

Différences finies appliquées à une équation d'onde modifiée pour la caractérisation des espaces de type plateaux de bureaux

H Dujourdy, T Toulemonde, J.-D Polack

▶ **To cite this version:**

H Dujourdy, T Toulemonde, J.-D Polack. Différences finies appliquées à une équation d'onde modifiée pour la caractérisation des espaces de type plateaux de bureaux. 13ème Congrès Français d'Acoustique , SFA, Apr 2016, Le Mans, France. hal-01317422

HAL Id: hal-01317422
https://hal.science/hal-01317422

Submitted on 18 May 2016

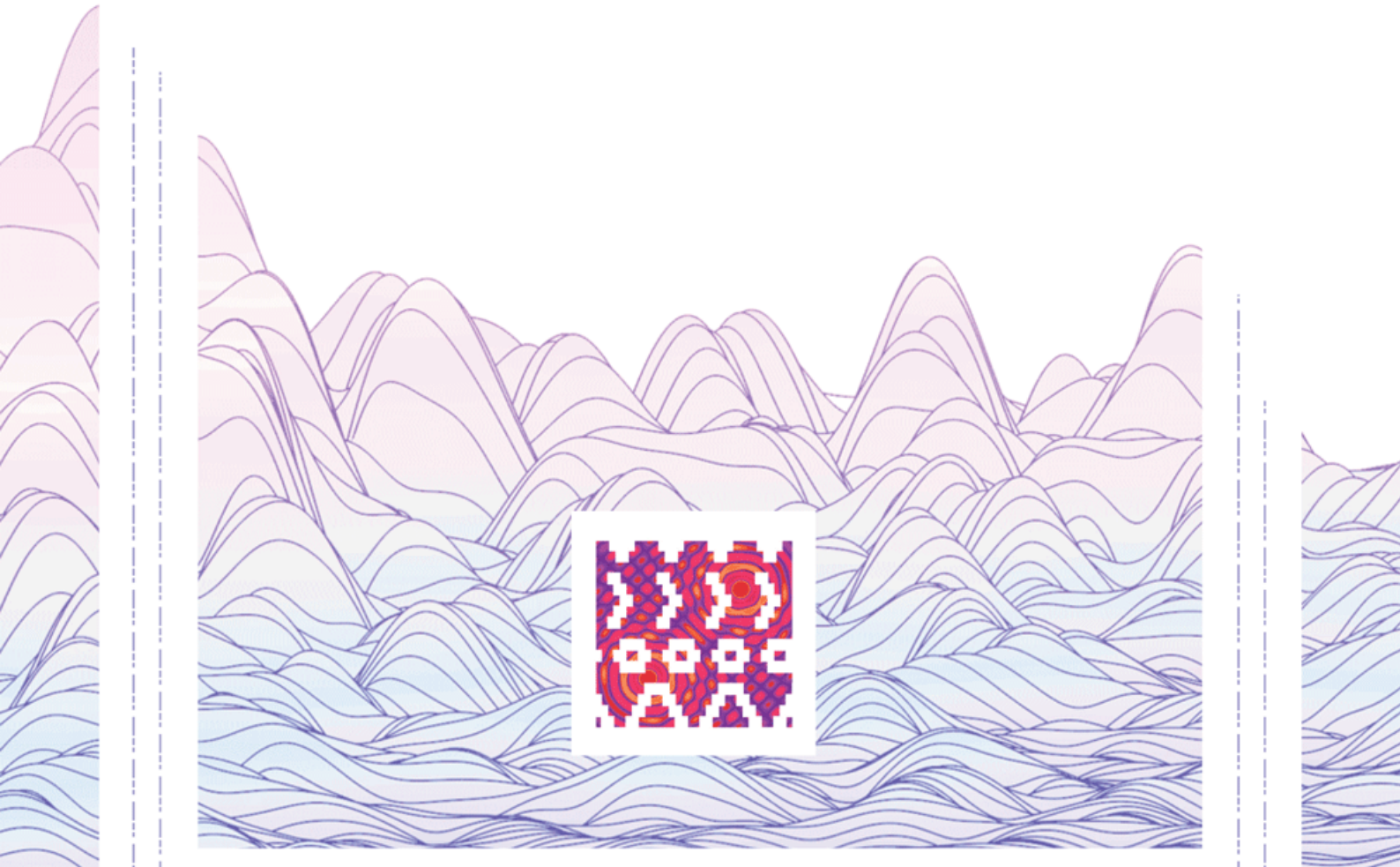
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CFA/VISHNO 2016

Différences finies appliquées à une équation d'onde modifiée pour la caractérisation des espaces de type plateaux de bureaux

H. Dujourdy[a,b], T. Toulemonde[a] et J.-D. Polack[c]
[a]Impédance SAS, 80, domaine de Montvoisin, 91400 Gomez La Ville, France
[b]Institut Jean le Rond d'Alembert, 11 rue de Lourmel, 75005 Paris, France
[c]CNRS, UMR 7190, Institut Jean le Rond d'Alembert, 11 rue de Lourmel, 75005 Paris, France
dujourdy@lam.jussieu.fr



LE MANS

Pour la conception acoustique des plateaux de bureaux, la modélisation informatique est un outil remarquable souffrant pourtant de limitations restreignant ses applications. Ce travail reprend les relations entre l'énergie sonore et l'intensité. Le formalisme introduit permet de mieux prendre en compte les phénomènes physiques impliqués lors de la propagation d'une onde dans un milieu fermé comportant des obstacles. La méthode développée réduit la conservation du tenseur énergie-contraintes à une équation d'onde modifiée. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre, de type hyperbolique. Les coefficients introduits par son formalisme sont les coefficients d'absorption et de diffusion habituellement utilisés en acoustique des salles. Nous résolvons ce formalisme en une dimension par la méthode des différences finies dans le domaine temporel. Les schémas utilisés sont stables et explicites, et peu couteux en mémoires informatique. Cette modélisation s'applique bien aux plateaux de bureaux du fait de leur géométrie longue et rectangulaire. Des campagnes de mesures in situ ont été conduites avec un microphone *SoundField* ST250 permettant l'estimation de l'énergie et de l'intensité acoustique. Les mesures sont comparées aux modélisations afin de caractériser les coefficients d'absorption et de diffusion, accessibles par le calcul. La comparaison permet la caractérisation d'un espace au-delà des limitations actuelles des logiciels de modélisation acoustique.

1 Introduction

La méthode présentée ici étudie la propagation de l'énergie acoustique pour des espaces dont une des dimensions est très différente des autres. Elle se réduit à la conservation du tenseur énergie-impulsion, puis à un système d'équations couplées sur l'intensité acoustique et sur la densité d'énergie. C'est un système hyperbolique d'équations différentielles linéaires du premier ordre. Une méthode d'intégration sur deux des dimensions de l'espace permet d'introduire les coefficients d'absorption et de diffusion moyens.

Nous résolvons ce formalisme par la méthode des différences finies dans le domaine temporel. Les schémas utilisés sont stables et explicites et peu couteux en mémoires informatique.

Dans la première section, nous présentons les équations couplées de conservation de la densité d'énergie et la méthode permettant d'introduire les coefficients d'absorption et de diffusion. La deuxième section présente la technique de modélisation. Enfin, nous observons le comportement du modèle en fonction des coefficients d'absorption et de diffusion et proposons une méthode de recalage avant de conclure.

2 Théorie

Nous considérons l'équation d'onde appliquée au potentiel des vitesses Ψ défini par $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Psi$ et $p = \rho\partial_t\Psi$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse particulaire, et p la pression sonore. Nous noterons ∂_i la dérivée particulaire par rapport à la variable i. Nous avons

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\Psi - \Delta\Psi = 0 \tag{1}$$

avec c la célérité des ondes dans le milieu de propagation.

2.1 Conservation de la densité d'énergie

En multipliant l'Eq. (1) et la première dérivée spatiale $\partial_t\Psi$ nous obtenons la conservation de la densité d'énergie à un facteur ρ prés que nous négligerons par la suite :

$$\partial_t\Psi\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\Psi - \partial_t\Psi\Delta\Psi = 0$$

En appliquant la formule de Leibnitz aux produits d'opérateurs linéaires différentiels, nous obtenons

$$-\vec{\nabla}\cdot(\partial_t\Psi\vec{\nabla}\Psi) + \frac{1}{2}\partial_t(|\vec{\nabla}\Psi|^2 + \frac{1}{c^2}|\partial_t\Psi|^2) = 0 \tag{2}$$

Morse et Feshback [1] définissent la densité d'énergie E telle que

$$E = \frac{\rho}{2}(\frac{1}{c^2}|\partial_t\Psi|^2 + |\vec{\nabla}\Psi|^2) \tag{3}$$

et le vecteur d'intensité acoustique $\vec{I}$ qui caractérise le flux d'énergie moyen :

$$\vec{I} = -\rho\partial_t\Psi\vec{\nabla}\Psi \tag{4}$$

En notant $\vec{J} = \frac{\vec{I}}{c}$, la conservation de la densité d'énergie est donnée par l'Eq. (2) avec les Eq. (3) et (4) et s'écrit

$$\frac{1}{c}\partial_t E + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \tag{5}$$

Dans la suite du document, nous appellerons $\vec{J}$ l'intensité acoustique.

2.2 Conservation de l'intensité acoustique

En multipliant l'Eq. (1) et la première dérive spatiale $\vec{\nabla}\Psi$ nous obtenons l'équation de conservation du vecteur intensité acoustique :

$$\vec{\nabla}\Psi\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\Psi - \vec{\nabla}\Psi\Delta\Psi = 0$$

De la même manière, en appliquant la formule de Leibniz, nous obtenons

$$-\frac{1}{c^2}\partial_t(\partial_t\Psi\vec{\nabla}\Psi)+\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\Psi\otimes\vec{\nabla}\Psi+\frac{1}{2c^2}|\partial_t\Psi|^2-\frac{1}{2}|\vec{\nabla}\Psi|^2) = 0 \tag{6}$$

avec $\rho\partial_t\Psi\vec{\nabla}\Psi = -\vec{I} = -c\vec{J}$, la conservation du vecteur intensité acoustique est donnée par l'Eq. (6) avec les Eq. (3) et (4) :

$$\frac{1}{c}\partial_t\vec{J} + \vec{\nabla}\underline{\underline{E}} = 0 \tag{7}$$

où $\underline{\underline{E}}$ est le tenseur symétrique onde-contrainte [2].

2.3 Équations couplées

En développant le tenseur onde-contrainte, les Eq. (5) et (7) peuvent s'écrire comme un système d'équations couplées :

$$\frac{1}{c}\partial_t E_{tt} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{c}\partial_t \vec{J} + \vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} E_{xx} & E_{yx} & E_{zx} \\ E_{xy} & E_{yy} & E_{zy} \\ E_{xz} & E_{yz} & E_{zz} \end{pmatrix} = 0 \tag{9}$$

Où les E_{ij} peuvent être exprimés en termes de potentiel des vitesses par

$$\begin{aligned}
E_{tt} &= E = \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{c^2}|\partial_t\Psi|^2 + |\vec{\nabla}\Psi|^2\right) \\
E_{xx} &= \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{c^2}|\partial_t\Psi|^2 + |\partial_x\Psi|^2 - |\partial_y\Psi|^2 - |\partial_z\Psi|^2\right) \\
E_{yy} &= \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{c^2}|\partial_t\Psi|^2 - |\partial_x\Psi|^2 + |\partial_y\Psi|^2 - |\partial_z\Psi|^2\right) \\
E_{zz} &= \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{c^2}|\partial_t\Psi|^2 - |\partial_x\Psi|^2 - |\partial_y\Psi|^2 + |\partial_z\Psi|^2\right) \\
E_{xy} &= \rho\partial_x\Psi\partial_y\Psi \\
E_{xz} &= \rho\partial_x\Psi\partial_z\Psi \\
E_{yz} &= \rho\partial_y\Psi\partial_z\Psi
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors introduire le tenseur énergie-impulsion :

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} E & \vec{J}^t \\ \vec{J} & \underline{\underline{E}} \end{pmatrix}$$

où $(\cdot)^t$ est la matrice transposée. Les équations couplées se réduisent à la conservation de $\underline{\underline{T}}$, soit

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}} = 0$$

avec $\underline{\nabla} = (\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla})$

2.4 Réduction dimensionnelle par une méthode d'intégration

2.4.1 Bilan d'énergie sur les parois

Nous considérons l'Eq. (8) et la propagation du son dans un couloir parallèle à la direction $\vec{x}$ avec pour dimensions $l_x \times l_y \times l_z$ où l_x est la longueur, l_y la largeur et l_z la hauteur du couloir. La section du couloir est donnée par $S = l_y l_z$. Nous considérons E et J_x constants sur la section, J_y est indépendant de z et J_z est indépendant de y. Nous effectuons une intégration sur la section $S = l_y l_z$:

$$\frac{1}{c}\int_S \partial_t E dS + \int_S \partial_x J_x dS + \int_S \partial_y J_y dS + \int_S \partial_z J_z dS = 0 \tag{10}$$

où $dS = dydz$ est un élément de la section du couloir, dy et dz sont des éléments de la largeur et de la hauteur respectivement. En intégrant l'Eq. (10), nous obtenons

$$\frac{1}{c}\partial_t ES + \partial_x J_x S + (J_y^+ - J_y^-)l_z + (J_z^+ - J_z^-)l_y = 0 \tag{11}$$

où J_y^+ est l'intensité acoustique dans la direction $\vec{y}$ proche de la paroi située du côté +. Ainsi, J_y^+ resp. J_y^- est le flux d'énergie à travers les parois latérales du couloir +, resp. – (selon la direction $\vec{y}$). Ce flux est proportionnel à l'énergie absorbée par la paroi :

$$J_y^+ = -J_y^- = J_{abs}$$

Un bilan d'énergie sur les parois $J_{abs} = J_{inc} - J_{ref}$ où J_{inc} est l'intensité acoustique incidente, J_{ref} l'intensité acoustique réfléchie et où $J_{abs} = \alpha J_{inc}$ est l'intensité acoustique absorbée, avec α le coefficient d'absorption de Sabine permet d'écrire [3]

$$J = \frac{\alpha}{2(2-\alpha)}E = \frac{A}{4}E \tag{12}$$

où nous avons introduit le coefficient d'absorption modifié $A = \frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{2}}$ et où le coefficient $\frac{1}{4}$ provient de la théorie du champ diffus [4]. L'Eq. (11) peut alors s'écrire

$$\frac{1}{c}\partial_t ES + \partial_x J_x S + AE\frac{l_y + l_z}{2} = 0$$

Soit, en introduisant le libre parcours moyen :

$$\lambda = \frac{4V}{S_w} = \frac{2S}{l_y + l_z} \tag{13}$$

avec S_w la surface totale des murs :

$$\frac{1}{c}\partial_t E + \partial_x J_x = -\frac{A}{\lambda}E \tag{14}$$

2.4.2 Bilan de la quantité de mouvement sur les parois

En appliquant cette méthode à l'Eq. (9), sa composante selon $\vec{x}$ devient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\int_S \partial_t J_x dS + \int_S \partial_x E_{xx} dS &+ \int_S \partial_y E_{xy} dS \\
&+ \int_S \partial_z E_{xz} dS = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

Il est inutile de considérer les autres composantes. En intégrant, l'Eq. (15) devient :

$$\frac{1}{c}\partial_t J_x S + \partial_x E_{xx} S + (E_{xy}^+ - E_{xy}^-)l_z + (E_{xz}^+ - E_{xz}^-)l_y = 0 \tag{16}$$

où E_{xy}^+ est la contrainte ondulatoire sur la paroi située du côté +. Ainsi E_{xy}^+, resp. E_{xy}^-, est la contrainte sur les parois latérales +, resp. –, du couloir.

Cette contrainte est proportionnelle à l'intensité acoustique diffusée par la paroi :

$$E_{xy}^+ = -E_{xy}^- = M_{dif} \tag{17}$$

où M_{dif} est le moment diffusé par la paroi. Par analogie, nous avons $E_{xy} = \frac{\beta}{2(2-\beta)}J$ où β est le coefficient de diffusion.

Nous introduisons le coefficient de diffusion modifié $D = \frac{\beta}{1-\frac{\beta}{2}}$, et l'Eq. (17) devient

$$E_{xy}^+ = -E_{xy}^- = \frac{D}{4}J_x$$

L'Eq. (16) peut alors s'écrire

$$\frac{1}{c}\partial_t J_x S + \partial_x E_{xx} S + DJ_x\frac{(l_y + l_z)}{2} = 0 \tag{18}$$

Soit, avec le libre parcours moyen dans un couloir en remplaçant l'Eq. (13) dans l'Eq. (18) :

$$\frac{1}{c}\partial_t J_x + \partial_x E_{xx} = -\frac{D}{\lambda}J_x \tag{19}$$

Avec $E_{xx} = E$ et $J_x = J$ puisque J ne comporte qu'une seule composante.

Les Eq. (14) et (19) forment un système hyperbolique d'équations couplées différentielles linéaires du premier ordre. Ces équations décrivent la conservation de la densité d'énergie et de l'intensité acoustique à une dimension avec prise en compte sur les parois des pertes dues à l'absorption et de la diffusion, sous la forme des coefficients d'absorption et de diffusion modifiés A et D.

Les caractéristiques d'absorption et de diffusion des parois parallèles à $\vec{x}$ sont prises en compte dans les équations de volume alors que les caractéristiques des parois perpendiculaires à $\vec{x}$ sont prises en compte par les conditions limites.

2.5 Équation générale

Les Eq. (14) et (19) sont semblables aux équations des lignes de transmission. Nous exploitons cette similitude afin de transformer le système d'équations couplées en une équation d'onde généralisée à une variable semblable à l'équation générale des Télégraphistes. Cette équation peut être résolue indifféremment sur la densité d'énergie ou sur l'intensité acoustique.

Nous résolvons les Eq. (14) et (19) sur la densité d'énergie en les transformant comme ci-dessous :

$$(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{A}{\lambda})E = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J} \tag{20}$$

$$(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{D}{\lambda})\vec{J} = -\vec{\nabla}E \tag{21}$$

En dérivant spatialement l'Eq. (21), nous obtenons

$$(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{D}{\lambda})\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\Delta E \tag{22}$$

En multipliant l'Eq. (20) par $(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{D}{\lambda})$ et en la remplaçant dans l'Eq. (22), nous obtenons

$$-(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{A}{\lambda})(\frac{1}{c}\partial_t + \frac{D}{\lambda})E = -\Delta E \tag{23}$$

L'Eq. (23) peut être développée en

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}E - \Delta E + \frac{A+D}{\lambda c}\partial_t E + \frac{AD}{\lambda^2}E = 0 \tag{24}$$

L'Eq. (24) est une équation hyperbolique différentielle linéaire du second ordre. Elle est constituée d'une équation d'onde ordinaire à laquelle deux termes s'ajoutent, combinant les effets d'absorption et de diffusion.

2.6 Conditions limites

Les conditions limites pour l'équation couplée s'écrivent à partir du bilan d'énergie effectué sur les extrémités à la Sec. 2.4. Le bilan permet d'écrire, à partir de l'Eq. (12) :

$$\vec{J}\cdot\vec{n} = A_r E \tag{25}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la paroi, soit $n = \pm 1$ en une dimension, et A_r est le coefficient d'absorption modifié appliqué aux extrémités du domaine et relié au coefficient d'absorption de Sabine par :

$$A_r = \frac{\alpha}{2(2-\alpha)} = \frac{A}{4}$$

C'est une condition limite de Neumannn.

En insérant l'Eq. (25) dans l'Eq. (19), on trouve la condition limite pour l'équation générale :

$$\partial_n E + (\frac{1}{c}\partial_t + \frac{D}{\lambda})A_r E = 0 \tag{26}$$

C'est une condition aux limites mixte.

3 Modélisation

La méthode choisie est celle des différences finies dans le domaine temporel (FDTD). La modélisation consiste à déterminer la variable à la position du maillage $i\Delta x$, $j\Delta y$ et $n\Delta t$, avec Δx et Δy le pas de discrétisation spatiale selon $\vec{x}$ et $\vec{y}$ respectivement et Δt le pas de discrétisation temporelle. Les indices (i, j) marquent les coordonnées discrètes des points spatiaux tandis que l'indice n marque les temps discrets.

3.1 Schéma

3.1.1 Approximations

Des schémas ont été utilisés pour résoudre l'équation des Télégraphistes [5, 6]. Par simplification, nous utilisons des approximations centrées pour toutes les dérivés :

$$\begin{aligned}
\partial_{xx}E(x,t) &= \frac{1}{\Delta x^2}(E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n)\\
\partial_t E(x,t) &= \frac{1}{2\Delta t}(E_i^{n+1} - E_i^{n-1})\\
\partial_{tt}E(x,t) &= \frac{1}{\Delta t^2}(E_i^{n+1} - 2E_i^n + E_i^{n-1})
\end{aligned} \tag{27}$$

3.1.2 Équation discrète

En remplaçant l'Eq. (27) dans l'Eq. (24), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2\Delta t^2}(E_i^{n+1} &- 2E_i^n + E_i^{n-1}) - \frac{1}{\Delta x^2}(E_{i+1}^n - 2E_i^n + E_{i-1}^n)\\
&+ \frac{A+D}{2c\Delta t\lambda}(E_i^{n+1} - E_i^{n-1})\\
&+ E_i^n\frac{DA}{\lambda^2} = 0
\end{aligned}$$

Nous notons $C_r = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ la condition de Courant-Friedrichs-Lewy, $a = (A+D)\frac{c\Delta t}{2\lambda}$ et $b = AD(\frac{c\Delta t}{\lambda})^2$, et nous en déduisons l'équation discrète du schéma de l'équation générale :

$$\begin{aligned}
E_i^{n+1}(1+a) &= E_i^{n-1}(a-1) + E_i^n(2(1-C_r^2) - b)\\
&- C_r^2(E_{i+1}^n + E_{i-1}^n)
\end{aligned} \tag{28}$$

3.1.3 Erreur de troncature

L'erreur de troncature ϵ est définie comme la différence entre les développements de Taylor des éléments de l'équation discrète Eq. (28) et l'équation réelle Eq. (24) :

$$\epsilon = O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

L'erreur de troncature est du second ordre en temps et en espace. Le schéma est consistant car $\lim_{(\Delta t, \Delta x) \to 0} \epsilon = 0$.

3.2 Conditions limites

L'intégration des conditions limites consiste à substituer Les valeurs discrètes de la densité d'énergie situées sur les limites du domaine par leur condition limite.

3.2.1 Approximations

Les conditions limites de l'Eq. (26) sont discrétisées par un schéma différence finie centré en temps et en espace :

$$\partial_n E(x,t) = \frac{E^n_{i+1} + E^n_{i-1}}{2\Delta_x} \tag{29}$$

sur les limites du domaine.

3.2.2 Équation discrète

Nous distinguons les limites du domaine en $x = 1$ et en $x = nx$. En combinant les Eq. (28) et (29), nous obtenons

$$\begin{aligned} E^{n+1}_1(1+a) &= E^n_1(2(1-C_r^2) - b - 2C_r^2\frac{A_r D \Delta_x}{\lambda}) \\ &- 2C_r^2 E^n_2 + E^{n-1}_1(a-1) \\ E^{n+1}_{nx}(1+a) &= E^n_{nx}(2(1-C_r^2) - b - 2C_r^2\frac{A_r D \Delta_x}{\lambda}) \\ &- 2C_r^2 E^n_{nx-1} + E^{n-1}_{nx}(a-1) \end{aligned}$$

3.3 Étude de stabilité

L'analyse de Von Neumann permet de calculer la condition de stabilité du schéma à partir du facteur d'amplification $G = \frac{E^{n+1}_i}{E^n_i}$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution convergente est $|G| \leq 1$. En substituant la condition dans l'Eq. (28), nous obtenons

$$Z^2(1+a) - Z\kappa + (1-a) = 0$$

où $\kappa = -b + 2 - 4C_r^2 sin^2(\frac{\theta}{2})$.

Cette équation est du second degré et ses solutions dépendent du signe du discriminent $\Delta = \kappa^2 - 4(1-a^2)$. Nous montrons que dans le cas $\Delta < 0$, la condition est toujours atteinte. Dans le cas $\Delta > 0$, la condition de stabilité est

$$C_r^2 + AD\left(\frac{c\Delta t}{2\lambda}\right)^2 < 1$$

La condition de stabilité implique les coefficients d'absorption et de diffusion modifiés, le libre parcours moyen, la célérité des ondes c et les pas de discrétisation spatiale et temporelle.

La stabilité n'est pas très sensible aux variation des coefficients α et β. Au contraire, elle est très sensible aux variations de Δx et Δt.

4 Résultats et validation du modèle

Les résultats sont présentés sous la forme de décroissances spatiales et temporelles. Nous évaluons tout d'abord l'influence des coefficients d'absorption et de diffusion sur le comportement du modèle numérique FDTD de l'équation générale. Nous comparons ensuite le modèle à des mesures *in situ* effectuées dans un couloir dans notre laboratoire.

4.1 Comportement du modèle

Le modèle est calculé pour une source impulsionnelle émettant à $100dB$. Les pas de discrétisation spatiale et temporelle sont $\Delta x = 1m$, $\Delta t = 1.10^{-3}s$. Le libre parcours moyen est fixé $\lambda = 2m$ et la célérité des ondes est $c = 344m/s$.

4.1.1 Niveau de décroissance spatiale

La Fig. 1 présente le niveau de décroissance spatiale de l'énergie dans le couloir pour différentes valeurs du coefficient de diffusion $\beta = 1$, $\beta = 1.4$ et $\beta = 1.6$. L'augmentation de la pente est clairement visible lorsque β augmente.

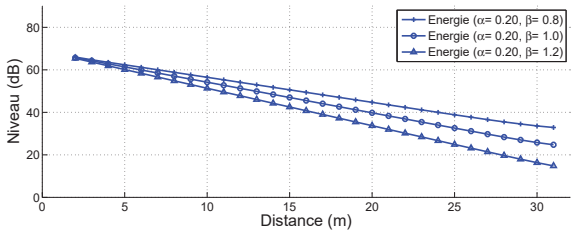


FIGURE 1 – Niveau de décroissance spatiale de l'énergie pour différentes valeurs du coefficient de diffusion.

La Fig. 2 présente le niveau de décroissance spatiale de l'énergie dans le couloir pour différentes valeurs du coefficient d'absorption $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.4$ et $\alpha = 0.6$. L'augmentation de la pente est bien visible lorsque α augmente.

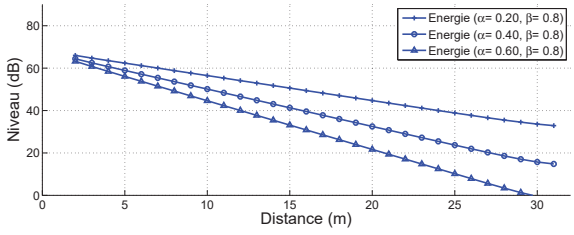


FIGURE 2 – Niveau de décroissance spatiale de l'énergie pour différentes valeurs du coefficient d'absorption.

Nous remarquons de plus que les courbes se croisent dans la Fig. 1 mais pas dans la Fig. 2.

4.1.2 Niveau de décroissance temporelle

La Fig. 3 présente le niveau de décroissance temporelle de l'énergie dans le couloir à $4m$ de la source pour différentes valeurs du coefficient de diffusion $\beta = 1, \beta = 1.4$ et $\beta = 1.6$.

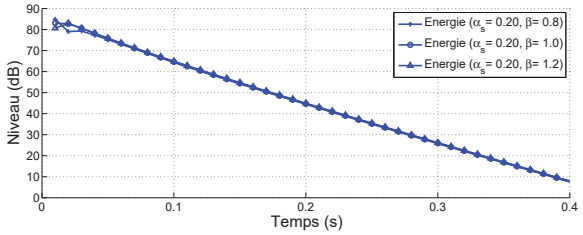


FIGURE 3 – Niveau de décroissance temporelle de l'énergie dans le couloir à 4m de la source pour différentes valeurs du coefficient de diffusion.

Ici, nous constatons que la variation de la pente de la décroissance est négligeable lorsque β augmente.

La Fig. 4 présente le niveau de décroissance temporelle de l'énergie dans le couloir à 4m de la source pour différentes valeurs du coefficient d'absorption $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.4$ et $\alpha = 0.6$.

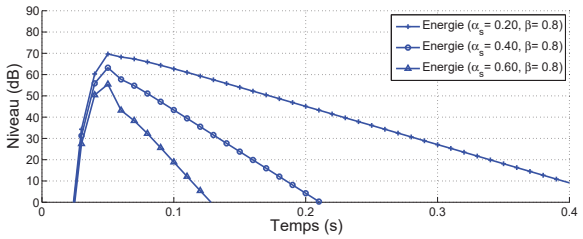


FIGURE 4 – Niveau de décroissance temporelle de l'énergie dans le couloir à 4m de la source pour différentes valeurs du coefficient d'absorption.

L'augmentation de la pente est cette fois-ci bien visible ici quand α augmente, alors que dans le cas de β nous n'avons pas observé de décroissance. Les résultats montrent qu'il n'y a pas d'équivalence entre les coefficients.

La Fig. 5 présente le niveau de décroissance temporelle de l'énergie dans le couloir à 16m de la source pour différentes valeurs du coefficient de diffusion $\beta = 1, \beta = 1.4$ et $\beta = 1.6$.

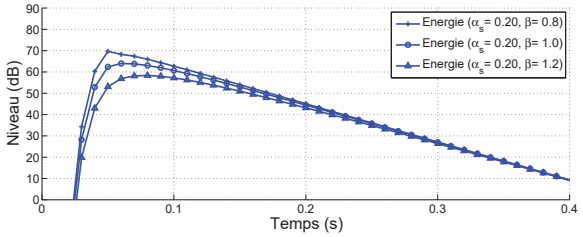


FIGURE 5 – Niveau de décroissance temporelle de l'énergie dans le couloir à 16m de la source pour différentes valeurs du coefficient de diffusion.

Nous ne constatons pas de variation de la pente de la décroissance lorsque β augmente, comme à 4m de la source. De plus le niveau maximum atteint décroit et arrive plus tardivement lorsque β augmente.

La Fig. 6 présente le niveau de décroissance temporelle de l'énergie dans le couloir à 16m de la source pour différentes valeurs du coefficient d'absorption $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.4$ et $\alpha = 0.6$.

La pente augmente quand α augmente. Nous pouvons observer la présence d'oscillations sur la courbe de décroissance lorsque les coefficients d'absorption et de diffusion sont faibles.

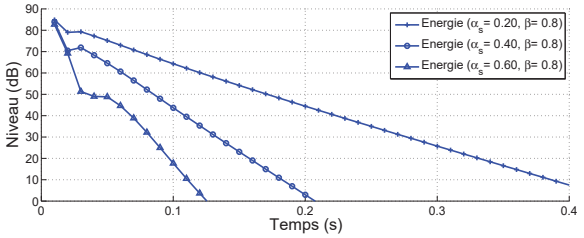


FIGURE 6 – Niveau de décroissance temporelle de l'énergie dans le couloir à 16m de la source pour différentes valeurs du coefficient d'absorption.

4.2 Comparaison avec des mesures *in situ*

Afin de comparer le modèle avec des mesures *in situ*, nous fixons les coefficients α et β séparément par une méthode de recalage. Dans la Sec. 4.1, nous avons observé que la décroissance temporelle de dépend pas du coefficient β. Nous proposons donc de fixer α à l'aide de la décroissance temporelle de la mesure. Nous comparons ensuite le modèle avec la décroissance spatiale mesurée pour fixer β.

4.2.1 Matériel et technique de mesure

Nous disposons d'un couloir de 32m de longueur se terminant en chicane. Sa largeur est de 1.7m et sa hauteur est de 2.5m, d'après l'Eq. (13), le libre parcours moyen est $\lambda = 2m$. La Fig. 7 présente un plan de situation. Le sol est en moquette, le plafond est constitué de dalles de laine minérale et interrompu par 10 puits de jour de 2.5m de long et de 1m de profondeur. Les murs sont constitués de parois vitrées et métalliques. Le couloir est empli d'ameublements et d'objets couvrant environ un tiers de la surface murale.

Les mesures ont été effectuées avec une source sonore *Outline* GRS omnidirectionnelle positionnée à $1,5m$ du sol et un microphone *SoundField* ST250 positionnée à $1,5m$ du sol permettant la mesure au format B Ambisonique. Le microphone a été calibré au LNE en 2013 [7].

Le signal est un sinus glissant exponentiel de 20Hz à 20kHz de 10s. L'enregistrement est ensuite post-traité afin d'obtenir des réponses impulsionnelles par la convolution du signal avec le signal inverse [8].

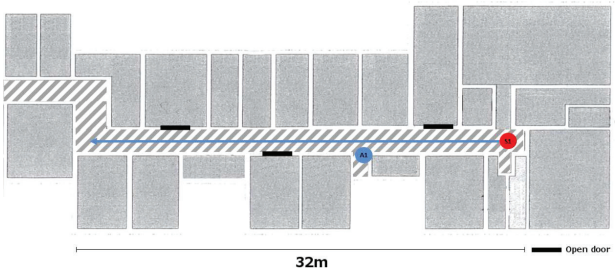


FIGURE 7 – Plan de situation du laboratoire. Le couloir correspond à la partie hachurée. La source sonore $S1$ en rouge est positionnée au centre du couloir, à 1m d'une des extrémités. Les récepteurs sont placés tous les mètres dans l'axe du couloir $A1$ en bleu.

4.2.2 Résultats

La Fig. 8 présente la comparaison des niveaux de décroissance temporelle entre la mesure est la modélisation dans le couloir à 4m de la source. Le coefficient d'absorption du modèle est ajusté à $\alpha = 0.27$ de manière à ce que les pentes des courbes soient le plus proches possible [9].

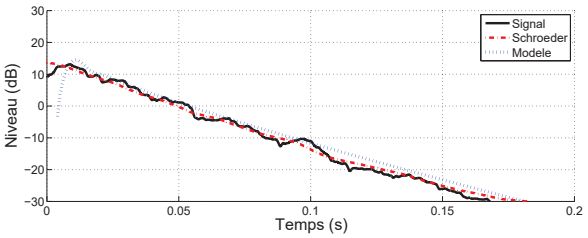


Figure 8 – Comparaison des niveau de décroissance temporelle de l'énergie entre la mesure est la modélisation dans le couloir à 4m de la source.

La Fig. 9 présente la comparaison des niveaux de décroissance spatiale entre la mesure est la modélisation. Le coefficient d'absorption a été fixé à $\alpha = 0.27$ en correspondance avec la courbe de décroissance temporelle pour la position à 4m de la source. Le coefficient de diffusion est ajusté à $\beta = 0.52$ de manière à ce que les pentes des courbes soient le plus proche possible.

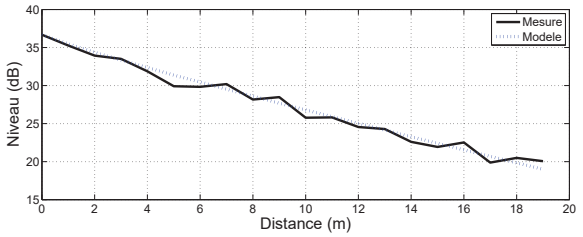


Figure 9 – Comparaison des niveau de décroissance spatiale de l'énergie entre la mesure est la modélisation dans le couloir.

5 Discussion

Les niveaux de décroissance temporelle et spatiale présentent des variations en accord avec nos attentes ce qui valide le modèle théorique.

Nous avons observé que la modification du coefficient de diffusion n'affecte pas la décroissance temporelle. Ce résultat montre l'effet de la diffusion sur la propagation de l'énergie acoustique.

Les valeurs de α et β ont été fixées par une méthode de recalage. Les résultats montrent une bonne correspondance entre les pentes des décroissances. Cette méthode permet de calculer le coefficient de diffusion à partir d'une mesure *in situ*.

6 Conclusion

Une équation d'onde modifiée appliquée à la densité d'énergie est présentée. Elle est obtenue à partir de la conservation du tenseur énergie-impulsion. Nous introduisons les coefficients d'absorption et de diffusion par une méthode d'intégration sur deux dimensions et nous obtenons une équation hyperbolique différentielle linéaire du second ordre à une dimension que nous résolvons numériquement par la méthode des différences finies.

Nous validons notre modèle en jouant sur différentes valeurs de coefficients d'absorption et de diffusion. Nous constatons qu'il n'y a pas d'équivalence entre les coefficients. Nous montrons que la décroissance temporelle ne dépend pas du coefficient de diffusion et proposons une méthode de recalage consistant à fixer le coefficient d'absorption à partir de la décroissance temporelle mesurée. Le coefficient de diffusion peut alors être retrouvé à l'aide de la décroissance spatiale.

Dans une prochaine étude, nous présenterons les résultats obtenues en deux dimensions. D'autres comparaisons avec des mesures *in situ* permettraient de mesurer un plus grand nombre de valeurs de coefficient de diffusion et de rendre plus robuste la méthode de recalage.

Remerciements

Ce travail a été mené en collaboration avec Impédance S.A.S. et l'Institut Jean Le Rond D'Alembert, grâce à une subvention de l'ANRT obtenue dans le cadre de la convention CIFRE N° 2012/1184.

Références

[1] P. M. Morse and H. Feshbach, *Method of Theoretical Physics*. Mc Graw-Hill Book Company, 1953.

[2] P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics*. Mc Graw-Hill Book Company, 1968.

[3] Y. Jing and N. Xiang, "On boundary conditions for the diffusion equation in room acoustic prediction : theory, simulations, and experiments," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 123, Jan. 2008.

[4] V. Valeau, J. Picaut, and M. Hodgson, "On the use of a diffusion equation for room-acoustic prediction," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 119, Mar. 2006.

[5] R. Mohanty, "An unconditionally stable finite difference formula for a linear second order one space dimensional hyperbolic equation with variable coefficients," *App. Math. Comput.*, vol. 165, pp. 229–236, June 2005.

[6] J. R. Nagel, "The Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Algorithm," tech. rep., Department of Electrical And Computer Engineering, University of Utah, 2010.

[7] J. P. Espitia Hurtado, H. Dujourdy, and J. D. Polack, "Caractérisation expérimentale du microphone SoundField ST250 pour la mesure de la diffusivité du champ sonore," in *12ème CFA*, (Poitiers, France), 2014.

[8] S. Muller and P. Massarani, "Transfer-function measurement with sweeps," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 49, no. 6, pp. 443–471, 2001.

[9] F. Leao Figueiredo, *Indices acoustiques et leurs rapports statistiques : verification objective et subjective pour un ensemble de salles de spectacles*. PhD thesis, UMPC, 2011.