HAL
open science

# Recherche du plus court chemin stochastique avec des distributions de probabilité connues

Raphaël Delhome, Romain Billot, Nour Eddin El Faouzi

## To cite this version:

Raphaël Delhome, Romain Billot, Nour Eddin El Faouzi. Recherche du plus court chemin stochastique avec des distributions de probabilité connues. ROADEF 2015, 16ème conférence de la Société Française de la recherche opérationnelle et de l'aide à la décision (ROADEF), Feb 2015, MARSEILLE, France. 2 p. hal-01353523

**HAL Id: hal-01353523**

**https://hal.science/hal-01353523**

Submitted on 11 Aug 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Recherche du plus court chemin stochastique avec des distributions de probabilité connues

Raphaël Delhome, Romain Billot, Nour-Eddin El Faouzi

Université de Lyon, F-69000, Lyon, France
IFSTTAR, LICIT, F-69500, Bron
ENTPE, LICIT, F-69518, Vaulx en Velin
{raphael.delhome, romain.billot, nour-eddin.elfaouzi}@ifsttar.fr

**Mots-clés** : *Plus court chemin stochastique, Algorithme d'étiquetage, Distributions de probabilité.*

## 1 Introduction

De nombreux auteurs se sont attelés à raffiner les modèles de plus court chemin, en proposant des algorithmes de plus en plus efficaces ou en leur apportant des sophistications (du statique vers le dynamique, du déterministe au stochastique). La présente contribution se consacre à la recherche de plus courts chemins dans un graphe stochastique et dynamique : des distributions de probabilité sont associées à chaque arc, elles dépendent en plus de l'instant de départ du nœud origine. Plusieurs contributions ont été proposées pour le cas stochastique, mais rares sont celles qui utilisent des arcs définis à la fois de façon stochastique et dynamique. Dans le présent travail, le modèle de Miller-Hooks & Mahmassani [4] est implémenté et testé avec des lois de distribution connues. L'objectif est d'évaluer la sensibilité des solutions aux différents modèles de pondération stochastique considérés. Il sera question d'une application propre aux temps de parcours, considérant des lois de distributions typiques de la circulation urbaine.

## 2 Modèle développé

### 2.1 Algorithme basé sur l'étiquetage des sommets

Dans le contexte de la recherche de plus court chemin stochastique, plusieurs contributions ont particulièrement fait avancer l'état de l'art (par exemple, voir les apports de [3, 4, 5]). La contribution de [4] est particulièrement pertinente pour une visée opérationnelle. Une simplification du modèle par la considération des espérances mathématiques y est proposée, en admettant qu'il s'agit d'une bonne première approximation à la résolution du problème stochastique. Dans le cas statique, cette procédure très simple revient à traiter un problème de plus court chemin déterministe basique. Or, dans le cas dynamique, cette simplification ne permet plus de contourner l'inapplicabilité du principe de Bellman, comme l'avait auparavant démontré [3]. La solution passe alors par l'introduction du concept de dominance stochastique, qui sert à comparer les chemins deux à deux, et permet de réhabiliter le principe de Bellman sur une structure de données définie de façon plus restrictive. Un chemin $a$ donné est ainsi non-dominé si et seulement si aucun chemin $b$ n'existe tel que :

$$\mathbb{E}\left[\theta_i^b(t)\right] \leq \mathbb{E}\left[\theta_i^a(t)\right] \forall t \tag{1}$$

$$\exists t | \mathbb{E}\left[\theta_i^b(t)\right] < \mathbb{E}\left[\theta_i^a(t)\right] \tag{2}$$

avec $\theta_i^c(t)$ la variable représentant le temps de parcours entre le nœud $i$ et la destination pour un départ dans l'intervalle de temps $t$ en empruntant le chemin $c$. Ainsi, le chemin optimal

ne sera pas simplement celui qui est étiqueté comme étant le plus court. Il existe en fait un ensemble de chemin non-dominés, et parmi eux, il existe un chemin optimal pour chaque nœud et chaque date de départ.

### 2.2 Raffinement de la définition des lois de probabilités associées aux arcs

Ce type d'approche nécessite la définition de distributions de temps de parcours associées à chaque arc du graphe. Dans la formulation d'un algorithme d'étiquetage hérité de celui de [4], la distribution se présente sous une forme discrète, en fonction d'un nombre de points supports donnés en paramètre. Bien entendu, la précision des étiquettes accolées à chaque couple nœud-période dépend du degré de précision des lois de distribution. Cependant, le nombre de points supports des distributions impacte la complexité de l'algorithme tout comme le font le nombre de nœuds dans le graphe et le nombre de périodes de temps considérées.

Choisir la distribution la plus adaptée permet d'augmenter la précision du modèle et son adéquation au cas pratique (le temps de parcours sur un réseau de transport). Au titre des lois candidates pour modéliser les temps de parcours, les lois Normales, Log-Normales, Gamma, Weibull, Halphen [1] sont citées comme aptes à représenter les temps de parcours. Chacune de ces lois peut être ajustée de façon à représenter un échantillon de temps de parcours (correspondant par exemple à un historique de relevés). Il est question ici d'évaluer l'impact du choix de la distribution prise en modèle sur le résultat de l'algorithme de plus court chemin stochastique : il sera d'autant plus critique si ce dernier présente des résultats différents en fonction des lois de probabilités utilisées.

## 3 Potentiel d'amélioration du modèle

Plusieurs pistes de recherche existent pour raffiner ce modèle, notamment via la prise en compte de questionnements statistiques plus complets :

- il est possible de se focaliser sur les quantiles des distributions, pour déterminer des chemins « sûrs » plutôt que rapides ;
- la variabilité des temps de parcours peut également être considérée via la variance, bien que cela pose la question des corrélations existant entre les variables ;
- il est également possible de considérer des écarts inter-quantiles ou des intervalles de confiance, et ainsi se placer dans une optique de programmation robuste [2].
- Enfin, un autre exemple de piste touche à la définition même des variables caractérisant les arcs : le choix d'une loi appropriée peut mener à considérer la loi de distribution d'un chemin complet, définie comme l'addition des lois des arcs (propriété d'additivité).

## Références


[1] Raphaël Delhome, Romain Billot, Aurélien Duret, and Nour-Eddin El Faouzi. The halphen distribution system, a toolbox for modeling travel time variability : some insights based on mesoscopic simulation. In *Transportation Research Board 94th Annual Meeting*, 2015.

[2] Virginie Gabrel, Cécile Murat, and Lei Wu. New models for the robust shortest path problem : complexity, resolution and generalization. *Annals of Operations Research*, 207(1) :97–120, 2013.

[3] Randolph W Hall. The fastest path through a network with random time-dependent travel times. *Transportation science*, 20(3) :182–188, 1986.

[4] Elise D Miller-Hooks and Hani S Mahmassani. Least expected time paths in stochastic, time-varying transportation networks. *Transportation Science*, 34(2) :198–215, 2000.

[5] Suvrajeet Sen, Rekha Pillai, Shirish Joshi, and Ajay K Rathi. A mean-variance model for route guidance in advanced traveler information systems. *Transportation Science*, 35(1) :37–49, 2001.