ci envoie sur $\eta 1_{\mathfrak{B}_*}$. En développant $e_\eta = \sum_{i=1}^{i=n(\eta)} b_i \otimes b'_i$, on obtient $\sum \gamma(b_i)b'_i = 0$ si $\gamma \neq 1_G$, et $\sum b_i b'_i = \eta 1_{\mathfrak{B}}$, d'où $\eta b = \sum t_{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}}(bb_i)b'_i$ pour tout $b \in \mathfrak{B}_*$; en d'autres termes, le composé

$$\mathfrak{B}_* \overset{b\mapsto (t_{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}}(bb_i))}{\to} \mathfrak{A}_*^{n(\eta)} \overset{(a_i)\mapsto \sum a_i b'_i}{\to} \mathfrak{B}_*$$

est $\eta\, id_{\mathfrak{B}_*}$, ce qui montre que $\mathfrak{B}$ est projectif fini. Par descente fidèlement plate de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{A}$, on voit aussi que $\mathfrak{B}$ est de rang $|G|$, et que $Tr_{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}} = t^a_{\mathfrak{B}/\mathfrak{A}}$.

(2) Si $\mathfrak{B}$ est extension galoisienne de $\mathfrak{A}$ de groupe G, on a vu qu'elle est (fidèlement) plate, donc $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}'$ est une extension de $\mathfrak{A}'$. On a $\mathfrak{B}' \otimes_{\mathfrak{A}'} \mathfrak{B}' \cong (\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}) \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}' \cong \prod_G \mathfrak{B}'$, d'où aussi $\mathfrak{B}' \cong (\mathfrak{B}' \otimes_{\mathfrak{A}'} \mathfrak{B}')^{G\times 1} \cong \prod_G \mathfrak{B}' \cong \mathfrak{B}'^G \otimes_{\mathfrak{A}'} \mathfrak{B}'$ et $(\mathfrak{B}')^G = \mathfrak{A}'$ par platitude fidèle de $\mathfrak{B}'$ sur $\mathfrak{A}'$. On obtient la réciproque par descente fidèlement plate.

(3) Après tensorisation $\otimes_{\mathfrak{C}}\mathfrak{B}$, ce morphisme canonique est le composé des isomorphismes de $\mathfrak{C}$-algèbres

$$\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{C} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}) \overset{\sim}{\to} \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{B} \overset{\sim}{\to} \prod_G \mathfrak{B} \overset{\sim}{\to} \prod_{G/H} (\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{C}} \mathfrak{B}) \overset{\sim}{\to} \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{C}} \prod_{G/H} \mathfrak{B},$$

donc est un isomorphisme par descente fidèlement plate de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{C}$ (*cf.* rem. 1.8.1 (3)). En outre, $\mathfrak{C}$ est étale finie de rang $|G/H|$ sur $\mathfrak{A}$ par descente fidèlement plate de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{A}$. □

1.9.3. Nous ferons usage de la construction suivante, standard dans le cas connexe (*cf. e.g.* [32, 5.3.9]) mais valable en général [8].

1.9.2. **Lemme.** *Soit $R \hookrightarrow S$ une extension étale finie d'anneaux, de rang constant r. Il existe une extension galoisienne $R \hookrightarrow T$ de groupe $\mathfrak{S}_r$ se factorisant par S, telle que $S \hookrightarrow T$ soit une extension galoisienne de groupe $\mathfrak{S}_{r-1}$.*

Posons $X = \mathrm{Spec}\ R$, $Y = \mathrm{Spec}\ S$, $Z =$ complémentaire dans $Y \times_X Y \times_X \cdots \times_X Y$ (r facteurs) des diagonales partielles. Ces dernières sont ouvertes et fermées dans le produit fibré puisque Y est étale sur X, donc il en est de même de Z qui est par suite étale fini sur X (et aussi sur Y via la première projection). Par ailleurs, $\mathfrak{S}_r$ agit par permutation des facteurs, et on vérifie sur les fibres que le morphisme de revêtements étales $\mathfrak{S}_r \times Z \to Z \times_X Z$ (*resp.* $\mathfrak{S}_{r-1} \times Z \to Z \times_Y Z$) est un isomorphisme. □

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant

1.9.3. **Lemme.** *Soit G un groupe fini d'automorphismes d'un anneau S, et soit $R := S^G$ l'anneau des invariants. Soit $R \subset S' \subset S$ une extension intermédiaire stable sous G, et galoisienne sur R de groupe G. Alors $S = S'$.*

Les idempotents e_g donnant lieu à la décomposition $S' \otimes_R S' \cong \prod_{\gamma\in G} S'$ décomposent aussi $S \otimes_R S' \cong \prod_{\gamma\in G} e_\gamma(S \otimes_R S') \cong \prod_{\gamma\in G} S''$ (puisque que les e_γ sont permutés par G). Compte tenu de ce que S' est fidèlement plat sur R (*cf.* prop. 1.9.1), on a $S'' \cong (S \otimes_R S')^{G\times 1} = S^G \otimes_R S' = S'$, d'où $S' \otimes_R S' = S \otimes_R S'$, puis $S = S'$. □

8. comme nous l'a signalé O. Gabber.

2. La catégorie bicomplète des algèbres de Banach uniformes.

Dans cet article, le rôle principal est joué par les algèbres commutatives sur un corps complet non-archimédien, complètes pour une norme multiplicative pour les puissances. Nous passons ici en revue leurs propriétés générales et esquissons, dans ce contexte, un dictionnaire entre le langage de l'analyse fonctionnelle et celui de l'algèbre commutative.

2.1. **Algèbres de Banach.** Nous renvoyons à [5] comme référence générale.

2.1.1. Soit $\mathcal{K}$ un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne non triviale, de corps résiduel k. On note $\mathcal{K}^o$ son anneau (*resp.* $\mathcal{K}^{oo}$ son idéal) de valuation, de sorte que $k = \mathcal{K}^o/\mathcal{K}^{oo}$.

Dans cet article, toutes les $\mathcal{K}$-algèbres sont commutatives associatives unifères (l'algèbre nulle n'est pas exclue). Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{K}$-algèbre, une *semi-norme* $\mathcal{A} \stackrel{||}{\to} \mathbf{R}$ de $\mathcal{K}$-algèbre vérifie $|a+b| \leq \max(|a|,|b|)$, $|ab| \leq |a||b|$ avec égalité si $a \in \mathcal{K}$, et $|1_{\mathcal{A}}| = 1$ si $\mathcal{A} \neq 0$. C'est une *norme* si elle ne s'annule pas sur $\mathcal{A} \setminus 0$. On note $\mathcal{A}_{||\leq r}$, ou plus simplement $\mathcal{A}_{\leq r}$, le sous-groupe additif de $\mathcal{A}$ formé des $a \in \mathcal{A} \mid |a| \leq r\}$; de même $\mathcal{A}_{<r} := \{a \in \mathcal{A} \mid |a| < r\}$. La boule unité $\mathcal{A}_{\leq 1}$ est une sous-$\mathcal{K}^o$-algèbre ouverte.

Toute $\mathcal{K}$-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une norme multiplicative est intègre.

La catégorie des $\mathcal{K}$-*algèbres normées* a pour morphismes les *homomorphismes continus* d'algèbres : ce sont les homomorphismes $\mathcal{A} \stackrel{\phi}{\to} \mathcal{B}$ bornés sur $\mathcal{A}_{\leq 1}$, *i.e.* ceux pour lesquels $||\phi|| := \sup_{a \in \mathcal{A}\setminus 0} \frac{|\phi(a)|}{|a|} < \infty$. On dit que ϕ est *isométrique*, ou que $\mathcal{A}$ est une *sous-algèbre normée* de $\mathcal{B}$, si $|\phi(a)| = |a|$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.

Cette catégorie admet des sommes amalgamées : le séparé de $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ pour la semi-norme produit tensoriel.

La catégorie $\mathcal{K}$-$\mathbf{Ban}$ des $\mathcal{K}$-*algèbres de Banach* est la sous-catégorie pleine formée des algèbres normées complètes. Une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach $\mathcal{A}$ étant fixée, les $\mathcal{K}$-algèbres de Banach $\mathcal{B}$ munies d'un morphisme $\mathcal{A} \stackrel{\phi}{\to} \mathcal{B}$ sont appelées $\mathcal{A}$-*algèbres de Banach*. Elles forment de manière évidente une catégorie $\mathcal{A}$-$\mathbf{Ban}$.

2.1.2. La catégorie $\mathcal{K}$-$\mathbf{Ban}$ admet un objet initial $\mathcal{K}$ et un objet final 0, des sommes amalgamées $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ (*produit tensoriel complété* [5, 3.1.1, prop. 2]), et donc des colimites finies. Le foncteur $-\hat{\otimes}_{\mathcal{K}}\mathcal{A}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathcal{A}$-$\mathbf{Ban} \to \mathcal{K}$-$\mathbf{Ban}$.

Elle admet des produits fibrés $\mathcal{B} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$, et donc des limites finies.

Si I est un idéal fermé de $\mathcal{B}$ et J un idéal fermé de $\mathcal{C}$, et si K est la fermeture de l'image de $I \otimes \mathcal{C} + \mathcal{B} \otimes J$ dans $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$, alors le morphisme canonique

$$(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C})/K \to (\mathcal{B}/I)\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}/J) \tag{2.1}$$

est une isométrie (*cf.* [5, 2.1.8 prop. 6] et sa preuve).

Par ailleurs, si $\mathcal{C}$ est *projectif fini* sur $\mathcal{A}$ et si sa norme induit la topologie canonique de $\mathcal{A}$-module projectif fini, alors $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ est complet (cela suit de [19, lemma 2.2.12]). Ce n'est plus vrai en général si $\mathcal{C}$ est fini non projectif.

2.1.3. *Remarques.* (1) Si $\mathcal{C}'$ est une sous-$\mathcal{A}$-algèbre normée de $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}'$ n'est pas nécessairement une sous-algèbre normée de $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$.

(2) Supposons que $\mathcal{C}$ admette une base orthogonale $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ sur $\mathcal{A}$. Tout élément $d \in \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ s'écrit alors de manière unique $d = \sum b_j \otimes c_j$, et on a $|d| = \max |b_j||c_j|$. En effet, pour toute autre expression $d = \sum b'_i \otimes c'_i$, on aura $c'_i = \sum a_{ij}c_j$, d'où $|c'_i| = \max |a_{ij}||c_j|$, et $b_j = \sum a_{ij}b'_i$, d'où $\max |b_j||c_j| \leq \max |a_{ij}||c_j||b'_i| \leq \max |c'_i||b'_i|$. On en déduit que $\mathcal{B} \stackrel{b\mapsto b\otimes 1}{\to} \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ est isométrique.

2.1.4. Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{K}$-algèbre normée, on note $\mathcal{A}^o$ l'ensemble des *éléments dont les puissances restent bornées*. C'est une sous-$\mathcal{K}^o$-algèbre ouverte de $\mathcal{A}$ qui contient $\mathcal{A}_{\leq 1}$, et qui ne dépend que de la classe d'équivalence de la norme. Sa formation est fonctorielle et commute à la complétion. On a $(\mathcal{A}\times\mathcal{B})^o = \mathcal{A}^o\times\mathcal{B}^o$ (le produit étant muni de la norme supremum).

On note $\mathcal{A}^{oo}$ l'ensemble des *éléments topologiquement nilpotents*. C'est un idéal ouvert de $\mathcal{A}^o$, et $\mathcal{A}^{oo} = \sqrt{\mathcal{A}^{oo}}$. Si $\mathcal{A}$ est complète, $\mathcal{A}^{oo}$ est contenu dans le radical de Jacobson de $\mathcal{A}^o$, car pour tout $(a,b)\in\mathcal{A}^{oo}\times\mathcal{A}^o$, $1-ab$ est inversible d'inverse $\sum a^n b^n$. En particulier, un élément de $\mathcal{A}^o$ est inversible si et seulement si son image dans $\mathcal{A}^o/\mathcal{A}^{oo}$ est inversible. Les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$ sont fermés [5, 1.2.4/5].

La règle $\mathcal{A}\mapsto\mathcal{A}^o/\mathcal{A}^{oo}$ définit un foncteur des $\mathcal{K}$-algèbres normées vers les k-algèbres *réduites* (*i.e.* sans élement nilpotent non nul).

2.1.5. Pour toute $\mathcal{K}$-algèbre de Banach $\mathcal{A}$, on note $\mathcal{A}\langle T\rangle$ le complété de l'algèbre des polynômes $\mathcal{A}[T]$ pour la norme supremum des coefficients (*norme de Gauss*, qui est multiplicative si celle de $\mathcal{A}$ l'est). Alors $\mathcal{A}\langle T\rangle^o$ est l'algèbre des séries convergentes à coefficients dans $\mathcal{A}^o$. Le couple $(\mathcal{A}\langle T\rangle, T)$ est universel parmi les couples $(\mathcal{B}, b\in\mathcal{B}^o)$ où $\mathcal{B}$ est une $\mathcal{A}$-algèbre de Banach (*cf.* [5, 1.4.3, cor. 2]).

2.1.6. *Remarque.* Pour traiter des questions d'isométrie, il est commode de se placer dans la sous-catégorie non pleine de $\mathcal{K}$-$\mathbf{Ban}$ ayant même objets et pour morphismes ceux de norme ≤ 1, où $\hat{\otimes}$ est encore un coproduit. Dans cette catégorie, le couple $(\mathcal{A}\langle T\rangle, T)$ est universel parmi les couples $(\mathcal{B}, b\in\mathcal{B}_{\leq 1})$.

Si $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ est un morphisme dans cette catégorie, le morphisme canonique $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}\langle T\rangle\to\mathcal{B}\langle T\rangle$ est isométrique : l'inverse est donné par la propriété universelle de $\mathcal{B}\langle T\rangle$. En combinant ceci à (2.1), on trouve que pour tout idéal fermé J de $\mathcal{A}\langle T\rangle$ le morphisme canonique

$$\mathcal{B}\langle T\rangle/J\mathcal{B}\langle T\rangle^- \to \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}\langle T\rangle/J) \tag{2.2}$$

est isométrique, $J\mathcal{B}\langle T\rangle^-$ désignant la fermeture de l'idéal $J\mathcal{B}\langle T\rangle$.

2.2. **Normes spectrales.**

2.2.1. La *semi-norme spectrale* [9] associée à une norme $|\ |$ de $\mathcal{K}$-algèbre $\mathcal{A}$ est définie par

$$|a|_{sp} := \lim_m |a^m|^{\frac{1}{m}} \tag{2.3}$$

(ce n'est pas nécessairement une norme : on peut avoir $|a|_{sp}=0$ pour a non nul). On a $|\ |_{sp}\leq|\ |$. Si $|\ |_{sp}=|\ |$, c'est-à-dire si $|\ |$ est multiplicative pour les puissances, on dit que $|\ |$ est une *norme spectrale*, ou que $\mathcal{A}$ est une *$\mathcal{K}$-algèbre normée spectrale*. Dans ce cas, $\mathcal{A}^o$ coïncide avec $\mathcal{A}_{\leq 1}$, et $\mathcal{A}^{oo}$ avec $\mathcal{A}_{<1}$.

Une norme de $\mathcal{K}$-algèbre $\mathcal{A}$ est multiplicative si et seulement si elle est spectrale et $\mathcal{A}^o/\mathcal{A}^{oo}$ est intègre [5, 1.5.3] [10].

2.2.2. Une $\mathcal{K}$-algèbre normée $\mathcal{A}$ est dite *uniforme* si $\mathcal{A}^o$ est borné. Il revient au même de dire que la norme est équivalente à sa semi-norme spectrale associée. Il est clair, en effet, que cette dernière condition entraîne que $\mathcal{A}^o$ est borné, puisque $\mathcal{A}^o$ est contenue dans la boule unité de la semi-norme spectrale ; pour la réciproque, on observe que $|a|\leq |a|_{sp}\sup_{b\in\mathcal{A}^o}|b|$.

Toute algèbre normée uniforme $\mathcal{A}$ est réduite. Si $|\mathcal{K}|$ est dense dans $\mathbf{R}_+$, on a $\mathcal{A}^{oo} = \mathcal{K}^{oo}\mathcal{A}^o = (\mathcal{A}^{oo})^2$.

9. Comme dans le cas archimédien, cette semi-norme a en effet une interprétation « spectrale », du moins dans le cas complet : c'est le supremum des semi-normes multiplicatives bornées, qui sont les points du spectre de Berkovich $\mathscr{M}(\mathcal{A})$.

10. si $|\mathcal{K}|\neq|\mathcal{A}|$, il existe de telles algèbres qui ne sont pas des corps valués et telles que $\mathcal{A}^o/\mathcal{A}^{oo}$ soit un corps [5, 1.7.1].

2.2.3. *Exemples.* (1) Toute $\mathcal{K}$-algèbre affinoïde (classique, *i.e.* quotient de $\mathcal{K}\langle T_1,\dots,T_n\rangle$) qui est réduite est uniforme [5, 6.2.1]. En fait, dans ce cas, la structure algébrique détermine la topologie et aussi la norme spectrale [5, 6.1.3, prop. 2].

(2) Si $\mathcal{A}$ est uniforme (*resp.* spectrale), il en est de même de $\mathcal{A}\langle T\rangle : \mathcal{A}\langle T\rangle^o = \mathcal{A}^o\langle T\rangle$ est borné (*resp.* est la boule unité).

2.2.4. Un homomorphisme $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre $\mathcal{K}$-algèbres normées uniformes est continu si et seulement si $\phi(\mathcal{A}^o) \subset \mathcal{B}^o$ (et dans le cas où les normes sont spectrales, si et seulement si $||\phi|| \leq 1$). Il en découle que la norme spectrale d'une algèbre normée uniforme est l'unique norme spectrale compatible avec la topologie.

On en déduit qu'une $\mathcal{K}$-algèbre $\mathcal{A}$ admet au plus une norme spectrale pour laquelle elle est complète : en effet, si $|\ |_1, |\ |_2$ sont deux telles normes, on peut supposer, en remplaçant la première par le supremum des deux, que le morphisme identique $(\mathcal{A}, |\ |_1) \to (\mathcal{A}, |\ |_2)$ est continu. Par le théorème de l'image ouverte de Banach [6, I.3.3, th. 1], $|\ |_1$ est équivalente à $|\ |_2$, donc ce morphisme est bicontinu et l'on conclut de ce qui précède que $|\ |_1 = |\ |_2$.

La complétion d'une algèbre normée uniforme est une algèbre de Banach uniforme. Il suit du théorème de l'image ouverte qu'une algèbre de Banach est uniforme si et seulement si elle est complète pour la semi-norme spectrale (qui est alors une norme).

2.2.5. On note $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ (*resp.* $\mathcal{A}$-$\mathbf{uBan}$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}$-$\mathbf{Ban}$ (*resp. resp.* $\mathcal{A}$-$\mathbf{Ban}$) formée des algèbres de Banach uniformes. Le plongement de $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ dans $\mathcal{K}$-$\mathbf{Ban}$ admet un adjoint à gauche (*uniformisation*), donné par le complété séparé relativement à la semi-norme spectrale associée ; par définition, l'uniformisée $\mathcal{A}^u$ de $\mathcal{A}$ est donc spectrale. Le morphisme $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^u$ (unité d'ajonction) est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{A}$ est uniforme.

La catégorie $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ admet un objet initial $\mathcal{K}$ et un objet final 0, des sommes amalgamées $\mathcal{B}\hat{\otimes}^u_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ (uniformisation du produit tensoriel complété), et donc des colimites finies. En tant qu'adjoint à gauche, l'uniformisation préserve les sommes amalgamées, *i.e.* transforme $\hat{\otimes}$ en $\hat{\otimes}^u$. Si $\mathcal{A}$ est de Banach uniforme, le foncteur $-\hat{\otimes}^u_{\mathcal{K}}\mathcal{A}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathcal{A}$-$\mathbf{uBan} \to \mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ [11].

Si $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un morphisme dans $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ et J un idéal fermé de $\mathcal{A}\langle T\rangle$, le morphisme canonique

$$(\mathcal{B}\langle T\rangle/J\mathcal{B}\langle T\rangle)^u \to \mathcal{B}\hat{\otimes}^u_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}\langle T\rangle/J) \tag{2.4}$$

est isométrique (on peut munir $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de leur norme spectrale, ainsi que les deux membres de la formule (2.2)).

2.2.6. Tout produit fibré (fini) d'algèbres de Banach uniformes, muni de la norme supremum, est uniforme ; donc la catégorie des $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes admet des limites finies.

Tout facteur d'une algèbre de Banach uniforme est uniforme (en fait, dans une algèbre normée $\mathcal{A}$, tout idempotent non nul e est de norme ≥ 1, et de norme 1 si $\mathcal{A}$ est spectrale) ; plus précisément, toute décomposition de $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ en tant qu'algèbre provient d'une décomposition dans la catégorie des algèbres normées uniformes.

2.2.7. *Remarque.* Si $\mathcal{C}$ admet une base orthogonale sur $\mathcal{A}$, et si $\mathcal{B}$ est spectrale, alors $\mathcal{B} \overset{b\mapsto b\otimes 1}{\to} \mathcal{B}\hat{\otimes}^u_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ est isométrique. En effet, $|b\otimes 1|_{sp} = \lim_m |b^m\otimes 1|^{\frac{1}{m}} = \lim_m |b^m|^{\frac{1}{m}} = |b|$ d'après la rem. 2.1.3 2).

11. Signalons que $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ peut ne pas être réduite même si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont des corps de car. 0, *cf.* [11].

2.2.8. *Exemple.* Soit $\mathcal{L}$ une extension finie galoisienne de $\mathcal{K}$ de groupe G, munie de l'unique valeur absolue qui prolonge celle de $\mathcal{K}$ (en particulier, G agit isométriquement). Alors $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L}$ munie de la (semi-)norme produit tensoriel est une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme de dimension finie. L'homomorphisme canonique $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L} \to \prod_{\gamma \in G} \mathcal{L}$ est continu et bijectif, donc un isomorphisme d'algèbres de Banach, de sorte que $\mathcal{L}\hat{\otimes}^{u}_{\mathcal{K}}\mathcal{L} \cong \prod_{\gamma \in G} \mathcal{L}$. L'algèbre de Banach $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L}$ est spectrale si et seulement si $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L} \to \prod_{\gamma \in G} \mathcal{L}$ est isométrique, ce qui équivaut à dire que l'extension $\mathcal{L}^{oa}$ de $\mathcal{K}^{oa}$ est galoisienne dans le cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$; dans le cas de valuation discrète, ceci a lieu si et seulement si l'extension de corps valués $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ est non ramifiée.

Le cas d'une extension infinie, beaucoup plus délicat, est étudié en détail dans [11].

Dans toute la suite, on suppose que le corps résiduel k est de caractéristique $p > 0$.

2.3. **Dictionnaire.**

2.3.1. Commençons par rappeler quelques opérateurs de fermeture. Soit $R \hookrightarrow S$ une extension d'anneaux commutatifs unitaires.

Un élément $s \in S$ est dit entier (*resp.* presque entier [12]) sur R si ses puissances engendrent (*resp.* sont contenues dans) un sous-R-module de type fini de S. On note R^+_S (*resp.* R^*_S) leur ensemble. C'est un sous-anneau de S, la *fermeture intégrale* (*resp. complètement intégrale*) de R dans S. On dit que R est intégralement fermé (*resp.* complètement intégralement fermé) dans S si $R = R^+_S$ (*resp.* $R = R^*_S$) (*cf. e.g.* [15]) . Alors que R^+_S est intégralement fermé dans S, R^*_S n'est pas nécessairement complètement intégralement fermé dans S (cf. rem. 2.3.3 (2) ci-dessous). On a bien sûr $R^+_S \subset R^*_S$ (avec égalité si R est noethérien).

Soit p un nombre premier. Un élément $s \in S$ est p-radiciel sur R s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $s^{p^n} \in R$. On dit que R est p-radiciellement fermé dans S si tout élément p-radiciel est dans R ; autrement dit, si $(s \in S,\ s^p \in R) \Rightarrow s \in R$. La *fermeture p-radicielle* de R dans S, notée $R^\dagger_S$, est le plus petit anneau intermédiaire p-radiciellement fermé dans S. C'est la réunion croissante des sous-anneaux R_i définis inductivement par $R_0 = R$, $R_{i+1} =$ sous-anneau de S engendré par les éléments p-radiciels de R_i (*cf.* [1]). On a bien sûr $R^\dagger_S \subset R^+_S$, et R est p-radiciellement fermé dans S si et seulement si $R = R^\dagger_S$.

Lorsque R est de car. p, ou bien lorsque $S = R[\frac{1}{p}]$, l'ensemble des éléments p-radiciels de S sur R est un sous-anneau de S [27], qui coïncide donc avec $R^\dagger_S$.

Étant donné un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} R & \hookrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ R' & \hookrightarrow & S' \end{array}$$

on a des homomorphismes naturels $R^\dagger_S \to R'^\dagger_{S'}$, $R^+_S \to R'^+_{S'}$, $R^*_S \to R'^*_{S'}$ (pour le premier, on construit pas à pas $R_i \to R'_i$).

La fermeture intégrale de R dans S commute à la localisation [7, V, §1, n. 5, prop. 16], et il en est de même de la fermeture p-radicielle comme on le vérifie immédiatement. Ce n'est pas vrai en revanche pour la fermeture complètement intégrale [7, V, §1, ex. 12].

12. on verra dans le sorite 2.5.3 que cette terminologie, loin d'entrer en conflit avec celle de la presque-algèbre, consonne.

2.3.2. Voici un fragment de dictionnaire entre le langage de l'analyse fonctionnelle et celui de l'algèbre commutative.

Fixons $\varpi \in \mathcal{K}^{oo} \setminus 0$, et notons $\Gamma \subset \mathbf{R}$ le groupe de valuation correspondant : $|\varpi|^\Gamma = |\mathcal{K}^\times|$. Pour tout $s \in \Gamma$, soit ϖ_s un élément de $\mathcal{K}^\times$ de norme $|\varpi|^s$ (les considérations qui suivent ne dépendent pas de tels choix). Un complété-séparé (ϖ-adique ou selon une semi-norme) sera affublé d'un chapeau.

2.3.1. **Sorite.** *(1) Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}$-algèbre normée telle que $|\mathcal{K}|$ soit dense dans $|\mathcal{A}|$. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a*

$$|a| = |\varpi|^r, \ \ avec \ \ r := \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s} a \in \mathcal{A}_{\leq 1}\}. \tag{2.5}$$

En particulier, la topologie de $\mathcal{A}_{\leq 1}$ est la topologie ϖ-adique, et $\mathcal{A}$ est de Banach si et seulement si $\mathcal{A}_{\leq 1}$ est ϖ-adiquement complète.

(2) Réciproquement, soit $\mathfrak{A}$ une $\mathcal{K}^o$-algèbre plate (i.e. sans ϖ-torsion), et posons

$$\mathcal{A} := \mathfrak{A}[\frac{1}{\varpi}].$$

Pour tout $a \in \mathcal{A}$, posons

$${}^{\mathfrak{A}}|a| := |\varpi|^r, \ \ avec \ \ r := \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s} a \in \mathfrak{A}\} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}. \tag{2.6}$$

(a) Cela définit une semi-norme sur $\mathcal{A}$, qui est une norme si et seulement si aucun élément de $\mathfrak{A} \setminus 0$ n'est infiniment ϖ-divisible ; $|\mathcal{K}|$ est dense dans ${}^{\mathfrak{A}}|\mathcal{A}|$.
En outre $\hat{\mathfrak{A}}$ est aussi une $\mathcal{K}^o$-algèbre plate, $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathfrak{A}}[\frac{1}{\varpi}]$, et $\hat{\mathcal{A}}_{\leq 1} = \widehat{\mathcal{A}_{\leq 1}}$.

(b)
$$\mathcal{A}_{<1} = \mathcal{K}^{oo}\mathfrak{A},$$
$$\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathfrak{A} \quad si\ \Gamma \ est\ discret,$$
$$\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathfrak{A}_* \ \ en\ général[13], \ avec \ \ \mathfrak{A}_* := \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^o}(\mathcal{K}^{oo}, \mathfrak{A}) = \bigcap_{s \in \Gamma_{>0}} \varpi_{-s}\mathfrak{A}.$$

(c) Un homomorphisme $\phi : \mathcal{A} = \mathfrak{A}[\frac{1}{\varpi}] \to \mathcal{A}' = \mathfrak{A}'[\frac{1}{\varpi}]$ est continu si $\phi(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}'$, et est isométrique si en outre $\phi^{-1}\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$. Plus précisément, un homomorphisme continu ϕ est isométrique si et seulement si $\phi(\mathcal{A}_{\leq 1}) \subset \mathcal{A}'_{\leq 1}$ et l'homomorphisme induit $\mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi \to \mathcal{A}'_{\leq 1}/\varpi$ est injectif.

(d) Si $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$ est une sous-algèbre telle que le quotient $\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}$ soit sans ϖ-torsion, la restriction de ${}^{\mathfrak{A}'}|\ |$ à $\mathfrak{A}$ est ${}^{\mathfrak{A}}|\ |$.
Si $\mathfrak{I}$ est un idéal de $\mathfrak{A}$ tel que $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ soit sans ϖ-torsion, ${}^{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}}|\ |$ est la semi-norme quotient de ${}^{\mathfrak{A}}|\ |$. Réciproquement, pour tout idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$, alors $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_{\leq 1} = (\mathcal{A}_{\leq 1}/\mathcal{I}_{\leq 1})_*$.

(e) Soient $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ deux $\mathfrak{C}$-algèbres sans ϖ-torsion. Alors la semi-norme associée à $(\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{C})/(\varpi^\infty$-torsion$)$ est la semi-norme produit tensoriel (où ϖ^∞-torsion désigne la torsion ϖ-primaire). Réciproquement, si $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont deux $\mathcal{A}$-algèbres normées, on a
$$(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C})_{\leq 1} = (\mathcal{B}_{\leq 1} \otimes_{\mathcal{A}_{\leq 1}} \mathcal{C}_{\leq 1})/(\varpi^\infty\text{-tors}) \ \ si\ \Gamma \ est\ discret,$$
$$(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C})_{\leq 1} = ((\mathcal{B}_{\leq 1} \otimes_{\mathcal{A}_{\leq 1}} \mathcal{C}_{\leq 1})/(\varpi^\infty\text{-tors}))_* \ \ sinon.$$
De même pour les produits tensoriels complétés.

(3) Le passage au quotient modulo $\mathcal{A}^{oo}$ (resp. à la complétion) induit une bijection entre les sous-$\mathcal{K}^o$-algèbres $\mathfrak{B}$ ouvertes [complètement] intégralement fermées dans $\mathcal{A}^o$ et les sous-k-algèbres [complètement] intégralement fermées de la k-algèbre réduite $\mathcal{A}^o/\mathcal{A}^{oo}$ (resp. les sous-$\mathcal{K}^o$-algèbres ouvertes intégralement fermées dans $\hat{\mathcal{A}}^o$).

13. Notation empruntée à la presque-algèbre lorsque Γ est dense dans $\mathbf{R}$, auquel cas $\mathcal{K}^{oo}$ est un idéal idempotent de $\mathcal{K}^o$, *cf.* §1 ; sinon, $\mathfrak{A}_* = \mathfrak{A}$.

Supposons $|\mathcal{K}|$ dense dans $|\mathcal{A}|$ (ce qui est le cas si Γ est dense dans $\mathbf{R}$).

(4) Pour $\mathfrak{A}$ comme ci-dessus et $\mathcal{A} = \mathfrak{A}[\frac{1}{\varpi}]$, et avec les notations de 2.3.1 :

$$\mathfrak{A}^{\dagger}_{\mathcal{A}} := \{a \in \mathcal{A} \mid \exists n,\ a^{p^n} \in \mathfrak{A}\},\ \ \mathfrak{A}^{+}_{\mathcal{A}},\ \ \mathfrak{A}^{*}_{\mathcal{A}} := \{a \in \mathcal{A} \mid \exists m\, \forall n,\ \varpi^m a^n \in \mathfrak{A}\},$$

on a

$$\mathfrak{A}^{\dagger}_{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{A}^{+}_{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{A}^{*}_{\mathcal{A}} = (\mathfrak{A}_*)^{*}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^o \tag{2.7}$$

et $(\mathfrak{A}^{\dagger}_{\mathcal{A}})_* = (\mathcal{A}^o)_*$ est la boule unité de la semi-norme spectrale associée à $|\ |$.

En particulier, si $\mathcal{A}_{\leq 1}$ est noethérienne, sa fermeture intégrale dans $\mathcal{A}$ est égale à $\mathcal{A}^o$.

(5) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $|\ |$ est spectrale,

(b) $\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}^o$,

(c) $\mathcal{A}_{\leq 1} = (\mathcal{A}_{\leq 1})^{*}_{\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A}_{\leq 1}$ est complètement intégralement fermé dans $\mathcal{A}$),

(d) $\mathcal{A}_{\leq 1} = (\mathcal{A}_{\leq 1})^{+}_{\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A}_{\leq 1}$ est intégralement fermé dans $\mathcal{A}$),

(e) $\mathcal{A}_{\leq 1} = (\mathcal{A}_{\leq 1})^{\dagger}_{\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A}_{\leq 1}$ est p-radiciellement fermé dans $\mathcal{A}$),

(f) (si $|\varpi| \geq |p|$ et $\frac{1}{p} \in \Gamma$) l'homomorphisme $\mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi_{\frac{1}{p}} \overset{x \mapsto x^p}{\to} \mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi$ est injectif.

(6) Si $\mathcal{A}$ est uniforme, on a

$$\mathcal{A}^o = (\mathcal{A}^o)_* = (\mathcal{A}_{\leq 1})^{*}_{\mathcal{A}}. \tag{2.8}$$

et

$$\widehat{\mathcal{A}^o} = (\hat{\mathcal{A}})^o. \tag{2.9}$$

Démonstration. (1) L'égalité $|a| = |\varpi|^r$ est claire si $|a| \in |\mathcal{K}^\times|$; elle vaut donc pour tout $a \in \mathcal{A}$ compte tenu de la densité de $|\mathcal{K}|$ dans $|\mathcal{A}|$.

(2) (a) Que ${}^{B}|\ |$ soit une semi-norme non-archimédienne découle directement de ce que $\mathfrak{A}$ est une $\mathcal{K}^o$-algèbre. C'est une norme si $\mathfrak{A}$ est ϖ-adiquement séparée.

Par platitude de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}/\varpi^{n-1} \overset{\cdot\varpi}{\to} \mathfrak{A}/\varpi^n$ est injectif pour tout n, d'où, en passant à la limite, le fait que $\hat{\mathfrak{A}}$ soit sans ϖ-torsion.

Les égalités $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathfrak{A}}[\frac{1}{\varpi}]$, $\hat{\mathcal{A}}_{\leq 1} = \widehat{\mathcal{A}_{\leq 1}}$, de même que les points (a) (b) et la première assertion de (c) résultent de la définition de la semi-norme (en notant que $\sup\{s \in \Gamma_{>0}\} > 0$ si Γ est discret, $= 0$ sinon). On a ${}^{\mathfrak{A}}|\ | = {}^{\mathcal{A}_{\leq 1}}|\ |$.

Complétons la preuve de (c). Puisque $|\mathcal{K}|$ est dense dans $\mathcal{A}$, ϕ est isométrique si et seulement si $\mathcal{A}_{\leq 1} \overset{\phi}{\to} \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \phi(\mathcal{A})$ est un isomorphisme. Comme l'injectivité de $\mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi \to \mathcal{A}'_{\leq 1}/\varpi$ implique aussi celle de ϕ, on peut supposer ϕ injectif (et le noter comme une inclusion pour alléger). Il suffit donc de s'assurer que $\mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \frac{1}{\varpi}\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}_{\leq 1} \Rightarrow \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}_{\leq 1}$ (la réciproque étant banale). Or pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \frac{1}{\varpi}\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\leq 1} \Rightarrow \varpi^n \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \frac{1}{\varpi}\mathcal{A}_{\leq 1} = \varpi^n \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \mathcal{A}_{\leq 1}$, d'où aussi par récurrence $\mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \frac{1}{\varpi^n}\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\leq 1}$.

La première assertion de (d) résulte de (c) puisqu'on a $\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{A}[\frac{1}{\varpi}] = \mathfrak{A}$. Pour la seconde, en notant $\bar{a}$ l'image d'un élément $a \in \mathcal{A}$ modulo $\mathfrak{I}[\frac{1}{\varpi}]$, on observe que $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{I}[\frac{1}{\varpi}] = \mathfrak{I}$ de sorte que $\sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}\bar{a} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}\} = \sup_{i \in \mathfrak{I}[\frac{1}{\varpi}]} \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}a + i \in \mathfrak{A}\}$. Pour l'assertion réciproque, on note que $\mathcal{A}_{\leq 1}/\mathcal{I}_{\mathcal{I}}$ est sans ϖ-torsion et on applique le point (b).

Pour (e), considérons une somme $\sum b_n \otimes c_n$ avec $|b_n||c_n| \leq 1$. Dans le cas discret (*resp.* non discret), on la réécrit comme $\sum \varpi_{r_n} b_n \otimes \varpi_{r_n}^{-1} c_n$ avec r_n égal à (*resp.* inférieur à, mais arbitrairement proche de) la valuation de y_n.

(3) Le cas de la complétion se déduit du cas de la réduction modulo $\mathcal{A}^{oo}$. Celle-ci induit une bijection entre sous $\mathcal{K}^o$-algèbres ouvertes $\mathfrak{B}$ de $\mathcal{A}^o$ et sous-k-algèbres $\bar{\mathfrak{B}}$ de $\mathcal{A}^o/\mathcal{A}^{oo}$. Le

point est de montrer que $\mathfrak{B}$ et $\bar{\mathfrak{B}}$ sont simultanément intégralement fermées. Cela découle immédiatement de l'observation suivante :

soient S un anneau, I un idéal, R un sous-anneau de S contenant I, s un élément de S et $\bar{s}$ son image dans S/I. Alors s est entier sur R si et seulement si $\bar{s}$ est entier sur R/I .

En effet, la réduction modulo I induit une bijection entre sous-R-modules M de type fini de S contenant R et sous-R/I-modules $\bar{M}$ de type fini de S/I contenant R/I. Que s soit entier sur R signifie que ses puissances engendrent un tel module M, et de même modulo I (le même argument vaut en remplaçant « intégralement fermé » par « complètement intégralement fermé »).

(4) Rappelons que $\mathfrak{A}^*_{\mathcal{A}}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ dont les puissances sont contenues dans un sous-$\mathfrak{A}$-module de type fini. Puisque être contenu dans un sous-$\mathfrak{A}$-module de type fini de $\mathcal{A}$, c'est être borné, on a $\mathfrak{A}^*_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^o$.

La semi-norme $|\ |^\dagger$ associée à $\mathfrak{A}^\dagger_{\mathcal{A}}$ est donnée par $|a|^\dagger = |\varpi|^{r^\dagger}$ avec $r^\dagger := \sup\{s \in \Gamma \mid \exists n,\ \varpi_{-sp^n} a^{p^n} \in \mathcal{A}_{\leq 1}\}$. D'où $|a|^\dagger = \inf |a^{p^n}|^{\frac{1}{p^n}}$, et par le lemme de Fekete, $|a|^\dagger = \lim |a^{p^n}|^{\frac{1}{p^n}} = |a|_{sp}$.

La formule $|a|^\dagger = \inf |a^{p^n}|^{\frac{1}{p^n}}$ montre aussi que $(\mathfrak{A}^\dagger_{\mathcal{A}})_*$ contient la boule unité de $\mathcal{A}$ pour la semi-norme spectrale $|\ |^\dagger$. Par définition de $\mathcal{A}^o$, et compte tenu de $(2b)$, on a donc $\mathcal{A}^o \subset (\mathfrak{A}^\dagger_{\mathcal{A}})_*$, et en dernière instance $\mathcal{A}^o_* = (\mathfrak{A}^\dagger_{\mathcal{A}})_*$.

(5) Les équivalences $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e)$ résultent de $(2b)$ et (4), et si $|\varpi| \geq |p|$ et $\frac{1}{p} \in \Gamma$, on a $(e) \Leftrightarrow (f)$.

(6) On peut supposer $|\ |$ spectrale. Alors $(2b)$ et $(5b)$ entraînent que $(\mathcal{A}^o)_* = \mathcal{A}^o$. L'autre égalité suit de (2.7), de même que $\widehat{\mathcal{A}^o} = (\hat{\mathcal{A}})^o$ via le point $(2a)$ (avec $|\ |_{sp}$). □

2.3.3. *Remarques.* (1) $\mathcal{A}^o/\varpi_{\frac{1}{p}} \overset{x\mapsto x^p}{\to} \mathcal{A}^o/\varpi$ est toujours injectif même si $\mathcal{A}$ n'est pas uniforme.

(2) Au point (3), il se peut que les inclusions $\mathfrak{A}^+_{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{A}^*_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^o \subset \mathcal{A}_{|\ |_{sp}\leq 1}$ soient strictes, comme le montre l'exemple $\mathfrak{A} = \mathcal{K}^o[\varpi T, \ldots, \varpi^{i+1}T^{p^i}, \ldots] \subset \mathcal{K}^o[T]$: on a $|T^m| = |\varpi|^{-1-[\log_p m]}$, $\mathcal{A} = \mathcal{K}[T]$, $\mathcal{A}^o = \mathfrak{A}^*_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}^o + \mathcal{K}^{oo}T\mathcal{K}^o[T]$ et $\mathcal{A}^{o*}_{\mathcal{A}} = \mathfrak{A}^{**}_{\mathcal{A}} = \mathcal{K}^o[T]$, tandis que $\mathcal{A}^{o+}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^o$. On voit là un exemple de fermeture complètement intégrale $\mathfrak{A}^*_{\mathcal{A}}$ qui n'est pas complètement intégralement fermée, et un exemple où $\mathcal{A}^o$ n'est pas la boule unité de la norme spectrale.

2.3.4. Tirons-en les premiers fruits, en supposant $|\mathcal{K}|$ dense dans $\mathbf{R}_+$.

2.3.2. **Corollaire.** *Le foncteur $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^o$ induit une équivalence de la catégorie des $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes vers celle des $\mathcal{K}^o$-algèbres $\mathfrak{B}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- *(1) $\mathfrak{B}$ est plate sur $\mathcal{K}^o$,*
- *(2) $\mathfrak{B}$ est ϖ-adiquement complète,*
- *(3) $\mathfrak{B}$ est [p-radiciellement/intégralement/complètement intégralement] fermée dans $\mathfrak{B}[\frac{1}{\varpi}]$,*
- *(4) $\mathfrak{B} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^o}(\mathcal{K}^{oo}, \mathfrak{B})$.*

Un quasi-inverse est donné par $\mathfrak{B} \mapsto (\mathfrak{B}[\frac{1}{\varpi}],\ ^{\mathfrak{B}}|\ |)$ (à valeurs dans les algèbres spectrales). Idem pour les $\mathcal{A}$-algèbres de Banach uniformes (resp. $\mathcal{A}^o$-algèbres vérifiant (1) à (4)). □

Sous (4), les trois interprétations de (3) équivalent à : $^{\mathfrak{B}}|\ |$ est spectrale (points $(2)(b)$ et (5) du sorite).

2.3.3. **Corollaire.** *Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme. Il y a bijection entre les idempotents de $\mathcal{B}$, ceux de $\mathcal{B}^o$, ceux de $\mathcal{B}^o/\varpi$, et ceux de $\mathcal{B}^o/\mathcal{B}^{oo}$.*

On peut supposer $\mathcal{B}$ spectrale. Pour la première bijection, voir 2.2.6. Pour la seconde, le point est que $\mathcal{B}^o$ est ϖ-adiquement complète ; pour la troisième, que le noyau de $\mathcal{B}^o/\varpi \to \mathcal{B}^o/\mathcal{B}^{oo}$ est un nil-idéal. □

2.3.4. **Lemme.** *Soient $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme et $\mathfrak{m}$ un idéal idempotent de $\mathcal{A}^o$ tel que $\mathcal{K}^{oo}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Considérons l'endofoncteur des $\mathcal{A}^o$-algèbres donné par les presque-éléments du localisé, dans le cadre $(\mathcal{A}^o, \mathfrak{m})$* [14] *:*

$$\mathfrak{B} \mapsto (\mathfrak{B}^a)_* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{oa}}(\mathcal{A}^{oa}, \mathfrak{B}^a) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}). \tag{2.10}$$

Ce foncteur respecte chacune des conditions (1) à (4) du corollaire précédent. En particulier, le foncteur des presque-éléments est adjoint à droite de $(\,)^a$ sur la catégorie des $\mathcal{A}^o$-algèbres vérifiant (1) à (4), donc commute aux limites.

Démonstration. (1) : si $\mathfrak{B}$ est sans ϖ-torsion, il en est de même de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})$.
(2) est plus délicat car le foncteur $\mathfrak{B} \mapsto (\mathfrak{B}^a)_*$, qui commute aux limites, ne commute pas au quotient par ϖ^n en général. On a toutefois un morphisme canonique $u : \widehat{(\mathfrak{B}^a)_*} \to (\hat{\mathfrak{B}}^a)_*$ obtenu en prenant la limite des morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})/\varpi^n \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}/\varpi^n)$. Ces derniers sont injectifs (le noyau de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}/\varpi^n)$ est l'image de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \varpi^n\mathcal{A}^o \otimes_{\mathcal{A}^o} \mathfrak{B}) = \varpi^n\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})$), donc u est injectif. Du triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}) & \longrightarrow & \lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})/\varpi^n \\ \downarrow & & \downarrow u \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \lim \mathfrak{B}/\varpi^n) = & & \lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}/\varpi^n) \end{array}$$

on déduit que si $\mathfrak{B}$ est ϖ-adiquement complète, u est inverse à gauche du morphisme de complétion $(\mathfrak{B}^a)_* \mapsto \widehat{(\mathfrak{B}^a)_*}$. C'est donc un isomorphisme.
(3) : soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})[\frac{1}{\varpi}]$ tel que ϖf, $f^p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})$. Alors pour tout $\eta \in \tilde{\mathfrak{m}}$, on a $\varpi f(\eta), f(\eta)^p \in \mathfrak{B}$. Par hypothèse ceci implique $f(\eta) \in \mathfrak{B}$. On conclut que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})$.
(4) : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^o}(\mathcal{K}^{oo}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\mathcal{K}^{oo} \otimes_{\mathcal{K}^o} \mathcal{A}^o, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\mathcal{K}^{oo} \otimes_{\mathcal{K}^o} \tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathfrak{B})$. □

2.3.5. *Remarques.* (1) En revanche, l'adjoint à gauche $(\ )_{!!}$ de $(\,)^a$ ne respecte pas les conditions (2) à (4). Mais on peut le modifier en un adjoint à gauche $(\ )_{\hat{!!}}$ de $(\ )^a$ sur la catégorie des $\mathcal{A}^o$-algèbres $\mathfrak{B}$ vérifiant (1) à (4). Il suffit de

a) quotienter $\mathfrak{B}_{!!}$ par la torsion ϖ-primaire (pour assurer (1)),
b) compléter pour assurer (2),
c) passer à la fermeture [p-radicielle/intégrale] dans le $\frac{1}{\varpi}$-localisé (ce qui assure (3)),
d) prendre les presque-éléments dans le cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ (ce qui assure (4)),

compte tenu de ce que chacune de ces opérations est un réflecteur (d'après le sorite 2.3.1 (4), elles ne se détruisent pas l'une l'autre - les deux dernières reviennent à passer à l'anneau des éléments de puissances bornées dans le $\frac{1}{\varpi}$-localisé).

(2) De même, le coproduit de la catégorie des $\mathcal{A}^o$-algèbres vérifiant (1) à (4) n'est pas $\otimes$ (qui ne respecte pas (2) ni (3) ni (4)) mais le bifoncteur donné par le complété $\mathfrak{B}\hat{\otimes}^u_{\mathfrak{A}}\mathfrak{C}$ de la fermeture complètement intégrale de $(\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{C})/(\varpi^\infty\text{-tors})$ dans $(\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{C})[\frac{1}{\varpi}]$.

14. On passe du cadre initial $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ à $(\mathcal{A}^o, \mathfrak{m})$ via $(\mathcal{A}^o, \mathcal{K}^{oo}\mathcal{A}^o = \mathcal{A}^{oo})$, le sens de « presque » étant le même dans $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ et dans $(\mathcal{A}^o, \mathcal{K}^{oo}\mathcal{A}^o)$ (*cf.* §1.5).

2.3.6. L'extension de la presque-algèbre au contexte topologique pose problème : la catégorie des modules topologiques et homomorphismes continus n'est pas abélienne. Pour les algèbres de Banach uniformes, on peut néanmoins en esquisser un avatar à partir des résultats précédents : la catégorie $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-$\mathbf{uBan}$ des *$\mathcal{A}^{\hat{a}}$-algèbres de Banach uniformes* a pour objets les $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes, notées $\mathcal{B}^{\hat{a}}$, et les morphismes $\mathcal{B}^{\hat{a}} \to \mathcal{C}^{\hat{a}}$ sont les morphismes $\mathcal{B}^{oa} \to \mathcal{C}^{oa}$ (dans le cadre $(\mathcal{A}^o, \mathfrak{m})$).

Si le cadre est $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$, cette catégorie est bien entendu isomorphe à celle des $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes.

On a un foncteur évident $(\ )^{\hat{a}} : \mathcal{A}\text{-}\mathbf{uBan} \to \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-}\mathbf{uBan}$ qui est l'identité sur les objets. D'après le lemme précédent, $(\ )^{\hat{a}}$ admet un adjoint à droite $(\ )_{\hat{*}}$ dont l'unité d'adjonction est

$$\mathcal{B} \to (\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{*}} = (\mathcal{B}^{oa})_*[\frac{1}{\varpi}] = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathcal{B}^o)[\frac{1}{\varpi}] = \mathrm{Hom}^{cont}_{\mathcal{A}}(\tilde{\mathfrak{m}} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{B}). \tag{2.11}$$

Ce morphisme est injectif si $\mathfrak{m}$ agit fidèlement sur $\mathcal{B}$. On a $((\mathcal{B}^{\hat{a}})_*)^o = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathcal{B}^o)$.

D'autre part, $(\ )^{\hat{a}}$ admet un adoint à gauche encore noté $(\ )_{\hat{!!}}$.

Comme on le verra ci-dessous (§2.5.4), l'inclusion dans l'algèbre des presque-éléments

$$(\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{*}} \subset (\mathcal{B}^a)_* := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^o}(\tilde{\mathfrak{m}}, \mathcal{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\tilde{\mathfrak{m}} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{B})$$

n'est pas une égalité en général. On a toutefois :

2.3.5. **Lemme.** *Soit $\mathcal{B} \overset{\phi}{\to} \mathcal{C}$ un morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres de Banach uniformes, et soit $\mathcal{B}^o \overset{\phi^o}{\to} \mathcal{C}^o$ sa restriction. Alors, dans le cadre $(\mathcal{A}^o, \mathfrak{m})$, ϕ est un presque-isomorphisme si et seulement si ϕ^o l'est (c'est-à-dire si $\phi^{\hat{a}}$ est un isomorphisme).*

Démonstration. Il est clair que si $(\phi^o)^a$ est un isomorphisme, il en est de même de $\phi^{\hat{a}}$, et que si $\phi^{\hat{a}}$ est un monomorphisme, il en est de même de $(\phi^o)^a$. Prouvons que si $\phi^{\hat{a}} = (\phi^o)^a[\frac{1}{\varpi}]$ est un isomorphisme, (ϕ^o) est presque surjectif.

Si $\phi^{\hat{a}} = \phi^{oa}$ est un isomorphisme, il en est de même de $(\phi^a)_{\hat{!!}} = (\phi^{oa})_{\hat{!!}}[\frac{1}{\varpi}]$ (*cf.* rem. 2.3.5). On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{B}^{oa})_{!!} & \to & (\mathcal{B}^{oa})_{\hat{!!}} & \to & \mathcal{B}^o \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi^o} \\ (\mathcal{C}^{oa})_{!!} & \to & (\mathcal{C}^{oa})_{\hat{!!}} & \to & \mathcal{C}^o \end{array}$$

dans lequel la flèche verticale du milieu est un isomorphisme, et le composé des flèches du bas est un presque-isomorphisme. Cela implique que ϕ^o est presque surjectif. □

2.4. **Extensions entières d'algèbres normées uniformes.**

2.4.1. Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}$-algèbre normée uniforme. Soit $\mathcal{B}$ une extension de $\mathcal{A}$, munie d'une norme prolongeant celle de $\mathcal{A}$. On a $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^o = \mathcal{A}^o$.

2.4.1. **Lemme.** *(1) La fermeture complètement intégrale de $\mathcal{A}^o$ dans $\mathcal{B}$ est contenue dans $\mathcal{B}^o$. En particulier, $\mathcal{A}^o$ est complètement intégralement fermé dans $\mathcal{A}$.*

Supposons qu'un groupe fini G agisse sur $\mathcal{B}$ et que $\mathcal{B}^G = \mathcal{A}$.

(2) Supposons que G préserve la norme (ce qui est le cas en particulier si celle-ci est spectrale complète). Alors $\mathcal{B}^{\mathcal{G}} = \mathcal{A}^o$, $\mathcal{B}$ est entier sur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}^o$ est entier sur $\mathcal{A}^o$, et la fermeture intégrale de $\mathcal{A}^o$ dans $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}^o$.

(3) Supposons en outre $\mathcal{B}$ soit uniforme. Alors $|\ |_{sp}$ est l'unique norme spectrale G-invariante sur $\mathcal{B}$ étendant la norme spectrale de $\mathcal{A}$.

(4) Supposons de surcroît que la norme de $\mathcal{B}$ soit spectrale, et soit g un élement de $\mathcal{A}$. Si la multiplication par g dans $\mathcal{A}$ est injective (resp. isométrique), il en est de même de la multiplication par g dans $\mathcal{B}$.

Démonstration. (1) Soit $b \in \mathcal{B}$ tel qu'il existe un sous-$\mathcal{A}^o$-module de type fini de $\mathcal{B}$ qui contient toutes les puissances de b. Comme $\mathcal{A}^o$ est borné et $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est continu, ce sous-module est borné, donc $b \in \mathcal{B}^o$.

(2) Par hypothèse, G préserve $\mathcal{B}^o$. On a $\mathcal{B}^{\mathcal{G}} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^o = \mathcal{A}^o$. Par ailleurs, tout anneau muni d'une action d'un groupe fini est entier sur l'anneau des invariants [7, V, §1, n. 9, prop. 22]. En particulier, $\mathcal{B}$ est entier sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}^o$ est entier sur $\mathcal{A}^o$. Compte tenu du point (1), cela entraîne que $\mathcal{B}^o$ est la fermeture intégrale de $\mathcal{A}^o$ dans $\mathcal{B}$.

Notons par ailleurs que si la norme est spectrale complète, elle est unique avec cette propriété (*cf.* 2.2.2), donc préservée par G.

(3) $|\ |_{sp}$ est une norme spectrale G-invariante étendant la norme spectrale de $\mathcal{A}$. Soit $|\ |'$ une autre telle norme. Soit $b \in \mathcal{B}$ et considérons le polynôme

$\prod_{\gamma \in G} (T - \gamma(b)) = T^d + \sum_{i=1}^{i=d} a_i T^{d-i} \in \mathcal{A}[T]$. D'après [5, 3.1.2, prop.1], on a

$$\max_{\gamma} |\gamma(b)|' = \max |a_i|^{\frac{1}{i}}, \tag{2.12}$$

d'où $\max_\gamma |\gamma(b)|' = \max_\gamma |\gamma(b)|_{sp}$, et on conclut que $|\ |' = |\ |_{sp}$ par G-invariance.

(4) découle de la même formule : si $b \in \mathcal{B}$ est remplacé par ab ($a \in \mathcal{A}$), les a_i le sont par $a^i a_i$, de sorte que $|ab| = \max |a^i a_i|^{\frac{1}{i}}$. □

2.4.2. *Remarque.* Sans l'hypothèse d'invariance de la norme dans (2), $\mathcal{B}^o$ peut ne pas être entier sur $\mathcal{A}^o$. Sous l'hypothèse (2), $\mathcal{B}$ n'est pas nécessairement fini sur $\mathcal{A}$, et même s'il l'est, $\mathcal{B}^o$ n'est pas nécessairement fini sur $\mathcal{A}^o$, comme le montrent les exemples ci-dessous.

2.4.3. *Exemples prophylactiques.* (1) Soit V un anneau de valuation discrète complet de car. $\neq 2$, d'uniformisante ϖ. Soient $A = V[[T]]$ et B la fermeture intégrale de A dans une extension finie galoisienne de groupe G du corps de fractions $Q(A)$ de A ; B est alors une extension finie de A. Munissons $\mathcal{A} = A[\frac{1}{\varpi}]$, *resp.* $\mathcal{B} = B[\frac{1}{\varpi}]$, de la norme $^{A}|\ |$ (norme multiplicative ϖ-adique), *resp.* $^{B}|\ |$. Ce sont des algèbres de Banach uniformes, on a $\mathcal{A}^o = A$, $\mathcal{B}^o = B$, et G agit par isométries.

Soit par exemple $B = A[U]/(U^2 - TU + \varpi)$, de sorte que $\mathcal{B} = \mathcal{A}[\sqrt{T^2 - 4\varpi}]$. Le polynôme $U^2 - TU + \varpi$ est irréductible sur $Q(A)$, mais se factorise dans $\widehat{Q(A)}$, et même dans $\widehat{A[\frac{1}{T}]}$: les racines sont $u = \frac{\varpi}{T} + \sum_1^\infty \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)) 2^n \varpi^{n+1}}{(n+1)!\, T^{2n+1}}$ et $T - u$. Ainsi B admet deux normes multiplicatives induisant celle de A, pour lesquelles U, *resp.* $T - U$, est une unité. L'algèbre $\mathcal{B}' := B[\frac{1}{\varpi}]$ munie de cette dernière norme (non G-invariante ni complète) contient $\frac{U}{\varpi} = \frac{1}{T-U}$ qui est de norme 1 mais n'est pas entier sur A. La topologie de $(\mathcal{B}')^o$ est la topologie ϖ-adique, tandis que celle induite sur B n'est pas ϖ-adique, mais U-adique (moins fine).

(2) Supposons $\mathcal{K}$ parfait de caractéristique 2. Soit $\mathcal{A} = \mathcal{K}^o\widehat{[[T^{\frac{1}{2^\infty}}]]} \otimes_{\mathcal{K}^o} \mathcal{K}$, et soit $\mathcal{B}$ la clôture radicielle de l'extension quadratique $\mathcal{A}[U]/(U^2 - TU - 1)$. Entière sur $\mathcal{A}$, elle est contenue dans $\frac{1}{T}(\mathcal{A} + \mathcal{A}U)$. On calcule

$$U^{\frac{1}{2}} = T^{-\frac{1}{2}}(U-1),\ \ \ldots\ , U^{\frac{1}{2^i}} = T^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdots-\frac{1}{2^i}}(U - \alpha_i),\ \ \alpha_i \in \mathcal{A},$$

d'où $\mathcal{B}/\mathcal{A} = \bigcup_i T^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdots-\frac{1}{2^i}} U\mathcal{A} = \frac{U}{T}\, T^{\frac{1}{2^\infty}}\mathcal{A}$, qui n'est pas de type fini sur $\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{B}$ ne l'est pas non plus. Par ailleurs, une rétraction $\mathcal{A}$-linéaire de $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ enverrait $U^{\frac{1}{2^i}}$ sur $1 + a_i \in \mathcal{A}$ avec $a_i = T^{\frac{1}{2^i}}(1 + a_{i-1})$. Or $a_0 = T^{\frac{1}{2}}(1 + a_1) = T^{\frac{1}{2}} + \cdots + T^{\frac{1}{2^{i-1}}} + T^{\frac{1}{2^i}}(1 + a_i)$ et pour $i \to \infty$, la série ne converge pas dans $\mathcal{A}$. Une telle rétraction n'existe donc pas.

(3) Même si $\mathcal{B}$ est finie sur $\mathcal{A}$ et si $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est scindée, $\mathcal{B}^o$ n'est pas nécessairement finie sur $\mathcal{A}^o$, et l'application $\mathcal{A}^o$-linéaire $\mathcal{A}^o \to \mathcal{B}^o$ n'est pas nécessairement scindée, comme l'illustre un autre avatar du paradoxe de Zénon : prenons pour $\mathcal{A}$ le corps $\mathcal{K}$ précédent lui-même, et pour $\mathcal{B}$ l'extension quadratique $\mathcal{K}[U]/(U^2 - \varpi U - 1)$, où $\varpi \in \mathcal{K}^{oo} \setminus 0$. Alors $\mathcal{B}^o$ est la fermeture intégrale de $\mathcal{K}^o$ dans $\mathcal{B}$, et c'est aussi la clôture radicielle de $\mathcal{K}^o[U]$, mais le $\mathcal{K}^o$-module $\mathcal{B}^o/\mathcal{K}^o = \dfrac{U}{\varpi}\, \varpi^{\frac{1}{2^\infty}} \mathcal{K}^o$ n'est pas de type fini, et il n'y a pas de rétraction $\mathcal{K}^o$-linéaire de $\mathcal{K}^o \to \mathcal{B}^o$. Pour un exemple diadique de même farine, voir [5, 6.4.1].

2.4.4. Passons aux extensions étales finies d'algèbres de Banach uniformes.

2.4.2. **Lemme.** *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme. L'oubli de la norme induit un foncteur pleinement fidèle*

$$\{\mathcal{A}\text{-algèbres de Banach uniformes étales finies}\} \to \{\mathcal{A}\text{-algèbres étales finies}\}.$$

Démonstration. La fidélité est claire. Pour la plénitude, observant qu'un quotient $\mathcal{B}'$ d'une $\mathcal{A}$-algèbre étale finie $\mathcal{B}$ est facteur direct ($\mathrm{Spec}\ \mathcal{B}'$ est ouvert et fermé dans $\mathrm{Spec}\ \mathcal{B}$), on se ramène au cas des isomorphismes, qui sont isométriques en vertu de l'unicité de la norme spectrale complète. □

2.4.5. *Remarque.* C'est en fait une équivalence de catégories, voir [19, prop. 2.8.16 (b)] (compte tenu de ce que $\mathcal{B}$ est une $\mathcal{A}$-algèbre finie projective en tant que module, elle est munie d'une classe d'équivalence canonique de normes complètes ; le point délicat est de vérifier qu'elles sont uniformes). Nous n'aurons pas besoin de ce fait.

2.5. **Monomorphismes (et recadrage).**

2.5.1. Les monomorphismes de $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ sont les homomorphismes continus injectifs. Il est clair que tout morphisme injectif $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un monomorphisme. Pour la réciproque, on peut supposer $\mathcal{A}$ non nulle ; alors $\mathcal{K} \oplus \ker \phi \subset \mathcal{A}$ est une sous-algèbre de Banach de $\mathcal{A}$. On conclut en considérant les deux morphismes $\mathcal{K} \oplus \ker \phi \to \mathcal{A}$ qui envoient $\ker \phi$ sur lui-même et sur 0 respectivement.

Cela découle aussi formellement du fait que $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ admet des *objets libres* : $S \mapsto \mathcal{K}\langle T_s \rangle_{s \in S}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan} \to \mathbf{Ens}$.

2.5.2. Supposons $|\mathcal{K}|$ dense dans $\mathbf{R}_+$. Les recadrages du type considéré au §2.3.6 donnent parfois naissance à des monomorphismes d'algèbres de Banach uniformes, *cf.* (2.11). Examinons en détail le cas, fondamental dans la suite, du passage du cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ au cadre

$$(\mathfrak{V} = \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle := \widehat{\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}]},\ \ \mathfrak{m} = T^{\frac{1}{p^\infty}}\mathfrak{V}^{oo} = (T)^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^{oo}\mathfrak{V}^{oo}).$$

On a $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^o = \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$, et $\mathfrak{m}$ est plat donc $\mathfrak{m} = \tilde{\mathfrak{m}}$.

Si $\mathcal{B}$ est une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme, la donnée d'un morphisme $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle^o \to \mathcal{B}$ équivaut à celle d'une suite $(g^{\frac{1}{p^m}})$ compatible de racines p^m-ièmes d'un élément $g \in \mathcal{B}^o$ ($g^{\frac{1}{p^m}}$ sera l'image de $T^{\frac{1}{p^m}}$).

2.5.1. **Lemme.** *Soient $\mathcal{B}$ une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}} \rangle$-algèbre de Banach uniforme, et g l'image de T.*

(1) L'homomorphisme canonique $(\mathcal{B}^{oa})_* \to \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$ est injectif, et son image est ϖ-adiquement complète et égale à

$$g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o := \cap\, g^{-\frac{1}{p^m}}\mathcal{B}^o. \tag{2.13}$$

(2) L'homomorphisme $\mathcal{B}^o \to (\mathcal{B}^{oa})_*$ est injectif si et seulement si g n'est pas diviseur de zéro dans $\mathcal{B}$.

(3) L'homomorphisme $(\mathcal{B}^o_*)/\varpi \to (\mathcal{B}^o/\varpi)_*$ est injectif.

Démonstration. (1) On a $\mathfrak{m} = \varinjlim_{\cdot T^{\frac{1}{p^m}-\frac{1}{p^{m+1}}}} \mathfrak{V}$, d'où

$$(\mathcal{B}^{oa})_* = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{V}}(\mathfrak{m}, \mathcal{B}^o) = \varprojlim_{\cdot T^{\frac{1}{p^m}-\frac{1}{p^{m+1}}}} \mathcal{B}^o. \tag{2.14}$$

En particulier, $(\mathcal{B}^{oa})_*$ est réduite tout comme $\mathcal{B}^o$. Ceci entraîne que la multiplication par g dans $(\mathcal{B}^{oa})_*$ est presque injective : si $gb = 0$, alors $(g^{\frac{1}{p^n}}b)^{p^n} = 0$, donc $g^{\frac{1}{p^n}}b = 0$. Enfin, comme $(\mathcal{B}^{oa})_*$ est sans $\mathfrak{m}$-torsion, on conclut que $(\mathcal{B}^{oa})_* \to \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$ est injectif, et la formule (2.14) montre que

$$(\mathcal{B}^{oa})_* \cong g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o \tag{2.15}$$

qui est ϖ-adiquement complète d'après le lemme 2.3.4. (2) en découle.
(3) Comme $\mathcal{B}^o$ est sans ϖ-torsion, on a une suite exacte
$0 \to \varprojlim_{\cdot g^{\frac{1}{p^m}-\frac{1}{p^{m+1}}}} \mathcal{B}^o \xrightarrow{\cdot\varpi} \varprojlim_{\cdot g^{\frac{1}{p^m}-\frac{1}{p^{m+1}}}} \mathcal{B}^o \to \varprojlim_{\cdot g^{\frac{1}{p^m}-\frac{1}{p^{m+1}}}} (\mathcal{B}^o/\varpi)\,.$ □

Pour comparer $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o)[\frac{1}{\varpi}]$ à $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}$ (qui la contient), définissons, pour tout élément $b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}$, la quantité

$$|b|_{g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}} := \sup_m |g^{\frac{1}{p^m}}b|_{\mathcal{B}} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}. \tag{2.16}$$

Elle vérifie les propriétés d'une norme excepté qu'elle peut prendre la valeur $+\infty$. L'ensemble des $b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}$ pour lesquels $|b|_{g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}} < \infty$ forme une algèbre de Banach uniforme (spectrale si $\mathcal{B}$ l'est). L'algèbre spectrale associée n'est autre que $\mathcal{B}^{\hat{a}}_*$ (*cf.* 2.3.6) : le sous-anneau $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B})^o$ formé des éléments dont les puissances sont bornées eu égard à $|\ |_{g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}}$ vérifie

$$(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B})^o = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o, \tag{2.17}$$

car $b \in (g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B})^o \Leftrightarrow \sup_{\ell,m} |(g^{\frac{1}{p^m}}b)^\ell| < \infty \Leftrightarrow b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$.

2.5.2. **Lemme.** *Si g est inversible dans $\mathcal{B}$, alors $\mathcal{B}^o = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$.*

Démonstration. Par uniformité, il existe alors une suite $\lambda_m \in \mathcal{K}^o$, de norme tendant vers 1, telle que $\lambda_m g^{-\frac{1}{p^m}} \in \mathcal{B}^o$. Tout $b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$ vérifie alors $\lambda_m b \in \mathcal{B}^o$, d'où $b \in \mathcal{B}^o$. □

2.5.3. *Remarques.* (1) Si la multiplication par g est isométrique, $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}] \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}^o$, les idéaux $g^{\frac{1}{p^m}}\mathcal{B}^o$ de $\mathcal{B}^o$ sont fermés, $\mathcal{B}^o \hookrightarrow g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$ est isométrique, et $|\ |_{g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}}$ est une norme qui fait de $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}$ une algèbre de Banach uniforme. On a alors

$$g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B} = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o[\frac{1}{p}] = \mathcal{B}_* \tag{2.18}$$

dans le cadre $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], (T)^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^{oo}\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$. En revanche, si la multiplication par g n'est pas isométrique et même si g est non-diviseur de zéro, non seulement l'inclusion $\mathcal{B}^o \hookrightarrow g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$ n'est pas nécessairement isométrique, mais $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi}]$ peut être distincte de $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}$ comme le montre l'exemple ci-dessous.
(2) L'inclusion $\mathcal{B}^o \subset g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$ est en général stricte, même si la multiplication par g est isométrique, comme le montre l'exemple du complété de $\mathcal{K} + T_1^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, T_2^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ dans $\mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, T_2^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle,\ g = T_1$.

2.5.4. *Exemple prophylactique.* Supposons $\mathcal{K}$ parfait de car. p. La $\mathcal{K}^o$-algèbre parfaite $\mathcal{K}^o\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, (\varpi^m T_1^{\frac{1}{p^m}} T_2)^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle_{m\in\mathbf{N}}$ est de la forme $\mathcal{B}^o$ pour une $\mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre de Banach uniforme $\mathcal{B}$. On a $\mathcal{B} = T_1^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi}]$, distinct de $T_1^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B} = \mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, T_2^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$.

2.5.5. Supposons g non-diviseur de zéro. Rappelons que la fermeture complètement intégrale de $\mathcal{B}^o$ dans $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$ (*resp.* $\mathcal{B}[\frac{1}{g}] = \mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi g}]$) est

$$\mathcal{B}^{o\,*}_{\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]} := \{b \in \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}] \mid \exists m\, \forall n,\, g^m b^n \in \mathcal{B}^o\} \tag{2.19}$$

$$(resp.\quad \mathcal{B}^{o\,*}_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]} := \{b \in \mathcal{B}[\frac{1}{g}] \mid \exists m\, \forall n,\, (\varpi g)^m b^n \in \mathcal{B}^o\}), \tag{2.20}$$

et remarquons en passant que si G est un groupe d'automorphismes de $\mathcal{B}^o$ qui fixe g, on a

$$(\mathcal{B}^{o\,*}_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]})^G = \mathcal{B}^{oG\,*}_{\mathcal{B}^G[\frac{1}{g}]}. \tag{2.21}$$

2.5.3. **Sorite.** *Soient $\mathcal{B}$ une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre de Banach uniforme (voire une algèbre normée uniforme), et g l'image de T. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o = (g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o)^\dagger_{\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]}$ *($g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$ est p-radiciellement fermé dans $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$),*

(2) $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o = (g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o)^\dagger_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]}$ *($g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$ est p-radiciellement fermé dans $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$),*

(3) $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o = (\mathcal{B}^o)^*_{\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]}$,

(4) $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o = (\mathcal{B}^o)^*_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]}$,

(5) $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$ *est complètement intégralement fermé dans* $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$.

(6) $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$ *est complètement intégralement fermé dans* $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$.

Démonstration. On a $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o \subset \mathcal{B}^{o\,*}_{\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]} \subset \mathcal{B}^{o\,*}_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]} \subset (g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o)^*_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]}$ et (6) implique toutes les autres conditions. Il reste à prouver $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (6)$.

$(1) \Rightarrow (2)$: on peut supposer $\mathcal{B}$ spectrale. Soit $b \in \mathcal{B}[\frac{1}{g}]$ tel que $b^p \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$. Soit m tel que $g^m b \in \mathcal{B}$. On a $(g^m b)^p \in \mathcal{B}^o$, d'où $g^m b \in \mathcal{B}^o$. Donc $b \in \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$ compte tenu du point (5) du sorite 2.3.1, et (1) implique $b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$.

$(2) \Rightarrow (6)$: Soit $b \in (g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o)^*_{\mathcal{B}[\frac{1}{g}]}$: il existe m tel que pour tout n, $(\varpi g)^m b^{p^n} \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$, donc $\varpi^{\frac{m}{p^n}} g^{\frac{m}{p^n}} b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$ d'après (1). Ceci valant pour tout n, on conclut que $b \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$ compte tenu du point (6) du sorite 2.3.1. □

2.5.6. *Remarque.* Ce dernier argument montre plus généralement que pour anneau R contenant un suite compatible $t^{\frac{1}{p^m}}$ de racines d'un non-diviseur de zéro t, $R^*_{R[\frac{1}{t}]} = t^{-\frac{1}{p^\infty}} R^\dagger_{R[\frac{1}{t}]}$.

2.6. **Epimorphismes (et localisation).**

2.6.1. Dans $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$, tout morphisme d'image dense est un épimorphisme. Un épimorphisme ϕ est dit *extrémal* si dans toute factorisation $\phi = \mu\circ\lambda$ où μ est un monomorphisme, μ est un isomorphisme. Dans $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$, tout morphisme $\mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}$ admet une factorisation canonique $\mathcal{A} \xrightarrow{\psi} (\mathcal{A}/\ker\phi)^{\mathrm{u}} \xrightarrow{\chi} \mathcal{B}$ et ψ est épimorphisme extrémal (il n'est toutefois pas clair que χ soit un monomorphisme, ni donc que tout épimorphisme extrémal soit de la forme ψ). Tout morphisme ϕ surjectif est un épimorphisme extrémal, car la norme de $\mathcal{B}$ est alors équivalente à la semi-norme quotient de la norme de $\mathcal{A}$ en vertu du théorème de l'image ouverte de Banach.

2.6.2. Passons à un autre cas, la *localisation uniforme* utilisée en géométrie analytique sur $\mathcal{K}$. Si $f_1,\dots,f_n,f\in\mathcal{A}$ engendrent l'idéal unité, on note $(fU-f_i)_i^-$ l'adhérence de l'idéal engendré par les $fU-f_i$ et on pose

$$\mathcal{A}\{\frac{f_1,\dots,f_n}{f}\}:=\mathcal{A}\langle U_1,\dots,U_n\rangle/(fU_i-f_i)_i^-. \tag{2.22}$$

C'est la $\mathcal{A}$-algèbre de Banach universelle $\mathcal{B}$ pour laquelle l'image de f est inversible et les f_i/f sont contenus dans $\mathcal{B}^o$, *cf.* [5, 6.1.4][15]. Le morphisme $\mathcal{A}\to\mathcal{A}\{\frac{f_1,\dots,f_n}{f}\}$ est un épimorphisme de $\mathcal{K}$-algèbres de Banach car $\mathcal{A}[\frac{1}{f}]\to\mathcal{A}\{\frac{f_1,\dots,f_n}{f}\}$ est d'image dense (noter que $\mathcal{A}\to\mathcal{A}[U_1,\dots,U_n]/(fU_i-f_i)_i$ se factorise à travers un isomorphisme $\mathcal{A}[\frac{1}{f}]\xrightarrow{\sim}\mathcal{A}[U_1,\dots,U_n]/(fU_i-f_i)_i$ puisque $f_1,\dots,f_n,f$ engendrent $\mathcal{A}$).

Détaillons le cas fondamental pour la suite où $i=1$ et $f_1=1$:

$$\mathcal{A}\{\frac{1}{f}\}:=\mathcal{A}\langle U\rangle/(fU-1)^-. \tag{2.23}$$

C'est donc la $\mathcal{A}$-algèbre de Banach universelle $\mathcal{B}$ pour laquelle l'image de f est inversible d'inverse contenu dans $\mathcal{B}^o$. On a $\mathcal{A}\{\frac{1}{f}\}=0$ si $f\in\mathcal{A}^{oo}$ ($fU-1$ est alors inversible).

2.6.1. **Lemme.** [21, prop. 2.3] *Si $\mathcal{A}$ est uniforme, l'idéal $(fU-1)$ de $\mathcal{A}\langle U\rangle$ est fermé.*

L'argument, qui utilise la transformée de Gelfand, est réécrit de manière peut-être plus transparente dans [19, 2.8.8]. □

Fixons $\lambda\in\mathcal{K}^o$ tel que $g:=\lambda f$ soit dans $\mathcal{A}^o$. Voyons

$$\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}:=\mathcal{A}\{\frac{1}{f}\} \tag{2.24}$$

comme $\mathcal{K}\langle T\rangle$-algèbre de Banach ($T\mapsto g$), et notons $\iota_{\lambda/g}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}$ le morphisme canonique. On a une isométrie (*cf.* formule (2.2))

$$\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}\cong\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T\rangle}\mathcal{K}\langle T\rangle\{\frac{\lambda}{T}\}, \tag{2.25}$$

et $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}=0$ si $g\in\lambda\mathcal{A}^{oo}$. Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier :

- si $|\lambda|\le|\mu|$, on a un morphisme canonique $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\rangle\to\mathcal{A}\{\frac{\mu}{g}\}$, et le morphisme canonique $\mathcal{A}\{\frac{\mu}{g}\}\to\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}\{\frac{\mu}{g}\}$ est un isomorphisme.

- si $|g-h|<|\lambda|$, on a un isomorphisme canonique $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}\cong\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{h}\}$ (considérer le développement $\frac{1}{h}-\frac{1}{g}=\sum_1^\infty\lambda^{-m-1}(g-h)^m(\frac{\lambda}{g})^{m+1}$).

- $\forall a\in\mathcal{A},\ |\iota_{\lambda/g}(a)|=\inf_m|(\frac{g}{\lambda})^m a|_{\mathcal{A}}$.

2.6.3. *Exemples.* (1) Pour l'algèbre spectrale $\mathcal{A}=\mathcal{K}\langle T\rangle$, on a $\mathcal{K}\langle T,\frac{\lambda}{T}\rangle:=\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{T}\}=\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{T}\}^u$: c'est l'algèbre spectrale des fonctions analytiques sur la « couronne fermée » de rayons $(\lambda,1)$, et $\mathcal{K}\langle T,\frac{\lambda}{T}\rangle^o=\mathcal{K}^o\langle T,\frac{\lambda}{T}\rangle$ est la sous-algèbre des fonctions bornées par 1. La norme n'est multiplicative que si $\lambda=0$ ou $|\lambda|=1$ (notons qu'en général, si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach multiplicativement normée, $\mathcal{A}\{\frac{1}{g}\}=\mathcal{A}\{\frac{1}{g}\}^u$ est une sous-algèbre de Banach du complété $\widehat{Q(\mathcal{A})}$ du corps de fractions de $\mathcal{A}$).
(2) Les algèbres de Banach $\mathcal{K}\langle T,\frac{\lambda}{T}\rangle$ et $\mathcal{K}\langle T,\frac{\lambda^2}{T^2}\rangle$ sont isomorphes mais non isométriques : la première est spectrale, mais pas la seconde (la norme de $\frac{\lambda}{T}$ est $|\lambda|^{-1}>1$).

Il peut arriver que $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}$ ne soit pas uniforme, *cf.* [21, §3] (ceci n'arrive pas si $\mathcal{A}$ est affinoïde réduite munie de sa norme spectrale, [5, 7.2.3, prop. 4]).

15. Cette référence se place dans le contexte où $\mathcal{A}$ est affinoïde, de sorte que l'idéal $(fU-f_i)_i$ est fermé. Quitte à substituer $(fU-f_i)_i^-$, les arguments de *loc. cit.* valent pour une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach quelconque.

Quoi qu'il en soit, $\mathcal{A} \to \mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^u$ est un épimorphisme dans $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$, car l'image de $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ est dense dans $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^u$. *Le foncteur* $\mathcal{A} \to \mathcal{A}\{\frac{\lambda}{T\cdot 1}\}^u$ *est adjoint de l'inclusion dans* $\mathcal{K}\langle T\rangle$-$\mathbf{uBan}$ *de la sous-catégorie pleine formée dans algèbres* $\mathcal{B}$ *telles que* $T.1$ *soit inversible et contenu dans* $\mathcal{B}^o$.

Si $|\mathcal{K}|$ est dense dans $|\mathcal{A}|$, on a, avec le sorite 2.3.1 (2)(4)

$$(\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^u)_{\leq 1} = (\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^u)^o = \mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^o_* = \mathcal{A}^o\langle\frac{\lambda}{g}\rangle^*_{\mathcal{A}^o\langle\frac{\lambda}{g}\rangle[\frac{1}{\varpi}]} = \widehat{\mathcal{A}^o[\frac{\lambda}{g}]^*_{\mathcal{A}[\frac{\lambda}{g}]}}, \tag{2.26}$$

ainsi que

$$\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^o = \widehat{\mathcal{A}^o[\frac{\lambda}{g}]^+_{\mathcal{A}[\frac{\lambda}{g}]}} \tag{2.27}$$

(*cf.* [19, 2.5.9 (d)] ; c'est cet anneau qui intervient dans la théorie des espaces de Huber).

2.6.2. **Lemme.** *On suppose* $g \in \mathcal{A}$ *non diviseur de zéro. Soit* $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}'$ *un monomorphisme d'algèbres de Banach tel que* $\mathcal{A}'$ *soit contenue dans* $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ *(en tant que* $\mathcal{A}$*-algèbre). Alors le morphisme induit* $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\} \to \mathcal{A}'\{\frac{\lambda}{g}\}$ *est un isomorphisme d'algèbres de Banach.*

Démonstration. (d'après O. Gabber). Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit V_n le sous-espace fermé de $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}$ formé des couples $(a', a = g^n a')$. Via la projection selon la première composante, l'espace de Banach $\hat{\oplus} V_m$ se surjecte sur $\mathcal{A}'$. D'après le théorème de l'image ouverte et le théorème de Baire, il existe n tel que le sous-espace fermé $\oplus_{m\leq n} V_m$ se surjecte ouvertement sur $\mathcal{A}'$. Donc la multiplication par g^n induit une application continue $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}$, d'où aussi une application continue $\mathcal{A}'\{\frac{\lambda}{g}\} \to \mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}$. Composant avec la multiplication par g^{-n} dans $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}$, on obtient un inverse continu du morphisme canonique $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\} \to \mathcal{A}'\{\frac{\lambda}{g}\}$. □

2.6.3. **Lemme.** *On suppose* $\mathcal{A}$ *uniforme, et* g *non-diviseur de zéro. Alors* $\mathcal{A}^o \to \lim_{\lambda\to 0} \mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^o$ *est injectif.*

Démonstration. En effet, on peut supposer $|\ |$ spectrale. Pour tout $a \in \mathcal{A}^o \setminus 0$ et tout $\lambda \in \mathcal{K}^o \setminus 0$, on a $|a|_{\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}} = \inf_m |(\frac{g}{\lambda})^m a|$. Si $|\lambda| \leq |ga|$, $\inf_m |(\frac{g}{\lambda})^m a| \geq 1$, donc l'image de a dans $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^o$ n'est pas nulle. □

2.6.4. *Remarques.* (1) $\iota_{\lambda/g}$ est injectif si et seulement si $\inf_m |(\frac{g}{\lambda})^m a|_{\mathcal{A}} = 0 \Rightarrow a = 0$. C'est le cas en particulier si la multiplication par g dans $\mathcal{A}$ est isométrique. En revanche, la multiplication par g dans $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^o$ n'est pas isométrique si $|\lambda| < 1$, mais les morphismes $\mathcal{A}\{\frac{\lambda}{g}\}^u \to \mathcal{A}\{\frac{\mu}{g}\}^u$ sont tous injectifs (comme on le voit en prenant $\mu = 1$ et en utilisant la densité de $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$).

(2) Le complété de $\mathcal{K}^o[T_1, T_2, \frac{T_2 T_1^i}{\varpi^i}]_{i\geq 1}$ est la boule unité $\mathcal{A}^o$ d'une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme $\mathcal{A}$ sans T_1-torsion, mais on a $\iota_{\lambda/T_1}(T_2) = 0$ si $|\lambda| > |\varpi|$, puisque T_2 est alors infiniment divisible par ϖ dans $\mathcal{K}^o[T_1, T_2, \frac{T_2 T_1^i}{\varpi^i}, \frac{\lambda}{T_1}]$.

2.7. **Produits (et transformée de Gelfand).**

2.7.1. Les produits infinis d'algèbres de Banach n'existent pas en général : si $\mathcal{A}$ n'est pas uniforme et si a_n est une suite non bornée d'éléments de $\mathcal{A}^o$, la donnée des morphismes $\mathcal{K} \overset{1\mapsto a_n}{\to} \mathcal{A}$ ne peut équivaloir à celle d'un morphisme de $\mathcal{K}$ vers une algèbre de Banach.

En revanche, du fait que les morphismes d'algèbres munis d'une norme spectrale vérifient $||\phi|| \leq 1$, la catégorie des $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes a des produits quelconques (le produit vide étant l'algèbre nulle) :

$$\prod^u \mathcal{A}^\alpha := \{(a^\alpha) \in \prod \mathcal{A}^\alpha,\ |(a^\alpha)| := \sup |a^\alpha|_{sp} < \infty\}. \tag{2.28}$$

On a

$$(\prod^u \mathcal{A}^\alpha)^o = \prod \mathcal{A}^{\alpha o}. \tag{2.29}$$

2.7.2. *Exemple prophylactique.* On peut se demander si toute $\mathcal{K}$-algèbre de Banach spectrale $\mathcal{A}$ se décompose en produit uniforme $\mathcal{A} = \prod^u \mathcal{A}^\alpha$ de $\mathcal{K}$-algèbres de Banach spectrales « connexes »[16].

Il n'en est rien. Soit en effet $\mathrm{B}(\mathcal{A})$ l'algèbre de Boole des idempotents de $\mathcal{A}$ (ou de $\mathcal{A}^o$, c'est la même chose). Une telle décomposition, qui équivaut à $\mathcal{A}^o = \prod \mathcal{A}^{\alpha o}$, a lieu si et seulement si $\mathrm{B}(\mathcal{A})$ est complet (toute famille a un supremum) et atomique (tout élément non nul est le supremum d'une famille d'éléments minimaux non nuls).

Inversement, partons d'une algèbre de Boole B et construisons la $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme $\mathcal{A} := (\mathcal{K}\langle T_b\rangle_{b\in \mathrm{B}}/(T_b T_{b'} - T_{b\wedge b'},\ T_b + T_{\neg b'} - 1))^u$ topologiquement engendrée par les idempotents T_b. On a $\mathrm{B}(\mathcal{A}) \cong \mathrm{B}$. Si B est par exemple une algèbre de Boole libre infinie - jamais complète ni atomique -, $\mathcal{A}$ n'admet pas de décomposition en produit uniforme de facteurs connexes. En s'appuyant sur [4, cor. 9.2.7] (voir aussi [22]), on peut d'ailleurs montrer que le spectre de Berkovich $\mathscr{M}(\mathcal{A})$ s'identifie au spectre maximal de B (qui lui-même s'identifie à l'espace profini des composantes connexes de $\mathrm{Spec}\ \mathcal{A}$), et $\mathcal{A}$ à l'algèbre des fonctions continues bornées à valeurs dans $\mathcal{K}$ sur cet espace.

2.7.3. La *transformée de Gelfand* d'une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme $\mathcal{A} \neq 0$ est

$$\Gamma\mathcal{A} := \prod_{x\in\mathscr{M}(\mathcal{A})}^u \mathscr{H}(x), \tag{2.30}$$

le produit étant pris sur les points du spectre de Berkovich, c'est-à-dire les semi-normes multiplicatives bornées, et $\mathscr{H}(x)$ désignant le complété du corps résiduel de x, *cf.* [4, cor. 1.3.2]. On a un monomorphisme canonique $\mathcal{A} \to \Gamma\mathcal{A}$, qui est isométrique si et seulement si $\mathcal{A}$ est spectrale [4, 1.3.2]. Le spectre $\mathscr{M}(\Gamma\mathcal{A})$ est le compactifié de Stone-Cech de $\mathscr{M}(\mathcal{A})$ discrétisé [4, 1.2.3], et l'application $\mathscr{M}(\Gamma\mathcal{A}) \to \mathscr{M}(\mathcal{A})$ est la surjection canonique.

Cette construction définit un endofoncteur Γ de $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$: tout morphisme $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B}$ induit un homomorphisme « diagonal » continu $\mathscr{H}(x) \to \prod_{f_*(y)=x}^u \mathscr{H}(y)$ et on obtient $\Gamma(f)$ en prenant le produit uniforme lorsque x parcourt $\mathscr{M}(\mathcal{A})$. C'est un foncteur fidèle (puisque $\mathcal{B} \to \Gamma\mathcal{B}$ est un monomorphisme), non plein.

On déduit de là qu'un homomorphisme continu $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ d'algèbres de Banach spectrales est isométrique si le morphisme associé $\mathscr{M}(\mathcal{B}) \to \mathscr{M}(\mathcal{A})$ est surjectif (la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple du plongement de $\mathcal{K}\langle T\rangle$ dans le complété de son corps de fractions).

16. Une algèbre de Banach uniforme est connexe (*i.e.* n'a d'autre idempotent que 0 et 1) si et seulement si son spectre de Berkovich $\mathscr{M}(\mathcal{A})$ est connexe, *cf.* [4, cor. 7.4.2].

2.8. **Limites.**

2.8.1. La catégorie des $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes a des égalisateurs : les sous-algèbres représentant ces égalisateurs au sens usuel sont fermées. Comme elle a des produits, elle est *complète*, *i.e.* admet toutes les (petites) limites [20, V.2 cor. 2].

Dans le cas d'un système projectif $(\mathcal{A}^\alpha)$ de $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes indexé par un ensemble ordonné $(\{\alpha\}, \leq)$ (non nécessairement filtrant), la limite s'obtient comme *limite uniforme* définie par

$$\operatorname{ulim} \mathcal{A}^\alpha := \{a = (a^\alpha) \in \lim \mathcal{A}^\alpha,\ |a| := \sup |a^\alpha|_{sp} < \infty\}. \tag{2.31}$$

C'est bien une algèbre de Banach uniforme (et même spectrale), et on a (compte tenu de ce que $(\ )^o$ est la boule unité pour la norme spectrale)

$$(\operatorname{ulim} \mathcal{A}^\alpha)^o = \lim \mathcal{A}^{\alpha o}. \tag{2.32}$$

En particulier, les conditions (1) à (4) du cor. 2.3.2 sont préservées par passage à la limite.

2.8.2. *Exemples.* (1) Soit (r_i) une suite de réels positifs tendant vers 1 en croissant. Alors les algèbres de fonctions analytiques en la variable T sur les « disques fermés » de rayon r^i forment un système projectif de $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes, de limite uniforme $\mathcal{K}^o[[T]] \otimes_{\mathcal{K}^\circ} \mathcal{K}$, l'algèbre des fonctions analytiques bornées sur le « disque unité ouvert ».

(2) Pour $|\varpi| < 1$, les algèbres $\mathcal{K}\langle T, \frac{\varpi^j}{T}\rangle$ de fonctions analytiques sur les « couronnes fermées » de rayons $(|\varpi|^j, 1)$ forment un système projectif de $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes, de limite uniforme $\mathcal{K}\langle T\rangle$: c'est le cas le plus simple du théorème d'extension de Riemann non archimédien (*cf.* §4).

2.8.1. **Lemme.** *Soit $(\mathcal{A}^\alpha)$ un système projectif de $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes, de limite uniforme $\mathcal{A}$. Alors l'homomorphisme canonique $\mathcal{A}^o/\varpi \to \lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi)$ est injectif.*

Démonstration. En effet, comme $\mathcal{A}^{\alpha o}$ est sans ϖ-torsion, on a une suite exacte $0 \to \lim \mathcal{A}^{\alpha o} \xrightarrow{.\varpi} \lim \mathcal{A}^{\alpha o} \to \lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi)$. □

2.8.2. **Lemme.** *Soit $(\mathcal{A}^\alpha)$ un système projectif de $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbres de Banach uniformes. La limite uniforme est canoniquement une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre de Banach uniforme. Notons $g^{\frac{1}{m}}$ l'image de $T^{\frac{1}{m}}$ dans chaque $\mathcal{A}^\alpha$. On a un isomorphisme canonique*

$$g^{-\frac{1}{p^\infty}} \lim \mathcal{A}^{\alpha o} \cong \lim g^{-\frac{1}{p^\infty}} \mathcal{A}^{\alpha o}.$$

Démonstration. Cela découle, dans le cadre $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], T^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^{oo}[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$, de ce que $()^a$ et $()_*$ préservent les limites ; alternativement, de l'interversion de limites $\lim_m \lim_\alpha g^{-\frac{1}{p^m}} \mathcal{A}^{\alpha o} = \lim_\alpha \lim_m g^{-\frac{1}{p^m}} \mathcal{A}^{\alpha o}$. □

Ce lemme s'applique notamment au cas du système de localisations $(\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^u)$ (qui contiennent $\frac{1}{g}$) et montre, compte tenu du lemme 2.5.2, que la limite uniforme $\tilde{\mathcal{A}}$ vérifie $\tilde{\mathcal{A}}^o = g^{-\frac{1}{p^\infty}} \tilde{\mathcal{A}}^o$.

2.9. **Colimites.**

2.9.1. Soit $(\mathcal{B}_\alpha)$ un système inductif de $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes indexé par un ensemble $(\{\alpha\},\leq)$ *filtrant*. On munit $\operatorname{colim}\mathcal{B}_\alpha$ de la semi-norme (spectrale) limite $|(b_\alpha)| = \lim_\alpha |b_\alpha|_{sp}$ (bien définie en vertu de la monotonie), et on définit la *colimite uniforme* comme étant le complété séparé $\operatorname{ucolim}\mathcal{B}_\alpha$ de cette colimite semi-normée. Munie de la norme induite, c'est une algèbre de Banach uniforme (et même spectrale).

On vérifie immédiatement que la colimite filtrante uniforme est une colimite filtrante dans $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$, et on a $(\operatorname{ucolim}\mathcal{B}_\alpha)^\circ = \widehat{\operatorname{colim}\mathcal{B}^\circ_\alpha}$ (avec la notation du sorite 2.3.1, on a ${}^{\operatorname{colim}\mathcal{B}^\circ_\alpha}|\,b| = \lim_\alpha |b_\alpha|_{sp}$).

Si les normes sont spectrales et les morphismes $\mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ isométriques, il en est de même de $\mathcal{B}_\alpha \to \operatorname{ucolim}\mathcal{B}_\beta$.

2.9.2. Comme $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ admet des colimites filtrantes et des sommes amalgamées $\hat\otimes^u$ (donc tous les coégalisateurs puisqu'il y a un objet initial), elle est *cocomplète*, *i.e.* admet toutes les (petites) colimites (*cf.* [20, IX th. 1, V th. 2]).

Les ucolim commutent aux $\hat\otimes^u$, donc à la localisation uniforme $(\,)\{\frac{\lambda}{g}\}^u$ en vertu de la formule (2.25).

2.9.3. *Exemples.* (1) Si $\mathcal{K}$ est de caractéristique $p>0$, le complété de sa clôture radicielle est $\operatorname{ucolim}\mathcal{K}^{\frac{1}{p^i}}$.

(2) Soient $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach spectrale, et g un élément de $\mathcal{A}^o$. Voyons $\mathcal{A}$ comme $\mathcal{K}\langle T\rangle$-algèbre via $T\mapsto g$. Notons que $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^{i+1}}}\rangle$ admet la base orthogonale $1, T^{\frac{1}{p^{i+1}}}, \dots, T^{\frac{p-1}{p^{i+1}}}$ sur $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^i}}\rangle$. On pose

$$\mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^i}}\rangle := \mathcal{A}\hat\otimes^u_{\mathcal{K}\langle T\rangle}\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^i}}\rangle,\quad \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle := \operatorname{ucolim}\mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^i}}\rangle = \mathcal{A}\hat\otimes^u_{\mathcal{K}\langle T\rangle}\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle. \tag{2.33}$$

Alors d'après la rem. 2.2.7, $\mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^i}}\rangle \to \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^{i+1}}}\rangle$ est isométrique, et il en est donc de même de $\mathcal{A}\to\mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$. En outre, on a

$$\mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^i}}\rangle = (\mathcal{A}\langle T^{\frac{1}{p^i}}\rangle/(T-g))^u \tag{2.34}$$

(*cf.* formule (2.4)).

(3) Toute $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme $\mathcal{B}$ est colimite (uniforme) filtrante de $\mathcal{K}$-algèbres affinoïdes réduites $\mathcal{B}_\alpha$, en telle manière que $\operatorname{colim}\mathcal{B}_\alpha\to\mathcal{B}$ est bijectif [19, 2.6.2]. Il suffit, pour tout sous-ensemble fini $\alpha\subset\mathcal{B}^o$, de prendre pour $\mathcal{B}_\alpha$ l'algèbre affinoïde réduite image dans $\mathcal{B}$ de l'objet libre $\mathcal{K}\langle T_s\rangle_{s\in\alpha}$ sur α. L'homomorphisme $\operatorname{colim}\mathcal{B}^o_\alpha\to\mathcal{B}^o$ est clairement surjectif, et il est injectif puisque chaque $\mathcal{B}^o_\alpha\to\mathcal{B}^o$ l'est. D'où le résultat en complétant puis inversant ϖ.

Notons toutefois que les $\mathcal{K}$-algèbres affinoïdes réduites sont par définition topologiquement de présentation finie. Mais elles ne sont pas de présentation finie dans $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ au sens catégorique, *i.e.* ne commutent pas aux colimites filtrantes, comme on le voit déjà avec $\mathcal{K}\langle T\rangle$: on a $\operatorname{colim}\operatorname{Hom}(\mathcal{K}\langle T\rangle,\mathcal{B}_\alpha) = \operatorname{colim}\mathcal{B}^o_\alpha$, $\operatorname{Hom}(\mathcal{K}\langle T\rangle,\operatorname{ucolim}\mathcal{B}_\alpha) = \widehat{\operatorname{colim}\mathcal{B}^o_\alpha}$.

(4) Les algèbres $\mathcal{K}\langle\frac{T}{\varpi^i}\rangle$ de fonctions analytiques sur les « disques fermés » de rayon $|\varpi|^i$ forment un système inductif de $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes. La colimite au sens usuel est l'algèbre des germes de fonctions analytiques en l'origine. La semi-norme limite est donnée par $|\sum a_jT^j| := \lim_{\mathrm{i}}\max_{\mathrm{j}}|a_j\varpi^{ij}| = |a_0|$ (compte tenu de ce que pour $i>>0$, $\max_j$ est atteint pour le premier j tel que $a_j\neq 0$). La colimite uniforme est donc $\mathcal{K}$, les applications $\mathcal{K}\langle\frac{T}{\varpi^i}\rangle\to\mathcal{K}$ étant données par l'évaluation en 0.

Ce dernier exemple est un cas particulier du résultat suivant (non utilisé dans la suite de l'article, mais qu'on pourra mettre en regard du th. 4.2.2 - colimite *vs.* limite, voisinages tubulaires de $f=0$ *vs.* complémentaires de voisinages tubulaires de $g=0$).

2.9.1. **Proposition.** *Soient $\mathcal{B}$ une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme, et $f \in \mathcal{B}^o$. On a un isomorphisme canonique*

$$\operatorname{ucolim} \mathcal{B}\{\frac{f}{\varpi^i}\}^u \xrightarrow{\sim} (\mathcal{B}/f\mathcal{B})^u \tag{2.35}$$

(où $(\ )^u$ désigne le complété-séparé pour la semi-norme spectrale associée).

Démonstration. Comme la norme de l'image f dans $\mathcal{B}\{\frac{f}{\varpi^i}\}^u$ est $\leq |\varpi|^i$, l'image de f dans $\operatorname{ucolim} \mathcal{B}\{\frac{f}{\varpi^i}\}^u$ est nulle. Par ailleurs, $\mathcal{B}\{\frac{f}{\varpi^i}\}/f = \mathcal{B}\langle U\rangle/(f, \varpi^i U - f) = \mathcal{B}/f$. On en déduit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \operatorname{ucolim} \mathcal{B}\{\frac{f}{\varpi^i}\}^u & \rightleftarrows & (\mathcal{B}/f\mathcal{B})^u \end{array}$$

où les deux triangles commutent. Pour conclure, il suffit de voir que les flèches partant de $\mathcal{B}$ sont des épimorphismes. Or c'est clair pour $\mathcal{B} \to (\mathcal{B}/f\mathcal{B})^u$ (épimorphisme extrémal non nécessairement surjectif) et $\mathcal{B} \to \mathcal{B}\{\frac{f}{\varpi^i}\}$, et les colimites préservent les épimorphismes. □

2.9.2. **Corollaire.** *Soient $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme, et $g \in \mathcal{A}^o$. On un isomorphisme canonique*

$$\operatorname{ucolim} \mathcal{A}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{T-g}{\varpi^i}\}^u \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle. \tag{2.36}$$

Démonstration. D'après (2.34) et (2.35), on a $\operatorname{ucolim}_i \mathcal{A}\langle T^{\frac{1}{p^j}}\rangle\{\frac{T-g}{\varpi^i}\}^u \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^j}}\rangle$, d'où le résultat en passant à la colimite uniforme sur j et intervertissant avec la colimite uniforme sur i. □

3. La catégorie bicomplète des algèbres perfectoïdes.

Il s'agit d'algèbres de Banach uniformes $\mathcal{A}$ dont l'endomorphisme de Frobenius sur la réduction modulo p de $\mathcal{A}^o$ est surjectif. Nous passons en revue les propriétés générales de ces algèbres, notamment le basculement et la préservation par extension finie étale. Nous verrons aussi que les limites et colimites sont représentables, et que le plongement de la catégorie des algèbres perfectoïdes dans celles des algèbres de Banach uniformes possède un adjoint à droite. Les colimites sont donc les colimites uniformes, mais les limites ne sont pas les limites uniformes en général.

On note F l'endomorphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$ de tout anneau commutatif de caractéristique $p > 0$.

3.1. **Corps perfectoïdes.**

3.1.1. Soit $\mathcal{K}$ un corps complet pour une valeur absolue *non archimédienne non discrète*, de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$. Suivant [29, §3], on dira que $\mathcal{K}$ est un *corps perfectoïde* s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

$i)$ $\mathcal{K}^o/p \xrightarrow{F} \mathcal{K}^o/p$ est surjectif,

$ii)$ $\mathcal{K}^o/\varpi \xrightarrow{F} \mathcal{K}^o/\varpi$ est surjectif (pour tout $\varpi \in \mathcal{K}^{oo} \setminus 0$ tel que $p\mathcal{K}^o \subset \varpi\mathcal{K}^o$)

$iii)$ $\sigma : \mathcal{K}^o/\varpi_{\frac{1}{p}} \overset{x\mapsto x^p}{\to} \mathcal{K}^o/\varpi$ est bijectif (pour tout $\varpi_{\frac{1}{p}}$ de norme $|\varpi|^{\frac{1}{p}}$).

La topologie de $\mathcal{K}^o$ est alors la topologie ϖ-adique, le groupe de valuation Γ relatif à ϖ est p-divisible (donc dense dans $\mathbf{R}$), et k est parfait. Si $\mathcal{K}$ est perfectoïde de caractéristique p, il est parfait.

N. B. Si l'écriture abrégée $\mathcal{K}^o/\varpi$ semble sans ambiguïté, il convient en revanche de ne pas confondre le $\mathcal{K}^o/\varpi$-module plat $\mathcal{K}^{oo}/\varpi\mathcal{K}^{oo} \cong \mathcal{K}^{oo} \otimes_{\mathcal{K}^o} \mathcal{K}^o/\varpi$ avec son quotient non plat $\mathcal{K}^{oo}/\varpi\mathcal{K}^o$, qui est l'idéal maximal de $\mathcal{K}^o/\varpi$.

3.1.2. *Exemples.* (1) *Le corps perfectoïde cyclotomique* $\hat{K}_\infty$ Soit de nouveau K_0 le corps de fractions de l'anneau de Witt $W(k)$ d'un corps parfait k. On fixe une fois pour toutes un système compatible $(\zeta_{p^i})_{i\in\mathbf{N}}$ de racines primitives p^i-ièmes de 1 dans une clôture algébrique (d'où un isomorphisme $\mathbf{Z}_p \cong \lim \mu_{p^i}$). Considérons la tour cyclotomique

$$K_i := K_0(\zeta_{p^i}) = K_0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^i}).$$

On a $K_i^o = W(k)[\zeta_{p^i}]$, d'uniformisante $\zeta_{p^i} - 1$, et $K_i^o \equiv (K_{i+1}^o)^p \mod p$. Le complété $\hat{K}_\infty$ de $K_\infty := \cup K_i$ est donc un corps perfectoïde. Son groupe de valuation est $\frac{1}{p-1}\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$.

(2) Soit π une uniformisante de K_0. On a $K_0(\pi^{\frac{1}{p^i}})^o = W(k)[\pi^{\frac{1}{p^i}}]$, et $K_0(\pi^{\frac{1}{p^i}})^o \equiv (K_0(\pi^{\frac{1}{p^{i+1}}})^o)^p \mod p$. Le complété de $K_0(\pi^{\frac{1}{p^\infty}})$ est donc un corps perfectoïde.

Cet argument élémentaire est de portée limitée : le cas du compositum de ces deux exemples lui échappe. On a toutefois le résultat suivant (que nous n'utiliserons que marginalement).

3.1.1. **Proposition.** [13, prop. 6.6.6 [17]] *Soient $\mathcal{K}$ un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne non discrète et $\mathcal{K}^s$ une clôture séparable. Alors $\mathcal{K}$ est un corps perfectoïde si et seulement s'il est profondément ramifié, i.e. $\Omega_{(\mathcal{K}^s)^o/\mathcal{K}^o}$ est annulé par $\mathcal{K}^{oo}$.*

3.1.2. **Corollaire.** *La complétion $\mathcal{L}$ de toute extension algébrique d'un corps perfectoïde $\mathcal{K}$ est un corps perfectoïde.*

Démonstration. Remarquons que $\mathcal{K}$ est parfait. Pour les extensions finies $\mathcal{L}$, le résultat suit immédiatement de la proposition. On obtient le cas général par passage à la colimite des sous-extensions finies. □

17. Voir aussi l'article précurseur [11].

3.2. **Algèbres perfectoïdes.**

3.2.1. Suivant [29, §5], on dira qu'une algèbre de Banach uniforme $\mathcal{A}$ sur le corps perfectoïde $\mathcal{K}$ est une $\mathcal{K}$-*algèbre perfectoïde* si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

$i)$ $\mathcal{A}^o/p \xrightarrow{F} \mathcal{A}^o/p$ est surjectif,

$ii)$ $\mathcal{A}^o/p \xrightarrow{F} \mathcal{A}^o/p$ est presque surjectif dans le cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$,

$iii)$ $\mathcal{A}^o/\varpi \xrightarrow{F} \mathcal{A}^o/\varpi$ est surjectif,

$iv)$ $\mathcal{A}^o/\varpi_{\frac{1}{p}} \xrightarrow{x\mapsto x^p} \mathcal{A}^o/\varpi$ est bijectif (avec $|\varpi_{\frac{1}{p}}|^p = |\varpi|$, *cf.* rem. 2.3.3),

$v)$ Frobenius induit un isomorphisme (*resp.* presque-isomorphisme) de $\mathcal{K}^o$-algèbres

$$\mathcal{A}^o/\varpi_{\frac{1}{p}} \otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi_{\frac{1}{p}},\sigma} \mathcal{K}^o/\varpi = \mathcal{A}^o/\varpi \otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi,F} \mathcal{K}^o/\varpi \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}^o/\varpi.$$

Les morphismes d'algèbres perfectoïdes sont les homomorphismes continus d'algèbres, de sorte que la catégorie $\mathcal{K}$-$\mathbf{Perf}$ des $\mathcal{K}$-algèbres perfectoïdes est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$. Elle admet un objet initial $\mathcal{K}$ et un objet final 0.

Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach fixée, les $\mathcal{K}$-algèbres perfectoïdes $\mathcal{B}$ munies d'un morphisme $\mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}$ sont appelées $\mathcal{A}$-*algèbres perfectoïdes*. Elles forment de manière évidente une catégorie $\mathcal{A}$-$\mathbf{Perf}$.

3.2.2. *Remarques.* (1) Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde multiplicativement normée (donc intègre), le complété de son corps de fractions est un corps perfectoïde.

(2) Si $\operatorname{car} \mathcal{K} = p > 0$, une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme $\mathcal{A}$ est perfectoïde si et seulement si elle est parfaite (*i.e.* F est bijectif).

Par ailleurs, une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est uniforme si et seulement si elle est réduite et $\mathcal{A}^p$ est fermé [16, lem. 3.5] [18], autrement dit si l'endomorphisme de Frobenius est injectif et d'image fermée. On en déduit qu'une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est perfectoïde si et seulement si elle est parfaite (l'uniformité est automatique).

Il résulte alors du cor. 2.3.2 que le foncteur $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^o$ induit une équivalence de la catégorie des $\mathcal{K}$-algèbres perfectoïdes vers celle des $\mathcal{K}^o$-algèbres $\mathfrak{A}$ parfaites, plates, complètes, et telles que $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_*$.

En toute caractéristique, on a (*cf.* [29, 5.6]) :

3.2.1. **Lemme.** *Le foncteur $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^o$ induit une équivalence de la catégorie des $\mathcal{K}$-algèbres perfectoïdes vers celle des $\mathcal{K}^o$-algèbres $\mathfrak{A}$ plates, complètes, telles que $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_*$ et que $\mathfrak{A}/\varpi_{\frac{1}{p}} \xrightarrow{x\mapsto x^p} \mathfrak{A}/\varpi$ soit bijectif.*

Démonstration. Compte tenu du cor. 2.3.2, il reste à vérifier que si $\mathfrak{A}$ vérifie ces conditions, l'algèbre de Banach $\mathfrak{A}[\frac{1}{\varpi}]$ est uniforme. Mais cela suit du sorite 2.3.1 $(5f)$. □

On a aussi équivalence avec la catégorie analogue de $\mathcal{K}^{oa}$-algèbres.

3.2.3. *Exemples.* (1) L'exemple standard est $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$, le complété de $\cup\mathcal{K}[T^{\frac{1}{p^i}}]$. On a $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle = \operatorname{ucolim} \mathcal{K}[T^{\frac{1}{p^i}}]$ et $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^o = \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$, le complété ϖ-adique de $\cup\mathcal{A}^o[T^{\frac{1}{p^i}}]$. Plus généralement, si $\mathcal{A}$ est perfectoïde, $\mathcal{A}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ l'est aussi. Le couple $(\mathcal{A}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle, (T^{\frac{1}{p^\infty}}))$ est universel parmi les couples $(\mathcal{B}, (g^{\frac{1}{p^\infty}}))$ où $\mathcal{B}$ est une $\mathcal{A}$-algèbre perfectoïde et $(g^{\frac{1}{p^\infty}})$ une suite compatible dans $\mathcal{B}$ de racines p^m-ièmes d'un élément $g \in \mathcal{B}^o$.
(2) *la $\hat{K}_\infty$-algèbre perfectoïde $\hat{A}_\infty$* Reprenons les notations de l'ex. 3.1.2 (1). Soit $A_i := K_i^o[[T_1^{\frac{1}{p^i}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^i}}]] \otimes_{K_i^o} K_i$ la K_i-algèbre de Banach formée des séries à coefficients

18. L'hypothèse « réduite », nécessaire, est oubliée dans l'énoncé de *loc. cit.* , mais utilisée dans la preuve sous la forme que $a \mapsto |a^{p^m}|^{\frac{1}{p^m}}$ est une norme.

bornés dans K_i, munie de la norme supremum des coefficients (qui est multiplicative et induit la topologie ϖ-adique). Pour lorsque $i \in \mathbf{N}$ varie, elles forment un sysème inductif de K_0-algèbres de Banach uniformes dont les morphismes de transition sont isométriques.

On a $A_0^o = A := W(k)[[T_1, \dots, T_n]]$ et pour tout i, $A_i^o = K_i^o[[T_1^{\frac{1}{p^i}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^i}}]]$ est un anneau noethérien régulier local complet de dimension $n+1$. L'unique idéal premier de A_i^o au-dessus de p est engendré par $\zeta_{p^i} - 1$. En outre, $A_i^o \equiv (A_{i+1}^o)^p \mod p$.

Le complété $\hat{A}_\infty := \operatorname{ucolim} A_i$ de $A_\infty := \cup A_i$ est donc une $\hat{K}_\infty$-algèbre perfectoïde, dont l'anneau des éléments bornés est contenu dans $\hat{A}_\infty^o = \hat{K}_\infty^o[[T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^\infty}}]]$ (mais non égale : $\sum \varpi_{\frac{1}{p^n}} T^n$ n'est pas dans $\hat{A}_\infty^o$) ; on a en fait un isomorphisme canonique

$$\hat{A}_\infty^o \cong W(k[[T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^\infty}}]])\hat{\otimes}\hat{K}_\infty^o. \tag{3.1}$$

En effet, on a un morphisme canonique $W(k[[T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^\infty}}]])\hat{\otimes}\hat{K}_\infty^o \to \hat{A}_\infty^o$ entre $W(k)$-modules p-adiquement complets sans torsion, qui est un isomorphisme modulo p.

(3) Pour tout corps perfectoïde $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^o[[T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, \dots, T_n^{\frac{1}{p^\infty}}]][\frac{1}{p}]$ est perfectoïde : la surjectivité de F modulo p se vérifie immédiatement.

3.2.2. **Proposition.** *Supposons $\mathcal{K}$ de caractéristique $p > 0$. L'inclusion des $\mathcal{K}$-algèbres perfectoïdes dans les $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes admet un adjoint à gauche : $\mathcal{A} \mapsto \operatorname{ucolim} \mathcal{A}^{\frac{1}{p^i}} = \operatorname{ucolim}_{\mathrm{F}} \mathcal{A}$, la complétion de la clôture radicielle. Elle admet aussi un adjoint à droite : $\mathcal{A} \mapsto \operatorname{ulim}_{\mathrm{F}} \mathcal{A}$.*

Démonstration. (1) *cf.* [29, prop. 5.9]. (2) en découle (*cf.* [14, §6.3]). □

3.3. **Basculement.**

3.3.1. On suppose $\operatorname{car} \mathcal{K} = 0$. L'application multiplicative $\lim_{x \to x^p} \mathcal{K}^o \to \lim_F \mathcal{K}^o/\varpi$ étant bijective, on obtient à la limite une application multiplicative continue $\# : \lim_F \mathcal{K}^o/\varpi \to \mathcal{K}^o$. Il existe $\varpi^\flat \in \lim_F \mathcal{K}^o/\varpi$ tel que $|\#(\varpi^\flat)| = |\varpi|$.

On vérifie [29, lem. 3.4] que $\mathcal{K}^{\flat o} := \lim_F \mathcal{K}^o/\varpi$ est l'anneau de valuation du corps perfectoïde de caractéristique p

$$\mathcal{K}^\flat := (\lim_F \mathcal{K}^o/\varpi)[\frac{1}{\varpi^\flat}], \quad |x^\flat| := |\#(x^\flat)|, \tag{3.2}$$

et que $\#$ induit un isomorphisme $\mathcal{K}^{\flat o}/\varpi^\flat \cong \mathcal{K}^o/\varpi$.

3.3.2. *Remarque.* Dans l'autre sens, il n'y a pas de choix canonique d'un corps perfectoïde $\mathcal{K}$ de car. 0 tel que $\mathcal{K}^\flat$ soit un corps perfectoïde de car. p donné (à « isomorphisme de Frobenius » près, ces corps $\mathcal{K}$ correspondent aux points de degré 1 de la courbe de Fargues-Fontaine [9]).

3.3.3. Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme. L'application multiplicative $\lim_{x \to x^p} \mathcal{A}^o \to \lim_F \mathcal{A}^o/\varpi$ est un homéomorphisme [14, th. 6.3.92], ce qui fournit une application multiplicative continue

$$\# : \lim_F \mathcal{A}^o/\varpi \to \mathcal{A}^o. \tag{3.3}$$

En outre, $\lim_F \mathcal{A}^o/\varpi$ est canoniquement une $\mathcal{K}^{\flat o}$-algèbre parfaite $\varpi^\flat$-adiquement complète. La norme associée n'est autre que autre que

$$|a^\flat| := |\#(a^\flat)|. \tag{3.4}$$

On obtient ainsi une $\mathcal{K}^\flat$-algèbre de Banach perfectoïde (la *basculée* de $\mathcal{A}$)

$$\mathcal{A}^\flat := (\lim_F \mathcal{A}^o/\varpi)[\frac{1}{\varpi^\flat}] \tag{3.5}$$

qui vérifie $\mathcal{A}^{\flat o} = \lim_F \mathcal{A}^o/\varpi$, et $\#$ s'étend en une application multiplicative $\mathcal{A}^\flat \to \mathcal{A}$. Ces constructions sont fonctorielles en $\mathcal{A}$; on obtient ainsi un foncteur

$$\flat : \mathcal{K}\text{-}\mathbf{uBan} \to \mathcal{K}^\flat\text{-}\mathbf{Perf}. \tag{3.6}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera aussi $\flat$ sa restriction à $\mathcal{K}$-$\mathbf{Perf}$.

Par ailleurs, puisque $\mathcal{A}$ est uniforme, le noyau de F^n sur $\mathcal{A}^o/\varpi$ est $\varpi^{\frac{1}{p^n}}(\mathcal{A}^o/\varpi)$ (par le point $(5f)$ du sorite 2.3.1 appliqué à la norme spectrale). Donc le noyau de l'homomorphisme $\lim_F(\mathcal{A}^o/\varpi) \to \mathcal{A}^o/\varpi$ induit par $\#$ est $\lim_F \varpi^{\frac{1}{p^n}}(\mathcal{A}^o/\varpi) = \varpi^\flat \lim_F(\mathcal{A}^o/\varpi)$ (noter que $\varpi^{\frac{1}{p^n}} a_n$ ne détermine pas a_n, mais que F lève l'ambigüité). On conclut :

3.3.1. **Proposition.** *$\mathcal{A}^\flat$ est perfectoïde, et $\#$ induit un homomorphisme injectif*

$$\mathcal{A}^{\flat o}/\varpi^\flat \hookrightarrow \mathcal{A}^o/\varpi. \tag{3.7}$$

C'est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{A}$ est perfectoïde. □

3.3.4. *Exemples.* (1) $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^\flat$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{K}^\flat\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ (les éléments notés T se correspondant par $\#$).

(2) *La $\hat{K}^\flat_\infty$-algèbre perfectoïde $A^\flat_\infty$.* Reprenons l'ex. 3.1.2, 3.2.3 (2). Posons $\varpi^\flat := (\zeta_{p^i}) - 1$. Alors $\hat{K}^{\flat o}_\infty$ s'identifie au complété $\varpi^\flat$-adique de la clôture radicielle de $k[[\varpi^\flat]]$, et $\hat{A}^{\flat o}_\infty$ au complété $\varpi^\flat$-adique de la clôture radicielle de $k[[\varpi^\flat, T_1, \dots, T_n]]$ (comme on le voit en réduisant mod. $\varpi^\flat$). Les éléments de $\hat{A}^\flat_\infty$ et de $\hat{A}_\infty$ notés T_i se correspondent par $\#$.

(3) Le basculé de $\widehat{\mathcal{K}^o[[T^{\frac{1}{p^\infty}}_{\leq n}]][\frac{1}{p}]}$ est $\widehat{\mathcal{K}^{\flat o}[[T^{\frac{1}{p^\infty}}_{\leq n}]][\frac{1}{\varpi^\flat}]}$.

3.3.5. *Remarques.* (1) *Si $\mathcal{A}$ est perfectoïde, $\#(\mathcal{A}^{\flat o})$ engendre un sous-$\mathcal{K}^o$-module (algèbre) dense de $\mathcal{A}^o$.* En effet, soit $\mathfrak{A}$ l'adhérence de ce sous-module. L'image de $\mathfrak{A} \to \mathcal{A}^o/\varpi \cong \mathcal{A}^{\flat o}/\varpi^\flat$ est $\mathcal{A}^o/\varpi$, donc $\mathfrak{A} = \mathcal{A}^o$ d'après le lemme de Nakayama pour les modules complets.

(2) Si $\mathcal{A}$ est intègre, il en est de même de $\mathcal{A}^\flat$. En effet, si $a^\flat, b^\flat \in \mathcal{A}^\flat$ vérifient $a^\flat b^\flat = 0$, on a $\#(a^\flat)\#(b^\flat) = \#(a^\flat b^\flat) = 0$ dans $\mathcal{A}$, d'où $\#(a^\flat) = 0$ ou $\#(b^\flat) = 0$, et finalement $a^\flat = 0$ ou $b^\flat = 0$.

(3) Si la norme de $\mathcal{A}$ est multiplicative, il en est de même de celle de $\mathcal{A}^\flat$. Et réciproquement si $\mathcal{A}$ est perfectoïde, comme il suit du point (1) (ou de l'intégrité de $\mathcal{A}^o/\mathcal{A}^{oo} \cong \mathcal{A}^{\flat o}/\mathcal{A}^{\flat oo}$).

(4) Les éléments idempotents de $\mathcal{A}$ sont en bijection avec ceux de $\mathcal{A}^o/\varpi$ et aussi avec ceux de $\mathcal{A}^\flat$ (via $e = e^2 \in \mathcal{A}^o \mapsto \bar{e} \in \mathcal{A}^o/\varpi \mapsto e^\flat := (\dots, \bar{e}, \bar{e}) \in \mathcal{A}^{\flat o} \mapsto \#e^\flat = e$).

(5) Un morphisme $\mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}$ d'algèbres perfectoïde est isométrique si et seulement si $\phi^\flat$ l'est. En effet, la condition se traduit par l'injectivité de ϕ^o mod. ϖ, qui s'identifie à $\phi^{\flat o}$ mod. $\varpi^\flat$.

3.3.6. Plaçons-nous dans le cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$. Voici le premier théorème fondamental de la théorie perfectoïde (*cf.* [29, th. 5.2, rem. 5.18, th. 3.7]).

3.3.2. **Théorème.** *(1) Le basculement $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^\flat$ induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{K}$-algèbres perfectoïdes et $\mathcal{K}^\flat$-algèbres perfectoïdes (indépendante du choix de $(\varpi, \varpi^\flat)$).*

(2) Le passage à $(\ )^o$ suivi de la réduction mod. ϖ (resp. $\varpi^\flat$) induit une équivalence entre chacune d'elles et la catégorie des $\mathcal{K}^{o\,a}/\varpi$-algèbres plates $\bar{\mathfrak{A}}$ dont le Frobenius induit un isomorphisme $\bar{\mathfrak{A}}/\varpi_{\frac{1}{p}} \otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi_{\frac{1}{p}},\sigma} \mathcal{K}^o/\varpi \to \bar{\mathfrak{A}}$. □

Dans [10, th. 1.2, th. 3.2], J.-M. Fontaine esquisse une démonstration par extension directe de ses constructions bien connues en théorie de Hodge p-adique : $\mathcal{K}^o$ est quotient de $W(\mathcal{K}^{\flat o})$, et si l'on pose

$$(\mathcal{A}^\flat)^{\sharp o} := W(\mathcal{A}^{\flat o}) \otimes_{W(\mathcal{K}^{\flat o})} \mathcal{K}^o,\ (\mathcal{A}^\flat)^\sharp := (\mathcal{A}^\flat)^{\sharp o}[\frac{1}{\varpi}], \tag{3.8}$$

on obtient un foncteur $\sharp : \mathcal{K}^\flat\text{-}\mathbf{Perf} \to \mathcal{K}\text{-}\mathbf{Perf}$ quasi-inverse de $\flat$. En outre

$$\mathfrak{A} \mapsto (\lim_F \bar{\mathfrak{A}})^{\sharp o},\ \ (resp.\ \mathfrak{A} \mapsto \lim_F \bar{\mathfrak{A}}) \tag{3.9}$$

est quasi-inverse de la réduction mod. ϖ (*resp.* $\varpi^\flat$). Voir [14, §6.3] pour les détails (ainsi que [9], [19]).

Pour $\mathcal{A}$ perfectoïde fixée, on déduit de (1) que le basculement induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{A}$-algèbres perfectoïdes et $\mathcal{A}^\flat$-algèbres perfectoïdes (nous l'utiliserons dans le cas $\mathcal{A} = \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$).

3.3.7. Plus haut, on a associé fonctoriellement à toute $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}^\flat$-algèbre perfectoïde $\mathcal{A}^\flat$ et un monomorphisme $\mathcal{A}^{\flat o}/\varpi^\flat \hookrightarrow \mathcal{A}^o/\varpi$. Posons

$$\natural := \sharp \circ \flat :\ \ \mathcal{K}\text{-}\mathbf{uBan} \to \mathcal{K}\text{-}\mathbf{Perf}. \tag{3.10}$$

3.3.3. **Proposition.** *(1) Le foncteur $\natural$ est adjoint à droite de l'inclusion ι des $\mathcal{K}$-algèbres perfectoïdes dans les $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes. En outre, pour les normes spectrales, la coünité d'adjonction $\mathcal{A}^\natural \to \mathcal{A}$ est isométrique ; c'est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{A}$ est perfectoïde.*

(2) Le foncteur $\flat$ est adjoint à droite de $\iota \circ \sharp$.

Démonstration. (1) L'adjonction vient de ce que $\natural\iota \cong id_{\mathcal{K}\text{-}\mathbf{Perf}}$, et l'isométrie de la coünité d'adjonction de ce que $\mathcal{A}^{\natural o}/\varpi \to \mathcal{A}^o/\varpi$ est injectif (prop. 3.3.1).
(2) s'en déduit par composition d'adjonctions, puisque $\flat \cong \flat_{|\mathcal{K}\text{-}\mathbf{Perf}} \circ \natural$ et que $\flat_{|\mathcal{K}\text{-}\mathbf{Perf}}$ admet comme adjoint à gauche son quasi-inverse $\sharp$. □

En langage catégorique, $\mathcal{K}\text{-}\mathbf{Perf}$ est une *sous-catégorie coréflexive* (pleine) de $\mathcal{K}\text{-}\mathbf{uBan}$ [17].

3.3.8. Une importante application du basculement concerne les produits tensoriels (cf. [29, prop. 6.18]) :

3.3.4. **Proposition.** *Soient $\mathcal{K}$ un corps perfectoïde et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde. Si $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont deux $\mathcal{A}$-algèbres perfectoïdes, leur somme amalgamée en tant qu'algèbre perfectoïde existe et coïncide avec la somme amalgamée $\mathcal{B}\hat{\otimes}^u_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ en tant qu'algèbre de Banach uniforme. L'homomorphisme canonique*

$$(\mathcal{B}^o\hat{\otimes}_{\mathcal{A}^o}\mathcal{C}^o)_* \to (\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C})^o \tag{3.11}$$

est un isomorphisme. En particulier, si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont munies de leur norme spectrale, on a $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C} = \mathcal{B}\hat{\otimes}^u_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$, de boule unité $(\mathcal{B}^o\hat{\otimes}_{\mathcal{A}^o}\mathcal{C}^o)_*$.

Démonstration. Il est clair que Frobenius induit une bijection $(\mathcal{B}^o\hat{\otimes}_{\mathcal{A}^o}\mathcal{C}^o)/\varpi_{\frac{1}{p}} \to (\mathcal{B}^o\hat{\otimes}_{\mathcal{A}^o}\mathcal{C}^o)/\varpi$. D'après le lemme 3.2.1, il suffit alors de montrer que $\mathcal{B}^o\hat{\otimes}_{\mathcal{A}^o}\mathcal{C}^o$ est presque sans ϖ-torsion.

Si $\mathrm{car}\ \mathcal{K} = p$, cela découle du fait que $\mathcal{B}^o\hat{\otimes}_{\mathcal{A}^o}\mathcal{C}^o$ est parfaite (*cf.* rem. 3.2.2 (2)).

Si $\mathrm{car}\ \mathcal{K} = 0$, il suffit d'après l'équivalence (2) du th. 3.3.2 de voir que $\mathcal{B}^{oa}/\varpi \otimes_{\mathcal{A}^{oa}/\varpi} \mathcal{C}^{oa}/\varpi$ est plate sur $\mathcal{K}^{oa}/\varpi$, ce qui s'obtient par basculement : $\mathcal{B}^{oa}/\varpi \otimes_{\mathcal{A}^{oa}/\varpi} \mathcal{C}^{oa}/\varpi \cong$

$\mathcal{B}^{\flat oa}/\varpi^\flat \otimes_{\mathcal{A}^{\flat oa}/\varpi^\flat} \mathcal{C}^{\flat oa}/\varpi^\flat$. Cela montre aussi que les sommes amalgamées commutent au basculement. La troisième assertion résulte de la seconde en vertu du sorite 2.3.1$(2e)(5)$. □

Il s'ensuit que la catégorie des algèbres perfectoïdes admet des colimites finies, qui se calculent comme dans la catégorie des algèbres de Banach uniformes (ce résultat sera renforcé au §3.9). Elles commutent à l'équivalence de basculement.

On déduit aussi de la proposition que le foncteur $-\hat{\otimes}_{\mathcal{K}}\mathcal{A}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathcal{A}$-$\mathbf{Perf} \to \mathcal{K}$-$\mathbf{Perf}$.

3.4. **Extensions étales finies d'algèbres perfectoïdes.**

3.4.1. Soit $\mathcal{K}$ un corps perfectoïde, et plaçons-nous de nouveau dans le cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$. Voici le second théorème fondamental de la théorie perfectoïde (*cf.* [29, th. 7.9][19]), qui généralise le « théorème de pureté » de Faltings.

3.4.1. **Théorème.** *Soient $\mathcal{K}$ un corps perfectoïde et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde.*

(1) *On a des équivalences de catégories*

$\{\mathcal{A}^{oa}$*-algèbres étales finies*$\} \xrightarrow{\sim}$

$\{\mathcal{A}$*-algèbres perfectoïdes étales finies*$\} \xrightarrow{\sim}$

$\{\mathcal{A}$*-algèbres étales finies*$\}$

induites par inversion de ϖ et oubli de la norme respectivement.

(2) *Ces équivalences sont compatibles au basculement.*

En particulier, toute extension étale finie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est perfectoïde (la norme spectrale de $\mathcal{B}$ étant l'unique norme spectrale complète, et aussi l'unique norme spectrale compatible avec la topologie canonique du $\mathcal{A}$-module projectif fini $\mathcal{B}$, *cf.* 2.2.2), et tout $\mathcal{K}$-automorphisme de la $\mathcal{K}$-algèbre $\mathcal{B}$ qui fixe $\mathcal{A}$ est continu, donc isométrique eu égard aux normes spectrales.

3.4.2. *Exemple prophylactique.* On ne peut s'affranchir de l'hypothèse « étale » dans le point (1) du théorème, comme le montre l'exemple suivant, où l'on reprend les notations de 3.2.3 (2) avec $p = n = 2$.

Posons $g := T_1 + T_2$ et considérons la $\hat{K}_\infty$-algèbre de Banach (multiplicativement normée) $\hat{A}_\infty[\sqrt{g}]$. Elle n'est pas perfectoïde. En effet, tout élément $a_1 + a_2\sqrt{g}$ de $\hat{A}_\infty[\sqrt{g}]^o$ vérifie $2a_1, 2a_2, a_1^2 - a_2^2 g \in \hat{A}_\infty^o$ comme on le voit en calculant traces et norme ; en particulier $a_1(0) \in \mathcal{K}^o$. L'élément $f_1 := \frac{i+1}{2}(\sqrt{T_1 + T_2} - \sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})$ est dans $\hat{A}_\infty[\sqrt{g}]^o$ comme on le voit en calculant son carré. Montrons que f_1 n'a pas de racine carrée modulo 2 : si $b = a_1 + a_2\sqrt{g} \in \hat{A}_\infty[\sqrt{g}]^o$ vérifie $b^2 - f_1 \in 2\hat{A}_\infty[\sqrt{g}]^o \subset \hat{A}_\infty^o[\sqrt{g}]$, alors $2a_1a_2 - \frac{i+1}{2} \in \hat{A}_\infty^o$, d'où $|a_1(0)a_2(0)| = 2^{-\frac{3}{2}}$, ce qui contredit le fait que $a_1(0), 2a_2(0) \in \mathcal{K}^o$.

L'exemple 2.4.3 en car. 2 est du même type.

3.4.3. Notons que les foncteurs en jeu sont pleinement fidèles. Commençons par établir la première équivalence du théorème, c'est-à-dire :

3.4.2. **Proposition.** (1) *Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde, toute $\mathcal{A}^{oa}$-algèbre étale finie $\mathfrak{B}$ fournit, après inversion de ϖ, une $\mathcal{A}$-algèbre perfectoïde $\mathcal{B}$ (de manière fonctorielle si on munit $\mathcal{B}$ de la norme spectrale), telle que $\mathcal{B}^{oa} \cong \mathfrak{B}$.*

(2) *Réciproquement, si $\mathcal{B}$ est une $\mathcal{A}$-algèbre perfectoïde étale finie (resp. galoisienne de groupe G), alors $\mathcal{B}^{oa}$ est une $\mathcal{A}^{oa}$-algèbre étale finie (resp. galoisienne de groupe G).*

Démonstration. (1) $\mathfrak{B}$ est ϖ-adiquement complète (lemme 1.7.1) et plate sur $\mathcal{K}^{oa}$. D'autre part, d'après [13, th. 3.5.13 ii], on a $(\mathfrak{B}/\varpi) \otimes_{(\mathcal{A}^{oa}/\varpi)} F^*(\mathcal{A}^{oa}/\varpi) \cong F^*(\mathfrak{B}/\varpi)$. Ainsi F induit un isomorphisme $\mathfrak{B}/\varpi_{\frac{1}{p}} \otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi_{\frac{1}{p}},\sigma} \mathcal{K}^o/\varpi \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}/\varpi$ puisqu'il le fait pour $\mathcal{A}^{oa}/\varpi$. Donc $\mathcal{B} := \mathfrak{B}[\frac{1}{\varpi}]$ est perfectoïde et $\mathcal{B}^{oa} \cong \mathfrak{B}$ (lemme 3.2.1).

(2) a) Commençons par le cas où l'extension $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ est galoisienne de groupe G. D'après le lemme 1.7.1 et la prop. 3.3.4, on a $\mathcal{B}^{oa} \otimes_{\mathcal{A}^{oa}} \mathcal{B}^{oa} = (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})^{oa} = \prod_G \mathcal{B}^{oa}$. Ainsi $\mathcal{B}^{oa}$ est galoisienne sur $\mathcal{A}^{oa}$, donc étale finie (prop. 1.9.1 (1)).

b) En général, le rang de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{A}$ étant fini continu et borné, on peut supposer, en décomposant $\mathcal{A}$ en un nombre fini de facteurs, que ce rang est constant, égal à r. D'après le lemme 1.9.2, on a une extension galoisienne $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$ de groupe $\mathfrak{S}_r$ se factorisant par $\mathcal{B}$ et telle que $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{\mathfrak{S}_{r-1}}$. D'après le pas (a), $\mathcal{C}^{oa}$ est une $\mathcal{A}^{oa}$-algèbre galoisienne de groupe $\mathfrak{S}_r$. On a aussi $\mathcal{B}^{oa} = (\mathcal{C}^{oa})^{\mathfrak{S}_{r-1}}$ (lemme 2.4.1 (2)), qui est donc étale finie de rang constant sur $\mathcal{A}^{oa}$, égal au rang de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{A}$ (prop. 1.9.1 (3)). □

3.4.4. Compte tenu de cette proposition, établir la seconde équivalence du théorème revient à prouver que $(*)_{\mathcal{A}}$: *toute $\mathcal{A}$-algèbre $\mathcal{B}$ étale finie est perfectoïde.*

En voici une esquisse de démonstration, suivant l'approche de [19, th. 3.6.21], qui ne fait plus intervenir la presque-algèbre (le lecteur vérifiera que le recours à quelques énoncés ultérieurs ne crée pas de cercle vicieux). En car. p, $(*)_{\mathcal{A}}$ suit de ce qu'une algèbre étale finie sur un anneau parfait est parfaite. Supposons alors $\operatorname{car} \mathcal{K} = 0$.

(a) On prouve d'abord $(*)_{\mathcal{L}}$ pour toute extension finie $\mathcal{L}$ de $\mathcal{K}$, *cf.* cor. 3.1.2.

(b) On montre que la transformée de Gelfand $\Gamma(\mathcal{A})$ est perfectoïde : c'est un produit uniforme de corps perfectoïdes $\mathscr{H}(x)$, *cf.* prop. 3.7.1. On déduit de là et du pas précédent que pour toute $\mathcal{A}$-algèbre étale finie $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma(\mathcal{A})$ est perfectoïde et spectrale.

(c) On a $\Gamma(\mathcal{A}^\flat) \cong \Gamma(\mathcal{A})^\flat$, *cf.* rem. 3.7.2. Les corps perfectoïdes $\mathscr{H}(x)^\flat$ sont colimites uniformes de localisations rationnelles $\mathcal{A}^\flat_\alpha$ de $\mathcal{A}^\flat$, et $\mathscr{H}(x)$ est colimite uniforme des basculés $\mathcal{A}_\alpha$ qui sont des localisations rationnelles de $\mathcal{A}^\flat$, *cf.* rem. 3.6.4. On a alors un carré essentiellement commutatif d'équivalences

$$\begin{array}{ccc} 2\text{-colim}\,(\mathcal{A}^\flat_\alpha\text{-}\mathbf{Alg}^{et.fin}) & \longrightarrow & \mathscr{H}(x)^\flat\text{-}\mathbf{Alg}^{et.fin} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2\text{-colim}\,(\mathcal{A}_\alpha\text{-}\mathbf{Alg}^{et.fin}) & \longrightarrow & \mathscr{H}(x)\text{-}\mathbf{Alg}^{et.fin} \end{array}$$

où les équivalences verticales sont données par ♯ (compte tenu de $(*)_{\mathcal{A}^\flat}$ et $(*)_{\mathcal{A}^\flat_\alpha}$), et où les équivalences horizontales sont données par l'approximation « à la Elkik » [13, prop. 5.4.53] et [SGA 4, exp. 7 lemme 5.6] (voir aussi [29, 7.5]) (notant que $\operatorname{colim} \mathcal{A}^o_\alpha$ est hensélien, de complété $\mathcal{A}^o$) [19].

(d) Par compacité de $\mathscr{M}(\mathcal{A})$, on obtient un recouvrement fini de $\mathscr{M}(\mathcal{A})$ par des localisations rationnelles $\mathscr{M}(\mathcal{A}_\alpha)$ tel que $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_\alpha$ soit perfectoïde. Pour passer des $\mathcal{A}_\alpha$ à $\mathcal{A}$, on utilise les bonnes propriétés faisceautiques des algèbres perfectoïdes, *cf.* [29, th. 7.9][19, th. 3.6.21].

Le point (2) du théorème suit du point (1), des équivalences du th. 3.3.2 et de l'équivalence remarquable de Grothendieck (*cf.* 1.8.2) :

$\mathcal{A}^{oa}\text{-}\mathbf{Alg}^{et.f} \cong \mathcal{A}^{oa}/\varpi\text{-}\mathbf{Alg}^{et.f} \cong \mathcal{A}^{\flat oa}/\varpi^\flat\text{-}\mathbf{Alg}^{et.f} \cong \mathcal{A}^{\flat oa}\text{-}\mathbf{Alg}^{et.f}$. □

19. On utilise ici le fait que pour les algèbres étales finies, objets et morphismes sont de présentation finie. Il n'est pas facile de trouver un exposé sur les 2-limites et 2-colimites de catégories orienté vers les applications plutôt que vers les généralisations. Nous renvoyons à l'appendice A de [33], qui fait exception.

3.4.5. *Remarques.* (1) [19] établit la prop. 3.4.2 par voie analytique en introduisant des anneaux de Robba ;[29] l'établit en même temps que $(*)_{\mathcal{A}}$ en élaborant les points (c) et (d).

(2) Comme suggéré dans [10] et développé dans [19, 3.6], on peut définir une notion d'algèbre perfectoïde sur un corps p-adique $\mathcal{K}$ non nécessairement perfectoïde : c'est une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme $\mathcal{A}$ telle que F soit surjectif sur $\mathcal{A}^o/p$ et qu'il existe $\varpi_{\frac{1}{p}}$ avec $\varpi_{\frac{1}{p}}^p \equiv p \mod p^2\mathcal{A}^o$. Cela implique l'existence de $\varpi_s \in \mathcal{A}$ de norme $|p|^s$ pour tout $s \in \mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$, avec $\varpi_{-s} = \varpi_s^{-1}$, d'où $\mathcal{A}^{oo} = (\mathcal{A}^{oo})^2$. On a des analogues du th. 3.3.2 et de la prop. 3.3.4 [19, 3.6.5, 3.6.11] [20], ainsi que la généralisation correspondante du 3.4.1 [19, 3.6.21, 5.5.9] (presque étale s'entend ici dans le cadre $(\mathcal{A}^o, \mathcal{A}^{oo})$). De nouveau, l'argument galoisien de la prop. 3.4.2 permet de se dispenser des anneaux de Robba de [19].

(3) Tout anneau local complet régulier ramifié de caractéristique mixte $(0, p)$ est isomorphe à un anneau de la forme $W(k)[[T_{\leq n}]]/(p-f)$ où f est dans le carré de l'idéal maximal et non divisible par p. Le même argument que pour le cas non ramifié (ex. 3.2.3 (2)) montre que $\widehat{W(k)[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}]]}/(p-f)$ est perfectoïde au sens généralisé ci-dessus, *cf.* [31, 4.9].

(4) Le théorème de presque-pureté fournit des exemples de modules auto-duaux (via la trace, *cf.* rem. 1.8.1 (2)), et par suite réflexifs, qui ne sont pas de type fini, même sur un anneau de valuation ; c'est le cas du $\mathcal{K}^o$-module $\mathcal{B}^o$ dans l'exemple 2.4.3.

3.4.6. Voici une première conséquence du théorème.

3.4.3. **Corollaire.** *Soit $\mathcal{B}$ une extension étale finie d'une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{B}^o$ est entier sur $\mathcal{A}^o$; c'est en fait la fermeture (complètement) intégrale de $\mathcal{A}^o$ dans $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Comme la fonction rang de $\mathcal{B}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ est continue et bornée, on peut la supposer constante égale à r en décomposant $\mathcal{A}$ en produit fini. Soit $b \in \mathcal{B}^o$ et soit $\chi_b(T) = \sum_0^r (-1)^i\, Tr_{(\wedge^i\mathcal{B})/\mathcal{A}}(\cdot b)T^{r-i}$ son polynôme caractéristique. On a $\chi_b(b) = 0$. Par ailleurs, comme $\mathcal{B}^{oa}$ est presque projectif fini sur $\mathcal{A}^{oa}$ d'après 3.4.1, on a $Tr_{(\wedge^i\mathcal{B})/\mathcal{A}}(\cdot b) = Tr_{(\wedge^i\mathcal{B}^{oa})/\mathcal{A}^{oa}}(\cdot b) \in \mathcal{A}_*^{oa} = \mathcal{A}^o$. Donc b est entier sur $\mathcal{A}^o$. La seconde assertion suit de là et du lemme 2.4.1 (1). □

3.4.7. *Remarque.* Si $\mathcal{A}$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, on peut aussi raisonner comme suit : en décomposant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on se ramène aussitôt au cas où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont connexes. Il existe alors une clôture galoisienne $\mathcal{C}$ ([32, prop. 5.3.9], de groupe noté G. Comme G agit par isométries eu égard aux normes spectrales, le lemme 2.4.1 (2) dit que $\mathcal{C}^o$ est entier sur $\mathcal{A}^o$, donc $\mathcal{B}^o$ aussi.

3.4.8. Le théorème 3.4.1 admet une réciproque partielle, que nous n'utiliserons pas [21] :

3.4.4. **Proposition.** *Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde, extension étale finie d'une sous-$\mathcal{K}$-algèbre $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}$ est perfectoïde.*

Démonstration. En raisonnant comme au pas b) de la prop. 3.4.2 , on se ramène au cas galoisien de groupe G. Alors $\mathcal{A} = \mathcal{C}^G$ est perfectoïde d'après la prop. 3.8.1 ci-dessous. □

3.5. **Monomorphismes (et recadrage).**

3.5.1. Dans $\mathcal{K}$-$\mathbf{Perf}$, les homomorphismes continus injectifs sont des monomorphismes.

La réciproque est vraie en car. p, car le plongement $\mathcal{K}$-$\mathbf{Perf} \to \mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ admet un adjoint à gauche (cela découle aussi formellement du fait que $\mathcal{K}$-$\mathbf{Perf}$ admet des *objets libres* : $S \mapsto \mathcal{K}\langle T_s^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle_{s\in S}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathcal{K}$-$\mathbf{Perf} \to \mathbf{Ens}$).

20. on prendra garde que les "uniform algebras" de [19] sont nos algèbres spectrales.
21. voir aussi [19, prop. 3.6.22].

En car. 0, les monomorphismes sont les morphismes ϕ dont le basculé $\phi^\flat$ est injectif. Un tel morphisme n'est pas nécessairement injectif, comme le montre l'exemple suivant. Ainsi, si ϕ est injectif il en est de même de $\phi^\flat$, mais la réciproque n'est pas vraie.

3.5.2. *Exemple prophylactique.* Soit $\hat{K}_\infty$ le corps perfectoïde cyclotomique, et considérons la tour d'extensions perfectoïdes $\hat{K}_\infty[p^{\frac{1}{p^i}}]$ et le complété $\mathcal{L}$ de leur réunion, qui est encore perfectoïde. Soit $\hat{K}_\infty\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle \xrightarrow{\phi} \mathcal{L}$ le morphisme d'évaluation en p (*i.e.* $T^{\frac{1}{p^i}} \mapsto p^{\frac{1}{p^i}}$), qui n'est ni injectif ni surjectif.

Basculons : $\phi^\flat$ est donné par l'évaluation en un élément $p^\flat = (\cdots, p^{\frac{1}{p}}, p)$ de $\mathcal{L}^{\flat o}$ ($\mathcal{L}^\flat$ est la complétion de la tour d'extensions séparables $\hat{K}_\infty[p^{\frac{1}{p^i}}]^\flat$, et $p^\flat$ n'est dans aucune d'entre elles). Le noyau de $\phi^\flat$ est un idéal fermé premier radiciel, et l'algèbre de Banach intègre $\mathcal{B} := \hat{K}^\flat_\infty\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle/\ker\phi^\flat$ est perfectoïde spectrale [19, 3.1.6 d]. Ce ne peut être un corps car la norme serait multiplicative [18], et le plongement dans $\mathcal{L}^\flat$ serait alors isométrique ; basculant dans l'autre sens, on aurait une factorisation de ϕ en un morphisme surjectif $\hat{K}_\infty\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle \to \mathcal{B}^\sharp$ (*cf.* rem. 3.6.2 ci-dessous) suivi d'un plongement isométrique dans $\mathcal{L}$, ce qui contredirait le fait que ϕ est d'image dense mais non surjectif.

Le morphisme $\hat{K}^\flat_\infty\langle T\rangle \to \hat{K}^\flat_\infty\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ induit un homéomorphisme $D_\infty := \mathcal{M}(\hat{K}^\flat_\infty\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle) \to D := \mathcal{M}(\hat{K}^\flat_\infty\langle T\rangle)$, les corps résiduels $\mathcal{H}(x)$ de D_∞ étant les perfections complétées de ceux de D. Le spectre $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ est un sous-espace connexe (*cf.* [4, 7.4.2]) de D_∞ non réduit à un point d'après ce qui précède, donc il contient un point x_∞ de « dimension » $d(x) \geq 1$ (*cf.* [4, 9.2.3]) ; le point $x \in D$ correspondant est alors de type 2 ou 3 [4, 9.1]. D'après [25, 4.4], il existe $f \in \mathcal{K}^\flat\langle T\rangle$ et $r \in]0,1]$ tels que le domaine affinoïde de D défini par $|f| \leq r$ ait un bord de Shilov réduit au point x ; si $\mathcal{A}$ est l'algèbre affinoïde (non nécessairement stricte) associée, le morphisme $\mathcal{A} \to \mathcal{H}(x)$ est donc isométrique. Il en est alors de même de $\widehat{\mathcal{A}^{\frac{1}{p^\infty}}} \to \widehat{\mathcal{H}(x)^{\frac{1}{p^\infty}}} = \mathcal{H}(x_\infty)$. Par ailleurs $\hat{K}^\flat_\infty\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle \to \widehat{\mathcal{A}^{\frac{1}{p^\infty}}}$ est injectif (après extension des scalaires, c'est une localisation « de Weierstrass »), donc le composé $\hat{K}^\flat_\infty\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle \to \mathcal{H}(x_\infty)$ aussi. Comme il se factorise à travers $\mathcal{B}$, on en déduit que $\ker\ \phi^\flat = 0$.

3.5.3. Reprenons l'exemple du monomorphisme $\mathcal{B} \hookrightarrow g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi}]$ de 2.5.2 (g non diviseur de zéro). Supposons $\mathcal{B}$ perfectoïde. Nous verrons plus tard (lemme 4.2.3) que les conditions équivalentes du sorite 2.5.3 sont satisfaites (de sorte que $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi}]$ est la fermeture intégrale complète de $\mathcal{B}^o$ dans $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$) ; elle n'est pas nécessairement égale à $\mathcal{B}$ comme le montre l'exemple $(\mathcal{K} + T_1^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, T_2^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle, g = T_1)$. La question suivante est ouverte :

3.5.1. **Question.** *$g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi}]$ est-elle perfectoïde ?*

C'est clair en car. p puisque cette dernière est parfaite. En car. 0, en revanche, même si la multiplication par g est isométrique, une approche directe à partir des isomorphismes

$$g^{-\frac{1}{p^{k+1}}}\mathcal{B}^o/\varpi_{\frac{1}{p}} \overset{x\mapsto x^p}{\cong} g^{-\frac{1}{p^k}}\mathcal{B}^o/\varpi$$

se heurte à l'éventualité que $\lim(g^{-\frac{1}{p^k}}\mathcal{B}^o/\varpi) \to \lim(g^{-\frac{1}{p^k}}\mathcal{B}^o/\varpi_{\frac{1}{p}})$ ne soit pas surjectif [22]. De même, une approche à partir de l'isomorphisme

$$\mathcal{B}^o \cong W(\mathcal{B}^{\flat o}) \otimes_{W(\mathcal{K}^{\flat o}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle)} \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$$

bute sur le problème de la compatibilité de $g^{-\frac{1}{p^\infty}}(-)$ au produit tensoriel (un quotient, dans ce cas).

22. J'ignore si cette éventualité se produit.

3.5.4. Pour clarifier la situation, nous introduisons la notion de $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$*-algèbre presque perfectoïde*. Plaçons-nous dans le cadre $(\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle, T^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^{oo}\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle)$, et reprenons les notations de 2.3.6.

3.5.2. **Definition.** Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre de Banach uniforme. On dit que $\mathcal{B}$ (ou $\mathcal{B}^{\hat{a}}$) est *presque perfectoïde* si $\mathcal{B}^{\hat{a}}$ est isomorphe à une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre perfectoïde.

Notons $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^{\hat{a}}$-$\mathbf{Perf}$ (*resp.* $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^{\hat{a}}$-$\mathbf{pPerf}$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-$\mathbf{uBan}$ dont les objets sont perfectoïdes (*resp.* presque perfectoïdes).

3.5.3. **Lemme.** *L'adjoint à droite* $(\ )^\natural$ *du plongement* $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-$\mathbf{Perf} \hookrightarrow \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-$\mathbf{uBan}$ *induit un adjoint à droite du plongement* $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^{\hat{a}}$-$\mathbf{Perf} \hookrightarrow \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^{\hat{a}}$-$\mathbf{uBan}$*, encore noté* $\natural$.

Le plongement de $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^{\hat{a}}$-$\mathbf{Perf} \hookrightarrow \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^{\hat{a}}$-$\mathbf{pPerf}$ *est une équivalence, de quasi-inverse induit par* $\natural$.

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\text{-}\mathbf{Perf} & \xrightarrow{\ i\ } & \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\text{-}\mathbf{Alg} \\ \big\downarrow{\scriptstyle (\ )^{\hat{a}}} & & {\scriptstyle (\ )^{\hat{a}}}\big\downarrow \\ (\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^{\hat{a}}\text{-}\mathbf{Perf} & \xrightarrow{\ j\ } & \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^{\hat{a}}\text{-}\mathbf{Alg}. \end{array}$$

Alors $(\ )^{\hat{a}} \circ \natural \circ (\ )_*$ est adjoint à droite de $(\ )^{\hat{a}} \circ i \circ (\ )_{\hat{!!}} = j$, et $(\ )^{\hat{a}} \circ \natural = ((\ )^{\hat{a}} \circ \natural \circ (\ )_*) \circ (\ )^{\hat{a}}$.
La seconde assertion en découle. □

3.5.4. **Sorite.** *Soit* $\mathcal{B}$ *une* $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$*-algèbre de Banach uniforme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathcal{B}$ *est presque perfectoïde,*

(2) F *est presque surjectif sur* $\mathcal{B}^o/\varpi$*,*

(3) $\mathcal{B}^{\natural o} \hookrightarrow \mathcal{B}^o$ *est un presque-isomorphisme,*

(4) $\mathcal{B}^\natural \hookrightarrow \mathcal{B}$ *est un presque-isomorphisme,*

(5) il existe une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$*-algèbre perfectoïde* $\mathcal{B}'$ *et un morphisme* $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ *de* $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$*-algèbres de Banach qui est un presque-isomorphisme,*

(6) $(\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{!!}}$ *est perfectoïde.*

Démonstration. Les implications $(1) \Rightarrow (2)$, $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$ et $(6) \Rightarrow (1)$ sont claires.
$(2) \Rightarrow (3)$: il suffit de prouver que $\mathcal{B}^\natural \to \mathcal{B}$ est presque surjectif sous (2) (*cf.* prop. 3.3.3). D'après le lemme de Nakayama (*cf.* §1.3), il suffit de montrer que $\mathcal{B}^{\natural o}/\varpi \cong \mathcal{B}^{\flat o}/\varpi^\flat \to \mathcal{B}^o/\varpi$ est presque surjectif. Posons $\mathfrak{L} := \mathcal{B}^o/\varpi$, de sorte que $\mathcal{B}^{\flat o} = \varprojlim_F \mathfrak{L}$. Il suffit de montrer que $\varprojlim_F \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ est presque surjectif. Or (2) se réécrit comme la presque surjectivité du morphisme $\mathfrak{L} \otimes_{\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle/\varpi, F} \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle/\varpi \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{L}$ induit par Frobenius. Cette dernière entraîne la surjectivité de $F : \mathcal{K}^{oo}T^{\frac{1}{p^\infty}}\mathfrak{L} \to \mathcal{K}^{oo}T^{\frac{1}{p^\infty}}\mathfrak{L}$. Par le lemme de Mittag-Leffler pour les $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels , on en déduit la surjectivité de $\mathcal{K}^{oo}T^{\frac{1}{p^\infty}}\lim \mathfrak{L} \to \mathcal{K}^{oo}T^{\frac{1}{p^\infty}}\mathfrak{L}$, d'où la presque surjectivité de $\varprojlim_F \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$.
$(5) \Rightarrow (1)$: d'après le lemme 2.3.5, (6) implique que $(\mathcal{B}')^o \to \mathcal{B}^o$ est un presque-isomorphisme, d'où (1).
$(3) \Rightarrow (6)$: quitte à remplacer $\mathcal{B}$ par $\mathcal{B}^\natural$, (4) permet de supposer $\mathcal{B}$ perfectoïde pour prouver (6). D'après le lemme précédent, on a $[((\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{!!}})^\natural]^{\hat{a}} = [((\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{!!}})^{\hat{a}}]^\natural = (\mathcal{B}^{\hat{a}})^\natural$, et le composé

$$[[((\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{!!}})^\natural]^{\hat{a}}]_{\hat{!!}} \to ((\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{!!}})^\natural \to (\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{!!}}.$$

est l'identité. Donc le morphisme injectif $((\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{!}!})^\natural \to (\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{!}!}$ est un isomorphisme. □

3.5.5. *Remarques.* (1) Supposons g non-diviseur de zéro. Dans la classe d'isomorphisme de $\mathcal{B}^{\hat{a}}$, il y a une algèbre perfectoïde initiale $(\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{!}!}$ et une algèbre perfectoïde finale $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o[\frac{1}{\varpi}])^\natural$ (qui serait $(\mathcal{B}^{\hat{a}})_{\hat{*}}$ si la question ci-dessus avait une réponse positive).
(2) Perfectoïde implique presque perfectoïde mais *pas vice-versa*, même si g est non-diviseur de zéro : la sous-$\mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre $\mathcal{B} = \mathcal{K} + (T_1^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, T_2^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle)^- + (T_2\,\mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, T_2^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle)^-$ de $\mathcal{K}\langle T_1^{\frac{1}{p^\infty}}, T_2^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ est presque perfectoïde mais pas perfectoïde, puisque son image modulo $(T_1^{\frac{1}{p^\infty}})$ n'est pas parfaite.
(3) En dépit du point (5) du lemme (et du lemme 2.3.5, qui traite des morphismes et non des « presque-morphismes »), il n'est pas clair qu'une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre de Banach uniforme presque isomorphe à une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre perfectoïde soit presque perfectoïde.

3.5.5. **Lemme.** *Le foncteur $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^o$ induit une équivalence de la catégorie des $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^{\hat{a}}$-algèbres presque perfectoïdes vers celle des $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^{oa}$-algèbres $\mathfrak{A}^a$ plates sur $\mathcal{K}^o$, complètes et telles que $\mathfrak{A}^a/\varpi_{\frac{1}{p}} \overset{x\mapsto x^p}{\to} \mathfrak{A}^a/\varpi$ soit bijectif.*

La preuve est analogue à celle du lemme 3.2.1. □

3.5.6. **Proposition.** *Si $\mathcal{A}$ est presque perfectoïde, on a une équivalence de catégories*

$\{\,\mathcal{A}^{\hat{a}}$*-algèbres presque perfectoïdes presque étales finies*$\} \overset{\sim}{\to} \{\mathcal{A}^{oa}$*-algèbres étales finies*$\}$

donnée par $(\ )^{oa}$.

La preuve est analogue à celle de la prop. 3.4.2. □

3.6. **Epimorphismes (et localisation).**

3.6.1. Comme le plongement $\mathcal{K}$-$\mathbf{Perf} \to \mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ est fidèle et admet un adjoint à droite, il préserve et reflète les épimorphismes.

Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde et $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un épimorphisme extrémal de $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes (*cf.* 2.6.1). Puisque $\mathcal{K}$-$\mathbf{Perf}$ est une sous-catégorie coréflexive de $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ dont les coünités d'adjonction sont des monomorphismes, elle est stable par quotient extrémal (*cf.* [17, prop. 4]), donc $\mathcal{B}$ est perfectoïde (mais vu comme épimorphisme de $\mathcal{K}$-algèbres affinoïdes, ϕ n'est peut-être pas extrémal).

Par exemple, considérons une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde spectrale $\mathcal{A}$ et un élément $g \in \mathcal{A}^o$, et formons l'algèbre spectrale $\mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$, dont $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre normée (ex. 2.9.3 (2)). Alors $\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ est une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde spectrale (prop. 3.3.4) et le morphisme canonique $\phi : \mathcal{A}\hat{\otimes}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle \to \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ est un épimorphisme extrémal (*cf.* formules (2.33) et (2.4)), donc $\mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ est perfectoïde. Notant $g^\flat \in \mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^\flat$ le système inverse des $g^{\frac{1}{p^k}}$ modulo p, on a $g = \#g^\flat$.

3.6.2. *Remarque.* Signalons quelques résultats relatifs aux épimorphismes que nous n'utiliserons pas dans la suite. Si $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un morphisme de $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes d'image dense, et si $\mathcal{B}$ est perfectoïde, il en est de même de $\mathcal{C}$ (*cf.* [19, th. 3.6.17 (b)]). De surcroît, si ϕ est surjectif et $\mathcal{B}$ spectrale, la norme spectrale de $\mathcal{C}$ est la norme quotient et l'homomorphisme induit sur les boules unité est presque surjectif [19, prop. 3.6.9 (c)].

On en déduit que ϕ est surjectif si et seulement si $\phi^\flat$ l'est ; en effet, la condition se traduit par la presque surjectivité de ϕ^o mod. ϖ, qui s'identifie à $\phi^{\flat o}$ mod. $\varpi^\flat$.

Par ailleurs, noter que $\ker \phi^\flat$ est un idéal fermé radiciel, donc le quotient $\mathcal{A}^\flat/\ker\phi^\flat$ est perfectoïde [19, 3.1.6 d], et on a une factorisation canonique de ϕ dans $\mathcal{K}$-$\mathbf{Perf}$ en

$$\mathcal{A} \overset{\phi_1}{\to} (\mathcal{A}^\flat/\ker\phi^\flat)^\sharp \overset{\phi_2}{\to} (\mathcal{A}/\ker\phi)^{\mathrm{u}} \overset{\phi_3}{\to} \mathcal{B}$$

où ϕ_1 est surjectif, ϕ_2 est à la fois un épimorphisme extrémal et un monomorphisme, et $\phi_3 \circ \phi_2$ est un monomorphisme.

3.6.3. Passons aux localisations affinoïdes (*cf.* §2.6.2), et commençons par examiner l'exemple standard de l'algèbre perfectoïde spectrale $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$. Si $\operatorname{car}\mathcal{K} = 0$, on prend ϖ de la forme $\#(\varpi^\flat)$, et on pose $\varpi^{\frac{1}{p^i}} := \#((\varpi^\flat)^{\frac{1}{p^i}})$; notons que le basculé de $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ est $\mathcal{K}^\flat\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$.

Pour tout j et tout m, $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^m}}\rangle\{\frac{\varpi^j}{T}\}^o$ est le complété $\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^m}}, (\frac{\varpi^j}{T})^{\frac{1}{p^m}}\rangle$ de $\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^m}}, (\frac{\varpi^j}{T})^{\frac{1}{p^m}}] := \mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^m}}, U^{\frac{1}{p^m}}]/(T^{\frac{1}{p^k}}U^{\frac{1}{p^k}} - \varpi^{\frac{j}{p^k}})_{k\leq m}$ tandis que $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^m}}\rangle\{\frac{\varpi^j}{T}\}_{\leq 1}$ est le complété $\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^m}}, \frac{\varpi^j}{T}\rangle$ de $\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^m}}, \frac{\varpi^j}{T}] := \mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^m}}, U]/(TU - \varpi^j)$. Passant à la colimite complétée (pour $m \to \infty$), on obtient

(3.12)

$$\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{\varpi^j}{T}\}^o = \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, (\frac{\varpi^j}{T})^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle := \mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}, U^{\frac{1}{p^\infty}}]\widehat{\ }/(T^{\frac{1}{p^k}}U^{\frac{1}{p^k}} - \varpi^{\frac{j}{p^k}})_k,$$

alors que la boule unité est

$$\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{\varpi^j}{T}\}_{\leq 1} = \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, \frac{\varpi^j}{T}\rangle = \mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\hat{\otimes}_{\mathcal{K}^o\langle T\rangle}\mathcal{K}^o\langle T, \frac{\varpi^j}{T}\rangle. \tag{3.13}$$

Ainsi

$$\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{\varpi^j}{T}\} = \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T\rangle}\mathcal{K}\langle T, \frac{\varpi^j}{T}\rangle = \mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T\rangle}\mathcal{K}\langle T\rangle\{\frac{\varpi^j}{T}\} \tag{3.14}$$

est perfectoïde d'après (3.12), en particulier uniforme, mais non spectrale en général d'après (3.13). Pour toute $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre de Banach uniforme $\mathcal{A}$, on a alors, en notant g l'image de T et en combinant les formules (2.25) et (3.14) :

$$\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\} \cong \mathcal{A}\hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle}\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{\varpi^j}{T}\}. \tag{3.15}$$

3.6.1. **Proposition.** *Soient $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre perfectoïde munie de sa norme spectrale, et $g = T \cdot 1$. Alors pour tout $j \in \mathbf{N}$, $\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{T}\}$ est perfectoïde et le morphisme canonique*

$$(\mathcal{A}^o\hat{\otimes}_{\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle}\mathcal{K}^o\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, (\frac{\varpi^j}{T})^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle)_* \to \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o \tag{3.16}$$

est un isomorphisme. En particulier, $\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle}\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{\varpi^j}{g}\}^u$ est spectrale.

En outre, si $\operatorname{car}\mathcal{K} = 0$, $\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^\flat$ s'identifie à $\mathcal{A}^\flat\{\frac{(\varpi^\flat)^j}{g^\flat}\}$ où $g^\flat$ est l'image de T dans $\mathcal{A}^\flat$ (de sorte que $\#g^\flat = g$).

Démonstration. Compte tenu des formules (3.12)(3.15), c'est un corollaire de la prop. 3.3.4. □

3.6.4. *Remarque.* Le même argument montre que $\mathcal{A}\{\frac{f_1,\dots,f_n}{g}\}$ est perfectoïde si $f_1, \dots, f_n, g$ admettent des suites compatibles de racines p^m-ièmes. C'est encore vrai sans supposer cette condition : Scholze le déduit du résultat précédent - qu'il prouve à nouveaux frais [29, def. 2.13, th. 6.3 (ii), lem. 6.4 (iii)]) plutôt que de le déduire du résultat sur les $\hat{\otimes}$ - , grâce à un lemme d'approximation de $f_i, g \in \mathcal{A}^o$ par des éléments du type $\#\tilde{f}_i^\flat, \#\tilde{g}^\flat$ [29, cor. 6.7 (i)].

3.7. **Produits (et transformée de Gelfand).**

3.7.1. Les produits uniformes d'algèbres perfectoïdes sont perfectoïdes, du fait que $(\prod \mathcal{A}^{\alpha o})/\varpi \cong \prod(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi)$.

3.7.1. **Proposition.** *Si $\mathcal{A} \neq 0$ est perfectoïde, il en est de même de sa transformée de Gelfand $\Gamma(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Comme $\Gamma(\mathcal{A})$ est produit uniforme de corps $\mathscr{H}(x)$, il suffit de voir que ceux-ci sont perfectoïdes. Or $\mathscr{H}(x)$ est colimite uniforme de localisations rationnelles de $\mathcal{A}$, qui sont perfectoïdes, *cf.* rem. 3.6.4 et [19, 2.4.17] ; donc $\mathscr{H}(x)$ est perfectoïde (*cf.* §3.9). □

3.7.2. *Remarque.* On peut montrer que si $\mathcal{A}$ est perfectoïde, $\Gamma(\mathcal{A}^\flat) \cong \Gamma(\mathcal{A})^\flat$, comme conséquence de la commutation des localisations rationnelles au basculement et de ce que $\mathscr{M}(\mathcal{A}) \cong \mathscr{M}(\mathcal{A}^\flat)$ [19, th. 3.3.7]. J'ignore si $\Gamma(\mathcal{A}^\flat) \cong \Gamma(\mathcal{A})^\flat$ vaut encore sans supposer $\mathcal{A}$ perfectoïde.

3.8. **Limites.**

3.8.1. La catégorie des $\mathcal{K}$-algèbres perfectoïdes est *complète*, *i.e.* admet toutes les (petites) limites. Cela découle de ce que $\mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ est complète et $\mathcal{K}$-$\mathbf{Perf}$ en est une sous-catégorie coréflexive, *i.e.* le plongement $\mathcal{K}$-$\mathbf{Perf} \hookrightarrow \mathcal{K}$-$\mathbf{uBan}$ admet un adjoint à droite (*cf.* prop. 3.2.2, 3.3.3).

Si $\operatorname{car}\mathcal{K} = p$, ce plongement admet aussi un adjoint à gauche (*cf.* prop. 3.3.1), donc reflète les limites : les limites perfectoïdes sont les ulim. Comme $\flat : \mathcal{K}$-$\mathbf{uBan} \to \mathcal{K}^\flat$-$\mathbf{Perf}$ admet un adjoint à gauche (prop. 3.3.3), il commute donc aux ulim.

Si $\operatorname{car}\mathcal{K} = 0$, on les obtient par basculement à partir du cas de caractéristique p : les limites perfectoïdes sont les $\operatorname{ulim}^\natural$.

3.8.2. En caractéristique 0, *limite perfectoïde et limite uniforme ne coïncident pas*.

Ce phénomène se présente déjà dans le cas des limites finies : *l'intersection de deux sous-algèbres perfectoïdes d'une algèbre perfectoïde n'est pas nécessairement perfectoïde*, comme on le voit dans l'ex. 3.4.2, où $\hat{A}_\infty[\sqrt{g}] = \widehat{Q(A_\infty)}(\sqrt{g}) \cap \hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{2^\infty}}\rangle \subset \widehat{Q(A_\infty\langle g^{\frac{1}{2^\infty}}\rangle)}$ (*cf.* 3.6.1, rem. 3.2.2 (1) et ex. 4.2.5).

Dans la direction positive, on a :

3.8.1. **Proposition.** *L'anneau des invariants $\mathcal{B}^G$ d'une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde $\mathcal{B}$ sous un groupe* fini *d'isométries est une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde, et identifiant G à un groupe d'isométries de $\mathcal{B}^\flat$ par basculement, on a $\mathcal{B}^{\flat G} = \mathcal{B}^{G\flat}$.*

Démonstration. D'après la discussion qui précède, il suffit de montrer la première assertion. Notons $(\mathcal{B}^{\flat G})^\natural$ la $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde associée à $\mathcal{B}^{\flat G}$ par basculement. On a $\mathcal{B} \cong W(\mathcal{B}^{\flat o})[\frac{1}{p}] \otimes_{W(\mathcal{K}^{\flat o})[\frac{1}{p}]} \mathcal{K}$, d'où

$$\mathcal{B}^G \cong (W(\mathcal{B}^{\flat o})[\tfrac{1}{p}] \otimes_{W(\mathcal{K}^{\flat o})[\frac{1}{p}]} \mathcal{K})^G = (W(\mathcal{B}^{\flat o})[\tfrac{1}{p}])^G \otimes_{W(\mathcal{K}^{\flat o})[\frac{1}{p}]} \mathcal{K}$$
$$= (W(\mathcal{B}^{\flat o})^G[\tfrac{1}{p}]) \otimes_{W(\mathcal{K}^{\flat o})[\frac{1}{p}]} \mathcal{K} = W(\mathcal{B}^{\flat oG})[\tfrac{1}{p}] \otimes_{W(\mathcal{K}^{\flat o})[\frac{1}{p}]} \mathcal{K} \cong (\mathcal{B}^{\flat G})^\natural,$$

la première égalité s'obtenant en identifiant G-invariants et image du projecteur de Reynolds $b \mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma\in G} \gamma(b)$. □

3.8.3. *Remarque.* Ceci ne s'étend pas aux groupes infinis. Reprenons l'exemple 3.2.3 (2) avec $n = 1$: l'action galoisienne de $\mathbf{Z}_p$ sur $T_1^{\frac{1}{p^\infty}} \subset A_\infty$ s'étend par continuité à l'algèbre perfectoïde $\hat{A}_\infty$, mais l'algèbre A_0 de ses invariants n'est pas perfectoïde.

3.8.4. Supposons $\operatorname{car}\mathcal{K}=0$, notons encore $\mathcal{K}^\flat$ son basculé, et prenons ϖ de la forme $\#(\varpi^\flat)$. On a vu que la limite perfectoïde d'un système projectif $(\mathcal{A}^{\alpha\flat})$ de $\mathcal{K}^\flat$-algèbres perfectoïdes coïncide avec $\mathcal{A}^\flat := \operatorname{ulim}\mathcal{A}^{\alpha\flat}$.

Dans le cas d'un système projectif $(\mathcal{A}^\alpha)$ de $\mathcal{K}$-algèbres perfectoïdes, de limite uniforme $\mathcal{A}$, la limite perfectoïde n'est autre, on l'a vu, que l'algèbre $\mathcal{A}^\natural$, dont le basculé est déterminé par

$$(\mathcal{A}^\natural)^{\flat o}=\mathcal{A}^{\flat o}=\lim_F \mathcal{A}^o=\lim_{F,\alpha}\mathcal{A}^{\alpha o}=\lim_\alpha \mathcal{A}^{\alpha\flat o}=\lim_{F,\alpha}(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi). \tag{3.17}$$

L'exemple suivant montre que $\mathcal{A}^\natural\to\mathcal{A}$ n'est pas un isomorphisme en général.

3.8.5. *Exemple prophylactique.* Reprenons l'ex. 3.4.2. Nous verrons au th. 4.2.2 que la limite uniforme des $\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{2^\infty}}\rangle\langle\frac{\varpi^j}{g}\rangle$ est $g^{-\frac{1}{2^\infty}}\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{2^\infty}}\rangle$ qui n'est autre que la fermeture complètement intégrale de $\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{2^\infty}}\rangle$ dans $\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{2^\infty}}\rangle[\frac{1}{g}]$. Passant aux $2\mathbf{Z}_2$-invariants, la limite uniforme $\mathcal{B}$ des $\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{2^\infty}}\rangle\langle\frac{\varpi^j}{g}\rangle^{2\mathbf{Z}_2}$ n'est autre que la fermeture complètement intégrale de $\hat{A}_\infty[\sqrt{g}]=\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{2^\infty}}\rangle)^{2\mathbf{Z}_2}$ dans $\hat{A}_\infty[\sqrt{g},\frac{1}{g}]$ (*cf.* ex. 4.2.5). Or $\hat{A}_\infty$ est complètement intégralement clos (*ibid.*), et comme la fermeture intégrale d'un anneau complètement intégralement clos dans toute extension algébrique de son corps de fractions est complètement intégralement close ([7, ch. V, §1, ex. 14]), on a $\mathcal{B}=\hat{A}_\infty[\sqrt{g}]$, qui n'est pas perfectoïde.

3.9. **Colimites.**

3.9.1. La catégorie des $\mathcal{K}$-algèbres perfectoïdes admet des colimites filtrantes : ce sont les colimites uniformes. En effet, si l'endomorphisme de Frobenius est surjectif sur les $\mathcal{B}^o_\alpha/\varpi$, il l'est sur

$$\operatorname{colim}(\mathcal{B}^o_\alpha/\varpi)\cong(\operatorname{colim}\mathcal{B}^o_\alpha)/\varpi\cong(\operatorname{ucolim}\mathcal{B}_\alpha)^o/\varpi \tag{3.18}$$

Comme elle admet aussi des sommes amalgamées $\hat{\otimes}^u=\hat{\otimes}$, elle est *cocomplète*, les colimites se calculant comme dans la catégorie des $\mathcal{K}$-algèbres de Banach uniformes. Les colimites d'algèbres perfectoïdes commutent à l'équivalence de basculement.

3.9.2. *Exemples.* (1) Le complété d'une extension algébrique de $\mathcal{K}$ (qui est parfait) s'écrit $\hat{\mathcal{K}}_\infty=\operatorname{ucolim}_i\mathcal{K}_i$ où $\mathcal{K}_i$ parcourt les extensions finies séparables de $\mathcal{K}$, qui sont des corps perfectoïdes d'après le cor. 3.1.2 ou le th. 3.4.1 ; donc $\hat{\mathcal{K}}_\infty$ est un corps perfectoïde.

De même, $\hat{\mathcal{K}}_\infty\hat{\otimes}^u_{\hat{\mathcal{K}}_0}\hat{\mathcal{K}}_\infty=\operatorname{ucolim}_i(\mathcal{K}_i\otimes_{\mathcal{K}_0}\mathcal{K}_i)$ est une $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde.

(2) Le coproduit d'une famille $(\mathcal{B}_\alpha)$ de $\mathcal{K}$-algèbres perfectoïdes est représenté par un produit tensoriel complété infini $\hat{\otimes}_{\mathcal{K}}\mathcal{B}_\alpha=\hat{\otimes}_\alpha\mathcal{B}_\alpha$. Toute colimite des $(\mathcal{B}_\alpha)$ est quotient de $\hat{\otimes}_\alpha\mathcal{B}_\alpha$. Pour toute $\mathcal{K}$-algèbre perfectoïde, le morphisme $\hat{\otimes}_{\alpha\in\mathcal{B}^{\flat o}}\mathcal{K}\langle T_\alpha^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\to\mathcal{B},\ T_\alpha\mapsto\#\alpha$, a une image dense (*cf.* rem. 3.3.5 (1)).

4. Analyse perfectoïde autour du « théorème d'extension de Riemann ».

D'après le théorème d'extension de Riemann, les fonctions analytiques bornées sur un polydisque complexe privé d'un sous-espace analytique - une hypersurface d'équation $g = 0$ pour fixer les idées - se prolongent en des fonctions analytiques sur tout le polydisque. L'analogue p-adique de ce résultat est connu [3] ; avec les notations de l'ex. 3.2.3 (2), on a

$$A = \lim A_0\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o. \tag{4.1}$$

Ce sont des versions perfectoïdes de cet énoncé que nous visons dans ce paragraphe.

4.1. **Entrée en matière.**

Donnons une courte preuve de l'énoncé plus faible

$$A = \lim A_0\{\frac{\varpi^j}{g}\}_{\leq 1} \tag{4.2}$$

($A = \mathcal{K}_0^o[[T_{\leq n}]]$, $A_0 := A[\frac{1}{p}]$). Quitte à faire un changement de variables $T_1, \dots, T_n$, on peut supposer que g est sous forme de Weierstrass en la variable T_n, *i.e.* que $g \in A\setminus(p, T_1, \cdots T_{n-1})A$ ([7, VII, §3, n. 7, lemme 3]). Le théorème de préparation de Weierstrass [7, VII, §3, n. 8, prop. 5] énonce que $A/gA \cong \bigoplus_{s=0}^{s=r-1} \mathcal{K}_0^o[[T_{<n}]]\, T_n^s$ (où r est la valuation T_n-adique de g modulo $(p, T_{<n})$), d'où l'on déduit, d'après Nakayama, que

$$A = \bigoplus \mathcal{K}_0^o[[T_{<n}, g]]\, T_n^s.$$

Appliquant $\otimes_{\mathcal{K}\langle g\rangle_{\leq 1}} \mathcal{K}\langle g, \frac{p^j}{g}\rangle_{\leq 1}$ et quotientant par la torsion p-primaire éventuelle, on en déduit (en vertu de la formule (2.25) et du point 2e) du sorite 2.3.1) une décomposition

$$A_0\{\frac{p^j}{g}\}_{\leq 1} \cong \bigoplus \mathcal{K}_0^o[[T_{<n}, g]][\frac{1}{p}]_{\leq 1}\{\frac{p^j}{g}\}\, T_n^s,$$

compatible avec les flèches de transition quand j augmente. On est donc ramené à démontrer l'énoncé initial dans le cas particulier $g = T_n$, qui se traite directement en observant que $A_0\{\frac{p^j}{T_n}\}_{\leq 1} = A\langle\frac{p^j}{T_n}\rangle$ et en considérant le développement en puissances de T_n à coefficients dans $\mathcal{K}_0^o[[T_{<n}]]$. □

On peut ensuite remplacer A_0 par A_i ; mais passer à la colimite uniforme pour en déduire l'énoncé analogue pour l'algèbre perfectoïde $\hat{A}_\infty$ ne va pas de soi ; nous y reviendrons dans l'ex. 4.2.5, où nous montrerons aussi l'égalité (plus forte) $A = \lim A_0\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$.

4.2. **Limite uniforme de localisées d'une algèbre perfectoïde.**

On compare ici une algèbre perfectoïde $\mathcal{A}$ à la limite uniforme de ses localisées $\mathcal{A}\langle\frac{\varpi^j}{g}\rangle$.

4.2.1. Soient $\mathcal{K}$ un corps perfectoïde de caractéristique résiduelle p, et ϖ un élément de $\mathcal{K}^{oo} \setminus 0$ tel que $p\mathcal{K}^o \subset \varpi\mathcal{K}^o$. Si $\mathrm{car}\ \mathcal{K} = 0$, on prend ϖ de la forme $\#(\varpi^\flat)$, et on spécifie pour chaque i une racine p^i-ème de ϖ en posant $\varpi^{\frac{1}{p^i}} := \#((\varpi^\flat)^{\frac{1}{p^i}})$.
Etant donné $r \in \mathbf{N}[\frac{1}{p}]$ et une $(\mathcal{K}^o/\varpi^r)[T^{\frac{1}{p^\infty}}]$-algèbre R, considérons les $(\mathcal{K}^o/\varpi^r)[T^{\frac{1}{p^\infty}}]$-algèbres

$$R^{[j]} := R \otimes_{\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}]} \mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}, (\frac{\varpi^j}{T})^{\frac{1}{p^\infty}}],\ (j \in \mathbf{N}). \tag{4.3}$$

Elles forment un système projectif, l'élément $u^s_{[j+1]} := 1 \otimes (\frac{\varpi^{j+1}}{T})^s$ de $R^{[j+1]}$ s'envoyant sur $\varpi^s u^s_{[j]} \in R^{[j]}$. On a $T^s u^s_{[j]} = \varpi^{js} \cdot 1_{R^{[j]}}$. La proposition suivante est une version simplifiée d'un résultat remarquable de P. Scholze [30, prop. II.3.1].

4.2.1. **Proposition.** *Le morphisme canonique* $R^a \to \varprojlim_j (R^{[j]})^a$ *est un presque-isomorphisme dans le cadre* $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi T)^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$.

Nous utiliserons librement le fait qu'une $\lim$ ou $\lim^1$ indexée par un ensemble ordonné peut se calculer sur un sous-ensemble cofinal.

Démonstration. Introduisons les sous-R-modules

$$R^{[j]k} := \sum_{s\in\mathbf{N}[\frac{1}{p}]\cap[0,\frac{1}{p^k}]} R.u^s_{[j]} \subset R^{[j]}, \tag{4.4}$$

qui forment un double système projectif de R-modules.

Comme $u^s_{[j']}$ s'envoie sur 0 dans $R^{[j]}$ si $s(j'-j)\geq r$, $R^{[j']}\to R^{[j]}$ se factorise à travers $R^{[j]k}$ dès que $j'\geq j+rp^k$. On en déduit

$$\lim_j R^{[j]} \cong \lim_j R^{[j]k} \cong \lim_{jk} R^{[j]k}. \tag{4.5}$$

Comme $T^{\frac{1}{p^k}}u^s_{[j]}\in S^j := \mathrm{Im}(R\to R^{[j]})$ si $s\leq\frac{1}{p^k}$, on a $T^{\frac{1}{p^k}}R^{[j]k}\subset S^j$, et le quotient est annulé par $T^{\frac{1}{p^k}}$. On en déduit (*cf.* 1.3)

$$(S^j)^a \cong \lim_k (R^{[j]k})^a. \tag{4.6}$$

Par ailleurs, le noyau de $R\twoheadrightarrow S^j\cong\mathrm{Im}(R\to R[U_{[j]}^{\frac{1}{p^\infty}}]/(T^{\frac{1}{p^k}}U_{[j]}^{\frac{1}{p^k}}-\varpi^{\frac{1}{p^k}})_{k\in\mathbf{N}})$ est annulé par $T^{\frac{r}{j}}$ pour tout j de la forme p^ℓ : en effet, si a est dans ce noyau, et si on le voit comme élément de $R[U_{[j]}^{\frac{1}{p^\infty}}]$, il s'écrit $(T^{\frac{1}{p^k}}U_{[j]}^{\frac{1}{p^k}}-\varpi^{\frac{j}{p^k}})\sum a_sU^s_{[j]}$ pour k convenable (qu'on peut supposer $\geq\ell$ puisque $T^{\frac{1}{p^k}}U_{[j]}^{\frac{1}{p^k}}-\varpi^{\frac{1}{p^k}}$ divise $T^{\frac{1}{p^\ell}}U_{[j]}^{\frac{1}{p^\ell}}-\varpi^{\frac{1}{p^\ell}}$ si $k\geq\ell$). En comparant les coefficients, on obtient alors $T^{\frac{n}{p^k}}a=-\varpi^{\frac{j(n+1)}{p^k}}a_{\frac{n}{p^k}}$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, d'où le résultat en prenant $n=rp^{k-\ell}$. Compte tenu de (4.5)(4.6), on conclut que $R^a\cong\lim_j(S^j)^a\cong\lim_{jk}(R^{[j]k})^a\cong\lim_j(R^{[j]})^a$, d'où l'assertion. □

4.2.2. Voici une variante perfectoïde du théorème d'extension de Riemann.

4.2.2. **Théorème.** *Soient $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}$-algèbre (presque) perfectoïde et g un élément de $\mathcal{A}^o$ non diviseur de zéro. On suppose que $\mathcal{A}$ contient une suite compatible de racines p^m-ièmes de g. Alors*

$$\lim \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o, \tag{4.7}$$

qui est la fermeture complètement intégrale de $\mathcal{A}^o$ dans $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$.

Démonstration. Le cas presque perfectoïde se ramène au cas perfectoïde en remplaçant $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}^\natural$ (qui contient encore $g^{\frac{1}{p^\infty}}$). Supposons donc $\mathcal{A}$ perfectoïde. D'après la prop. 3.6.1, $\mathcal{A}$ perfectoïde implique $\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}$ perfectoïde, et en outre $\mathcal{A}^o\langle(\frac{\varpi^j}{g})^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\to\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$ est un presque-isomorphisme dans le cadre $(\mathcal{K}^o,\mathcal{K}^{oo})$, donc aussi dans $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}],(\varpi T)^{\frac{1}{p^\infty}}(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$.
Appliquant la prop. 4.2.1 avec $R:=\mathcal{A}^o/\varpi^r$ et $(R^{[j]})^a\cong(\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o/\varpi^r)^a$, on obtient

$$(\mathcal{A}^o/\varpi^r)^a\cong\lim(\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o/\varpi^r)^a. \tag{4.8}$$

En passant à la limite sur $r\to\infty$, puis en intervertissant les limites, cela donne

$$(\mathcal{A}^o)^a\cong\lim(\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o)^a.$$

Appliquant le foncteur $(\ )_*$ des presque-éléments, qui commute aux limites, et compte tenu de la formule (2.15) et du lemme 2.8.2, on trouve $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o\cong\lim\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$.

Montrons ensuite que $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]}$ est une égalité, c'est-à-dire la condition (4) du sorite 2.5.3 :

4.2.3. **Lemme.** *Pour toute $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre perfectoïde, les conditions équivalentes du sorite 2.5.3 sont satisfaites.*

On va établir la condition (1) de ce sorite : $(a \in \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}], a^p \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o) \Rightarrow a \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$. Notons a_j l'image de a dans $\mathcal{B}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^u$. On a $a \in \mathcal{B}^o[\frac{1}{g}] \Rightarrow \exists m \in \mathbf{N}, \forall j \in \mathbf{N}, g^m a_j \in \mathcal{B}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$ (et multipliant par $(\frac{\varpi^j}{g})^m$), $\varpi^{jm} a_j \in \mathcal{B}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$. Si $a_j^p \in \mathcal{B}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$, on conclut du sorite 2.3.1 $(5e)$ que $a_j \in \mathcal{B}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$. D'où, à la limite, $a \in g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$. □

Cela termine la preuve du théorème. □

4.2.3. *Remarque.* Si la multiplication par g est *isométrique*, le théorème donne : $\operatorname{ulim}\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\} = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}$, qui est la fermeture complètement intégrale de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$. En outre la preuve se simplifie un peu par rapport à celle de (4.7) : on n'a alors à invoquer la prop. 4.2.1 que dans le cas où $R \to R^{[j]}$ est injectif, *i.e.* $R = S^j$.

4.2.4. **Corollaire.** *(1) Munissons $\mathcal{A}$ de sa norme spectrale. Alors $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o[\frac{1}{\varpi}])^\natural$ est la plus grande $\mathcal{A}$-algèbre perfectoïde spectrale contenue dans $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$.*

(2) On a $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o)^\flat \cong g^{\flat-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^{\flat o}$, donc aussi $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o[\frac{1}{\varpi}])^\natural \cong (g^{\flat-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^{\flat o}[\frac{1}{\varpi^\flat}])^\sharp$.

Démonstration. (1) Soit $\mathcal{A}'$ une $\mathcal{A}$-algèbre perfectoïde spectrale ($\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est donc supposée continue) contenue dans $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ (en tant que $\mathcal{A}$-algèbre « abstraite », non topologisée). D'après le lemme 2.6.2, les morphismes $\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\} \to \mathcal{A}'\{\frac{\varpi^j}{g}\}$ sont des isomorphismes d'algèbres de Banach. D'après le point (2) du théorème précédent, on a donc, en passant à la limite uniforme, $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o[\frac{1}{\varpi}] = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}'^o[\frac{1}{\varpi}]$. Ainsi $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o[\frac{1}{\varpi}])^\natural$ contient $\mathcal{A}'^\natural = \mathcal{A}'$.

(2) On a $(g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o)^\flat = (\lim \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o)^\flat = \lim \mathcal{A}^\flat\{\frac{\varpi^{\flat j}}{g^\flat}\}^o = g^{\flat-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^{\flat o}$ en vertu du th. 4.2.2 et de la prop. 3.6.1. □

4.2.4. *Remarque.* On peut se demander si, sans supposer que $\mathcal{A}$ contienne $g^{\frac{1}{p^\infty}}$, il demeure vrai que $\lim \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$ est la fermeture complètement intégrale de $\mathcal{A}^o$ dans $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$. Supposons $\operatorname{car}\mathcal{K} = 0$ comme il est loisible, et posons $\mathcal{K}' := \widehat{\mathcal{K}(\zeta_{p^\infty})}$, $\mathcal{A}' := \mathcal{K}'\hat{\otimes}^u_{\mathcal{K}}\mathcal{A}\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$. Le groupe des $\mathcal{K}$-automorphismes continus de $\mathcal{K}'$ est un sous-groupe fermé Γ de $\mathbf{Z}_p^\times$. En utilisant par exemple la remarque 2.2.7, on voit que $\mathcal{A}$ se plonge isométriquement dans $\mathcal{A}'$. Or $\mathcal{K}'$ est un corps perfectoïde (prop. 3.1.1) et $\mathcal{A}'$ est une $\mathcal{K}'$-algèbre perfectoïde (*cf.* 3.6.1). Compte tenu de la formule (2.21), on a alors

$$\lim \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o \subset (\lim \mathcal{A}'\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o)^G = (g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}'^o)^G = (\mathcal{A}'^{o*}_{\mathcal{A}'[\frac{1}{g}]})^G = (\mathcal{A}'^G)^{o*}_{(\mathcal{A}'^G)[\frac{1}{g}]}.$$

Dans l'autre sens, si $a \in \mathcal{A}^o[\frac{1}{g}]$ est presque entier sur $\mathcal{A}^o$, ses images dans chaque $\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o[\frac{1}{g}] \subset \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}$ le sont sur $\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$ donc sont dans $\mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$ (point 5) du sorite 2.3.1), et on a donc $a \in \lim \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o$. Si $\mathcal{A}'^G = \mathcal{A}$, on conclut que $\lim \mathcal{A}\{\frac{\varpi^j}{g}\}^o = \mathcal{A}^{o*}_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]}$. Notons que $\mathcal{A}'$ est le complété d'une sous-algèbre stable sous G dont les G-invariants se réduisent à $\mathcal{A}$, mais il n'est pas clair que l'égalité $\mathcal{A}'^G = \mathcal{A}$ (du type Ax-Sen-Tate) vaille en général.

4.2.5. *Exemple :* $\hat{A}_\infty$. Comme les anneaux noethériens A_i^o sont intégralement clos et entiers les uns sur les autres, il est facile de voir que $A_\infty = \cup A_i^o$ est complètement intégralement clos. Le passage au complété $\hat{A}_\infty$ ne va pas de soi ; on le contourne en utilisant la technique de [7, V, n. 4 prop. 15] (voir aussi [2, lemma A6]).

On a $\hat{A}_\infty^o = \widehat{\cup A_i^o}$ et $\hat{A}_\infty^o$ s'identifie à $W(k[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}]])\hat{\otimes}_{W(k)}\hat{K}_\infty^o$; ainsi, tout élément $a \in \hat{A}_\infty^o$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\sum \varpi^s[a_s], \quad a_s \in k[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}]], \tag{4.9}$$

et où s décrit une suite discrète finie ou tendant vers l'infini dans $\frac{1}{p-1}\mathbf{N}[\frac{1}{p}]$. De manière analogue, tout élément $b \in \widehat{Q(\hat{A}_\infty)}^o$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\sum \varpi^s[b_s], \quad b_s \in k((T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}})). \tag{4.10}$$

Par approximation successive, on montre alors que si les puissances de $b \in Q(\hat{A}_\infty^o)$ sont contenues dans un $\hat{A}_\infty^o$-module de type fini, alors chaque coefficient $[b_s]$ est le relevé d'un élément $b_s \in k((T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}))$ dont toutes les puissances sont contenues dans un $k[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}]]$-module de type fini. On est donc ramené à la complète intégralité de $k[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}]]$, qui découle de l'intégralité des $k[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^i}}]]$ puisque ces anneaux noethériens sont entiers (et même finis) les uns sur les autres.

Soient $\overline{Q(A)}$ une clôture algébrique du corps des fractions $Q(A)$ de A, et F le sous-corps engendré par $\cup A_i$ et les racines p-primaires d'un élément $g \in A$; c'est une extension galoisienne infinie de $Q(A)$ de groupe $G_0 := \mathbf{Z}_p^{n+1} \ltimes \mathbf{Z}_p^\times$ (le dernier facteur $\mathbf{Z}_p$ agissant sur $g^{\frac{1}{p^\infty}}$ selon l'action kummerienne usuelle). Soit $\tilde{A}$ la fermeture intégrale de A dans F, et $\hat{\tilde{A}}$ son complété p-adique et $\mathcal{A}' := \hat{\tilde{A}}[\frac{1}{p}]$; c'est une algèbre de Banach multiplicativement normée et $\mathcal{A}'^o = \hat{\tilde{A}}$. L'action de G_0 se prolonge à $\tilde{R}$ et $\mathcal{A}'^o$. Un théorème de type Ax-Sen-Tate dû à J.-P. Wintenberger [34] montre, compte tenu de ce que A est régulier, que $\mathcal{A}'^{oG_0} = A$ (et plus précisément que $H^1(G_0, \tilde{R})$ est anuulé par p si p est impair et par 4 si $p = 2$, ce qui implique le résultat compte tenu de la suite exacte [34, prop. 1])

$$0 \to (R/p^m R)^{G_0} \to (\tilde{R}/p^m\tilde{R})^{G_0} \to H^1(G_0, \tilde{R})(p^m) \to 0.$$

Par ailleurs, on a un épimorphisme extrémal $\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle \to \mathcal{A}'$, donc $\mathcal{A}'$ est perfectoïde (*cf.* 3.6.1 ; c'est même un isomorphisme si $\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ est multiplicativement normée), et on peut lui appliquer le th. 4.2.2. On conclut comme ci-dessus que

$$A = \lim A_0\{\frac{p^j}{g}\}^o. \tag{4.11}$$

Si $G_i \subset G_0$ désigne le sous-groupe ouvert correspondant à l'extension galoisienne $Q(A_i)$, on a encore que $H^1(G_i, \tilde{R})$ est annulé par p si p est impair et par 4 si $p = 2$; pour $G = \lim G_i$, $H^1(G, \tilde{R}) = \operatorname{colim} H^1(G_i, \tilde{R})$ l'est de même, et on conclut par le même argument que $\mathcal{A}'^{oG} = \widehat{\operatorname{colim}} A_i^o = A_\infty^o$ et

$$A_\infty^o = \lim A_\infty\{\frac{p^j}{g}\}^o. \tag{4.12}$$

4.3. **Limite uniforme vs. limite perfectoïde.** La proposition suivante analyse la situation abordée en 3.8.4, et prépare le terrain pour le th. 4.4.2. De nouveau, $\mathcal{K}$ désigne un corps perfectoïde de caractéristique 0, ϖ un élément de $\mathcal{K}^{oo} \setminus 0$ tel que $p\mathcal{K}^o \subset \varpi\mathcal{K}^o$, et $\varpi_{\frac{1}{p}}$ un élément de norme $|\varpi|^{\frac{1}{p}}$.

4.3.1. **Proposition.** *Soient $(\mathcal{A}^\alpha)$ un système projectif de $\mathcal{K}$-algèbres perfectoïdes, et $\mathcal{A}^\natural \to \mathcal{A}$ le morphisme canonique entre limite perfectoïde et limite uniforme.*
Considérons les conditions suivantes :

(1) $\mathcal{A}$ est perfectoïde,

(2) $\mathcal{A}^\natural \to \mathcal{A}$ est un isomorphisme ;

(3) le morphisme composé $\mathcal{A}^{\natural o}/\varpi \to \mathcal{A}^o/\varpi \to \lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi)$ (induit par les morphismes $\mathcal{A}^{\natural o}/\varpi \cong \mathcal{A}^{\flat o}/\varpi^\flat \to \mathcal{A}^{\alpha\flat o}/\varpi^\flat \cong \mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi$) est presque surjectif,

(4) Le morphisme $\lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi)\otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi,F}\mathcal{K}^o/\varpi \xrightarrow{\phi} \lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi)$ induit par Frobenius est presque surjectif,

(5) $\lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi) \to \lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi_{\frac{1}{p}})$ est presque surjectif.

On a $$(1) \Leftrightarrow (2) \ \Leftarrow\ (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5).$$

Démonstration. Posons $\mathfrak{L} := \lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi)$ et $\mathfrak{L}_{\frac{1}{p}} := \lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi_{\frac{1}{p}})$ pour abréger. D'après la formule (3.17), on a

$$(\mathcal{A}^\natural)^{\flat o} = \mathcal{A}^{\flat o} = \lim_F \mathfrak{L}. \tag{4.13}$$

$(1) \Leftrightarrow (2)$ est clair (*cf.* 3.8.1).
$(3) \Rightarrow (4)$: (3) signifie que $\lim_F \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ est presque surjectif, donc la dernière flèche de transition aussi, ce qui donne (4).

$(4) \Leftrightarrow (5)$: notons σ l'isomorphisme $\mathcal{K}^o/\varpi_{\frac{1}{p}} \xrightarrow{x\mapsto x^p} \mathcal{K}^o/\varpi$, et ρ le morphisme canonique $\mathfrak{L}/\varpi_{\frac{1}{p}} \to \mathfrak{L}_{\frac{1}{p}}$. Puisque les $\mathcal{A}^\alpha$ sont perfectoïdes, on a un système compatible d'isomorphismes de Frobenius $(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi_{\frac{1}{p}})\otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi_{\frac{1}{p}},\sigma}\mathcal{K}^o/\varpi \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi$, et par passage à la limite un isomorphisme $\psi : \mathfrak{L}_{\frac{1}{p}} \otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi_{\frac{1}{p}},\sigma}\mathcal{K}^o/\varpi \xrightarrow{\sim} \mathfrak{L}$. On a d'autre part un isomorphisme

$$\iota : \mathfrak{L}\otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi,F}\mathcal{K}^o/\varpi \xrightarrow{\sim} \mathfrak{L}/\varpi_{\frac{1}{p}} \otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi_{\frac{1}{p}},\sigma}\mathcal{K}^o/\varpi,$$

et ϕ est le composé $\psi\circ(\rho\otimes 1)\circ\iota$. Donc ϕ est presque surjectif si et seulement si ρ l'est.

$(4) \Rightarrow (3)$: (4) équivaut à la presque surjectivité de $\mathfrak{L}\otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi,F}\mathcal{K}^o/\varpi \xrightarrow{F\otimes 1} \mathfrak{L}$. Cette dernière entraîne la surjectivité de $F : \mathcal{K}^{oo}\mathfrak{L}\to\mathcal{K}^{oo}\mathfrak{L}$. Par le lemme de Mittag-Leffler pour les $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels, on en déduit la surjectivité de $\lim_F \mathcal{K}^{oo}\mathfrak{L} \to \mathcal{K}^{oo}\mathfrak{L}$, d'où la presque surjectivité de $\lim_F \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$.

$(3) + (4) \Rightarrow (1)$: d'après le lemme 2.8.1, $\mathcal{A}^o/\varpi \to \mathfrak{L}$ est injectif. Sous (3), il est presque surjectif, donc est en fait un presque-isomorphisme, et (4) entraîne alors que le morphisme $(\mathcal{A}^o/\varpi)\otimes_{\mathcal{K}^o/\varpi,F}\mathcal{K}^o/\varpi \xrightarrow{\phi} \mathcal{A}^o/\varpi$ induit par Frobenius est presque surjectif. □

4.3.1. *Remarque.* On peut appliquer le même argument dans le cadre $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], T^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^{oo}.\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$. Soit $(\mathcal{A}^\alpha)$ un système projectif de $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbres perfectoïdes, de limite uniforme $\mathcal{A}$. Si $\lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi) \to \lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi_{\frac{1}{p}})$ est presque surjectif, alors $\mathcal{A}^\natural \to \mathcal{A}$ est un presque-isomorphisme dans ce cadre, *i.e.* $\mathcal{A}$ est presque perfectoïde (*cf.* sorite 3.5.4) ; en outre, $\mathcal{A}^o/\varpi \to \lim(\mathcal{A}^{\alpha o}/\varpi)$ est un presque-isomorphisme.

4.4. **Limite uniforme d'algèbres perfectoïdes « en gigogne ».** On étudie ici dans quelle mesure la limite uniforme d'un système projectif d'algèbres perfectoïdes $\mathcal{B}^j$ est (presque) perfectoïde, dans la situation où les $\mathcal{B}^j$ se déduisent les unes des autres par localisation $(\mathcal{B}^i\{\frac{\varpi^j}{g}\} \cong \mathcal{B}^j)$.

4.4.1. Reprenons la situation et les notations de 4.2.1, et plaçons-nous dans le cadre $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi T)^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$.

4.4.1. **Proposition.** *Soit $(R^i)_{i\in\mathbf{N}}$ un système projectif de $(\mathcal{K}^o/\varpi^r)[T^{\frac{1}{p^\infty}}]$-algèbres dont les morphismes de transition $R^i \to R^j$ se factorisent par $R^{i[j]}$ de manière compatible en (i,j), ces factorisations induisant des isomorphismes $(R^{i[j]})^a \cong (R^j)^a$.*

Alors $\lim\limits_j{}^1(R^j)^a = 0$.

Démonstration. Posons $u^s_{i[j]} := 1 \otimes (\frac{\varpi^j}{T})^s \in R^{i[j]} = R^i \otimes_{\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}]} \mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}, (\frac{\varpi^j}{T})^{\frac{1}{p^\infty}}]$. Pour toute sous-$(\mathcal{K}^o/\varpi^r)[T^{\frac{1}{p^\infty}}]$-algèbre R'^i de R^i, introduisons les sous-R'^i-modules

$$(R'^i)^{[j]k} := \sum_{s\in\mathbf{N}[\frac{1}{p}]\cap[0,\frac{1}{p^k}]} R'^i.u^s_{i[j]} \subset R^{i[j]}. \tag{4.14}$$

Pour $R'^i = R^i$, on obtient ainsi un triple système projectif $(R^{i[j]k})$ de $(\mathcal{K}^o/\varpi^r)[T^{\frac{1}{p^\infty}}]$-modules indexé par (i,j,k). Notons $\bar R^{i'[i]}$ l'image de $R^{i'[i]}$ dans R^i, et $\bar u^s_{[i]}$ l'image de $u^s_{i'[i]}$ (elle ne dépend pas de i').

Comme $u^s_{i[j']}$ s'envoie sur 0 dans $R^{i[j]}$ si $s(j'-j) \geq r$, $R^{i[j']} \to R^{i[j]}$ se factorise à travers $R^{i[j]k}$ dès que $j' \geq j + rp^k$, d'où

$$\lim_j{}^1(R^j)^a \cong \lim_{ij}{}^1(R^{i[j]})^a \cong \lim_{ijk}{}^1(R^{i[j]k})^a. \tag{4.15}$$

Comme $\varpi^{\frac{1}{p^k}}u^s_{i[j]}$ est l'image dans $R^{i[j]}$ de $\varpi^{\frac{1}{p^k}-s}u^s_{i[j+1]}$ pour $s \leq \frac{1}{p^k}$, le conoyau de $R^{i[j+1]k} \to R^{i[j]k}$ est annulé par $\varpi^{\frac{1}{p^k}}$.

Comme $T^{\frac{1}{p^k}}u^s_{i[j]}$ est dans l'image de R^i pour $s \leq \frac{1}{p^k}$, le conoyau de $R^{i,[j],k+1} \to R^{i[j]k}$ est annulé par $T^{\frac{1}{p^k}}$.

Enfin, $(\bar R^{i'[i]})^{[j],k+1}$ est le sous-$R^{i'}$-module de $(\bar R^{i'[i]})^{[j]}$ engendré par les produits des images de $\bar u^s_{[i]}$ et des $u^t_{i[j]}$ pour $t \leq \frac{1}{p^{k+1}}$, c'est-à-dire par les $\varpi^{(i-j)s}u^{s+t}_{i[j]}$. Supposons $i' \geq i \geq j + \frac{rp^{k+1}}{p-1}$. Alors la double inégalité $(s+t \geq \frac{1}{p^k},\ t \leq \frac{1}{p^{k+1}})$ implique $s(i-j) \geq r$, de sorte que, sous la condition $t \leq \frac{1}{p^{k+1}}$, $\varpi^{(i-j)s}u^{s+t}_{i[j]}$ est nul si $s+t \geq \frac{1}{p^k}$, et appartient à $R^{i'[j]k}$ sinon ; d'où l'inclusion $(\bar R^{i'[i]})^{[j],k+1} \subset R^{i'[j]k}$. Compte tenu de ce que $R^{i'[i]} \to R^i$ est un presque-isomorphisme, on en déduit que l'image de $R^{i,[j],k+1}$ dans $R^{i[j]k}$ est presque contenue dans celle de $R^{i'[j]k}$.

Prenons alors $j = k$, choisissons une suite croissante $i_k \geq k + \frac{rp^{k+1}}{p-1}$, et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} R^{i_{k+1},[k+1],k+1} & \xrightarrow{a} & R^{i_{k+1},[k],k+1} & \longrightarrow & R^{i_k,[k],k+1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ R^{i_{k+1},[k+1],k} & \longrightarrow & R^{i_{k+1},[k],k} & \xrightarrow{c} & R^{i_k,[k],k}. \end{array}$$

D'après ce qui précède, $\operatorname{Coker} a$ (*resp.* $\operatorname{Coker} b$) est annulé par $\varpi^{\frac{1}{p^{k+1}}}$ (*resp.* $T^{\frac{1}{p^k}}$), $\operatorname{Im} d$ est presque contenu dans $\operatorname{Im} c$, donc $\operatorname{Coker} c$ est presque quotient de $\operatorname{Coker} d$, donc presque annulé par $(\varpi T)^{\frac{1}{p^k}}$. On trouve que le composé cba est annulé par $(\varpi T)^{\frac{3}{p^k}}$. Puisque $\sum \frac{3}{p^k}$ converge, on obtient $\lim^1(R^{i_k,[k],k})^a = 0$ (*cf.* [13, lemme 2.4.2 iii)]).

Compte tenu de (4.15), on conclut que $\lim\limits_j{}^1(R^j)^a = \lim\limits_{ijk}{}^1(R^{i[j],k})^a = 0$. □

4.4.2. Si $\mathcal{B}$ est une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre presque perfectoïde, et g l'image de T dans $\mathcal{B}$, posons $\mathcal{B}^{[j]} := \mathcal{B}\{\frac{\varpi^j}{g}\}$. C'est une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre perfectoïde : en effet, il découle du lemme 2.6.2 que $\mathcal{B}^{[j]} \cong \mathcal{B}^{\natural[j]}$, qui est perfectoïde d'après la prop. 3.6.1.

Soit $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre presque perfectoïde. Rappelons que la catégorie $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-$\mathbf{uBan}$ des $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-algèbres de Banach uniformes a pour objets les $\mathcal{A}$-algèbres de Banach uniformes et pour morphismes ceux obtenus après application du foncteur $(\ )^{oa}$ (*cf.* §2.3.6). Les $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-algèbres presque perfectoïdes forment une sous-catégorie pleine $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-$\mathbf{pPerf}$ (*cf.* §3.5.4). D'après la formule (2.25), on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{B}^{[j]} \cong \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}^{[j]}. \tag{4.16}$$

Notons $2\text{-}\lim \mathcal{A}^{[j]}$-$\mathbf{Perf}$ la catégorie des systèmes projectifs de $\mathcal{A}^{[j]}$-algèbres perfectoïdes $\mathcal{B}^j$ dont les morphismes de transition $\mathcal{B}^i \to \mathcal{B}^j$ se factorisent à travers des isomorphismes

$$\mathcal{B}^i\{\frac{\varpi^j}{g}\} \cong \mathcal{B}^j. \tag{4.17}$$

La localisation induit un foncteur

$$\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-}\mathbf{pPerf} \xrightarrow{\varsigma} 2\text{-}\lim \mathcal{A}^{[j]}\text{-}\mathbf{Perf}.$$

4.4.2. **Théorème.** *Le foncteur ς admet* ulim *comme quasi-inverse à gauche et adjoint à droite. En particulier, il induit une equivalence de $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-$\mathbf{pPerf}$ avec une sous-catégorie (pleine) coréflexive de* $2\text{-}\lim \mathcal{A}^{[j]}$-$\mathbf{Perf}$.

Démonstration. Commençons par prouver que pour tout objet $(\mathcal{B}^j)$ de $2\text{-}\lim \mathcal{A}^{[j]}$-$\mathbf{Perf}$, la limite uniforme $\mathcal{B}$ est presque perfectoïde (c'est clair si $\mathrm{car}\,\mathcal{K} = p$ puisque la perfection est préservée à la limite des $\mathcal{A}^{[j]o}$). Plaçons-nous de nouveau dans le cadre $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi T)^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$.

En appliquant la prop. 4.4.1 avec $R^j := \mathcal{B}^{jo}/\varpi^r$, on obtient $\lim\limits_j{}^1(\mathcal{B}^{jo}/\varpi^r)^a = 0$. Comme $\mathcal{B}^{jo}$ est plate sur $\mathcal{K}^o$, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{B}^{jo}/\varpi^{1-\frac{1}{p}} \to \mathcal{B}^{jo}/\varpi \to \mathcal{B}^{jo}/\varpi^{\frac{1}{p}} \to 0$$

et par presque-nullité de la $\lim\limits_j{}^1$, on obtient encore une suite exacte à la limite :

$$0 \to \lim_j(\mathcal{B}^{jo}/\varpi^{1-\frac{1}{p}})^a \to \lim_j(\mathcal{B}^{jo}/\varpi)^a \to \lim_j(\mathcal{B}^{jo}/\varpi^{\frac{1}{p}})^a \to 0.$$

La variante de prop. 4.3.1 signalée dans la rem. 4.3.1 entraîne alors que $\mathcal{B}$ est presque perfectoïde.

Que ulim, ou de manière équivalente $\mathrm{ulim}^\natural$, soit quasi-inverse à gauche de ς découle du th. 4.2.2. Enfin, soient $\mathcal{C}$ un objet de $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-$\mathbf{pPerf}$ et $(\mathcal{B}^j)_j$ un objet de $2\text{-}\lim \mathcal{A}^{[j]}$-$\mathbf{Perf}$. L'application $\mathrm{Hom}(\varsigma(\mathcal{C}), (\mathcal{B}^j)_j) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathrm{ulim}\,\mathcal{B}^j)$ induite par ulim admet comme inverse (fonctoriellement en $(\mathcal{C}, (\mathcal{B}^j)_j)$) l'application induite par $(\ )^{[j]}$ suivi du morphisme canonique $(\mathcal{B}^{[j]})_j \to (\mathcal{B}^j)_j$. Pour la seconde assertion, voir [21, IV 4 ex. 4]. □

4.4.3. *Remarques.* (1) On ne peut remplacer les $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbres par des $\mathcal{K}\langle T\rangle$-algèbres, comme on le voit sur l'ex. 3.8.5.

(2) En vertu du lemme 3.5.3, on pourrait remplacer $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-$\mathbf{pPerf}$ par sa sous-catégorie pleine équivalente $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-$\mathbf{Perf}$, et ulim par $\mathrm{ulim}^\natural$. Si la question 3.5.1 a une réponse positive, il est même inutile de substituer $\mathrm{ulim}^\natural$ à ulim.

4.4.3. **Question.** *ς est-il essentiellement surjectif (et par suite une équivalence) ?*

Il revient au même de demander si l'on retrouve les $\mathcal{B}^j$ par localisation affinoïde de $\mathrm{ulim}\,\mathcal{B}^j$. Voici un cas particulier important où c'est bien le cas :

4.4.4. **Proposition.** *Soit $\mathcal{B}'$ une $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$-algèbre étale finie.*

(1) Les $\mathcal{B}^j := \mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[j]}$ forment un objet de $2\text{-}\lim \mathcal{A}^{[j]}$-$\mathbf{Perf}$. On note $\mathcal{B}$ la limite uniforme.

(2) Les coünités d'adjonction $\mathcal{B}^{[j]} \overset{\eta_j}{\to} \mathcal{B}^j$ sont des isomorphismes.

(3) Elles proviennent en fait d'un isomorphisme $\mathcal{B}[\frac{1}{g}] \overset{\sim}{\to} \mathcal{B}'$.

Démonstration. (1) Les $\mathcal{B}^j$ forment un système projectif de $\mathcal{A}^{[j]}$-algèbres étales finies, donc perfectoïdes (th. 3.4.1). On a donc $\mathcal{B}^i \otimes_{\mathcal{A}^{[i]}} \mathcal{A}^{[j]} = \mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[i]} \otimes_{\mathcal{A}^{[i]}} \mathcal{A}^{[j]} \cong \mathcal{B}^j$, et comme $\mathcal{B}^i$ est projectif fini sur $\mathcal{A}^{[i]}$, $\mathcal{B}^i \otimes_{\mathcal{A}^{[i]}} \mathcal{A}^{[j]} = \mathcal{B}^i \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^{[i]}} \mathcal{A}^{[j]} \cong \mathcal{B}^i\{\frac{\varpi^j}{g}\}$.
(2) La fermeture intégrale $\mathcal{A}^{o+}_{\mathcal{B}'}$ s'envoie naturellement vers la fermeture intégrale $\mathcal{A}^{[j]o+}_{\mathcal{B}^j}$ qui n'est autre que $\mathcal{B}^{jo}$ d'après le cor. 3.4.3, ce qui fournit à la limite un morphisme canonique $\mathcal{A}^{o+}_{\mathcal{B}'} \to \mathcal{B}^o$, d'où aussi $\mathcal{A}^{o+}_{\mathcal{B}'}[\frac{1}{\varpi g}] = \mathcal{B}' \overset{\delta}{\to} \mathcal{B}[\frac{1}{g}]$. Le morphisme composé $\delta_j : \mathcal{B}^j = \mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[j]} \overset{\delta\otimes 1}{\to} \mathcal{B}[\frac{1}{g}] \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[j]} = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^{[j]} \to \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}^{[j]} = \mathcal{B}^{[j]}$ est un inverse à droite de η_j. Or par adjonction, tout morphisme de la forme $\varsigma(\mathcal{C}) \to (\mathcal{B}^j)_j$ se factorise de manière unique en un morphisme $\varsigma(\mathcal{C}) \to \varsigma(\mathcal{B})$. Appliquant ceci à $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ et au morphisme de composantes $\eta_j(\delta_j\eta_j) = \eta_j$, on en déduit $\delta_j\eta_j = id_{\mathcal{B}^{[j]}}$. Donc η_j est un isomorphisme d'inverse δ_j [23].
(3) Par ailleurs, δ est injectif. En effet, le noyau $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}[\frac{1}{g}]$ est un idéal de trace nulle sur $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$: en effet, $tr(\mathfrak{I})$ est d'image nulle dans chaque $\mathcal{A}^{[j]}$, donc est nul puisque $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ s'envoie injectivement dans $\mathrm{ulim}\, \mathcal{A}^{[j]}$ (lemme 2.6.3). Donc $\mathfrak{I}$ est lui-même nul puisque $\mathcal{B}'$ est étale sur $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$.

ll reste à voir que δ est surjectif. On peut remplacer $\mathcal{A}^o$ par $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o$, ce qui permet de supposer $\mathcal{A}$ (complètement) intégralement fermé dans $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$.

a) Supposons pour commencer $\mathcal{B}'$ galoisien sur $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ de groupe G. On a alors

$$\mathcal{B}[\frac{1}{g}]^G = (\mathrm{ulim}\,(\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[j]})^G)[\frac{1}{g}] = (\mathrm{ulim}\, \mathcal{A}^{[j]})[\frac{1}{g}] = \mathcal{A}[\frac{1}{g}].$$

On conclut par le lemme 1.9.3 (avec $R = \mathcal{A}[\frac{1}{g}]$, $S' = \mathcal{B}'$, $S = \mathcal{B}[\frac{1}{g}]$).

b) En général, le rang de $\mathcal{B}'$ sur $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ étant fini continu et borné, et $\mathcal{A}$ étant $\mathcal{A}$ intégralement fermé dans $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$, on peut supposer, en décomposant $\mathcal{A}$ en un nombre fini de facteurs, que ce rang est constant, égal à r. D'après le lemme 1.9.2, on a une extension galoisienne $\mathcal{A}[\frac{1}{g}] \hookrightarrow \mathcal{C}'$ de groupe $\mathfrak{S}_r$ se factorisant par $\mathcal{B}'$ et telle que $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'^{\mathfrak{S}_{r-1}}$; d'où $\mathcal{B}^j = \mathcal{C}^{j\mathfrak{S}_{r-1}}$ et à la limite $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{\mathfrak{S}_{r-1}}$. D'après le pas a), on a $\mathcal{C}' = \mathcal{C}[\frac{1}{g}]$, donc $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'^{\mathfrak{S}_{r-1}} = \mathcal{C}[\frac{1}{g}]^{\mathfrak{S}_{r-1}} = \mathcal{B}[\frac{1}{g}]$. □

4.4.4. *Remarque.* Le fait que δ et δ_j soient des isomorphismes implique que $\tilde{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^{[j]} \to \tilde{\mathcal{B}}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}^{[j]}$ en est un.

23. cet argument d'adjonction montre plus généralement que toute sous-catégorie épi-coréflexive est mono-coréflexive [17, prop. 1].

5. Le « lemme d'Abhyankar » perfectoïde.

5.1. On fixe un corps perfectoïde $\mathcal{K}$ et un élément $\varpi \in \mathcal{K}^{oo}$ admettant une suite compatible de racines p^m-ièmes, tel que $|p| \leq |\varpi|$. On prend pour cadre

$$(\mathfrak{V} = \mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}],\ \mathfrak{m} = (\varpi T)^{\frac{1}{p^\infty}}\mathfrak{V}).$$

Soit $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre presque perfectoïde. Rappelons encore que la catégorie $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-$\mathbf{pPerf}$ a pour objets les $\mathcal{A}$-algèbres de Banach uniformes $\mathcal{B}$ qui sont presque isomorphes à $\mathcal{B}^\natural$, et pour morphismes ceux obtenus après application du foncteur $(\ )^{oa}$ (*cf.* §2.3.6).

On dira qu'un objet $\mathcal{B}^{\hat{a}}$ de $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-$\mathbf{uBan}$ est *presque étale fini* sur $\mathcal{A}^{\hat{a}}$ si $\mathcal{B}^a$ est étale fini sur $\mathcal{A}^a$. Rappelons que d'après la prop. 3.5.6, si $\mathcal{A}$ est presque perfectoïde, l'inversion de ϖ induit une équivalence

$$\mathcal{A}^{oa}\text{-}\mathbf{Alg}^{et.fin} \ \xrightarrow{\xi}\ \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-}\mathbf{pPerf}^{p.et.fin}, \tag{5.1}$$

de quasi-inverse $(\ )^{oa}$, entre $\mathcal{A}^{oa}$-algèbres étales finies et $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-algèbres presque perfectoïdes presque étales finies.

5.2. Le théorème principal de cet article est une extension du th. 3.4.1 au cas ramifié (on retrouve 3.4.1 dans le cas où $T^{\frac{1}{p^i}}.1 = 1$).

5.2.1. **Théorème.** *Soient $\mathcal{K}$ un corps perfectoïde et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre presque perfectoïde. On note g l'élément $T.1$ de $\mathcal{A}^o$. On a alors des équivalences de catégories*

$$\{\mathcal{A}^{oa}\text{-algèbres complètes, étales finies modulo toute puissance de } p \text{ et étales finies après inversion de } g\ \} \xrightarrow{\sim}$$

$$\{\ \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-algèbres presque perfectoïdes, étales finies après inversion de } g\} \xrightarrow{\sim}$$

$$\{\mathcal{A}[\tfrac{1}{g}]\text{-algèbres étales finies}\}$$

induites par inversion de ϖ et de g respectivement.

5.2.2. **Question.** *Ces catégories sont-elles aussi équivalentes à celles de* (5.1) *?*

cf. rem. 5.2.1.

Démonstration. Il est loisible de remplacer $\mathcal{A}$ par toute algèbre isomorphe dans $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^{\hat{a}}$-$\mathbf{pPerf}$, notamment par $\mathcal{A}^{\hat{a}}_* = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o[\frac{1}{\varpi}]$. Cela permet de supposer d'emblée que g est non-diviseur de zéro et, en vertu du th. 4.2.2, que

$$\mathcal{A} \cong \operatorname{ulim} \mathcal{A}^{[j]}. \tag{5.2}$$

Notons $\mathcal{A}^{oa}$-$\mathbf{Alg}^{(/p^\bullet,\frac{1}{g})et.fin}$ la première catégorie du théorème, et par $\mathcal{A}^{\hat{a}}$-$\mathbf{pPerf}^{\frac{1}{g}et.fin}$ la seconde, et

$$\mathcal{A}^{oa}\text{-}\mathbf{Alg}^{(/p^\bullet,\frac{1}{g})et.fin} \xrightarrow{\xi'} \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-}\mathbf{pPerf}^{\frac{1}{g}et.fin} \xrightarrow{\varrho'} \mathcal{A}[\frac{1}{g}]\text{-}\mathbf{Alg}^{et.fin}$$

les foncteurs en jeu, dont il s'agit de montrer que ce sont des équivalences.

Commençons par prouver que *ϱ' est une équivalence*.

Notons 2-$\lim \mathcal{A}^{[j]}$-$\mathbf{Alg}$ la catégorie des systèmes projectifs de $\mathcal{A}^{[j]}$-algèbres $\mathcal{B}^j$ dont les morphismes de transition $\mathcal{B}^i \to \mathcal{B}^j$ se factorisent à travers des isomorphismes

$$\mathcal{B}^i\{\frac{\varpi^j}{g}\} \cong \mathcal{B}^j. \tag{5.3}$$

Observons que $(\mathcal{A}^{[j]})_j$ est un système projectif de $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$-algèbres, et considérons le diagramme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-}\mathbf{pPerf} & \xrightarrow{\varrho} & \mathcal{A}[\frac{1}{g}]\text{-}\mathbf{Alg} \\ \downarrow{\scriptstyle \varsigma} & & \\ 2\text{-}\lim \mathcal{A}^{[j]}\text{-}\mathbf{Perf} & \xrightarrow{\upsilon} & 2\text{-}\lim \mathcal{A}^{[j]}\text{-}\mathbf{Alg} \end{array} \tag{5.4}$$

où ϱ est le foncteur oubli de la norme et inversion de g, υ est le foncteur oubli de la norme, et ς est le foncteur considéré au th. 4.4.2, qui est pleinement fidèle, de quasi-inverse à gauche λ donné par la limite uniforme.

Après restriction aux algèbres étales finies, ce diagramme se complète d'après la prop. 4.4.4 $(1), (2)$ en un diagramme essentiellement commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-}\mathbf{pPerf}^{\frac{1}{g}et.fin} & \xrightarrow{\varrho'} & \mathcal{A}[\frac{1}{g}]\text{-}\mathbf{Alg}^{et.fin} \\ \downarrow{\scriptstyle \varsigma'} & & {\scriptstyle \tau'}\downarrow \\ 2\text{-}\lim \mathcal{A}^{[j]}\text{-}\mathbf{Perf}^{et.fin} & \xrightarrow{\upsilon'} & 2\text{-}\lim \mathcal{A}^{[j]}\text{-}\mathbf{Alg}^{et.fin} \end{array} \tag{5.5}$$

où τ est donné par les produits tensoriels $(- \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[j]})_j$. D'après le th. 3.4.1, υ' est une équivalence : on obtient un quasi-inverse canonique υ'^{-1} en munissant chaque $\mathcal{B}^j$ de sa norme spectrale canonique. Posons

$$\sigma := \lambda\nu'^{-1}\tau' : \mathcal{A}[\frac{1}{g}]\text{-}\mathbf{Alg}^{et.fin} \to \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-}\mathbf{pPerf},\ \mathcal{B}' \mapsto \mathcal{B} := \operatorname{ulim} \mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[j]}.$$

On a $\sigma\rho' = \lambda\nu'^{-1}\tau'\rho' = \lambda\nu'^{-1}\nu'\varsigma' = \lambda\varsigma' = id_{\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-}\mathbf{pPerf}^{\frac{1}{g}et.fin}}$.

D'autre part, d'après la prop. 4.4.4 (3), on a un isomorphisme canonique $\mathcal{B}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}[\frac{1}{g}] = \rho'\sigma(\mathcal{B}')$, ce qui montre que σ est à valeurs dans la ϱ-préimage $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-}\mathbf{pPerf}^{\frac{1}{g}et.fin}$ de $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]\text{-}\mathbf{Alg}^{et.fin}$ dans $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-}\mathbf{pPerf}$, puis que $\rho'\sigma = id_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]\text{-}\mathbf{Alg}^{et.fin}}$.

En définitive, (5.5) est un *diagramme d'équivalences de catégories*.

Prouvons ensuite que ξ' *est une équivalence*. Comme il est clair que ξ' est pleinement fidèle, et compte tenu de ce que ρ' est essentiellement surjectif, il suffit de montrer la

5.2.3. **Proposition.** *Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{A}$-algèbre perfectoïde dans laquelle g n'est pas diviseur de zéro, et telle que $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$ soit étale finie sur $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$. Alors pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\mathcal{B}^{oa}/p^m$ est étale finie sur $\mathcal{A}^{oa}/p^m$ dans le cadre $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}],\ (\varpi T)^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$, et $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$ est presque étale finie sur $\mathcal{A}^o[\frac{1}{g}]$ dans le cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$.*

Si $\operatorname{car}\mathcal{K} = p$, cela est prouvé dans [13, 3.5.28] (en prenant $V = \mathcal{A}^o$ et $\varepsilon = \varpi T$ dans *loc. cit.*). Supposons donc $\operatorname{car}\mathcal{K} = 0$.

$a)$ Plaçons-nous encore pour commencer dans la situation où $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$ est extension galoisienne de galoisienne de $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ de groupe G. Posons pour alléger

$$\mathcal{B}_2 := \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B},\ \mathcal{B}_2^{[j]} := \mathcal{B}^{[j]} \otimes_{\mathcal{A}^{[j]}} \mathcal{B}^{[j]}. \tag{5.6}$$

D'après la prop. 3.3.4, les complétés $\widehat{\mathcal{B}_2} = \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ et $\hat{\mathcal{B}}_2^{[j]}$ sont des algèbres perfectoïdes et $\widehat{\mathcal{B}_2}^{oa} = \mathcal{B}^{oa}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}^{oa}}\mathcal{B}^{oa}$ (c'est vrai dans le cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ et a fortiori dans $(\mathfrak{V} = \mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}],\ \mathfrak{m} = (\varpi T)^{\frac{1}{p^\infty}}\mathfrak{V})$). En outre, $\widehat{\mathcal{B}_2}^{[j]} = \mathcal{B}_2^{[j]}$ car $\mathcal{B}^{[j]}$ est étale fini sur $\mathcal{A}^{[j]}$. D'après le th. 4.2.2, on a

$$\lim \mathcal{A}^{[j]o} = \mathcal{A}_*^o,\quad \lim \mathcal{B}^{[j]o} = \mathcal{B}_*^o,\quad \lim \mathcal{B}_2^{[j]o} = (\widehat{\mathcal{B}_2}^o)_* = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\widehat{\mathcal{B}_2}^o. \tag{5.7}$$

Comme $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$ est galoisien de groupe G sur $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$, $\mathcal{B}^{[j]oa}$ est galoisien de groupe G sur $\mathcal{A}^{[j]oa}$ d'après la prop. 3.4.2. On en tire que G agit par automorphismes de $\mathcal{B}^o_*$ et $G\times G$ par automorphismes de $(\widehat{\mathcal{B}_2^{\,o}})_*$, et que

$$\mathcal{B}^{oG}_* = (\lim \mathcal{B}^{[j]o})^G = \lim \mathcal{A}^{[j]o} = \mathcal{A}^o_* \tag{5.8}$$

$$(\widehat{\mathcal{B}_2^{\,o}})^{G\times G}_* = (\lim \mathcal{B}_2^{[j]o})^{G\times G} = \lim \mathcal{A}^{[j]o} = \mathcal{A}^o_*. \tag{5.9}$$

En particulier $\mathcal{B}^o_*$ et $(\widehat{\mathcal{B}_2^{\,o}})_*$ sont entiers sur $\mathcal{A}^o_*$. Les isomorphismes

$$\mathcal{B}^{[j]o}_{2*} \xrightarrow{\sim} \prod_G \mathcal{B}^{[j]o}_*, \quad b\otimes b' \mapsto (\gamma(b)b')_{\gamma\in G} \tag{5.10}$$

induisent à la limite un isomorphisme

$$(\widehat{\mathcal{B}_2^{\,o}})_* \xrightarrow{\sim} \prod_G \mathcal{B}^o_*. \tag{5.11}$$

Modulo p^m cela donne aussi

$$(\mathcal{B}^{oa}/p^m)\otimes_{\mathcal{A}^{oa}/p^m}(\mathcal{B}^{oa}/p^m) \xrightarrow{\sim} \prod_G (\mathcal{B}^{oa}/p^m), \tag{5.12}$$

i.e. $\mathcal{B}^{oa}/p^m$ est galoisienne de groupe G sur $\mathcal{A}^{oa}/p^m$ dans le cadre $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi T)^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$.

En particulier, $(\mathcal{B}^o/p)[\frac{1}{g}]$ est presque plate sur $(\mathcal{A}^o/p)[\frac{1}{g}]$ dans le cadre $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi T)^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$, donc aussi dans le cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$ puisqu'on a inversé g. Comme $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$ est étale, donc plate, sur $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$ et que $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$ est sans ϖ-torsion, on conclut d'après [13, 5.2.1] que $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$ est presque plate sur $\mathcal{A}^o[\frac{1}{g}]$ dans le cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$, cadre dans lequel on se place dans les lignes qui suivent. Donc $\mathcal{B}^o_2[\frac{1}{g}] = (\mathcal{B}^o_2)_*[\frac{1}{g}]$ est presque plate sur $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$, en particulier presque sans ϖ-torsion, de sorte que la torsion ϖ-primaire de $\mathcal{B}^o_2$ (*resp.* de $(\mathcal{B}^o_2)_* = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o_2$) est presque égale à la torsion g-primaire.

La prop. 4.4.4 (jointe à (5.7)) montre que $(\mathcal{B}^o_2)_* \to (\widehat{\mathcal{B}_2^{\,o}})_*$ induit un isomorphisme après inversion de pg. D'après ce qui précède, le morphisme composé $\mathcal{B}_{2\hat{*}} := (\mathcal{B}^o_2)_*[\frac{1}{p}] \to \widehat{\mathcal{B}_{2\hat{*}}} \to (\widehat{\mathcal{B}_2})_{\hat{*}} = (\widehat{\mathcal{B}_2^{\,o}})_*[\frac{1}{p}]$ est donc injectif, de sorte que $\mathcal{B}_{2\hat{*}}$ est séparé.

D'autre part, $\widehat{\mathcal{B}_{2\hat{*}}} \to (\widehat{\mathcal{B}_2})_{\hat{*}}$ est isométrique : en effet, on déduit du point (3) du lemme 2.5.1 que $(\widehat{\mathcal{B}^o_{2*}})/p \to (\widehat{\mathcal{B}_2^{\,o}})_*/p$ est injectif. Donc la norme de $\mathcal{B}_{2\hat{*}}$ est spectrale tout comme celle de $(\widehat{\mathcal{B}_2})_{\hat{*}}$. Il suit que $\mathcal{B}_{2\hat{*}}{}^o = \mathcal{B}_{2\hat{*}\le 1}$ est presque égal à $(\mathcal{B}^o_2)_*/(\varpi^\infty\text{-tors})$. On en conclut que $\mathcal{B}^o_2[\frac{1}{g}] = (\mathcal{B}^o_2)_*[\frac{1}{g}]$ est presque égal à $\mathcal{B}_2[\frac{1}{g}]\cap(\widehat{\mathcal{B}_2^{\,o}})_*[\frac{1}{g}]$, et que les idempotents e_γ définissant la décomposition (5.11) sont dans $\varpi^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o_2[\frac{1}{g}]$, *i.e.* que $\mathcal{B}^o[\frac{1}{g}]$ est presque galoisienne de groupe G sur $\mathcal{A}^o[\frac{1}{g}]$ dans le cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$.

b) La réduction au cas galoisien se fait comme dans la prop. 3.4.2 ($2b$).

Ceci termine la preuve de la prop. 5.2.3, ainsi que celle du th. 5.2.1. □

5.2.1. *Remarque.* Il ne semble pas qu'on puisse tirer de là que $\mathcal{B}^{oa}$ est étale finie sur $\mathcal{A}^{oa}$ (comme $\mathcal{A}^o_*$ est p-adiquement hensélien, de même que son extension entière $\mathcal{B}^o_*$, il suffirait de voir que $\widehat{\mathcal{B}^o_{2*}}$ contient les $e_\gamma \in (\widehat{\mathcal{B}^o_2})_*$). On ne peut invoquer l'« équivalence remarquable de Grothendieck » comme en 1.8.2 car le résultat de [13, 5.3.27] ne s'applique plus : l'idéal engendré par ϖ n'est pas « tight » [24]. En fait, l'information qui manque ici est la presque finitude de $\mathcal{B}^o$ sur $\mathcal{A}^o$: si l'on en disposait, on conclurait par [13, 5.3.20] que $\mathcal{B}^{oa}$ est projectif fini sur $\mathcal{A}^{oa}$, et il serait facile de passer de là à « étale fini ».

24. comme m'en a averti O. Gabber.

Par ailleurs, tenter de déduire de la prop. 2.6.1 la presque-pureté (au sens de presque-injectivité universelle) de $\mathcal{B}^o$ sur $\mathcal{A}^o$ se heurte au fait qu'il existe des modules de présentation finie non séparés sur $\mathcal{A}^o$ pour certaines algèbres perfectoïdes $\mathcal{A}$, et même des idéaux principaux non fermés : en $\mathrm{car}\ p$, un exemple est donné par l'idéal (U) dans $\mathcal{K}^{\flat o}\langle T_i^{\frac{1}{p^\infty}}, U^{\frac{1}{p^\infty}}, (\frac{\varpi^{\flat i}T_i}{U})^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle_{i\in\mathbf{N}}$.

5.3. **Preuve du théorème 0.3.1.** Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{K}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$-algèbre perfectoïde, et posons $g := T.1 \in \mathcal{A}^o$. Soit $\mathcal{B}'$ une $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$-algèbre étale finie. Notons $\mathcal{B}^j := \mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{A}[\frac{1}{g}]} \mathcal{A}^{[j]}$, $\mathcal{B}$ la $\mathcal{A}$-algèbre presque perfectoïde $\mathrm{ulim}\,\mathcal{B}^j$, et $\tilde{\mathcal{B}}^o$ (*resp.* $\tilde{\mathcal{B}}$) la fermeture intégrale de $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o$ (*resp.* $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o[\frac{1}{\varpi}]$) dans $\mathcal{B}'$. Comme la fermeture intégrale commute à la localisation, on a $\tilde{\mathcal{B}}[\frac{1}{g}] = \mathcal{A}[\frac{1}{g}]^+_{\mathcal{B}'} = \mathcal{B}'$, qui n'est autre que $\mathcal{B}[\frac{1}{g}]$ d'après la prop. 4.4.4. On a $\mathcal{B}^o = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o = (\varpi g)^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{B}^o$, et $\mathcal{B}^o$ est ϖ-adiquement complète.

Le th. 0.3.1 résulte alors de la proposition suivante (l'algèbre notée $\mathcal{B}$ dans *loc. cit.* est ici $\tilde{\mathcal{B}}^\natural$).

5.3.1. **Proposition.** *(1) On a $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$, et $\tilde{\mathcal{B}}^o = (g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o)^+_{\mathcal{B}'} = (\varpi g)^{-\frac{1}{p^\infty}}\tilde{\mathcal{B}}^o = \hat{\tilde{\mathcal{B}}}^o$.*

(2) $\tilde{\mathcal{B}}^\natural$ est la plus grande $\mathcal{A}$-algèbre perfectoïde contenue dans $\mathcal{B}'$.

(3) Si $\mathcal{B}'$ est un $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$-module fidèle, $\mathrm{Tr}_{\mathcal{B}'/\mathcal{A}[\frac{1}{g}]}(\tilde{\mathcal{B}}^o) \hookrightarrow g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o$ est un presque-isomorphisme.

Démonstration. (1) On peut remplacer $\mathcal{A}^o$ par $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o$. Comme $(\mathcal{A}^o)^+_{\mathcal{B}'} \otimes_{\mathcal{A}^o} \mathcal{A}^{[j]o}$ est contenu dans la fermeture intégrale de $\mathcal{A}^{[j]o}$ dans $\mathcal{B}^j$, elle-même contenue dans $\mathcal{B}^{jo}$ (lemme 2.4.1 (1)), on a un morphisme canonique $(\mathcal{A}^o)^+_{\mathcal{B}'} \to \mathcal{B}^{jo}$. Il est compatible avec les flèches de transition en j, d'où, en passant à la limite, un morphisme canonique $(\mathcal{A}^o)^+_{\mathcal{B}'} \to \mathcal{B}^o$, et il suffit de montrer que c'est un isomorphisme. Comme il s'agit de sous-anneaux de $\mathcal{B}'$, il est injectif, ce qui ramène à montrer qu'il est surjectif, ou encore, que $\mathcal{B}^o$ est entier sur $\mathcal{A}^o$, ce qui découle de (5.8).

(2) suit de (1) et du cor. 4.2.4.

(3) Si $\mathcal{B}'$ est un $\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$-module fidèle, $\tilde{\mathcal{B}}^o$ est un $\mathcal{A}^o$-module fidèle, et comme le plongement $\mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{B}}$ est isométrique, $\tilde{\mathcal{B}}^o/p$ est un $\mathcal{A}^o/p$-module fidèle. Alors $\tilde{\mathcal{B}}^{oa}/p$ est une extension étale finie de $\mathcal{A}^{oa}/p$ (prop. 5.2.3), et la trace fournit un homomorphisme de $(\tilde{\mathcal{B}}^{oa})_*$ sur $(\mathcal{A}^{oa})_* = g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{A}^o$ qui est presque surjectif modulo p, donc presque surjectif d'après la version 1.3 du lemme de Nakayama. □

5.4. **Normalisation de Noether et « enveloppes » presque perfectoïdes d'algèbres affinoïdes.** Les constructions d'algèbres perfectoïdes se bornent habituellement à des situations « toriques » où l'on met à profit la version logarithmique du théorème de « presque-pureté » de Faltings.

Grâce au lemme d'Abhyankar perfectoïde, on peut en fait attacher des algèbres perfectoïdes à toute algèbre affinoïde réduite $\mathscr{B}$ sur $\mathcal{K}$ de dimension n, en considérant $\mathscr{B}$ comme une extension finie de $\mathscr{A} := \mathcal{K}\langle T_{\leq n}\rangle$ par le lemme de normalisation de Noether [5, cor. 6.1.2/2]. Soit $g \in \mathscr{A}^o$ tel que $\mathscr{B}[\frac{1}{g}]$ soit étale sur $\mathscr{A}[\frac{1}{g}]$. Soient $\mathcal{A}$ l'algèbre presque perfectoïde $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}\langle T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}, g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$, et $\mathcal{B}$ *la fermeture intégrale de $\mathscr{B}\otimes_{\mathscr{A}}\mathcal{A}$ dans $\mathscr{B}\otimes_{\mathscr{A}}\mathcal{A}[\frac{1}{g}]$. Alors $\mathcal{B}$ est presque perfectoïde* (prop. 5.3.1), et $\mathcal{B}^{oa}$ est étale fini sur $\mathcal{A}^{oa}$ modulo toute puissance de p dans le cadre $(\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}], (\varpi T)^{\frac{1}{p^\infty}}\mathcal{K}^o[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$, (via $T^{\frac{1}{p^k}} \mapsto g^{\frac{1}{p^k}}$).

Si la question 3.5.1 a une réponse positive, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont perfectoïdes.

INDEX DES SYMBOLES

$( )^{\dagger}$, $( )^{+}$, $( )^{*}$ 2.3.1,
$( )^{a}$, $( )_{*}$, $( )_{!}$, $( )_{!!}$ 1.2, 1.4,
$( )^{\hat{a}}$, $( )_{\hat{*}}$, $( )_{\hat{!}\hat{!}}$ 2.3.6, 2.3.5,
$( )^{u}$, $\hat{\otimes}^{u}$ 2.2.5,
ulim, ucolim 2.8, 2.9,
$\flat$, $\#$, $\sharp$ 3.3.3, 3.3.6,
$\natural$ 3.3.7, 3.5.4,
$g^{-\frac{1}{p^\infty}}( )$ 2.5.2, 3.5.3,
$( )\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ 2.9.3, 3.6.1,
$( )\{\frac{\lambda}{g}\}$ 2.6.2, 3.6.3,
$( )^{[j]}$ ..... 4.2.1, 4.4.2.

RÉFÉRENCES

[1] D. Anderson, D. Dobbs, M. Roitman, *Root closure in commutative rings*, Ann. Sci. Univ. Blaise Pascal 95 (1990), 1-11.

[2] F. Andreatta, *Generalized ring of norms and generalized* (Φ, Γ)*-modules*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 39, n^o 4 (2006), 599-647.

[3] W. Bartenwerfer, *Der erste Riemannsche Hebbarkeitssatz im nichtarchimedischen Fall*, J. reine und angew. Math. 286-287 (1976), 144-163.

[4] V. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, vol. 33, Math. Surveys and Monographs, A. M. S., Providence, RI, 1990.

[5] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, *Non-archimedean analysis : a systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 261, Springer (1984).

[6] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann (1953).

[7] $-$, *Algèbre commutative*, chapitres 1 à 7, Masson, Paris (1985).

[8] G. Faltings, *Almost étale extensions*, Astérisque 279 (2002), 185-270.

[9] L. Fargues, J.-M. Fontaine, *Vector bundles and p-adic Galois representations*, in 5th Intern. Congress of chinese mathematicians, 1-2, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 51 (2012), 77-113.

[10] J.-M. Fontaine, *Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids* [d'après Peter Scholze], Séminaire Bourbaki, 64-ième année, 2011-2012, n^o 1057, à paraître dans Astérisque, S.M.F.

[11] J. Fresnel, M. Matignon, *Produit tensoriel topologique de corps valués*, Can. J. Math. 35, 2 (1983), 218-273.

[12] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. S. M. F. 90 (1962), 323-448.

[13] O. Gabber, L. Ramero, *Almost ring theory*, Lecture Notes in Math. 1800, Springer (2003).

[14] $--$, *Foundations for almost ring theory*, prépublication, ArXiv :0409584v9.

[15] R. Gilmer, W. Heinzer, *On the complete integral closure of an integral domain*, J. Austral. Math. Soc. 6 (1966), 351-361.

[16] U. Güntzer, *The norm of uniform convergence on the k-algebraic maximal spectrum of an algebra over a non-Archimedean valuation field k*, Mémoire S.M.F. 39-40 (1974), 101-121.

[17] H. Herrlich, G. Strecker, *Coreflective subcategories*, Trans. Amer. Math. Soc 157 (1971), 205-226.

[18] K. Kedlaya, *On commutative non-archimedean Banach fields*, prépublication ArXiv :1602.09004v1 (2016).

[19] K. Kedlaya, R. Liu, *Relative p-adic Hodge theory, I : Foundations*, S. M. F. Astérisque 371 (2015).

[20] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 2ème éd., Springer GTM **5** (1998).

[21] T. Mihara, *On Tate acyclicity and uniformity of Berkovich spectra and adic spectra*, prépublication ArXiv :1403.7856v1 (2014).

[22] −, *Characterization of the Berkovich spectrum of the Banach algebra of bounded continuous functions*, Doc. Math. 19 (2014), 769-799.

[23] J.-P. Olivier, *Descente par morphismes purs*, C. R. Acad. Sc. Paris 271 (1970), 821-823.

[24] M. Olsson, *On Faltings'method of almost etale extensions*, Algebraic geometry, Seattle 2005, 811–936, Proc. Sympos. Pure Math. 80, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2009).

[25] J. Poineau, *Les espaces de Berkovich sont angéliques*, Bull. S. M. F. 141, 2 (2013), 267-297.

[26] P. Roberts, *The root closure of a ring of mixed characteristic*, prépublication, ArXiv :0810.0215.

[27] J.-E. Roos, *Derived functors of inverse limits revisited*, J. London Math. Soc. (2) 73 (1) (2006), 65-83,

[28] D. Sanders, *The dominion and separable subalgebras of finitely generated algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 48 (1) (1975), 1-7.

[29] P. Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. I.H.E.S. 116, n^o 1 (2012), 245-313.

[30] −, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, Annals of Maths. 182 (2015), 945-1066.

[31] K. Shimomoto, *An application of the almost purity theorem to the homological conjectures*, J. pure applied algebra 220 (2014).

[32] T. Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 117, Cambridge University Press (2009).

[33] I. Waschkies, *The stack of microlocal perverse sheaves*, Bull. Soc. Math. Fr. 132, 3 (2004), 397-462.

[34] J.-P. Wintenberger, *Une généralisation du théorème de Tate-Sen-Ax*, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique 15 (1987-88), 1-5.

[SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, vol. 2, Lecture notes in math. 270, Springer (1972).

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, 4 PLACE JUSSIEU, 75005 PARIS, FRANCE.
E-mail address: yves.andre@imj-prg.fr