Un outil mathématique pour la physique : l'analyse non linéaire MinPlus et l' intégrale de chemin MinPlus

Michel Gondran, Alexandre Gondran

▶ **To cite this version:**

Michel Gondran, Alexandre Gondran. Un outil mathématique pour la physique : l'analyse non linéaire MinPlus et l' intégrale de chemin MinPlus. 19e Rencontre du Non Linéaire, Université Paris Diderot, Mar 2016, Paris, France. pp.31-36. hal-01348973v2

HAL Id: hal-01348973
https://hal.science/hal-01348973v2

Submitted on 3 Aug 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un outil mathématique pour la physique : l'analyse non linéaire MinPlus et l'intégrale de chemin MinPlus

Michel Gondran [*1] and Alexandre Gondran [†2]

[1]University Paris Dauphine, Lamsade, Paris, France
[2]École Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse, France

Rencontre du Non-Linéaire 2016

Abstract

In classical mechanics, there exists an analog to the Feynman path integral : **the Minplus path integral** that connects the Hamilton-Jacobi action $S(\mathbf{x},t)$ to the Euler-Lagrange action $S_{cl}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0)$ by the equation :

$$S(\mathbf{x},t) = \min_{\mathbf{x}_0}(S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0)) \tag{1}$$

where the minimum is taken on the set of the initial positions $\mathbf{x}_0$ and where $S_0(\mathbf{x})$ is the Hamilton-Jacobi action at the initial time. This equation is an integral in the Minplus non-linear analysis [2] we introduced in 1996, following Maslov [1]. In classical mechanics, this equation explains the least action principle, and in quantum mechanics, it serves to refute Everett's many-worlds interpretation and strengthen the argument for the de Broglie-Bohm pilot wave for unbound particles (de Broglie-Bohm weak interpretation). In the conclusion, we discuss the wide-ranging potential this nonlinear analysis offers in physics.

1 Introduction

Le premier objectif de ce papier est de montrer qu'il existe une nouvelle branche des mathématiques qui permet d'étudier certains problèmes non linéaires de la physique par des approches linéaires : c'est l'analyse Minplus [2] que nous avons introduit en 1996, à la suite de Maslov [1]. Cette analyse est construite en prenant dans l'espace des fonctions définies sur un ensemble X à valeur sur $\mathbb{R}$, le produit scalaire Minplus défini par :

$$(f,g)_{min+} = \inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}. \tag{2}$$

Ce produit scalaire est l'analogue du classique produit scalaire des fonctions L^2 :

$$(f,g) = \int_X f(x)g(x)dx. \tag{3}$$

Pour passer de (3) à (2), c'est à dire de l'analyse classique à l'analyse Minplus, nous devons passer de la structure de corps classique sur les réels $(\mathbb{R},+,\times)$ à la structure du dioïde Minplus $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\},\min,+)$, c'est-à-dire l'ensemble des réels (auquel on a ajouté un élément infini $\{+\infty\}$) muni de l'opération Min (minimum de deux réels) à la place de l'addition, et de l'opération + (somme de deux réels) à la place de la multiplication. On a ajouté l'élément $\{+\infty\}$ à $\mathbb{R}$, car cet élément correspond à l'élément neutre pour l'opération Min, $\text{Min}(\{+\infty\},a) = a\ \forall a\in\mathbb{R}$.

La propriété esentielle du produit scalaire Minplus est qu'il est linéaire dans le dioïde Minplus, bien qu'il soit non linéaire dans le corps des réels $(\mathbb{R},+,\times)$. En effet, avec le produit scalaire Minplus (2), on peut montrer [2] que :

$$(f,(min(g_1,g_2))_{min+} = min((f_1,g)_{min+},(f_2,g)_{min+}) \tag{4}$$

[*]michel.gondran@polytechnique.org
[†]alexandre.gondran@enac.fr

$$(\lambda f, g)_{min+} = \lambda + (f, g)_{min+}. \tag{5}$$

Pour cette raison, cette approche correspond à un analogue de la théorie des distributions dans le cas non linéaire ; elle est linéaire continue par rapport à la structure du dioïde Minplus et "non linéaire " continu par rapport à la stucture classique du corps des réels. Il est alors naturel d'étudier l'analogue de ce que donnent toute l'analyse hilbertienne, les théorèmes de Riesz et de Hahn-Banach, les transformées de Fourier, l'analyse spectrale, les distributions, la théorie de la mesure, etc.....cf. Maslov [1] et Gondran-Minoux [4] chapitre 7. Par exemple, la transformée de Legendre-Fenchel définie par :

$$\widehat{f}(\mathbf{r}) = \max_{x\in\mathbb{R}^n}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{x} - f(\mathbf{x})) = -\min_{x\in\mathbb{R}^n}(f(\mathbf{x}) - \mathbf{r}\cdot\mathbf{x}).$$

correspond à la transformée de Fourier lorsque l'on passe de l'espace des fonctions L^2 à l'espace des fonctions convexes sci propres.

Le second objectif de ce papier est de montrer que cette analyse Minplus va avoir une grande importance en physique classique et quantique.

On montrera d'abord qu'il existe en mécanique classique un analogue de l'intégrale de chemin de Feynman : c'est **l'intégrale de chemin Minplus** qui relie l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ à l'action classique d'Euler-Lagrange $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ par l'équation :

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0}(S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)) \tag{6}$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des positions initiales $\mathbf{x}_0$ et où $S_0(\mathbf{x})$ est l'action d'Hamilton-Jacobi à l'instant initial. Cette équation est une intégrale dans l'analyse non linéaire Minplus, d'où son appelation.

Nous verrons que cette équation permet en mécanique classique de mieux comprendre le principe de moindre action, et en mécanique quantique de réfuter l'interprétation des mondes multiples d'Everett et de conforter l'interprétation de l'onde pilote de Broglie-Bohm pour les particules non liées (interprétation faible de de Broglie-Bohm).

En conclusion, nous évoquons les nombreuses perspectives ouvertes par cette analyse non linéaire.

2 Les actions d'Euler-Lagrange et d'Hamilton-Jacobi

Considérons l'évolution d'un système évoluant de la position $\mathbf{x}_0$ à l'instant initial vers la position $\mathbf{x}$ à l'instant t où la variable de commande $\mathbf{u}$(s) est la vitesse :

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \mathbf{u}(s) \quad \text{pour } s \in [0, t] \tag{7}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}. \tag{8}$$

Si $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ est le lagrangien du système, quand les deux positions $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}$ sont données, *l'action d'Euler-Lagrange* $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ est la fonction définie par :

$$S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}(s), 0\le s\le t}\left\{\int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s)ds\right\} \tag{9}$$

où le minimum (ou plus généralement l'extremum) de (9) est pris sur les commandes $\mathbf{u}(s)$, $s \in [0, t]$, l'évolution de l'état $\mathbf{x}(s)$ étant donnée par les équations d'évolution (7) (8). C'est le principe de moindre action définie par Euler en 1744 et Lagrange en 1755.

La solution $(\widetilde{\mathbf{u}}(s), \widetilde{\mathbf{x}}(s))$ de (9), si le lagrangien $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ est deux fois différentiable, vérifie l' équation d'Euler-Lagrange. Pour une particule non relativiste dans un champ de potentiel linéaire avec le lagrangien $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \mathbf{K}.\mathbf{x}$, cette équation donne $\frac{d}{ds}(m\dot{\mathbf{x}}(s)) - \mathbf{K} = 0$. Nous obtenons successivement $\dot{\widetilde{\mathbf{x}}}(s) = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}}{m}s$, $\widetilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 s + \frac{\mathbf{K}}{2m}s^2$. La vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ est obtenue en faisant $\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}$ (equation (8)) dans la dernière équation. Finalement, la trajectoire optimisant l'action est $\widetilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \frac{s}{t}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \frac{\mathbf{K}}{2m}ts + \frac{\mathbf{K}}{2m}s^2$ et l'action d'Euler-Lagrange est égale à

$$S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = m\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{2t} + \frac{K.(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)}{2}t - \frac{K^2}{24m}t^3. \tag{10}$$

Considérons maintenant qu'une action initiale $S_0(\mathbf{x})$ est donnée, alors *l'action d'Hamilton-Jacobi* $S(\mathbf{x}, t)$ est la fonction définie par :

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(s), 0\le s\le t}\left\{S_0(\mathbf{x}_0) + \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s)ds\right\} \tag{11}$$

où le minimum (et plus généralement l'extremum) de (11) est pris sur toutes les positions initiales $\mathbf{x}_0$ et sur les commandes $\mathbf{u}(s)$, $s \in [0,t]$, l'évolution de l'état $\mathbf{x}(s)$ étant donnée par les équations d'évolution (7) et (8).

Comme le terme $S_0(\mathbf{x}_0)$ n'intervient pas dans (11) pour la minimisation (ou l'extremum) sur $\mathbf{u}(s)$, on en déduit que l'action d'Hamilton-Jacobi peut s'écrire à partir de l'action d'Euler-Lagrange :

$$S(\mathbf{x},t) = \min_{x_0}(S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0)). \tag{12}$$

Cette équation est une généralisation de la formule de Hopf-Lax $S(\mathbf{x},t) = \min_{x_0}(S_0(\mathbf{x}_0) + m\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2}{2t})$ qui correspond au cas particulier où il n'y a pas de potentiel et donc à une action d'Euler-Lagrange égale à $m\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2}{2t}$.

Pour une particule dans un potentiel linéaire $V(\mathbf{x}) = -\mathbf{K}.\mathbf{x}$ avec comme action initiale $S_0(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}$, nous déduisons des équations (12) et (10) que l'action d'Hamilton-Jacobi est égale à :

$$S(\mathbf{x},t) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 t + \mathbf{K}.\mathbf{x}t - \frac{1}{2}\mathbf{K}.\mathbf{v}_0 t^2 - \frac{\mathbf{K}^2 t^3}{6m}. \tag{13}$$

Dans le cas d'une particule non relativiste dans un champ de potentiel $V(\mathbf{x},t)$, on a le théorème suivant :

Theoreme1 : *La vitesse d'une particule classique non relativiste dans un champ de potentiel est donnée en chaque point* $(\mathbf{x},t)$ *par* :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x},t)}{m} \tag{14}$$

où $S(\mathbf{x},t)$ *est l'action d'Hamilton-Jacobi, solution des équations d'Hamilton-Jacobi :*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(\mathbf{x},t) = 0 \qquad \forall (\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \tag{15}$$

$$S(\mathbf{x},0) = S_0(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

L'équation (14) montre que la solution $S(\mathbf{x},t)$ des équations d'Hamilton-Jacobi permet de définir le champ de vitesse en tout point $(\mathbf{x},t)$ à partir du champ de vitesse $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$ à l'instant initial. En particulier, si à l'instant initial, on connait la position initiale $\mathbf{x}_{init}$ d'une particule, sa vitesse à cet instant est égale à $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x}_{init})}{m}$. On en déduit qu'à partir de la solution $S(\mathbf{x},t)$ des équations d'Hamilton-Jacobi, on déduit par (14) la trajectoire de la particule. L'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x},t)$ est donc un champ qui "pilote" le mouvement de la particule.

Pour une particule dans un potentiel linéaire $V(\mathbf{x}) = -\mathbf{K}.\mathbf{x}$ avec l'action initiale $S_0(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}$, le champ de la vitesse initiale est constant, $\mathbf{v}(\mathbf{x},0) = \frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m} = \mathbf{v}_0$ et le champ de la vitesse à l'instant t est aussi constant, $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x},t)}{m} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}t}{m}$. La figure 1 montre ces champs de vitesse.

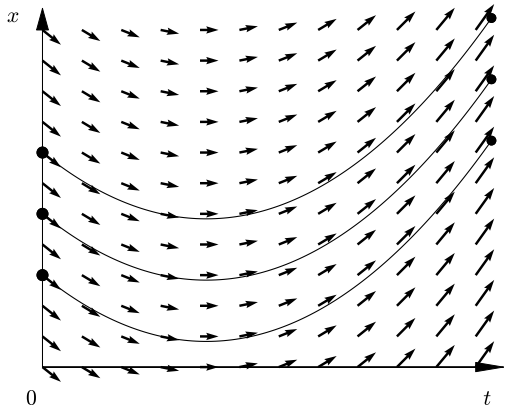

FIGURE 1 – Champ de vitesse correspondant à l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x},t) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 t + \mathbf{K}.\mathbf{x}t - \frac{1}{2}\mathbf{K}.\mathbf{v}_0 t^2 - \frac{\mathbf{K}^2 t^3}{6m}$, soit $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x},t)}{m} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}t}{m}$. On a aussi représenté trois trajectoires de particules pilotées par ce champ.

3 Les actions d'Euler-Lagrange et d'Hamilton-Jacobi et le principe de moindre action

Nous allons voir comment la distinction entre l'action d'Hamilton-Jacobi et l'action d'Euler-Lagrange permet d'éclairer l'interprétation du principe de moindre action en mécanique classique. En effet, le débat intense qui a lieu depuis plus de 80 ans sur l'interprétation de la fonction d'onde de la mécanique quantique a laissé dans l'ombre le débat sur l'interprétation de l'action et du principe de moindre action en mécanique classique, depuis leur introduction en 1744 par Pierre-Louis Moreau de Maupertuis. Maupertuis avait compris que, sous certaines conditions, les équations de Newton sont équivalentes au fait qu'une quantité, qu'il appelle l'action, soit minimale. Ce *principe de moindre action* est le principe le plus puissant à notre disposition pour découvrir les lois de la nature. Il permet de déterminer sous la même approche aussi bien les équations du mouvement des particules (si on minimise sur les trajectoires) que les lois de la nature (si on minimise sur les paramètres définissant les champs).

Cependant, pour les trajectoires de particules, ce principe a embarassé un grand nombre de scientifiques comme le rappelle Henri Poincaré, pourtant l'un de ses grands utilisateurs [3] :

"L'énoncé même du principe de moindre action a quelque chose de choquant pour l'esprit. Pour se rendre d'un point à un autre, une molécule matérielle, soustraite à l'action de toute force, mais assujettie à se mouvoir sur une surface, prendra la ligne géodésique, c'est-à-dire le chemin le plus court. Cette molécule semble connaître le point où on veut la mener, prévoir le temps qu'elle mettra à l'atteindre en suivant tel et tel chemin, et choisir ensuite le chemin le plus convenable. L'énoncé nous la présente pour ainsi dire comme un être animé et libre ; Il est clair qu'il vaudrait mieux le remplacer par un énoncé moins choquant, et où, comme diraient les philosophes, les causes finales ne sembleraient pas se substituer aux causes efficientes".

Nous allons voir que les difficultés d'interprétation de l'action sur les *causes finales* et les *causes efficientes* proviennent de l'action d'Euler-Lagrange $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ et non de l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$.

Pourtant l'équation (9) de définition de l'action d'Euler-Lagrange semble montrer que, parmi les trajectoires qui arrivent à $(\mathbf{x}, t)$ à partir de la position initiale $\mathbf{x}_0$, le principe de moindre action permet de choisir la vitesse à chaque instant. En réalité, le principe de moindre action utilisé dans l'équation (9) ne choisit pas la vitesse à chaque instant s entre 0 et t, mais seulement à l'instant t quand la particule arrive en $\mathbf{x}$. La connaisance de la vitesse à chaque instant s ($0 \leq s \leq t$) requiet la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange avec la condition initiale (8) sur la trajectoire entière. Dans le cas d'une particule non relativiste dans un potentiel linéaire, la vitesse à l'instant s ($0 \leq s \leq t$) est $\widetilde{\mathbf{v}}(s) = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{t} - \frac{Kt}{2m} + \frac{Ks}{m}$ avec pour vitesse initiale

$$\widetilde{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{Kt}{2m}. \tag{17}$$

On en déduit que la vitesse initiale $\widetilde{\mathbf{v}}_0$ dépend de la position $\mathbf{x}$ de la particule à l'instant final t. Cette dépendance des "causes finales" est générale. C'est la principale critique de Poincaré sur le principe de moindre action : "*Cette molécule semble connaître le point où on veut la mener, prévoir le temps qu'elle mettra à l'atteindre en suivant tel et tel chemin, et choisir ensuite le chemin le plus convenable.*"

Nous devons donc conclure que, sans connaissance de la vitesse initiale, l'action d' Euler-Lagrange répond à un problème posé par un observateur, et non par la Nature : "*Quel doit être la vitesse de la particule à l'instant initial pour atteindre* ***x*** *au temps* t *?*" La résolution de ce problème implique que l'observateur résolve l'équation d'Euler-Lagrange avec la condition (8) *après* l'observation de $\mathbf{x}$ au temps t. C'est un point de vue *a posteriori*.

L'équation (11) de définition de l'action d'Hamilton-Jacobi semble aussi montrer que, parmi les trajectoires qui arrivent à $(\mathbf{x}, t)$ à partir d'une position initiale inconnue et un champ de vitesse connu, le principe de moindre action choisit la position initiale et à chaque instant la vitesse qui correspond au minimum (ou l'extremum) de l'action d'Hamilton-Jacobi.

Les équations (14), (15) et (16) confirment cette interprétation. Elles montrent que l'action d' Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ ne résoud pas seulement un problème donné avec une simple condition initiale $\left(\mathbf{x}_0, \frac{\nabla S_0(\mathbf{x}_0)}{m}\right)$, mais un ensemble de problèmes avec une infinité de conditions initiales, toutes les paires $\left(\mathbf{y}, \frac{\nabla S_0(\mathbf{y})}{m}\right)$. L'action d'Hamilton-Jacobi répond à la question : "*Si on connait l'action (ou le champ de vitesse) à l'instant initial, peut-on déterminer l'action (ou le champ de vitesse) à chaque instant ultérieur ?*" Ce problème est résolu séquentiellement par l'équation d'évolution (15). C'est un point de vue *a priori*. Il peut être considéré comme le problème résolu par la Nature avec le principe de moindre action. On peut donc considérer l'action d'Euler-Lagrange comme une action épistémique et l'action d'Hamilton-Jacobi comme l'action ontologique.

Enfin, l'analyse Minplus permet de voir la différence mathématique entre les actions d'Euler-Lagrange et d'Hamilton-Jacobi.

Dans l'analyse Minplus, l'équation d'Hamilton-Jacobi est linéaire, car si $S_1(\mathbf{x},t)$ et $S_2(\mathbf{x},t)$ sont solutions de (15), alors $\min\{\lambda + S_1(\mathbf{x},t), \mu + S_2(\mathbf{x},t)\}$ est aussi solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (15). L'analogue de la distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x})$ dans l'analyse Minplus est la distribution non linéaire $\delta_{\min}(\mathbf{x})$ définie par $\delta_{\min}(\mathbf{x}) = \{0\ si\ \mathbf{x} = \mathbf{0}, +\infty\ sinon\}$. Avec cette distribution de Dirac non linéaire, on peut définir des solutions élémentaires d'une manière analogue à la théorie classique des distributions. On a en particulier :

Theoreme 2 - *L'action d'Euler-Lagrange, $S_{cl}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0)$, définie par l'équation* (9) *est la solution élémentaire de l'équation d'Hamilton-Jacobi* (15)(16) d*ans l'analyse Minplus avec la condition initiale*

$$S(\mathbf{x},0) = \delta_{\min +}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{18}$$

L'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x},t)$ est alors donnée par l'intégrale Minplus

$$S(\mathbf{x},t) = \inf_{\mathbf{x}_0}\{S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0)\} \tag{19}$$

d'une manière analogue à la solution de l'équation de la chaleur donnée par l'intégrale classique :

$$u(x,t) \;=\; \int u_0\,(y)\,\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\;e^{-\dfrac{(x-y)^2}{4t}}\,dy.$$

4 Integrale de chemin MinPlus et interprétation de la mécanique quantique

L'intégrale de chemin Minplus (équation (19)) est l'analogue en mécanique classique de la l'intégrale de chemin de Feynman qui relie la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x},t)$ au temps t à partir de la fonction d'onde initiale $\Psi_0(\mathbf{x})$ [12] :

$$\Psi(\mathbf{x},t) = \int F(t,\hbar)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0\right)\Psi_0(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}_0 \tag{20}$$

où $F(t,\hbar)$ est une fonction indépendante de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{x}_0$.

On considère parfois que l'interprétation des mondes multiples d'Everett [5] peut s'appuyer sur l'intégrale de chemin de Feynman car elle est fondée aussi sur un ensemble de possibilités. Si cela était le cas, il faudrait aussi étendre l'interprétation des mondes multiples à la mécanique classique qui vérifie l'intégrale de chemin Minplus. L'intégrale de chemin de Feynman ne peut donc pas être utilisée comme une justification pour l'interprétation des mondes multiples d'Everett.

Il en est tout différemment de **l'interprétation faible de Broglie-Bohm**. Nous appelons interprétation faible de Broglie-Bohm, l'interprétation de Broglie-Bohm restreinte aux particules quantiques libres ou non liées comme les jets de particules libres ou de particules dans un champ linéaire, jets de fullerenes dans une expèrience de fentes de Young, jets d'atomes dans des expériences de Stern et Gerlach.

Dans l'interprétation faible de Broglie-Bohm, la particule quantique est décrite par le couple ($\Psi(\mathbf{x},t)$, $X(t)$) où $\Psi(\mathbf{x},t)$ est la fonction d'onde qui comme d'habitude vérifie l' équation de Schrödinger et où $X(t)$ est la position de la particule. L'évolution de la position est alors donnée par l'équation

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{\nabla S\,(\mathbf{x},t)}{m}\;|_{\mathbf{x}=X(t)} \tag{21}$$

où $S(x,t)$ est la phase de la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x},t) = \sqrt{\rho(\mathbf{x},t)}\exp(i\frac{S(\mathbf{x},t)}{\hbar})$. C'est l'onde pilote de Broglie-Bohm. Elle est analogue au cas de la particule classique donnée au théorème1. On peut de plus montrer [7, 8, 9] que, si on fait tendre $\hbar$ vers 0, les trajectoires faibles de Broglie-Bohm convergent vers les trajectoires classiques.

5 Conclusion

L'analyse Minplus et l'intégrale de chemin Minplus nous ont permis de mieux comprendre le principe de moindre action en mécanique classique, et en mécanique quantique de réfuter l'interprétation des mondes multiples d'Everett et de conforter l'interprétation de l'onde pilote de Broglie-Bohm pour les particules non liées (interprétation faible de de Broglie-Bohm).

La généralisation de cette analyse Minplus aux nombres complexes nous a aussi permis de proposer [10] un modèle non ponctuel d'une particule quantique (corde vibrante) et un principe de moindre action généralisée permettant

d'associer à cette particule une onde qui vérifie l'équation de Schrödinger et au centre de gravité de cette particule une trajectoire de de Broglie-Bohm.

Enfin, cette analyse Minplus s'avère être un outil précieux pour étudier les propriétés fractales, et en particulier pour calculer les coefficients de Hölder [11].

Références

[1] V.P. Maslov, *Analyse Idempotente*, édition Mir (1989).

[2] M. Gondran, "Analyse MinPlus" C. R. Acad. Sci. Paris **323**, 371-375 (1996).

[3] Poincaré, H. : *La Science et l'Hypothèse*. Flammarion, (1902) ; Translated in : The Foundations of Sciences : Science and Hypothesis, The value of Science, Science and Method. New York : Science Press (1913).

[4] M. Gondran et M. Minoux, *Graphes, dioïdes et semi-anneaux*, Lavoisier (2004) ; *Graphs, Dioïds and Semi-rings : New models and Algorithms*, Springer, Operations Research/Computer Science Interfaces (2008).

[5] B. DeWitt et N. Graham, *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton Series in Physics (1973).

[6] E. Madelung, "Quantentheorie in hydrodynamischer Form", Zeit. Phys. **40** (1926) 322-6.

[7] Gondran, M., Gondran, A. : Discerned and non-discerned particles in classical mechanics and convergence of quantum mechanics to classical mechanics. Annales de la Fondation Louis de Broglie, 36, 117-135 (2011).

[8] Gondran, M., Gondran, A. : The two limits of the Schrödinger equation in the semi-classical approximation : discerned and non-discerned particles in classical mechanics. Foundations of Probability and Physics-6, AIP Conf. Proc. 1424,111-115 (2012).

[9] Gondran, M., Gondran, A. : "A synthetic interpretation : the double-preparation theory". Phys. Scr. T163 (2014) 014029.

[10] Gondran, M., Gondran, A. :"Un modèle heuristique de particule étendue compatible avec la mécanique quantique". à paraitre.

[11] M. Gondran et A. Kenoufi, "Numerical calculations of Hölder exponents for the Weierstrass functions with (min,+)-wavelets", Trends in Applied and Computational Mathematics (2014).

[12] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading, MA, Vol. II, 1964.