



HAL
open science

Amélioration d'une congruence de Glaisher

Scheherazade Zerroukhat, Redha Chellal, Farid Bencherif

► **To cite this version:**

Scheherazade Zerroukhat, Redha Chellal, Farid Bencherif. Amélioration d'une congruence de Glaisher. 2016. hal-01350056

HAL Id: hal-01350056

<https://hal.science/hal-01350056>

Preprint submitted on 29 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Amélioration d'une congruence de Glaisher

Scheherazade Zerroukhat ¹, Redha Chellal ² et Farid Bencherif ²

¹ Laboratoire ATN, Faculté de Mathématiques, USTHB., BP32 EL Alia 16111 Bab Ezzouar Alger.

E-mail:szerroukhat@gmail.com

² Laboratoire LA3C, Faculté de Mathématiques, USTHB., BP32 EL Alia 16111 Bab Ezzouar Alger.

E-mail:chellal.redha@gmail.com

² Laboratoire LA3C, Faculté de Mathématiques, USTHB., BP32 EL Alia 16111 Bab Ezzouar Alger.

E-mail:fbencherif@gmail.com

Abstract

Nous prouvons que pour tout nombre premier $p \geq 5$

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p} \equiv -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{2^k}{k} \right) \pmod{p^2}$$

Mots clefs: Congruences, nombres harmoniques.

1 Introduction

Pour tout nombre premier p impair et pour tout entier a premier avec p , le quotient de Fermat en base a est défini par

$$q_p(a) = \frac{a^{p-1} - 1}{p}.$$

L'étude des quotients de Fermat et notamment des congruences concernant ces quotients est en relation avec l'étude classique du grand théorème de Fermat [3]. La congruence suivante est due to Glaisher [1]:

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p} \equiv -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{2^k}{k} \right) \pmod{p}.$$

En faisant de nombreux essais numériques, B. Ronk [4] et [5] a constaté que cette congruence était vérifiée modulo p^2 pour tout nombre premier $p \leq 1000$. Il a conjecturé que cette congruence était vérifiée modulo p^2 pour tout nombre premier p . Dans cet article, nous confirmons cette conjecture. Nous améliorons ainsi la congruence de Glaisher en prouvant le

Théorème 1 *Pour tout nombre premier $p \geq 5$*

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p} \equiv -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{2^k}{k} \right) \pmod{p^2}.$$

2 Démonstration du théorème

La preuve du théorème repose sur les nombreux lemmes qui suivent

Lemme 1 *Pour tout nombre premier $p \geq 5$*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{H_k}{k2^k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Preuve. Ce lemme est prouvé dans [6] ■

Lemme 2 Pour tout nombre premier p impair, on a

$$H_{p-k} \equiv H_{k-1} \pmod{p}.$$

Preuve. Ce lemme est aussi prouvé dans [6] ■

Lemme 3 Pour tout nombre premier $p \geq 5$

$$\sum_{k=1}^{p-2} \frac{2^k H_k}{k+1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-2} \frac{2^k H_k}{k+1} &= \sum_{k=2}^{p-1} \frac{2^{p-k} H_{p-k}}{p-k+1} \\ &\equiv \sum_{k=2}^{p-1} \frac{2^{p-1-(k-1)} H_{p-k}}{p-(k-1)} \\ &\equiv - \sum_{k=2}^{p-1} \frac{H_{k-1}}{(k-1)2^{k-1}} \\ &\equiv - \sum_{k=1}^{p-2} \frac{H_k}{k2^k} \\ &\equiv - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{H_k}{k2^k} + \frac{H_{p-1}}{(p-1)2^{p-1}} \\ &\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

■

Lemme 4

$$\frac{x^p - (x-1)^p - 1}{p} \equiv - \sum_{k=0}^{p-2} \frac{x^{k+1}}{k+1} + p \sum_{k=1}^{p-2} H_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \pmod{p^2}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \frac{x^p - (x-1)^p - 1}{p} &= -\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x^k (-1)^{p-k} \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \binom{p-1}{k-1} \frac{x^k}{k} \\ &= - \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k \binom{p-1}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}. \end{aligned}$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned} (-1)^k \binom{p-1}{k} &= \frac{(1-p)(2-p)\dots(k-p)}{1.2\dots k} \\ &= \left(1 - \frac{p}{1}\right) \left(1 - \frac{p}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{k}\right) \\ &\equiv 1 - p \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\frac{x^p - (x-1)^p - 1}{p} &\equiv -\sum_{k=0}^{p-2} (1 - pH_k) \frac{x^{k+1}}{k+1} \pmod{p^2}. \\ &\equiv -\sum_{k=0}^{p-2} \frac{x^{k+1}}{k+1} + p \sum_{k=1}^{p-2} H_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \pmod{p^2}.\end{aligned}$$

■

La preuve du théorème est alors immédiate. Il suffit de remplacer x par 2. On a alors

$$\frac{2^p - 2}{p} \equiv -\sum_{k=0}^{p-2} \frac{2^{k+1}}{k+1} + p \sum_{k=1}^{p-2} H_k \frac{2^{k+1}}{k+1} \pmod{p^2}.$$

D'où

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p} \equiv -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p-2} \frac{2^{k+1}}{k+1} + p \sum_{k=1}^{p-2} H_k \frac{2^k}{k+1} \pmod{p^2}.$$

References

- [1] J.W.L. Glaisher, On the residues of the sums of products of the first $p-1$ numbers and their powers to modulus p^2 or p^3 , Quart. J. Math. Oxford 31 (1900), 321 – 353.
- [2] A. Granville, The square of the Fermat quotient, Integers: Electronic J. of Combinatorial Number Theory 4 (2004), #A22 (electronic)
- [3] P. Ribenboim, 13 Lectures on Fermat's Last Theorem. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [4] http://bernard.ronk.free.fr/Quotient_Fermat_V1.pdf
- [5] http://bernard.ronk.free.fr/approche_elementaire_v8.3.pdf
- [6] Z. W. Sun, Arithmetic theory of harmonic numbers, Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), 415–428.