



Primes in $[kn, (k + 1)n]$, for $1 \leq k \leq 10$

Tarek Zougari

► To cite this version:

| Tarek Zougari. Primes in $[kn, (k + 1)n]$, for $1 \leq k \leq 10$. 2016. hal-01303279

HAL Id: hal-01303279

<https://hal.science/hal-01303279>

Preprint submitted on 5 May 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Primes in $[kn, (k+1)n]$, for $1 \leq k \leq 10$

Tarek Zougari

National School of Applied Sciences - Tangier (ENSAT)

Abdelmalek Essaadi University

BP1818 Route Ziaten 90 000, Tangier-Morocco

email : tzougari@uae.ac.ma

Abstract. In 1919 S. Ramanujan proved [Ram] the Bertrand postulate elegantly with approximations based on the Stirling formula. P. Erdős proved also [Erd] the same result in 1931 by a careful study of the binomial coefficient $\binom{2n}{n}$. The Bertrand postulate was first proved by P. Tchebichef in 1850. Without the use of the PNT and returning to the inequalities of Tchebichef, we have a fast proof for existence of primes in the interval $[kn, (k+1)n]$ for $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Using the improvements of J.J. Sylvester (1892) [Syl] the result is given for $1 \leq k \leq 10$.

Soit $\theta(x)$ la somme des logarithmes de tous les nombres premiers ne dépassant pas x et soit

$$\Psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \theta(x^{\frac{1}{3}}) + \dots,$$

On a :

$$\Psi(x) - 2\Psi(\sqrt{x}) \leq \theta(x) \leq \Psi(x)$$

Tchebichef a montré que :

$$Ax - \frac{5}{2} \log x - 1 < \Psi(x) < \frac{6}{5} Ax + \frac{5}{4} \log^2 x + \frac{5}{4} \log x + 1$$

$$\text{où } A = \log \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} \approx 0.9212920221$$

On a donc :

$$Ax - o(x) < \Psi(x) < \frac{6}{5} Ax + o(x)$$

Soit l et k deux entiers naturels tels que $l > k$:

$$\{\pi(lx) - \pi(kx)\} \log(lx) \geq \theta(lx) - \theta(kx) \geq \Psi(lx) - 2\Psi(\sqrt{lx}) - \Psi(kx)$$

donc

$$\begin{aligned} \{\pi(lx) - \pi(kx)\} \log(lx) &\geq Alx - 2\frac{6}{5}A\sqrt{lx} - \frac{6}{5}Akx + o(x) \\ &\geq Ax\left(l - \frac{6}{5}k\right) + o(x) \end{aligned}$$

d'où :

$$\pi(lx) - \pi(kx) \geq \frac{x}{\log(lx)} A \left(\left(l - \frac{6}{5}k\right) + o(1) \right).$$

Dans le cas où $l = k + 1$, la condition $l - \frac{6}{5}k > 0$ est équivalente à $k < 5$.

ce qui prouve que quand $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, l'expression $\pi((k+1)x) - \pi(kx)$ tend vers $+\infty$ quand x devient grand.

Par des techniques proches de celles qu'a utilisé Tchebichef, en 1892 J.J. Sylvester a donné la formule suivante :

$$0,95695.. < \pi(x) \Big/ \frac{x}{\log x} < 1,04423..$$

On a donc

$$a < \pi(x) \Big/ \frac{x}{\log x} < b$$

où $a = 0,95695$ et $b = 1,04424$.

d'où :

$$\pi((k+1)x) - \pi(kx) > a \frac{(k+1)x}{\log((k+1)x)} - b \frac{kx}{\log(kx)}.$$

donc

$$\begin{aligned} \pi((k+1)x) - \pi(kx) &> \frac{x}{\log kx} \left\{ \frac{a(k+1)\log kx - bk\log(k+1)x}{\log(k+1)x} \right\} \\ &> \frac{x}{\log kx} \left\{ \frac{1}{\log(k+1)x} \left(a(k+1) - bk \right) \log kx + o(\log x) \right\} \end{aligned}$$

La condition $a(k+1) - bk > 0$ est équivalente à $k < \frac{a}{b-a} = 10,741...$

Donc si $1 \leq k \leq 10$ la différence $\pi((k+1)x) - \pi(kx)$ devient indéfiniment grande quand x tends vers l'infini.

Bibliographie

[Tch] P. Tchebichef. "Mémoire sur les nombres premiers" Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1852): 366-390.

[Syl] J.J. Sylvester, "On arithmetical series", Messenger of Math. (2) 21 (1892), 1-19 and 87-120.

[Erd] P. Erdős, "Beweis eines Satzes von Tschebyshef", Acta Sci. Math (Szeged) 5 (1930-1932), 194-198 (in German)

[Ram] S. Ramanujan "A proof of Bertrand's postulate" - Journal of the Indian Mathematical Society, XI, 1919, 181 - 182

[A-Z] M. Aigner, G. Ziegler, "Proofs from THE BOOK", Springer, 2000, 7-13

[Bach] M. El Bachraoui, "Primes in the interval $[2n, 3n]$ ", Int. J. Contemp. Math. Sciences 1(2006), no. 13, 617-621.

[Loo] A. Loo, "On the primes in the interval $[3n, 4n]$ ", Int. J. Contemp. Math. Sciences 6 (2011), no. 38, 1871-1882.

[Bal] K. Balliet, "On the Prime Numbers in the Interval $[4n, 5n]$ ", arxiv.org/abs/1511.04571