Primes in [kn, (k + 1)n] , for 1 . k . 10

Tarek Zougari

Primes in $[kn, (k+1)n]$, for $1 \leqslant k \leqslant 10$

Tarek Zougari

National School of Applied Sciences - Tangier (ENSAT)
Abdelmalek Essaadi University
BP1818 Route Ziaten 90 000, Tangier-Morocco

email : tzougari@uae.ac.ma

Abstract. In 1919 S. Ramanujan proved [Ram] the Bertrand postulate elegantly with approximations based on the Stirling formula. P. Erdös proved also [Erd] the same result in 1931 by a carefull study of the binomial coeficient $\binom{2n}{n}$. The Bertrand postulate was first proved by P. Tchebichef in 1850. Without the use of the PNT and returning to the inequalities of Tchebichef, we have a fast proof for existence of primes in the interval $[kn, (k+1)n]$ for $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Using the improvements of J.J. Sylvester (1892) [Syl] the result is given for $1 \leqslant k \leqslant 10$.

Soit $\theta(x)$ la somme des logarithmes de tous les nombres premiers ne dépassant pas x et soit

$$\Psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \theta(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots ,$$

On a :

$$\Psi(x) - 2\,\Psi(\sqrt{x}) \leqslant \ \theta(x) \ \leqslant \Psi(x)$$

Tchebichef a montré que :

$$A\,x - \frac{5}{2}\,\log\,x\ - 1 < \ \Psi(x) \ < \frac{6}{5}\,A\,x + \frac{5}{4}\,\log^2\,x \ + \ \frac{5}{4}\,\log\,x\ + 1$$

où $\quad A = \log \dfrac{2^{\frac{1}{2}}\,3^{\frac{1}{3}}\,5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} \approx 0.9212920221$

On a donc :

$$A\,x - o(x) < \ \Psi(x) \ < \frac{6}{5}\,A\,x + o(x)$$

Soit l et k deux entiers naturels tels que $l > k$:

$$\{\pi(l\,x) - \pi(k\,x)\}\ \log(l\,x) \ \geqslant\ \theta(l\,x) - \theta(k\,x) \geqslant \Psi(l\,x) - 2\,\Psi(\sqrt{l\,x}) - \Psi(k\,x)$$

donc

$$\begin{aligned}\{\pi(l\,x) - \pi(k\,x)\}\ \log(l\,x) \quad &\geqslant A\,l\,x - 2\,\frac{6}{5}\,A\,\sqrt{l\,x} - \frac{6}{5}\,A\,k\,x\ + o(x)\\ &\geqslant A\,x\,(l\ -\ \frac{6}{5}\,k)\ +\ o(x)\end{aligned}$$

d'où :

$$\pi(l\,x) - \pi(k\,x)\ \geqslant\ \frac{x}{\log\,(l\,x)}\,A\,\left((l\ -\ \frac{6}{5}\,k)\ +\ o(1)\right).$$

Dans le cas où $l = k+1$, la condition $l\ -\ \dfrac{6}{5}\,k\ >\ 0$ est équivalente à $k\ <\ 5$.

ce qui prouve que quand $k \in \{1,\,2,\,3,\,4\}$, l'expression $\pi((k+1)\,x) - \pi(k\,x)$ tend vers $+\infty$ quand x devient grand.

Par des techniques proches de celles qu'a utlisé Tchebichef, en 1892 J.J. Sylvester a donné la formule suivante :

$$0,95695.. < \pi(x)\Big/\frac{x}{\log\,x} < 1,04423..$$

On a donc

$$a < \pi(x)\Big/\frac{x}{\log\,x} < b$$

où $a = 0,95695$ et $b = 1,04424$.

d'où :

$$\pi((k+1)\,x) - \pi(k\,x)\ >\ a\,\frac{(k+1)\,x}{\log\,((k+1)\,x)} - b\,\frac{k\,x}{\log\,(k\,x)}.$$

donc

$$\begin{aligned}\pi((k+1)\,x) - \pi(k\,x) \quad &>\quad \frac{x}{\log\,kx}\left\{\frac{a(k+1)\log\,kx\ -\ bk\,\log\,(k+1)x}{\log\,(k+1)x}\right\}\\ &>\quad \frac{x}{\log\,kx}\left\{\frac{1}{\log\,(k+1)x}\,\Big(a(k+1) - bk)\ \log\,kx\ +\ o(\log\,x)\Big)\right\}\end{aligned}$$

La condition $a(k+1) - bk > 0$ est équivalente à $k < \dfrac{a}{b-a} = 10,741...$

Donc si $1 \leqslant k \leqslant 10$ la différence $\pi((k+1)\,x) - \pi(k\,x)$ devient indéfiniment grande quand x tends vers l'infini.

Bibliographie

[Tch] P. Tchebichef. "Mémoire sur les nombres premiers" Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1852): 366-390.

[Syl] J.J. Sylvester, "On arithmetical series", Messenger of Math. (2) 21 (1892), 1–19 and 87–120.

[Erd] P. Erdös, "Beweis eines Satzes von Tschebyshef", Acta Sci. Math (Szeged) 5 (1930-1932), 194-198 (in German)

[Ram] S. Ramanujan "A proof of Bertrand's postulate" - Journal of the Indian Mathematical Society, XI, 1919, 181 – 182

[A-Z] M. Aigner, G. Ziegler, "Proofs from THE BOOK", Springer, 2000, 7-13

[Bach] M. El Bachraoui, "Primes in the interval [2n,3n]", Int. J. Contemp. Math. Sciences 1(2006), no. 13, 617–621.

[Loo] A. Loo, "On the primes in the interval [3n,4n]", Int. J. Contemp. Math. Sciences 6 (2011), no. 38, 1871–1882.

[Bal] K. Balliet, "On the Prime Numbers in the Interval [4n,5n]", arxiv.org/abs/1511.04571