DIS, COMMENT FAIRE POUR LIRE ÇA ? ÉCRITURE ET GRAPHISME DANS LES FORMALISMES CONTEMPORAINS

Béatrice Godart-Wendling, Antonio Mosca

DIS, COMMENT FAIRE POUR LIRE ÇA ?

ÉCRITURE ET GRAPHISME DANS LES FORMALISMES CONTEMPORAINS

Béatrice GODART-WENDLING & Antonio MOSCA
Laboratoire HTL (UMR-CNRS 7597) / Université Paris 7
Équipe REHSEIS du laboratoire SPHERE (UMR-CNRS 7219) / Université Paris 7

RÉSUMÉ:
Après avoir mis en évidence que la difficulté de lecture des formalismes contemporains réside dans le fait qu'ils conjuguent dans leur graphie les dimensions algébrique et géométrique, cet article – qui entend questionner le bien-fondé d'un certain nombre de dichotomies (lecture visuelle versus orale, faire et dire, …) usuellement mobilisées pour qualifier la spécificité des écritures formelles – se penche tout d'abord sur la pratique des mathématiciens, qui fut à l'origine de la création de ce type d'écriture, pour dégager, dans les champs d'activité où le formalisme intervient, les différents facettes du *faire* mathématique et argumenter qu'il se retrouve le plus souvent entrelacé à un *dire*. L'examen du bouleversement conceptuel résultant de l'exploitation par les logiciens et les informaticiens de la correspondance preuve-programme (ou isomorphisme de Curry-Howard) est ensuite entrepris et cette étude offre alors la possibilité de proposer des clés de lecture des principaux formalismes contemporains utilisés pour l'analyse des langues naturelles.
MOTS-CLÉS : écritures, syntaxe, sémantique, formalismes, algèbre, géométrie, correspondance preuve – programme, isomorphisme de Curry-Howard, déduction naturelle, calcul des séquents, réseaux de preuves.

ABSTRACT:
After having pointed out that the difficulty in reading contemporary formalisms lies in the fact that they combine algebraic and geometric dimensions in their written form, this paper – which aims to question the merits of a number of dichotomies (visual versus oral reading, doing vs. saying ...) which are usually referred to in describing the specificity of formal writings – first focuses on the practice of mathematicians, which was at the origin of the creation of this type of writing, in order to highlight different facets of mathematical *doing* in the fields of activity where a formalism occurs, and argues that these *doings* are usually interlaced with a *saying*. Examining the conceptual upheaval, resulting from logicians' and computer scientists' use of the proof-program correspondence (or Curry-Howard isomorphism), is then undertaken and this study offers us the opportunity to propose keys to understanding the main contemporary formalisms used for the analysis of natural languages.
KEYWORDS: writings, syntax, semantics, formalisms, algebra, geometry, proofs-as-programs correspondence, Curry-Howard isomorphism, natural deduction, sequent calculus, proof-nets.

Parmi les systèmes d'écriture utilisés pour analyser les différents processus syntaxiques et sémantiques qui régissent la structure d'une langue figurent les formalisations élaborées par les logiciens et les mathématiciens. Considérées du point de vue du linguiste, ces écritures formelles s'acquièrent dès leurs débuts de façon décontextualisée et elles se distinguent des systèmes d'écriture propres aux langues naturelles en n'ayant pas vocation à être oralisées, mais à être appréhendées par la lecture mentale de l'œil. En recourant conjointement à des lettres, des symboles et des structures graphiques, ce type de formalisme constitue un cas de figure où l'écrit semble se substituer totalement à l'oral en étant apte, indépendamment de lui, à représenter certaines des propriétés métalinguistiques du langage. En ayant ainsi pour fonction de « donner à voir » les régularités qui gouvernent le fonctionnement des langues ou les diverses formes logiques que recèle un énoncé sémantiquement ambigu, les écritures formelles et les graphismes se situeraient donc exclusivement du côté de l'explicite et d'un faire qui consisterait à « montrer ». En cela, les formalisations se distingueraient donc aussi des autres systèmes d'écriture en usage dans les langues qui, quant à eux, peuvent avoir pour fonction d'exprimer des énoncés pleins d'implicite et d'ambiguïtés (cas de l'écriture romanesque, théâtrale ou journalistique), voire même de ne faire la part belle qu'au jeu des sonorités (écriture poétique). Mais les dichotomies qui peuvent ainsi être dégagées (lecture orale versus visuelle, dire et faire, implicite / explicite) sont-elles vraiment pertinentes et/ou suffisantes pour caractériser la spécificité de l'écriture formelle ? Répondre à cette question nécessitera de rendre justice au fait que toute écriture formelle est avant toute chose une écriture mathématique qui est intrinsèquement liée à l'activité langagière des mathématiciens. Pour ce faire, nous procéderons à l'analyse des différentes pratiques qu'ont les mathématiciens de leurs écritures, puis nous mettrons en évidence les conséquences du changement de perspective qu'opérèrent les logiciens à partir des années trente, car ce bouleversement eut deux conséquences en linguistique qui n'allaient pas de soi : – l'usage dans cette discipline, qui n'est pas une branche des mathématiques, d'écritures formelles *mathématiques* – et l'emploi d'un type très spécial d'écriture mathématique, puisqu'il ne concerne que l'écriture formelle *logique*. Plus précisément, nous commencerons par montrer que la double difficulté de lecture de ce type d'écritures, difficulté algébrique et géométrique, est due au fait qu'elles combinent deux véritables « points de vue » mathématiques différents et complémentaires : un point de vue « algébrique » et un point de vue « géométrique ». Puis nous déterminerons les champs d'activité où le mathématicien recourt à la formalisation et cette étude conduira non seulement à mettre en évidence que le *dire* et le *faire*, au sens des linguistes, sont le plus souvent entremêlés, mais également à souligner que le *faire* ne se résume pas à une simple monstration, car il se décline de façon plus complexe. Cette analyse, qui prendra en compte les réflexions que les mathématiciens eurent de leur propre pratique langagière, se verra alors prolongée par l'examen de l'apport de la logique au XX^{e} siècle, lorsque celle-ci bouleversa l'ordre des choses en traitant les raisonnements comme des constructions. Cette étude, qui permettra de proposer des clés de lecture pour les formalismes contemporains, en remettant notamment en cause l'idée que l'écriture formelle se situerait résolument du côté de l'explicite alors que les langues naturelles auraient aussi accès à l'implicite, conduira alors à dégager que l'intérêt de certaines de ces écritures formelles réside dans leur capacité à dépasser le traditionnel clivage syntaxe / sémantique.

I. Quand l'algébrique et le géometrique se combinent

Tout linguiste non logicien peut se retrouver confronté à une formalisation ayant pour but soit de lui proposer un modèle explicatif de certains phénomènes langagiers, soit de réaliser une traduction

claire et rigoureuse – relevant d'un niveau que l'on pourrait qualifier de « métalinguistique » – de certains résultats obtenus. De nos jours, les principaux formalismes utilisés sont la déduction naturelle et le calcul des séquents issus des travaux de Gerhard Gentzen (1934), ainsi que les réseaux de preuves conçus par Jean-Yves Girard (1987) dans le cadre de la logique linéaire.
Une démonstration, par exemple de la bonne formation syntaxique d'un énoncé, peut ainsi être présentée au linguiste sous la forme de la figure ci-dessous :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \vdots \\ !\Gamma \vdash s : !A \multimap B\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ \vdots\\ !\Delta \vdash t : A\end{array}}{!\Delta \vdash t : A}\,!\mathbf{R} \qquad \dfrac{}{y : B \vdash y : B}\,Ax}{!\Delta, z : !A \multimap B \vdash zt : B}\multimap\mathbf{L}}{!\Gamma, !\Delta \vdash st : B}\,cut$$

Figure 1. Exemple de démonstration (calcul des séquents)

La première difficulté à laquelle se heurte le linguiste porte sur la partie algébrique que renferme un tel schéma, car il ne perçoit que différents types de lettres appartenant souvent à des alphabets fort divers, ainsi qu'à des symboles ($!$, $\multimap$) qui, pour lui, sont dépourvus de signification. Il se retrouve donc à l'égal d'un quidam qui serait mis en présence d'un texte écrit dans une langue inconnue ou qui devrait déchiffrer un rébus. Mais, la seconde difficulté est que cette écriture algébrique prend place dans un espace géométrisé dans lequel le linguiste ne sait comment s'orienter, car son œil hésite sur le sens de la lecture en étant, de plus, embarrassé par le fait que ce type de dessin présente conjointement des discontinuités qui sont contrebalancées par la présence de traits horizontaux qui semblent, quant à eux, rassembler certains symboles entre eux. Cette hétérogénéité conduit à le faire douter de la linéarité de la lecture et à envisager tous les parcours visuels possibles – comme tenter de lire de haut en bas ou inversement, en partant de la gauche ou de la droite – voire même à songer à une lecture statique, de type photographique, dont l'incongruité ne lui échappe cependant pas, puisque tenter de lire ce type de schémas comme des idéogrammes d'un seul tenant ne peut bien évidemment pas l'aider. Le linguiste se retrouve donc dans la même situation que s'il regardait la surface d'un tableau abstrait où rien ne serait discriminant pour lui.
Ces différentes entraves à la lecture ne sont pas l'apanage de l'écriture formelle sous forme de séquents, car elles constituent des constantes que l'on retrouve dans les formalismes les plus usités, étant donné que ceux-ci entrelacent aussi d'une façon essentielle les dimensions algébrique et géométrique. Ainsi, une même preuve se présentera sous des formes graphiques bien différentes – selon que l'écriture formelle choisie sera le calcul des séquents (figure 2) ou les différents types de réseaux de preuves (figure 3 et 4) – mais gardera cependant dans tous les cas son caractère peu lisible pour le linguiste :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash C, C^{\perp}}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, A^{\perp}}\,Ax \qquad \dfrac{}{\vdash B, B^{\perp}}\,Ax}{\vdash A \otimes B, B^{\perp}, A^{\perp}}\,(\otimes)}{\vdash A \otimes B, B^{\perp} \parr A^{\perp}}\,(\parr)}{\vdash C^{\perp}, A \otimes B, (B^{\perp} \parr A^{\perp}) \otimes C}\,(\otimes)}{\vdash C \multimap (A \otimes B), (B^{\perp} \parr A^{\perp}) \otimes C}\,(\parr)}{\vdash (C \multimap (A \otimes B)) \parr ((B^{\perp} \parr A^{\perp}) \otimes C)}\,(\parr)$$

Figure 2 : écriture en calcul des séquents

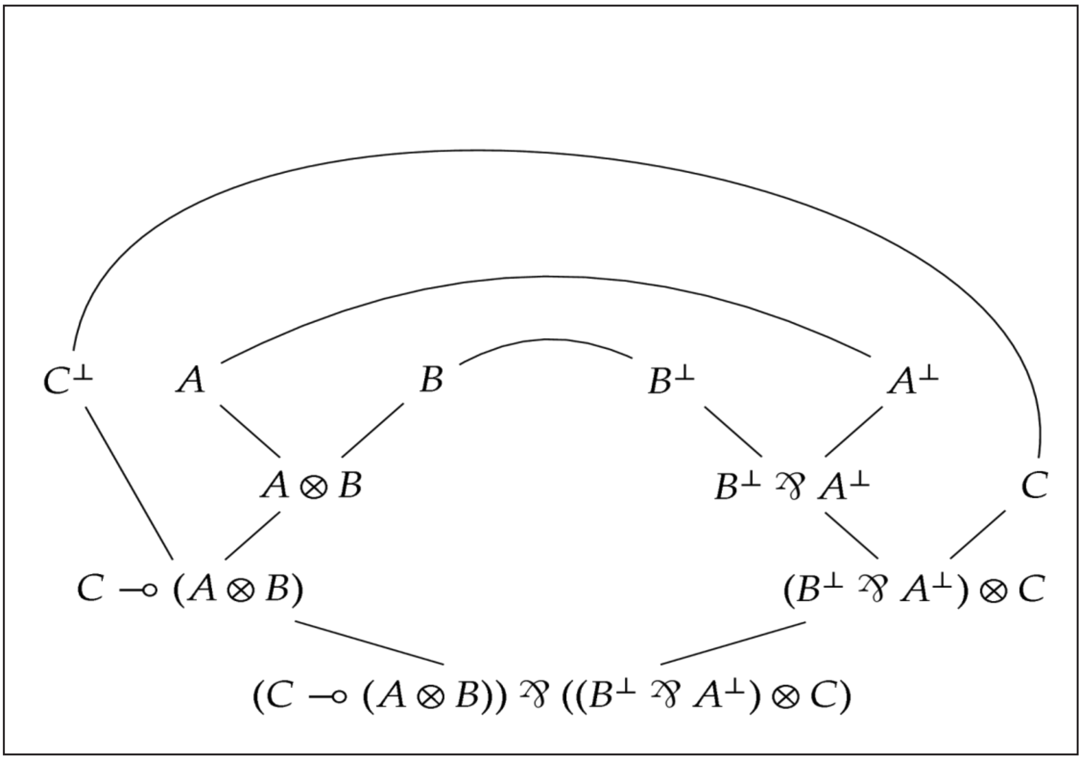


Figure 3 : écriture sous forme de réseau de preuves (style « naturel »)

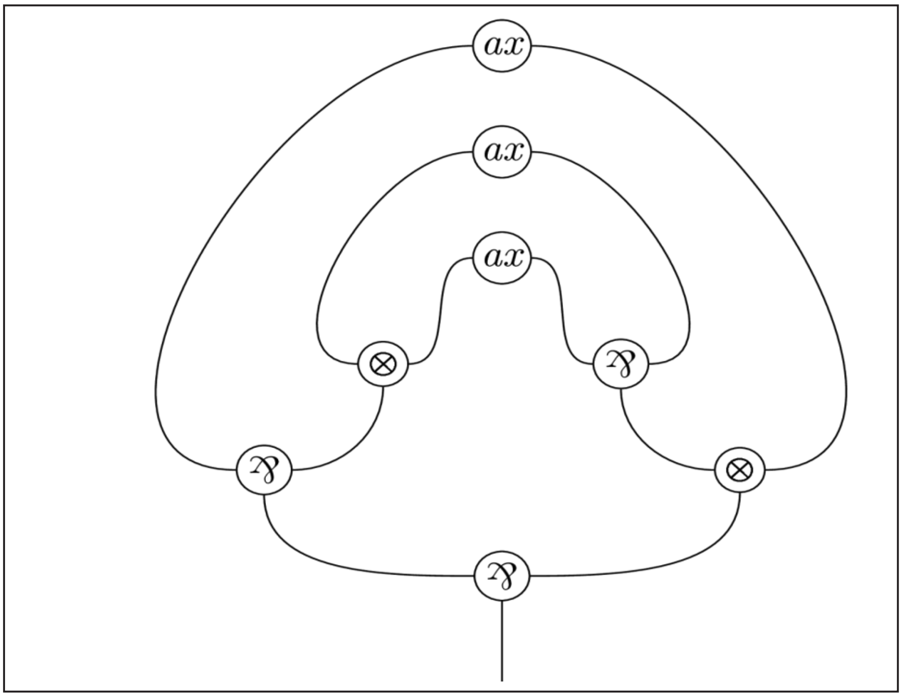


Figure 4 : écriture sous forme de réseau de preuves (style « de graphe », sans formules)

La constante de ce type d'écriture et de graphisme, et qui permet au linguiste de pouvoir décider s'il est face à une formalisation, paraît être l'impossibilité d'une lecture « naturelle » et l'obligation de n'user que d'une lecture « artificielle » qui n'aurait pas vocation à être oralisée. En ne se situant pas du côté du dire, la formalisation semble relever seulement de la lecture silencieuse ; lui conférant le statut d'une langue artificielle, qui née contrairement aux langues naturelles d'une pratique de l'écrit, montrerait sans pouvoir accéder au niveau de l'énonciation. Et c'est d'ailleurs cette monstration, censée expliciter toutes les étapes qui structurent les faits linguistiques ou le résultat obtenu, qui paraît justifier de droit l'usage de ces écritures pour modéliser ou traduire en toute généralité les phénomènes langagiers.

Or, le problème est que ce qui est montré est tout à fait opaque pour le linguiste, alors que les formalisations proposées modélisent son objet d'étude. Commencer à fissurer cette opacité nécessite de revenir sur la genèse de ces écritures formelles qui émanèrent de la réflexion que les mathématiciens eurent de leur propre pratique et de ses aspects langagiers, lorsque la logique devint entre la fin du XIX^{e} et le début du XX^{e} siècle une nouvelle branche des mathématiques. C'est en effet à cette période-là que les mathématiciens prennent en considération d'une façon critique l'usage qu'ils font depuis Euclide de leur propre langage, et ce qui est important pour notre propos est que leur réflexion place au centre de l'attention l'écriture formelle qu'ils utilisent. Ainsi ils se rendent compte – grâce aux géométries non euclidiennes, au paradoxe de Russell et à la querelle opposant le père de la logique formelle David Hilbert au fondateur de l'intuitionnisme Luitzen Brouwer – de la complexité linguistique du langage mathématique et leurs travaux les conduisent à montrer que le mathématicien fait trois choses bien différentes quand il raisonne sur les propriétés générales des objets mathématiques ou lorsqu'il construit et/ou manipule des objets mathématiques particuliers.

II. L'ANCRAGE DANS LE DIRE ET LE FAIRE

Tout texte mathématique se présente comme un objet linguistiquement complexe qui peut mettre en jeu, de façon souvent entremêlée, au moins les trois types d'acte illocutoire : raisonner, construire et calculer. C'est l'observation du type d'écriture utilisée qui permet souvent – et ceci est digne d'être remarqué – de démêler ce qui revient à chaque type d'acte.
Ainsi, le raisonnement s'établit en langue naturelle et le texte qui en résulte – que ce soit les énoncés des théorèmes mais aussi les démonstrations – n'en est pas moins rigoureux. En témoignent les exemples suivants :

> Proposition. Tout revêtement simplement connexe est universel.
> Démonstration. Soit E un revêtement simplement connexe de B. Alors E est connexe et tout revêtement de E est trivial, donc E trivialise tout revêtement de B, et E est universel d'après 4.4.2.
> Exemple extrait de Douady (2005, p. 223)
>
> Corollaire. Presque tous les idéaux premiers de B (ou de A) sont non ramifiés dans l'extension L/K.
> Démonstration. C'est évident.
> Exemple emprunté à Serre (1968, p. 63)

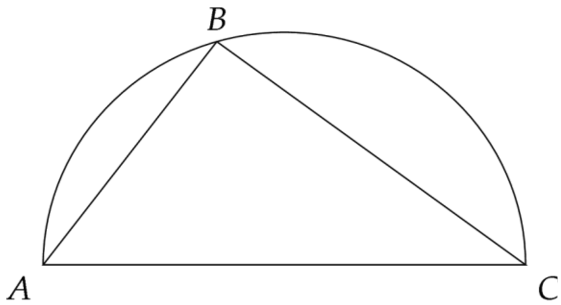
La proposition de Douady, avec son énoncé universel et sa démonstration logiquement très structurée, apparaît comme un exemple typique de « langage mathématique », bien que l'énoncé et la démonstration relèvent, sans conteste, de la langue « naturelle ». Considérées du point de vue illocutoire, il s'agit de phrases génériques de type déclaratif, qui peuvent par conséquent être oralisées et dont le contenu propositionnel spécifiant les propriétés des objets mathématiques est articulé grâce aux connecteurs argumentatifs et logiques mis à disposition par la langue (donc, alors...). Il s'ensuit que les propositions et les raisonnements du mathématicien ne sont pas distinguables linguistiquement des énoncés et des enchaînements que tout locuteur non féru de mathématiques pourrait utiliser pour établir des vérités générales et articuler des raisonnements. Certaines démonstrations considérées d'ailleurs comme les plus belles sont ainsi entièrement exposées sans faire appel à un quelconque formalisme. Cependant, cet usage de la part des mathématiciens du langage « naturel » pour raisonner ne peut pas être considéré comme un raccourci commode pour mathématiciens « artistes », ni comme le résidu d'une époque pré-formelle ou pré-logique, car aucun manuel de mathématique ne présente des énoncés et des démonstrations complètement traduits dans un formalisme logique. De plus, il ne faudrait pas penser que le métier des logiciens consiste à traduire « en logique » les résultats obtenus par les mathématiciens non logiciens, car tout mathématicien serait capable, s'il le désirait, de traduire des énoncés et des raisonnements dans un langage formel. Et il faut également être attentif au fait que si les logiciens écrivent des manuels de logique et démontrent des théorèmes de logique, ils présentent néanmoins – comme tous les autres mathématiciens – leurs raisonnements et leurs démonstrations en langue naturelle – et ce, même si les objets mathématiques relevant de leur compétence, sur lesquels ils raisonnent et démontrent en toute généralité, sont, justement, les démonstrations.
Le deuxième exemple illustre, quant à lui, que le mathématicien n'est pas tenu dans son discours de ne présenter que des raisonnements ayant pour but de spécifier progressivement et de façon exhaustive les propriétés de tous les objets mathématiques dont il traite dans ce cas précis. Le résultat, qualifié d'« évident » par Jean-Pierre Serre, ne concerne en effet que presque tous les objets en question, si bien que le néophyte lit ce corollaire et sa « maigre » démonstration en ayant l'impression que le mathématicien y a commis une double infraction, puisqu'il s'est contenté

d'énoncer un résultat évident dépourvu de validité générale. Et pourtant, il s'agit d'une stratégie discursive bien précise, qui n'est en rien abusive, puisqu'elle se présente d'elle-même comme n'étant qu'un corollaire ; nom donné dans la langue pour désigner ce type de détour mathématique apparemment inutile. Tous ces détours – définitions, lemmes, corollaires ou remarques – sont d'ailleurs exprimés dans un présent qui n'a pas pour valeur d'indiquer qu'il s'agit de vérités mathématiques « éternelles », mais d'attester qu'il s'agit de propositions qui participent d'une réflexion qui, le cas échéant, pourrait être lue et écoutée. C'est pourquoi Serre, après avoir énoncé son corollaire, peut alors enchaîner d'une façon quasiment narrative : « On va maintenant examiner d'un peu plus près la structure des extensions non ramifiées... »

Par contre, lorsque le mathématicien construit ou manipule des objets mathématiques particuliers, il recourt alors à des graphismes ainsi qu'à des alphabets et des symboles visiblement fort divers, mais dont le choix est cependant totalement codifié. La construction et le calcul sont donc les deux lieux de la pratique mathématique où entrent en jeu les écritures formelles très différentes que sont respectivement la graphie géométrique et la notation algébrique. Pour mémoire, nous vous proposons deux exemples d'équations, la construction géométrique d'un triangle ainsi qu'une matrice qui cumule écriture algébrique et géométrique :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\int_a^x \int_a^s f(y)\,dy\,ds = \int_a^x f(y)(x-y)\,dy$$



$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ pair} \\ 3n+1, & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$$

Figure 5 : exemples d'écritures algébrique et géométrique

Il en résulte que si le raisonnement se situe du côté du dire, la construction et le calcul constituent, quant à eux, deux facettes du faire. En effet, dans le cas de la construction, le faire consiste à obtenir – à l'aide de certains outils comme la règle et le compas – un objet particulier (par exemple un triangle) afin de le présenter ou d'en dégager les propriétés. En revanche, pour le calcul, le faire réside dans la manipulation, voire la réécriture, des symboles (que sont les chiffres et les variables) dans le but de présenter un certain résultat ou de répondre à une question posée. Mais la distinction construction / calcul ne saurait être résumée à cette simple opposition graphisme / symbole, car l'usage qui en est fait est également pertinent. En effet, lors d'une construction, le mathématicien procède tout d'abord, dans sa phase de recherche, par cumulation en inscrivant progressivement un certain nombre d'éléments graphiques, puis effectue un effacement conceptuel de tous les traits de la figure qui ne sont plus pertinents pour présenter le résultat atteint dans un énoncé final. La démonstration du théorème de Pythagore (qui, pour mémoire s'énonce « La somme des carrés des deux côtés d'un triangle rectangle est égale au carré de l'hypoténuse ») nécessite ainsi de tracer préalablement – comme il est indiqué dans les schémas ci-dessous – une série de figures qui, à chaque étape, s'accompagne d'un raisonnement qui induit, c'est-à-dire autorise, la poursuite de la construction. La composition progressive des carrés attenants à chaque côté du triangle rectangle se trouve ainsi justifiée en langue naturelle par l'énoncé : « l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés » (ce qui, pour un public averti, reviendrait à affirmer $AC^2 = AB^2 + BC^2$) et ce pas accompli offre alors la possibilité d'argumenter que l'on peut dupliquer le triangle ABC pour obtenir des quadrilatères égaux. C'est ainsi que le faire et le dire se conjuguent :

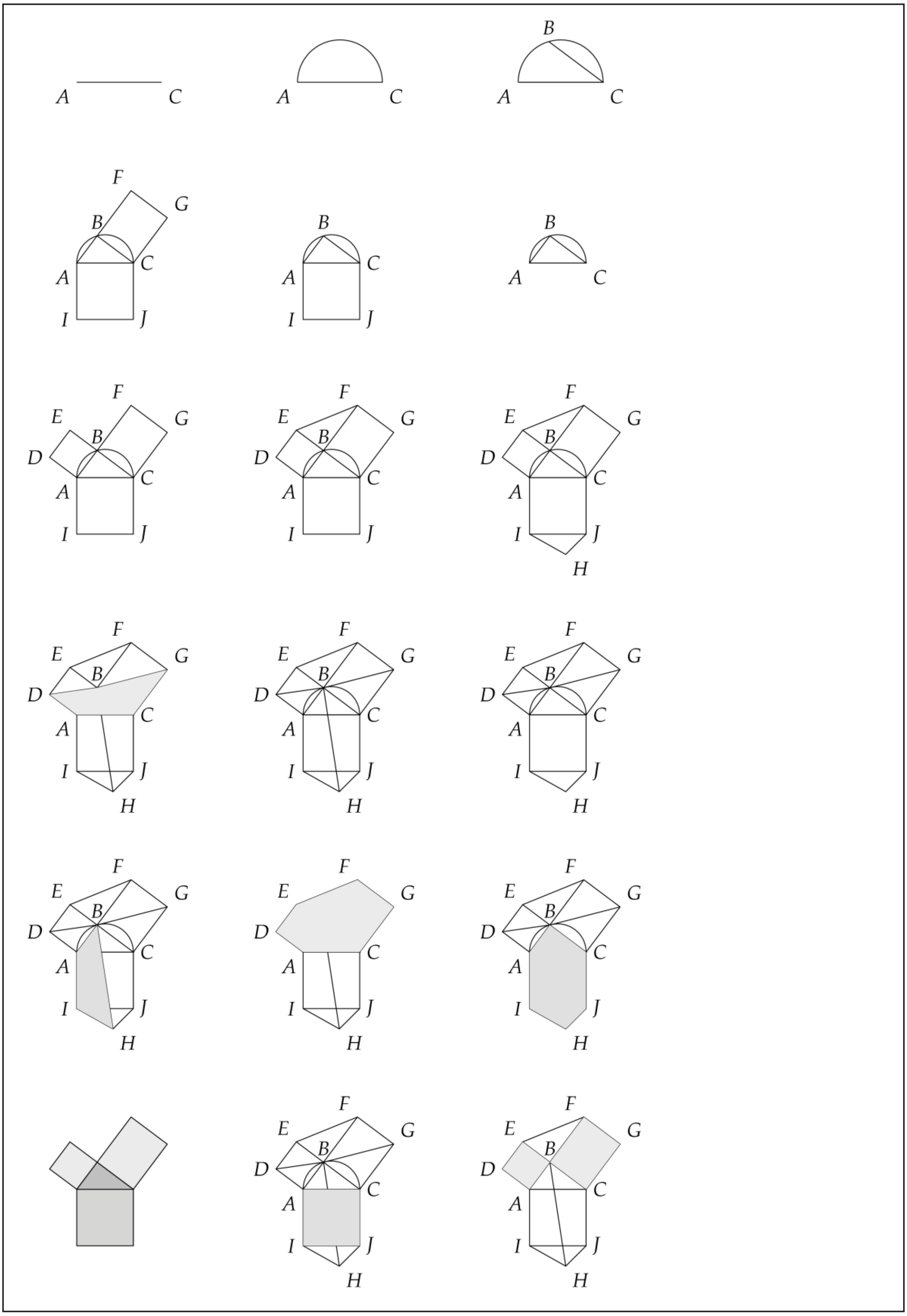


Figure 6 : La démonstration du théorème de Pythagore de Léonard de Vinci

L'usage que le mathématicien fait du calcul consiste, par contre, à prendre en considération un certain objet formel (une équation, par exemple) pour en expliciter le résultat grâce à une suite de réécritures où interviennent de véritables ratures graphiques conduisant ensuite à des effacements. Ainsi, la résolution d'une équation du type 2x + 3 = 7 s'effectue en décomposant 7 grâce à la réécriture « 7 équivaut à 4 + 3 » qui permet de raturer le 3 à droite et à gauche du signe d'égalité pour ensuite l'éliminer définitivement. On obtient alors 2x = 4 qui correspond à la même équation de départ, mais qui présente l'avantage d'être plus lisible, puisqu'elle contient moins d'informations. Puis on décompose 4 sous la forme 2 × 2 et cette réécriture autorise alors à biffer 2 à gauche et à droite de l'égalité, puis à l'effacer pour obtenir x = 2. A ce stade, il n'est plus possible de continuer à décomposer et à biffer, car l'équation apparaît enfin sous sa forme dite normale, c'est-à-dire la plus simple et la plus explicite, puisqu'épurée de toute redondance. Il faut noter – contrairement à ce qui se passe dans la construction géométrique où les traces peuvent toujours être disponibles – que ce processus de normalisation est, d'une part, irréversible, puisque les effacements successifs entraînent la perte des données et qu'il donne lieu, d'autre part, à une procédure mécanique de résolution alors que la preuve de Pythagore, pour ne citer qu'elle, peut être démontrée de trois cent soixante-dix manières différentes !

$$
\begin{array}{ccccc}
2x + 3 & = & & 7 & \\
2x + 3 & = & 3 & + & 4 \\
2x + \cancel{3} & = & \cancel{3} & + & 4 \\
2x + & = & & + & 4 \\
2x & = & & 4 & \\
2 \times x & = & 2 & \times & 2 \\
\cancel{2} \times x & = & 2 & \times & \cancel{2} \\
\times\, x & = & 2 & \times & \\
x & = & & 2 &
\end{array}
$$

Figure 7 : Le processus de normalisation d'une équation

Ainsi, dans le cas d'un calcul ne mettant en œuvre que les opérations bien distinctes que sont la soustraction et la division, le faire ne consiste qu'à réaliser trois sortes d'action (identifier, raturer et effacer) et il se suffit de plus à lui-même, car le dire n'intervient que pour répondre aux questions d'un novice. Cependant, le faire induit par la présence d'une multiplication et celui mis en jeu par une addition se révèlent être d'une toute autre nature et leur différence s'obtient en prenant en compte le type de réécriture qu'elles autorisent.

Plus précisément, tant que la multiplication et l'addition sont considérées séparément, leur comportement s'avère identique, comme en témoigne la possibilité d'élaborer un arbre de résolution qui schématise aussi bien le processus de calcul permettant de traiter l'équation (c × x) + a = a + (b × c) que celui correspondant aux équations (c + x) × a = a × (b + c), (c + x) + a = a + (b + c) ou (c × x) × a = a × (b × c) sans qu'il soit besoin de préciser les symboles + et × :

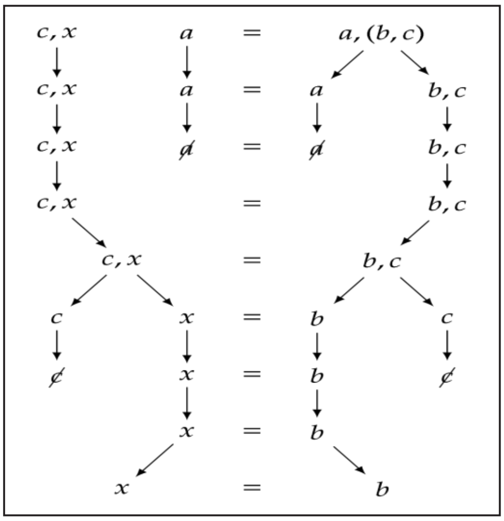


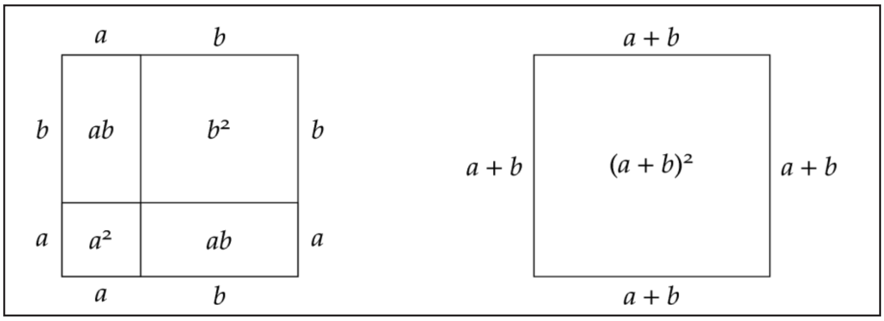
Figure 8 : arbre de résolution des quatre équations

Mais il n’en va plus de même lorsqu’addition et multiplication se combinent et il revient au processus de réécriture de les distinguer. En effet, l’observation du passage d’une écriture multiplicative à une écriture additive (et inversement) conduit à remarquer que si, dans l’expression 2 × (3 + 4), la multiplication « étale » 2 sur la somme de 3 et 4 en donnant lieu à la réécriture (2×3) + (2×4) ; la somme, par contre, n’« étale » pas 2 sur le produit de 3 et 4, puisque 2 + (3 × 4) ne devient pas (2 + 3) × (2 + 4). Cette différence de comportement dans le faire de la multiplication est ce qui correspond à la distributivité et cette propriété, déterminée par les possibilités de réécriture, joue un rôle heuristique très important dans les formalismes contemporains, car elle permet de classer une opération mathématique quelconque comme additive ou multiplicative, et à choisir en conséquence de la représenter grâce à un symbole multiplicatif (par exemple $\otimes$) ou additif ($\oplus$).

L’explicitation de ce clivage entre construction et calcul, c’est-à-dire entre géométrie et algèbre, amènera des mathématiciens tels que Felix Klein et David Hilbert (cf. Hilbert 1893) à y voir non plus deux « mondes » mathématiques différents – le monde des objets algébriques et le monde des objets géométriques – mais deux points de vue différents, complémentaires et duaux, que le mathématicien est libre ou obligé d’adopter lorsqu’il parle d’une « même chose » : rien n’empêchera par exemple de transformer d’une façon calculatoire des objets géométriques, ni de construire à partir d’objets algébriques. "Pour illustrer cette dualité un exemple très simple suffit, celui de l’identité remarquable, bien connue : (a + b)2 = a2 + 2ab + b2. Le membre de gauche se réduit aveuglement à celui de droite, par simple normalisation calculatoire. La seule difficulté de cette réécriture est son côté fastidieux :

$$(a+b)^2 \rightsquigarrow (a+b)\times(a+b) \rightsquigarrow a\times(a+b)+b\times(a+b) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow a^2+ab+ba+b^2 \rightsquigarrow a^2+2ab+b^2$$

Par contre, on ne pourra pas obtenir « aveuglement » le membre de gauche à partir de celui de droite : pour « remonter le fleuve » il faudra remarquer que la somme en question a une certaine forme, et savoir que cette forme particulière peut toujours se reconduire à une forme multiplicative – il faudra, en somme, faire appel à un théorème, qui aura été démontré. Mais avoir démontré le théorème en question veut dire avoir vu que, étant donnés un a et un b quelconques, *génériques*, on a toujours une manière de combiner le carré de a, le carré de b et le produit ab pris deux fois, permettant d’obtenir – de construire – le carré de $a + b$:



Ainsi, malgré le signe d'égalité, les deux sens de lecture de cette identité remarquable se révèlent intrinsèquement différents : on *vérifie*, d'une façon calculatoire, que $(a + b)^2$ est égal à $a^2 + 2ab + b^2$, mais pour qu'on puisse vérifier, en retour, une certaine formule, il faut d'abord l'avoir trouvée, et cela grâce à la construction d'un objet générique. Produire cette construction, ce n'est donc pas vérifier : c'est prouver. Ainsi le va-et-vient entre algèbre et géométrie assume enfin un sens véritablement logique.

III. Le changement de perspective opéré par la logique

L'apport de la logique, de Gottlob Frege (1879) jusqu'aux résultats de complétude et d'incomplétude de Kurt Gödel (1930-31), sera de traiter les raisonnements qui disent les propriétés mathématiques des objets comme étant à leur tour des objets formels que l'on peut construire et manipuler.

Pour comprendre cette idée, et en quel sens elle ne se réduit qu'à une simple opération de « traduction », considérons le calcul des prédicats, bien connu des linguistes, dont l'écriture formelle s'élabore en fonction d'un alphabet mettant en jeu trois sortes de symboles : – des lettres latines minuscules qui, mises pour les termes, font référence à des objets *génériques* (*x, y, w* ...) ou *spécifiques* (*a, b, c, …*) – des lettres latines majuscules qui symbolisent des prédicats et dénotent les propriétés des objets ou les relations qu'ils entretiennent entre eux (par exemple, *A(x)* signifiera *le renard est rusé* ; *R(c, d)* exprimera *Charles rencontre Alice*, etc.), ainsi que des symboles permettant d'indiquer les différentes opérations à l'œuvre dans un raisonnement (la conjonction, $\wedge$, disjonction, $\vee$, négation, $\neg$, etc…).

À partir de ce type de formalisme qui contient et des termes et des prédicats, on peut soit se focaliser sur les premiers, soit décider d'exploiter ce qui ressort à la notion de propriété dénotée par les prédicats. On introduit alors des quantificateurs (universel $\forall$ et existentiel $\exists$), aptes à opérer, d'une part, une sélection sur les termes (*il existe des renards rusés* $\exists x\, A(x)$, *tous les renards sont rusés,* $\forall x\, A(x)$), et d'autre part, sur les prédicats (*pour toute propriété A il n'est pas possible qu'elle s'applique et ne s'applique pas en même temps,* $\forall A\, (\neg\, (A \wedge \neg A))$).

L'interprétation la plus naturelle de ces deux types d'opération est de considérer qu'elles réalisent respectivement une sélection, que l'on qualifie du « premier ordre », sur les objets se trouvant dans le « monde », et une sélection du « second ordre » sur les propriétés de ces objets, c'est-à-dire des « ensembles » d'objets. Toutefois, d'un point de vue purement graphique, les termes et les prédicats peuvent également être traités comme des « objets » vivant dans ce monde très spécial qu'est le monde « syntaxique », si bien que l'on pourra choisir de se situer *au premier ordre*, pour les manipuler en les réécrivant, ou de les appréhender – en se plaçant *au second ordre* – comme des éléments permettant de construire des objets plus complexes et de nature géométrique. De la double opération de sélection réalisée par la quantification de façon « interne » au calcul des prédicats naît ainsi la possibilité de tracer une ligne de départage entre, d'une part, les écritures des « termes » exsangues de formules, utilisées d'une façon privilégiée pour rendre compte des *calculs*, et, d'autre part, les écritures de « formules », où ce sont les termes qui disparaissent et dont on usera tout naturellement pour construire des *preuves*.

Schématiquement les écritures de termes peuvent se présenter sous deux « styles calculatoires » différents : le premier, issus des travaux de Haskell Curry en logique combinatoire, met l'accent sur l'opération de réécriture des termes, réécriture imposée par des symboles spéciaux appelés *combinateurs* (typiquement *I, K, S*) ; chacun de ces combinateurs, véritables déictiques, dicte au terme auquel on l'applique une certaine réécriture – « sa » réécriture –, ce qui *produit* des permutations, des effacements ou des duplications de symboles. Le second style calculatoire repose sur une seule opération, celle de *substitution*, qui consiste à remplacer une ou plusieurs occurrences d'un terme par un autre. Dans ce dernier cas, les termes en attente d'être commutés sont dénommés variables « liées » (par opposition aux autres variables, qui restent « constantes », et sont dites donc « libres »), et il ne reste plus qu'un seul symbole déictique, le symbole fonctionnel d'*abstraction* λ ayant comme fonction de « lier » les variables ; ce dernier symbole est introduit par Alonzo Church dans les années trente et donnera son nom à cette écriture de termes très particulière et fondamentale qu'est le *lambda-calcul*.

Le choix entre ces deux styles de termes, parfaitement interchangeables d'un point de vue mathématique, s'effectue selon ce qu'on veut mettre en avant dans la réécriture que l'on veut effectuer ; la différence essentielle réside dans le statut de la règle de substitution, qui dans la logique combinatoire demeure implicite et « non dite » (ce que les logiciens résument en disant que c'est dans ce cas une « métarègle »), alors que dans le lambda-calcul elle est explicitement donnée comme seule règle manipulatoire. D'autres opérations restent cependant implicites dans le lambda-calcul : on *présuppose* que les variables liées sont renommées si besoin est pour éviter de les confondre, et l'on obtient des effacements ou des réécritures comme de pures *effets* des opérations de substitutions. C'est Alan Turing qui donnera explicitement un droit de cité aux simples opérations d'effacement et d'écriture, en imaginant pour sa *machine* un ruban sur lequel on ne ferait qu'écrire ou effacer des bâtonnets dans des lieux vides, des cases, en se déplaçant vers la droite ou vers la gauche.

Les écritures de formules peuvent également se présenter sous des « styles démonstratifs » différents ; d'abord le style classique, consistant à écrire une démonstration comme une simple succession de passages logiques, chaque ligne correspondant à l'application en guise de lemme d'un résultat déjà établi (axiome, théorème, etc.), jusqu'à obtenir, tout en bas de la colonne de formules, ce qu'il fallait démontrer. On peut toutefois « géométriser » les écritures de formules, et choisir par exemple l'optique offerte par la déduction naturelle qui permet d'avoir « sous les yeux », à chaque fois qu'on introduit une règle logique, le branchement des prémisses directes sur lesquelles la règle a été appliquée. Mais on peut également désirer accompagner une formule de tout son « patrimoine génétique » – que l'on appellera son contexte – afin d'éviter d'avoir à « remonter » à chaque fois dans l'arbre de la démonstration. En ce cas, l'indication des contextes s'effectue grâce à l'emploi de lettres grecques majuscules (Γ, Δ ...) et l'écriture prend la forme du calcul des séquents qui, comme son nom l'indique, transcrit sous forme de séquents des séquences du type $\Gamma, A \vdash B$ qui se lisent : à partir de A et du contexte Γ, nous pouvons démontrer B. Comme pour les écritures des termes, ces deux styles d'écritures de formules sont équivalents et le choix de présenter une preuve en déduction naturelle ou en calcul des séquents dépend de ce qui est pertinent dans le processus d'écriture ou de lecture. La différence la plus remarquable entre ces deux écritures de formules réside dans la manière de manipuler les connecteurs logiques : dans le style naturel on a des règles d'« introduction », qui écrivent les connecteurs, et des règles d'« élimination », qui les effacent. Avec les séquents on n'a plus que des règles « à droite » et « à gauche » du symbole $\vdash$, et ce ne sont pas les connecteurs qu'on efface, mais les formules, lorsqu'elles occurrent à droite et à gauche : c'est la règle de la coupure (cf. infra). On doit d'ailleurs ces deux écritures au même logicien : Gerhard Gentzen.

Jusqu'aux années soixante-dix, cette séparation entre écritures des « termes » et écritures de « formules » caractérisera deux pratiques différentes, car le lambda-calcul deviendra un des outils privilégiés des informaticiens, alors que la construction de preuves ressortira aux logiciens. C'est en cherchant des critères de correction – respectivement, pour obtenir de « bons » calculs (c'est-à-dire des calculs qui terminent et convergent) et des « bons » systèmes de déduction (i.e. des systèmes cohérents et complets) – que les logiciens vont être amenés à traiter les preuves comme des termes, susceptibles d'être réécrits, et que les informaticiens vont, de leur côté, être conduits à appréhender les termes comme des objets dont il faut « spécifier » l'aspect géométrique.

Plus précisément, les informaticiens mettent en évidence grâce aux écritures de termes que les différentes manières de calculer un même résultat ne peuvent pas être considérées comme des variations, négligeables ou équivalentes, d'un même faire (par exemple « effectuer une multiplication »), car elles conduisent à réaliser des actions bien différentes, dont il faut spécifier linguistiquement la nature. Ainsi, pour étrange que cela puisse paraître, on ne pourra obtenir que son interlocuteur « fasse la même chose » en lui demandant d'effectuer une multiplication du type $a \times b$ en suivant le recette « prends d'abord le nombre a puis multiplie-le par ce qui se trouve à sa droite », ou en suivant l'ordre inverse « prends d'abord le nombre b et multiplie-le par ce qui se trouve à gauche », car un interlocuteur trop obéissant, qui ferait tout ce qu'on lui dit et rien de plus, pourrait rencontrer des difficultés même pour effectuer un calcul aussi simple que $0 \times \sqrt{2}$. En effet en suivant la première prescription, tout se passera comme prévu, puisqu'il prendra d'abord 0 et, en le multipliant par « ce qu'on a à droite », quoiqu'il y ait à droite, il obtiendra 0, alors qu'en suivant l'ordre inverse notre interlocuteur trop pointilleux essaiera d'abord d'obtenir le nombre qui, élevé au carré, donne comme résultat 2, avant de le multiplier par « ce qu'on à gauche ». Autrement dit, il tentera d'abord de calculer « complètement », c'est-à-dire jusqu'à la forme normale, la racine carrée de 2, et ce processus sans fin entravera la mise en application de la multiplication par 0. Bien évidemment, il est possible de spécifier à notre interlocuteur qu'il doit s'arrêter à un certain point de son calcul de la racine carrée (après le troisième nombre suivant la virgule, par exemple); mais cette précision ne conduira alors qu'à occasionner un nouveau problème, puisque, face à la multiplication $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$, notre interlocuteur calculera alors, à droite puis à gauche, que $\sqrt{2} = 1{,}414$, et obtiendra pour la multiplication le résultat erroné : 1,999.

Cette erreur, transposée sur un calcul mettant en jeu des millions d'euros ou le lancement d'une fusée, peut alors se révéler désastreuse. On pourrait retenir que notre interlocuteur a été « trop pointilleux » en voulant être trop explicite et qu'il n'aurait pas dû entreprendre le calcul des racines carrées, puisqu'il eût suffit de remarquer qu'élever au carré la racine carrée d'un nombre revient à obtenir le nombre en question. Autrement dit, « élever au carré » revient à « annuler » l'opération « racine carrée » et à la traiter comme un détour inutile. Fort de cette erreur, on explicitera alors à l'interlocuteur qu'il faut « garder » les racines carrées et ne pas les expliciter, car il faut avant toute chose simplifier et éliminer les « détours inutiles ». Mais la conséquence en sera alors que, placé face à la multiplication $0 \times \sqrt{2}/0$ notre interlocuteur, toujours trop obéissant, et maintenant devenu « trop rapide », obtiendra – après avoir « simplifié » les deux zéros – le résultat absurde $\sqrt{2}$

De cet exemple filé, il ressort que toutes les « recettes » ne font pas la même chose : – certaines poussent parfois à s'égarer dans des chemins infinis qui ne terminent pas et ne mènent par conséquent à aucun résultat ; – d'autres conduisent à obtenir des résultats, mais divergents. Ainsi, la caractérisation linguistique de ce que l'on fait quand on calcule devint une donnée essentielle qui conduira les mathématiciens et les informaticiens à donner un véritable statut théorique, d'une part, aux « recettes » de calcul – que sont les algorithmes et programmes, et d'autre part, à leur interlocuteur privilégié – l'ordinateur – qui effectue les calculs en étant « idéalement obéissant ».
Pour être sûr du bon comportement d'un terme « muet » tel que $\lambda x.x$, qui silencieusement, un peu comme un fax, prend n'importe quel objet pour le placer à la place de la variable liée x, on explicitera à quel type d'objets on peut l'appliquer, par exemple le type N des nombres naturels, et on traduira également son comportement : rendre, pour tout objet de type N, un objet du même type, de la manière suivante : $N\rightarrow N$, qui sera donc le « type » de $\lambda x.x$. « Le terme $\lambda x.x$ est de type $N\rightarrow N$ » s'écrira de la manière suivante : $\lambda x.x : N\rightarrow N$. Si on donne maintenant à cette espèce de fax un terme t, de type N, à copier – dit autrement, si on applique cette fonction, qu'on appelle identité, à l'argument t –, on obtient le terme $(\lambda x.x)t$ de type N, qui « dit » que le résultat de l'opération doit être quelque chose du type N, et ceci s'écrit $(\lambda x.x)t : N$. Pour vérifier qu'il en est bien ainsi, on effectue le calcul, qui donne en effet comme résultat $t : N$. Mais cette vérification ponctuelle ne nous assure pas que le terme $(\lambda x.x)$ se comportera toujours comme il faut, sans divergences ni calculs infinis : il faut en être sûr, et pour en être sûr il faut le prouver. Ainsi faut-il prouver, plus généralement, qu'à chaque fois qu'on applique un terme de type $A\rightarrow B$ à un terme de type A on obtient, à la fin du calcul fini, ce qui est attendu, c'est-à-dire un résultat de type B. Tout ce qui vient d'être exposé sur les termes se généralise aux programmes, car on peut voir tout terme du lambda-calcul comme un programme : dans ce cas le typage du terme dira ce que le programme est censée faire - sa spécification.
Or, si on remarque que ces « types », ces spécifications, ne sont rien d'autre que des formules logiques, on arrive à établir un pont tout à fait inattendu entre preuves et calculs, et plus généralement entre raisonnements et constructions, car disposer de la preuve de la formule logique décrivant le comportement d'un terme équivaut à avoir une preuve qu'il s'agit d'un « bon terme », d'un « bon programme ». Mais on obtient même plus, puisque la preuve de la formule en question, lue autrement, est le programme.
Cette reconnaissance mutuelle et tardive (cf. Curien, 2011 et Berry, 2009) entre logiciens et informaticiens conduira alors à prendre conscience que ce changement de perspective ne fait que mettre en œuvre ce que Haskell Curry et William Howard avaient déjà découvert, lorsqu'ils avaient, d'une part, mis en évidence l'analogie formelle pouvant être établie entre les démonstrations des systèmes à la Hilbert et la logique combinatoire (Curry, 1958) et établi, d'autre part, la transposition pouvant être effectuée entre les démonstrations en déduction naturelle intuitionniste et les termes du lambda-calcul typé (Howard, 1969). Dans ce cadre, on comprend que ces résultats, démontrant la possibilité d'ériger une correspondance entre les preuves et les programmes, ainsi qu'entre les formules et les types, soient connus sous le nom d'« isomorphisme Curry-Howard ».
Si nous avons vu que la correspondance « preuves – programmes » permet de caractériser logiquement la notion de « bon calcul » en permettant de voir le dire comme une explicitation normative de la bonne manière de faire une réécriture, cette même correspondance permet de façon tout à fait symétrique – si l'on se place maintenant du côté du logicien – de caractériser les bons systèmes formels, c'est-à-dire les systèmes logiques non contradictoires et complets, sur la base de la notion calculatoire de normalisation. Autrement dit, la correspondance preuves – programmes

montre que pour caractériser les bons raisonnements, il faut mettre en avant ce que l'on fait avec les raisonnements et ceci revient à dire, dans notre cas, que l'on doit mettre en avant ce que l'on fait lorsqu'on manipule et qu'on réécrit les preuves, ces objets graphiques et géométriques qui rendent compte des raisonnements.

Mais comment peut-on écrire un mauvais raisonnement, une mauvaise preuve ? Une preuve apparaît comme un arbre, qui s'écrit progressivement de haut en bas ; tout en haut, à la place des feuilles, des axiomes logiques et évidents, voire un seul type d'axiome : $A \vdash A$, correspondant – nous l'avons vu – à l'identité. Mais donner l'identité comme axiome ne signifie pas qu'on exige qu'on dise des tautologies aussi absurdes que « si je mange alors je mange » ou « Paul est Paul » : l'axiome logique est là, on vient de le voir, pour dire ce qu'il faut faire – et l'axiome de l'identité, notamment, est là, tout en haut, pour nous parler avec la voix du bon sens et nous rappeler que, lorsqu'on raisonne, il faut identifier les choses dont on parle, et toujours les appeler « par leur nom » : car il faut exploiter ce que l'on sait, et ne pas prétendre à ce qu'on ne sait pas.

Tant qu'on construit un raisonnement de haut en bas et en ne mettant ensemble que des connaissances qu'on a préalablement « identifiées », on sera donc assuré que la formule obtenue à la racine de l'arbre est « vraie ». Il peut arriver pourtant que l'on se trompe, et que l'on croie avoir effectué une démonstration pour ensuite se heurter à l'évidence d'un contre-exemple. Pour trouver l'erreur il faut vérifier ce que l'on a fait lors de la construction du raisonnement, et contrôler notamment si l'on n'a pas été trop « cavalier » ; c'est-à-dire si, fort de ce qu'on sait déjà, on n'a pas été « trop rapide », car « trop implicite ». Dans les discours en langue naturelle, être toujours et complètement explicite relève non seulement d'une gageure fastidieuse et impossible à réaliser, mais risque également – comme la célèbre maxime de pertinence de Paul Grice le rappelle – d'être sanctionné. Aussi, si l'on souhaite trouver un argument pour convaincre un interlocuteur que les hommes sont mortels et que l'on sait déjà, d'une part, que les animaux sont mortels et que, d'autre part, les hommes sont des animaux, il suffira de mettre ensemble – de « brancher » – ces deux informations préalables pour obtenir l'argument recherché et le besoin d'étudier la physiologie humaine (pour détailler, par exemple, les causes spécifiques de la mortalité des hommes) ne se fera pas ressentir. De fait, le sens intuitif de l'application de la règle du modus ponens réside dans ce « branchement » ou cette « greffe » des connaissances. En témoigne le syllogisme en Barbara où au lieu de démontrer explicitement que A implique C ($A \rightarrow C$) en construisant un arbre de preuve $\prod$ ne contenant que des A et des C, on procède en « recyclant », c'est-à-dire en composant une preuve $\prod_1$ de $A \rightarrow B$ et une preuve $\prod_2$ de $B \rightarrow C$. Ainsi, si l'on fait un raccourci sans trop d'efforts en utilisant des connaissances que l'on possède déjà, le prix à payer est l'obtention d'une preuve beaucoup plus redondante et moins lisible, puisque faisant appel à un *moyen terme*, B, qui en soi est « inutile », comme en témoignent les faits qu'il n'occurre pas dans la formule à démontrer, et qu'il se retrouve « coupé » suite à l'application du *modus ponens*. Dans cette perspective, on comprend pourquoi le *modus ponens* est, depuis Gentzen, appelé coupure (ou *cut* en anglais ; cf. la coupure intervenant dans la figure 1).

C'est afin de rendre compte de ces « branchements » et de la transmission d'informations qui les parcourent que Jean-Yves Girard (1987) représente les preuves sous la forme de véritables circuits : nous ne sommes plus en présence d'arbres de preuves, mais de réseaux de preuves. L'aspect circulaire de ces constructions rend compte en outre des différentes manières que l'on peut avoir d'écrire et de lire la même construction démonstrative. En effet, on peut soit écrire une preuve « de haut en bas » en la construisant à partir des axiomes et en descendant pas à pas au fur et à mesure que l'on trouve des conclusions ; mais on peut aussi choisir d'écrire « tout en bas » ce que l'on souhaite démontrer et en chercher la preuve « en remontant » jusqu'à avoir atteint « tout en haut »

des axiomes. Ainsi on peut lire la même construction dans le sens « *top-down* » – et y voir une preuve de $A \rightarrow B$ – ou procéder selon le sens « *bottom-up* » – et y lire la preuve « inverse » de $\neg B \rightarrow \neg A$.
De plus, les réseaux de preuves font également abstraction des « noms » des formules et appréhendent l'objet « preuve » comme un objet géométrique pur et simple. De même que pour les démonstrations géométriques où l'on construit en raisonnant tout d'abord sur un triangle rectangle particulier pour ensuite remarquer que la même construction pourrait s'appliquer à tout triangle rectangle, une preuve particulière – pensée à propos de deux formules A et B – peut être vue comme un dessin utilisable pour tout autre couple de formules susceptibles d'être insérées à la place de A et de B. Une telle preuve – que nous avons présentée dans la figure 4 – avec une quantification du second ordre, puisqu'elle porte sur les formules, est de fait une preuve « muette », un objet silencieux comme un terme du lambda-calcul, où seuls les lieux et la forme géométrique entrent en ligne de compte (cf. Girard 2006 et 2007).
L'analogie avec les termes du lambda-calcul n'est pas, comme nous l'avons souligné, qu'une simple analogie, puisque les preuves peuvent être normalisées et devenir l'objet d'un véritable calcul. Mais nous avons aussi insisté sur le fait qu'il est tout à fait possible, lorsque l'on raisonne, de se tromper, car notre réflexion n'est pas toujours explicite, et on ne vérifie pas, de plus, toujours ce que l'on avance ; cela est d'autant plus vrai que le raccourci-détour logique le plus exemplaire, le *modus ponens*, est même considéré comme la règle « logique » par excellence. Faute de pouvoir exiger l'impossible, c'est-à-dire de toujours « raisonner » explicitement, on exigera plutôt d'un « bon » système logique qu'il donne toujours la possibilité, si besoin est, de vérifier ce qu'on avance. On peut avoir argumenté pour $A \rightarrow B$ en passant par une infinité potentielle de « moyens termes » et en faisant les détours les plus hardis et les plus farfelus, mais pour être sûr de ne pas tomber sur un contre-exemple il faudra qu'on puisse présenter, si besoin est, une preuve explicite et « concrète », en forme normale, ne présentant que ce qui se trouve dans $A \rightarrow B$. En somme, il faut qu'on puisse réduire toute preuve avec une coupure à une preuve sans cette coupure, et ce processus de réécriture doit se terminer et converger dans une preuve explicite. Le critère de correction des raisonnements rejoint enfin le critère de correction des calculs.

Cette correspondance constitue un véritable « coup de théâtre » épistémologique : le critère de l'élimination des coupures garantit que le discours – logiquement parlant, la syntaxe – rende compte de ce qu'il dit d'une façon correcte et complète sans faire référence à un « monde externe » d'objets – logiquement parlant, à une sémantique. Ce sont les objets formels eux-mêmes, de par les métamorphoses de leurs écritures et de leurs réécritures, qui « internalisent » et mettent en scène les objets du monde. On pourra finalement considérer une preuve comme « étant faite » de formules, les formules dont elle se compose, ou bien considérer une formule comme « étant faite » de preuves, les preuves qui l'illustrent : ainsi la logique contemporaine retrouve-t-elle la dualité benvenistienne entre un point de vue « sémiotique », où les énoncés sont faits de signes, et un point de vue « sémantique », où les signes sont faits « de discours », de ces discours qui leur donnent sens.

Bibliographie

BERRY, Gérard (2009) *Penser, modéliser et maîtriser le calcul informatique,* Paris, Fayard.

CURIEN, Pierre-Louis (2011) « Preface to Girard's Festschrift », *Theoretical Computer Science,* Elsevier, 412/20, 1853-1859.

CURRY, Haskell, FEYS, Robert (1958) *Combinatory Logic I.* North Holland.

DOUADY, Adrien, DOUADY, Régine (2005) *Algèbre et théories galoisiennes,* Paris, Cassini.

FREGE, Gottlob. 1879. *Begriffsschrift, eine des arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle, Nébert. (Traduction française par Corinne BESSON, *Idéographie*, 1999, Paris, Vrin).

GENTZEN, Gerhard (1934) « Untersuchungen über das logische Schliessen », *Mathematische Zeitschrift,* 39, 176–210. (Traduction française par R. FEYS, J. LADRIERE, *Recherches sur la déduction logique*, 1955, Paris, P.U.F).

GÖDEL, Kurt (1930-31) *Collected Works*. vol. I : *Publications* 1929-1936 S. FEFERMAN, J. W. DAWSON, S. C. KLEENE, G. H. MOORE, R. M. SOLOVAY et J. van HEIJENOORT (sld.), Oxford, University Press.

HILBERT, David (1893) « Über die vollen Invariantensysteme », *Mathematische Annalen,* 42, 313-373.

HOWARD, William A. (1980) « The Formulae-as-Types Notion of Construction », Jonathan P. SELDIN, J. Roger HINDLEY, (éd.), *To H. B. Curry: Essays in Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, Boston, Academic Press., 479-490.

GIRARD, Jean-Yves (1987) « Linear Logic », *Theoretical Computer Science*, London Mathematical, 50/1, 1-102.

GIRARD, Jean-Yves (2006) *Le point aveugle*, tome I, Paris : Hermann.

GIRARD, Jean-Yves (2007) *Le point aveugle*, tome II, Paris : Hermann.

MOSCA, Antonio (2011) « Le problème de l'identité entre logique et langue », *Logique et interaction, vers une géométrie de la cognition, Influxus,* 0, http://www.influxus.eu/numeros/logique-et-interaction-vers-une-84/.

SERRE, Jean-Pierre (1968) *Corps locaux,* Paris : Hermann.

TURING, Alan M. (1937) « On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem », *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42/2, 230–265.