Choix rationnel : définir et estimer son "intérêt"

Léo Gerville-Réache - Université de Bordeaux - IMB, France

Dans la plupart des problèmes épineux de théorie des jeux et de décisions rationnelles, se pose une question du type "qu'ai-je intérêt à faire?". Mais que signifie "avoir intérêt... à choisir l'action *a* plutôt que l'action *b*"? Voilà une question dont la réponse ne fait toujours pas consensus au sein de la communauté plurielle des chercheurs sur le sujet (théoriciens des jeux, philosophes, mathématiciens, logiciens...). Le paradoxe de St-Petersburg ou encore le dilemme du prisonnier montrent que la question de "l'intérêt" est bien centrale. Les raisonnements comme: "*l'espérance de gain est infinie, donc, quelque soit le montant demandé pour faire une partie, j'ai intérêt à jouer*" ou encore "*si l'autre me dénonce, j'ai intérêt à le dénoncer et si l'autre ne me dénonce pas, j'ai intérêt à le dénoncer, donc, quelque soit le choix de l'autre, j'ai intérêt à le dénoncer*" sont bien connus mais leurs "rationalités" (ou, tout du moins, leurs pertinences) ne font pas l'unanimité.

Le concept d'intérêt est en réalité flou, pluriel. De quel "intérêt" parle-t-on et combien vaut-il (à combien doit-on l'estimer)? Voilà deux questions qu'il convient de résoudre au moment de prendre une décision - de faire un choix rationnel. Pour le paradoxe de St-Petersburg (avec des gains d'un, deux, quatre, huit euros...), si l'on définit l'intérêt à jouer par l'espérance mathématique (généralisée), alors celui-ci est infini. Cela signifie que pour jouer, nous devrions rationnellement être d'accord pour payer n'importe quelle somme : 100 euros, 10000 euros... Peu importe que personne ne soit en réalité disposé à payer de telles sommes pour jouer, là n'est pas la question. L'important est que l'intérêt soit défini et quantifié. Libre alors, à chacun, d'accepter cette définition, sa pertinence et ses conséquences. Si par exemple, on définit l'intérêt à jouer lorsque la médiane des gains est strictement supérieure à la médiane des pertes, alors l'intérêt à jouer sera bien plus faible (ici, moins d'un euro). Cet intérêt sera néanmoins défini et quantifié, que le joueur s'y reconnaisse ou pas.

Dans cette communication, nous revenons sur deux autres paradoxes ouverts.

Les deux portefeuilles (wallet paradox) **:** *le professeur Smith déjeune avec deux étudiants en math.*
- Professeur Smith: Laissez-moi vous montrer un nouveau jeu. Posez vos portefeuilles sur la table. Nous allons compter quelle somme a chacun. Celui qui a la plus petite somme gagne tout l'argent de l'autre portefeuille.
- Joe: Hum... Si j'ai plus que Jill, elle gagnera juste ce que j'ai. Mais si elle a plus que moi, je gagnerai plus que ce que j'ai. Aussi, je gagnerai plus que ce que je peux perdre. Le jeu est en ma faveur.
- Jill: Si j'ai plus que Joe, il gagnera juste ce que j'ai. Mais s'il a plus que moi, je gagnerai plus que ce que j'ai. Le jeu est en ma faveur.
Qu'en pensez-vous?

Les deux enveloppes (two-envelope paradox) **:** *vous êtes face à deux enveloppes non-distinguables qui contiennent de l'argent. L'une contient le double de l'autre. Vous choisissez une enveloppe, vous l'ouvrez et trouvez 20 euros. Vous avez la possibilité de partir avec cette enveloppe là ou d'échanger avec l'autre enveloppe.*
Vous pensez qu'il y a autant de chances qu'il y ait 10 euros ou 40 euros dans l'autre enveloppe. Comme vous avez plus à gagner qu'à perdre en changeant, vous avez donc intérêt à changer. Pourtant, si vous aviez choisi l'autre enveloppe au départ, partant de la somme contenue dans cette enveloppe, vous auriez conclu à l'intérêt de changer pour prendre finalement l'autre (donc celle en main actuellement).
Alors que devez-vous penser, que devez-vous faire?

Nous défendons l'idée que pour *les deux portefeuilles*, aucun intérêt n'est quantifiable et que l'indifférence à jouer s'impose. Cependant, dans une variante (où le professeur Smith regarde en secret le contenu des deux portefeuilles, observe que l'un a 40 euros et l'autre 50 et annonce aux deux étudiants que la différence entre les deux sommes est de 10 euros), l'intérêt basé sur l'espérance de gain devient quantifiable (i.e. épistémiquement estimable) pour chaque étudiant et la décision de jouer devient rationnelle. Il en est de même pour *les deux enveloppes*, dès que l'enveloppe en main est ouverte et le montant connu du joueur, l'intérêt basé sur l'espérance de gain devient quantifiable et décider de changer d'enveloppe devient rationnel.

Plus généralement, le concept sous-jacent est celui de la préférence stricte. Il semble, in fine, que l'action a soit strictement préférée à l'action b si et seulement si il existe une somme S, quantifiable et connue du joueur (à l'instant de sa prise de décision), telle que: $\mathrm{Eu}(b)+\mathrm{u}(S)<\mathrm{Eu}(a)$, où u(.) est une utilité strictement croissante non bornée et Eu(.), l'utilité espérée. Le joueur rationnel doit être alors disposé à payer toute somme strictement inférieure à S pour réaliser l'action a plutôt que l'action b. Pour *les deux portefeuilles* (dans sa version originale), il est rationnel de croire que l'on a plus à gagner qu'à perdre. Mais l'intérêt à jouer n'est pas quantifiable (i.e. on est incapable de proposer une somme rationalisable à payer pour jouer). Cet intérêt non-quantifiable n'est alors pas suffisant pour rompre l'indifférence à jouer. Ce principe de l'intérêt non-quantifiable s'applique également pour *les deux enveloppes,* avant l'ouverture de l'enveloppe en main. En revanche, une fois l'enveloppe en main ouverte, on est en mesure de quantifier la somme rationnelle maximale à payer pour changer d'enveloppe. Aussi, l'intérêt est estimable et l'on est en mesure de décider selon cet intérêt. Il ne suffit pas de savoir (ou croire) que l'on a plus à gagner qu'à perdre pour avoir intérêt à faire une action plutôt qu'une autre, il faut être en mesure de quantifier cet intérêt.

Ce qui est particulièrement troublant dans ces deux paradoxes, c'est que la décision semble indépendante de l'information donnée. Dans la variante des deux portefeuilles, la connaissance de la différence des sommes d'argent en jeu est suffisante pour rationaliser la décision de jouer. Dans les deux enveloppes, c'est la connaissance du montant en main qui joue ce même rôle pour changer d'enveloppe. Attention, cette indépendance est uniquement due à l'hypothèse d'une utilité linéaire (par exemple, la fonction identité qui conduit à quantifier son intérêt via l'espérance mathématique de gain). En effet, pour une fonction d'utilité non linéaire, la décision dépendra clairement de la valeur de l'intérêt estimé ainsi que des gains et pertes possibles. Au moment effectif du choix entre deux actions a et b, la quantification de l'intérêt $\mathrm{u}(S)$, de $\mathrm{Eu}(a)$ et $\mathrm{Eu}(b)$, est suffisante pour rationaliser son choix.

Ne serait-il pas nécessaire et suffisant pour qu'un choix soit rationnel que le concept d'intérêt soit défini et quantifié factuellement ?

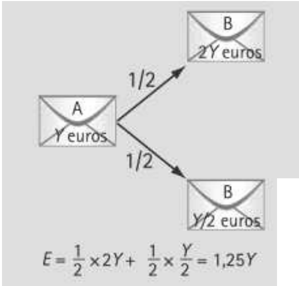
Bibliographie (short)

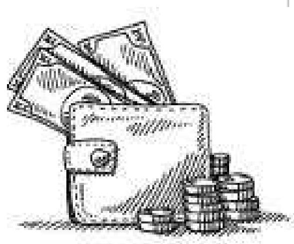
[1] Binmore, K. (1999). Jeux et théorie des jeux, Bruxelles : De Boeck Université.

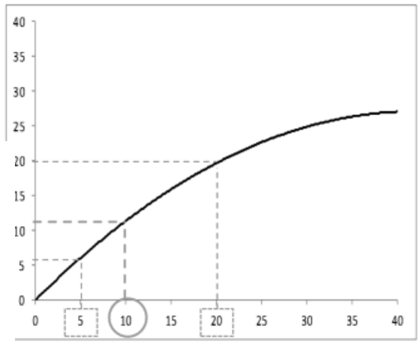
[2] Dietrich F., List C. (2005). The Two-Envelope Paradox: An Axiomatic Approach, Mind New Series, Vol. 114, No. 454, pp. 239-248.

[3] Emery M. (2001). Quelques phénomènes curieux en probabilités et statistiques. L'Ouvert, N°104, pp. 37-47.

[4] Gardner M. (1982). Aha! Gotcha: Paradoxes to Puzzle and Delight, W.H. Freeman and Company, New York, p 106.







Choix rationnel : définir et estimer son "intérêt"

Léo Gerville-Réache (Université de Bordeaux - IMB, France)

Introduction

- Dans la plupart des problèmes épineux de théorie des jeux et de décisions rationnelles, se pose une question du type "qu'ai-je intérêt à faire?". Mais que signifie "avoir intérêt... à choisir l'action *a* plutôt que l'action *b*"?
- Dans cette communication, nous revenons sur deux paradoxes ouverts.
  - Les deux portefeuilles (wallet paradox)
  - Les deux enveloppes (two-envelope paradox)
- Nous tentons d'établir que la définition du concept *d'intérêt* et son *estimation situationnelle* sont une condition nécessaire et suffisante d'un choix rationnel.

Les deux portefeuilles (wallet paradox)

- Le professeur Smith déjeune avec deux étudiants en math.
  - **Professeur Smith**: *Laissez-moi vous montrer un nouveau jeu. Posez vos portefeuilles sur la table. Nous allons compter quelle somme a chacun. Celui qui a la plus petite somme gagne tout l'argent de l'autre portefeuille.*
  - **Joe:** *Hum... Si j'ai plus que Jill, elle gagnera juste ce que j'ai. Mais si elle a plus que moi, je gagnerai plus que ce que j'ai. Aussi, je gagnerai plus que ce que je peux perdre. Le jeu est en ma faveur.*
  - **Jill:** *Si j'ai plus que Joe, il gagnera juste ce que j'ai. Mais s'il a plus que moi, je gagnerai plus que ce que j'ai. Le jeu est en ma faveur.*
- Qu'en pensez-vous?

Les deux portefeuilles (wallet paradox)

- Soit x_A et x_B les montants des portefeuilles des joueurs *A* et *B*. On suppose que *A* connait x_A mais pas x_B et inversement.
  - *A* estime qu'en jouant, il peut gagner la somme inconnue X_B ($>x_A$) avec probabilité 1/2 et perdre x_A avec probabilité 1/2. Il estime son espérance de gain (Subjective Expected Utility) à :

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{A}}=1/2*X_B+1/2*(-x_A)\ \mathbf{>0}.$$

  - Le joueur B aboutit à l'estimation :

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{B}}=1/2*X_A+1/2*(-x_B)\ \mathbf{>0}.$$

- Chaque protagoniste a donc intérêt à jouer!

Non…

Variante avec connaissance de l’écart

- Même énoncé, mais le professeur Smith regarde en secret le contenu des deux portefeuilles, observe que l'un a 40 euros et l'autre 50 et annonce aux deux étudiants que la différence entre les deux sommes est de 10 euros.
  - *A* estime qu’en jouant, il peut gagner la somme connue $x_B = x_A + 10$ avec probabilité 1/2 et perdre x_A avec probabilité 1/2. Il estime son espérance de gain à :

$$\mathbf{E'_A} = 1/2*(x_A+10)+1/2*(-x_A)\ \mathbf{=5}.$$

  - Le joueur B aboutit à l’estimation :

$$\mathbf{E'_B} = 1/2*(x_B+10)+1/2*(-x_B)\ \mathbf{=5}.$$

- Chaque protagoniste a donc intérêt à jouer!

Oui…

Les deux enveloppes (two-envelope paradox)

- Vous êtes face à deux enveloppes non distinguables qui contiennent de l'argent. L'une contient le double de l'autre. Vous choisissez une enveloppe, vous l'ouvrez et trouvez 20 euros. Vous avez la possibilité de partir avec cette enveloppe là ou d'échanger avec l'autre enveloppe.
  - Vous pensez qu'il y a autant de chances qu'il y ait 10 euros ou 40 euros dans l'autre enveloppe (principe d’indifférence).
  - Comme vous avez plus à gagner qu'à perdre en changeant, vous avez donc intérêt à changer.
  - Pourtant, si vous aviez choisi l'autre enveloppe au départ, partant de la somme contenue dans cette enveloppe, vous auriez conclu à l'intérêt de changer pour prendre finalement l'autre (donc celle en main actuellement).
- Alors que devez-vous penser, que devez-vous faire?

Les deux enveloppes (two-envelope paradox)

- Si en changeant je gagne, alors c'est que 20 euros, le montant connu que j'ai en main, est le plus petit montant et que l'autre contient 40 euros. Je gagne donc 20 euros.
- Si en changeant je perds, alors c'est que 20 euros, le montant connu que j'ai en main, est le plus gros montant et que l'autre contient 10 euros. Je perds donc 10 euros.
- N'ayant aucune raison de croire que j'ai en main le plus petit ou le plus gros montant, j'estime que mon espérance de gain en changeant d'enveloppe vaut 5 euros :

$$\mathbf{E_{20}}=1/2*20+1/2*(-10)\ \mathbf{=5}$$

- Vous avez donc intérêt à changer!

Oui…

Variante sans ouvrir l'enveloppe en main

- Soit *N* le plus petit montant
  - Si en changeant je gagne, alors c'est que j'ai en main le plus petit montant (inconnu) *N* et que l'autre contient 2*N*. Je gagne donc *N*.
  - Si en changeant je perds, alors c'est que j'ai en main le plus gros montant (inconnu) 2*N* et que l'autre contient *N*. Je perds donc *N*.
- N'ayant aucune raison de croire que j'ai en main le plus petit ou le plus gros montant, j'estime que mon espérance de gain en changeant d'enveloppe vaut 0 :

$$\mathbf{E_{\mathit{N}}}=1/2*N+1/2*(-N)\ \mathbf{=0}$$

- Vous n'avez donc aucun intérêt à changer!

Oui…

Variante sans ouvrir l’enveloppe en main (suite)

- Soit X montant que j’ai en main
  - Si en changeant je gagne, alors c'est que j'ai en main le plus petit montant (inconnu) X et que l'autre contient $2X$. Je gagne donc X.
  - Si en changeant je perds, alors c'est que j'ai en main le plus gros montant (inconnu) X et que l'autre contient $X/2$. Je perds donc $X/2$.
- N'ayant aucune raison de croire que j'ai en main le plus petit ou le plus gros montant, j’estime que mon espérance de gain en changeant d’enveloppe vaut $X/4$.

$$\mathbf{E}_X=1/2*X+1/2*(-X/2)\ \boldsymbol{=X/4>0}$$

- Vous avez donc intérêt à changer!

Non…

De l’intérêt d’une action…

- L'action *a* est strictement préférée à l'action *b* SSI

$$Eu(a)>Eu(b),$$

où u(.) est une utilité strictement croissante non bornée et Eu(.), l'utilité espérée.

- Nous postulons que l'action *a* est strictement préférée à l'action *b* SSI il existe une somme *S*, **quantifiable et connue du joueur** (à l'instant de sa prise de décision), telle que:

$$Eu(a) > Eu(b)\mathbf{+u(}\boldsymbol{S}\mathbf{)},$$

- Le joueur rationnel doit être alors disposé à payer toute somme strictement inférieure à *S* pour réaliser l'action *a* plutôt que l'action *b*. Aussi, u(*S*) est l’intérêt de l’action *a* relativement à l’action *b*.

Pour résumer…

- Pour *les deux portefeuilles*, il est rationnel de croire que l'on a plus à gagner qu'à perdre en jouant. Mais l'intérêt à jouer n'est pas quantifiable. Seule l'indifférence à jouer est rationnelle.
  - En revanche, la connaissance de la différence de montant entre les deux portefeuilles est suffisante pour estimer son intérêt et rationnaliser la décision de jouer.
- Pour *les deux enveloppes,* avant l'ouverture de l'enveloppe en main, il est rationnel de croire que l'on a plus à gagner qu'à perdre en changeant. Mais l'intérêt à changer n'est pas quantifiable. Seule l'indifférence à changer est rationnelle.
  - En revanche, la connaissance du montant en main est suffisante pour estimer son intérêt et rationnaliser la décision de changer.
- Il ne suffit pas de croire (ou supposer) que l'on a plus à gagner qu'à perdre pour avoir intérêt à faire une action plutôt qu'une autre, il faut être en mesure de quantifier cet intérêt.

Indépendance et utilité espérée…

- Ce qui est essentiellement troublant dans ces deux paradoxes, c'est que la décision semble indépendante de l'information donnée.
  - Dans les deux portefeuilles, on est indifférent à jouer. Mais **quelque soit la différence des montants**, la connaissance de celle-ci sera suffisante pour rationnaliser la décision de jouer.
  - Dans les deux enveloppes avant ouverture, on est indifférent à changer. Mais **quelque soit le montant découvert dans l'enveloppe en main**, la connaissance de celui-ci sera suffisante pour rationnaliser la décision de changer.
- **Attention!!!**, cette « indépendance » est uniquement due à l'hypothèse d'une **utilité linéaire** (par exemple, la fonction identité qui conduit à quantifier son intérêt via l'espérance mathématique de gain).
- En effet, pour une fonction d'utilité non linéaire, la décision pourra clairement dépendre de la valeur de l'intérêt estimé relativement aux utilités des gains et pertes possibles…

Indépendance et utilité espérée… (suite 1)

Les deux enveloppes

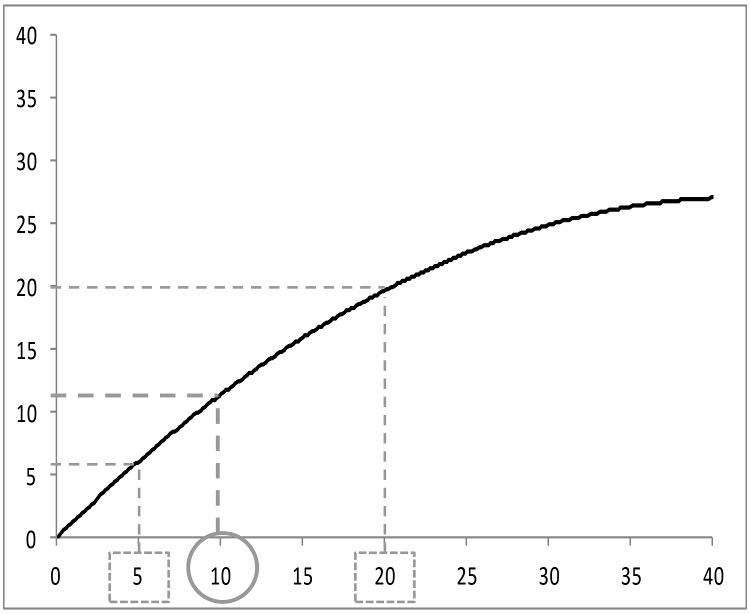
Somme	Utilité
0	0
5	6
10	11
20	20
40	27

Ayant **10** euros en main, mon utilité est de **11** et mon utilité espérée en changeant vaut :

½*20+½*6=**13**.

L'intérêt à changer u(*S*) vaut 2.

Donc j'ai intérêt à changer.



Indépendance et utilité espérée… (suite 2)

Les deux enveloppes

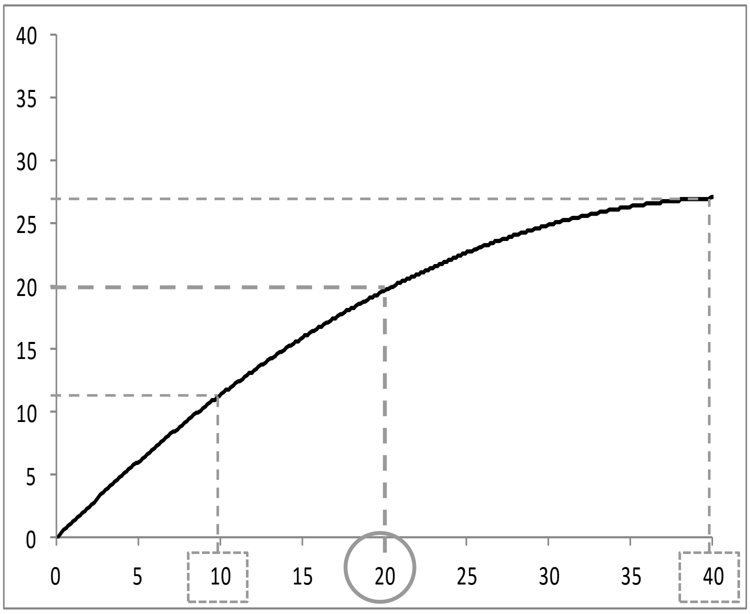
Somme	Utilité
0	0
5	6
10	11
20	20
40	27

Ayant **20** euros en main, mon utilité est de **20** et mon utilité espérée en changeant vaut :

½*27+½*11=**19**.

L'intérêt à garder u(*S*) vaut 1.

Donc j'ai intérêt à garder.



Quid d’une utilité linéaire?

- Avec une utilité linéaire, on est tenté de raisonner ainsi :
  - **Si** quelque soit le montant que je découvrirai dans mon l’enveloppe, il sera rationnel de changer d’enveloppe,
  - **alors** il est rationnel de changer maintenant, sans connaitre ce montant (≈ principe de la chose sûre de Savage).
- Le paradoxe serait alors dû à l’hypothèse d’une utilité linéaire…
  - Non, car sous l’axiomatique de Kolmogorov, la non existence d’une loi uniforme sur un ensemble infini de possibles rend inadmissible l’hypothèse « ***Si*** *quel que soit le montant que je découvrirai dans mon l’enveloppe, il sera rationnel de changer d’enveloppe* ».

Conclusion

- Dans les deux portefeuilles, je n’ai aucun moyen **de déduire** un intérêt à jouer. En revanche, dès l’écart entre les deux portefeuilles connu, j’ai le moyen **d’induire** un intérêt à jouer.
- Dans les deux enveloppes, avant ouverture de l’enveloppe en main, je n’ai aucun moyen **de déduire** un intérêt à changer. En revanche, dès le montant en main connu, j’ai le moyen **d’induire** un intérêt à changer.

  NB : La déduction est ici basée sur le concept probabiliste de probabilité conditionnelle ; l’induction est ici basée sur le concept statistique de probabilité situationnelle (Voir LGR 2015).
  - Exemple : **SI** j’ai 20 euros dans mon enveloppe, je ne peux pas **déduire** de cette hypothèse (inadmissible de surcroit selon Kolmogorov) que j’ai intérêt à changer mais **SACHANT** que j’ai 20 euros en main, j’**induis** de cette réalité que j’ai un intérêt à changer.

Conclusion (suite)

On n'a pas « intérêt à faire … », on a « UN intérêt à faire … ».

Ne serait-il pas nécessaire et suffisant pour qu'un choix soit rationnel que le concept d'intérêt soit défini et quantifié au moment du choix ?

Bibliographie (short)

- [1] Binmore, K. (1999). Jeux et théorie des jeux, Bruxelles, De Boeck Université.
- [2] Dietrich F., List C. (2005). The Two-Envelope Paradox: An Axiomatic Approach, Mind New Series, Vol. 114, No. 454, pp. 239-248.
- [3] Gerville-Réache L., (2015). *Quand la probabilité conditionnelle croise la statistique*, CFIES, Bordeaux, 6p.
- [4] Hájek A. (2003), What Conditional Probability Could Not Be, Synthese, Volume 137, Issue3, pp. 273-323.
- [5] Kolmogorov, A. N. (1933). *Foundation of the theory of probability*, Chelsea Publishing Company, 1950.