LOGIQUE, LANGAGE. ÉNONCÉS ET PREUVES EN MATHÉMATIQUES

Christophe Hache

LOGIQUE, LANGAGE.
ÉNONCÉS ET PREUVES EN MATHÉMATIQUES

Christophe HACHE
LDAR, Université Paris Diderot
IREM de Paris

Cet atelier avait pour but de présenter certains outils d'analyse du langage des mathématiciens utilisant la logique mathématique à partir de l'exposé d'un travail en cours sur certains usages du mot « avec » en lien avec certaines quantifications, et de la présentation de deux travaux de thèse relativement anciens sur l'usage de marqueurs de variance (adjectifs inclus dans des syntagmes nominaux désignant des variables : « arbitraire », « choisi », « donné », « fixe », « fixé », « quelconque », « variable ») et de marqueurs logico – discursifs (« car », « comme », « parce que » et « puisque »).

Les élèves découvrent en même temps les objets mathématiques et la façon d'en parler. Beaucoup de choses restent implicites concernant le langage (l'atelier a mis en évidence des exemples d'implicites problématiques dans le secondaire). Les enseignants eux-mêmes sont peu outillés pour réagir sur ce thème, ou pour approfondir leur réflexion.

Le langage n'est pourtant pas un simple vecteur transparent d'idées et de concepts, et comme le rappelle par exemple Maryse Rebière (Rebière 2013) agir, parler et penser sont trois facettes indissociables de toute activité. Le langage est un outil social et individuel de construction, de négociation et de transformation des significations. Les pratiques langagières des mathématiciens sont d'autant plus complexes qu'elles jouent, de façon dialectique, sur deux registres : celui de la communication des idées, et celui de la justification formelle des faits énoncés (voir aussi Hache 2013).

La logique me sert d'outil d'analyse des pratiques langagières des mathématiciens. L'atelier avait pour but de montrer de quelle façon en parcourant plusieurs exemples, et de poser des jalons pour la poursuite du travail. Plusieurs exemples ont été évoqués concernant la formulation des propositions et des définitions mathématiques : la logique, et le calcul des prédicats, me sert de référent pour l'analyse de la façon dont ces phrases sont dites/écrites, je regarde notamment les quantifications (utilisation de « avec », et des « marqueurs de variance »). L'analyse de la formulation des démonstrations mathématiques a été plus rapidement développé au cours de l'atelier. Je présente ici l'approche choisie dans deux travaux de thèse anciens montrant la façon dont la logique peut servir de référent pour l'analyse de la façon dont sont dits/écrits les démonstrations mathématiques (introduction et gestion des variables, expression des inférences).

Une partie de l'atelier présentait un travail en cours qui a été depuis écrit sous forme d'un article maintenant à paraître (Hache 2015 à paraître), je me permettrai donc ici de résumer le propos de cet article. Il s'agit d'un travail fait autour d'usages du mot « avec » présent dans un certain nombre d'expressions figées dans les pratiques langagières des mathématiciens : par exemple les expressions « s'écrire sous la forme … avec … » ou « les … sont les … qui vérifient … avec … ». Les participants de l'atelier ont travaillé sur les exemples proposés (manuels du secondaire) de façon à s'approprier les concepts et les méthodes développées.

L'atelier s'appuyait ensuite sur deux thèses. L'une de Farasololalao Rakotovoavy (Rakotovoavy 1983) concerne l'usage, dans le langage des mathématiciens, de certains adjectifs marqueurs de variances (adjectifs inclus dans des syntagmes nominaux désignant des variables : « arbitraire » , « choisi » , « donné » , « fixe » , « fixé » , « quelconque », « variable »), j'en fais une présentation en annexe 1. Là aussi les participants à l'atelier ont, à partir d'exemple issus de la thèse, découvert le travail et les concepts avancés par Farasololalao Rakotovoavy.

La seconde thèse est celle de Yves Gerbier et Hélène Icart Seguy (Gerbier et Seguy 1987), ils travaillent sur l'usage des marqueurs logico – discursifs « car », « comme », « parce que » et « puisque » dans les textes mathématiques avec une entrée logique mathématique et une entrée linguistique. À propos de ce travail, je propose en annexe 2 une présentation de la partie écrite par Yves Gerbier (approche logique). L'organisation de l'atelier et les échanges sur les deux premiers travaux et sur la problématique générale n'ont pas laissé le temps nécessaire à un travail effectif sur cette thèse.

Je vais ici mettre en perspective l'approche choisie dans le travail sur « avec » et les questions qui en découlent avec les deux thèses présentées et des travaux plus récents. Je souligne que les réflexions exposées pendant l'atelier et dans ce texte correspondent à des travaux en cours.

Le principe structurant l'étude sur « avec » est le suivant : il s'agit de mettre en lien ce qui est dit (les mots prononcés, ou écrits, les mots qui sont entendus ou lu) par les mathématiciens avec le sens qu'ils donnent à ce qu'ils disent. L'utilisation d'un référent formel[1] (logique mathématique) permet de caractériser ce qui est dit (ou une interprétation de ce qui est dit) en l'externalisant, en le dégageant des pratiques langagières courantes des mathématiciens. L'idée est ainsi d'entrer progressivement dans cette étude des pratiques langagières des mathématiciens. Le travail présenté se limite à l'étude de la façon d'écrire (et d'oraliser) les propositions et les définitions mathématiques (et de fait, seulement certaines propositions dont la mise en mots utilise « avec ») : écriture de théorèmes, de définition, ou formulations de propositions extraites d'une preuve. Le référent logique est celui du calcul des prédicats.

On voit ainsi :

- qu'il n'est pas toujours simple de choisir entre plusieurs interprétations possibles d'une phrase ou expression dans un contexte donné (on le voit par exemple dans ce travail avec l'utilisation des mesures d'angles de vecteurs), qu'une même expression (« avec $k \in \mathbb{Z}$ ») peut correspondre à plusieurs interprétations formelles en fonction du contexte ;
- que, même quand il n'y a pas d'ambiguïté à ce niveau, la distance est parfois grande entre ce qui est prononcé ou écrit et le référent formel sous-jacent ;
- que ces pratiques langagières (et les difficultés sous-jacentes) apparaissent très tôt au collège : ponctuellement en 6e, et de façon très répandue à partir de la 4e.

Cette étude se prolonge d'une part par l'analyse une preuve de niveau 1eS en lien avec la notion de mesure d'angle, et d'autre part par l'analyse des écrits d'étudiants de première année

1 Voir Hache 2013 : je définis formalisme par « mise en forme codifiée permettant de décrire les objets mathématiques, leurs propriétés et les preuves de leurs propriétés, et de contrôler la validité de ce qui est exprimé. La codification permet par ailleurs une manipulation relativement indépendante du sens (règles de transformation, de combinaisons etc.) »

de licence. Elle montre certaines difficultés des élèves et étudiants liées à ces questions de pratiques langagières.

La thèse de Farasololalao Rakotovoavy étudie de façon très détaillée l'utilisation des « marqueurs de variance », c'est-à-dire le rôle de certains adjectifs dans la façon dont nous désignons des variables. Pour ce faire elle a besoin de catégoriser et d'étudier les façons dont les mathématiciens présentent, quantifient, mutifient, manipulent les variables. Sans surprise (puisque mes travaux actuels s'inspirent en partie de l'approche de Daniel Lacombe, le directeur de thèse de Farasololalao Rakotovoavy) sa démarche et celle présentée à propos de l'étude (plus locale) de « avec » sont proches et les résultats concernant la façon d'écrire les propositions isolées ou les définitions sont tout à fait compatibles.

Farasololalao Rakotovoavy ne marque pas de différence dans son approche et ses outils permettant l'étude de la façon de gérer les variables et d'écrire les propositions dans les preuves. Elle utilise notamment la notion de PUD (et plus généralement de mutification différée). Il s'agit de décrire une phrase du type « Soit *a* un nombre réel » placé, par exemple, en début de preuve en lui donnant les sens suivants :

- une nouvelle variable, *a*, est introduite et qu'elle désignera un réel dans la suite (présentation de variable)
- cette variable devra être considérée comme universellement quantifiée dans les propositions où elle intervient par la suite (mutification différée).

On voit donc que le référent (calcul des prédicats) ne change pas. L'approche permet une certaine réécriture d'une preuve ou l'écriture d'une interprétation de ce qui est dit (en supprimant les PUD et en quantifiant universellement les variables concernées quand elles apparaissent dans une proposition). On pourrait reprocher à cette démarche de ne pas considérer la gestion des variables comme une partie intégrante de la démarche de preuve : Farasololalao Rakotovoavy prolonge la référence dont elle se sert pour analyser la façon de dire les propositions (calcul des prédicats) à l'analyse de la façon de dire les preuves, la gestion des variables semble d'une certaine façon peu liée à la structure de la preuve.

La déduction naturelle introduite par Gentzen est un outil logique et un mode d'expression formelle intéressant et efficace pour étudier le langage des mathématiciens à l'oeuvre dans l'écriture d'une preuve. Viviane Durand Guerrier en montre la pertinence dans différents écrits pour une analyse pragmatique du langage (voir par exemple Durand Guerrier, Arsac 2003), Thomas Barrier propose aussi l'utilisation de la logique dialogique de Lorenzen (Barrier 2008). Je me propose d'utiliser ce système de preuve (la déduction naturelle) comme référent formel avec le même sens de « référent » que pour les propositions : au sens où il permet de caractériser ce qui est dit (ou une interprétation de ce qui est dit) en l'externalisant, en le dégageant des pratiques langagières courantes des mathématiciens.

On voit ainsi que l'usage de ce que Farasololalao Rakotovoavy a décrit comme PUD correspond systématiquement à l'usage de deux règles de déduction élémentaires de la déduction naturelle : l'introduction du quantificateur universel (règle formalisant la façon de prouver une propriété du type $\forall x\, P(x)$) et l'élimination du quantificateur existentiel (règle formalisant la façon "d'utiliser" une propriété du type $\exists x\, P(x)$ dans une preuve). Ces deux règles de déductions utilisent des variables « propres » (terme de Gentzen[2], toutes les autres règles de déduction utilisent les variables connues dans le contexte, voir Gentzen 1935).

2 On peut simplifier l'idée de variable « propre » en disant que c'est une variable non encore utilisée dans le contexte de cette preuve au moment où elle est introduite (y compris dans l'expression des propositions en cours d'utilisation). On parle aussi de variable « fraiche ».

Concrètement, l'"utilisation" d'une variable nécessite une *présentation de la variable* (les prolongements des travaux de Gentzen formalisent d'ailleurs ce point en introduisant la « signalisation » des variables introduites, voir Gochet Gribomont 1990 p 225 et suivantes). C'est ce que pointe Farasololalao Rakotovoavy : une PUD est, entre autre, une présentation de variable.

Les règles de déduction modélisent des pas de déductions élémentaires. Au sein d'une preuve, même exprimées dans le référent formel, les choses sont imbriquées. Au sein d'une démonstration rédigée, la distance[3] peut être grande entre, par exemple, la présentation d'une variable « propre » en vue de la preuve d'une propriété universelle et la fin de la preuve effective de cette propriété. Les présentations de variables apparaissent donc souvent isolées, même si je ne retiendrai pas la notion de mutification différée, il me semble que le travail de Farasololalao Rakotovoavy est très important et très riche de par la classification et l'analyse qu'elle fait des différentes situations de présentation de variable.

Au-delà de ce qui a été dit lors de l'atelier, soulignons ici que le point de vue diffère légèrement de celui de Viviane Durand Guerrier et Thomas Barrier cités plus haut. Il ne s'agit pas encore ici d'une analyse pragmatique (analyse du langage faisant intervenir le locuteur et ses intentions), il s'agit seulement d'expliciter le lien entre ce qui est dit ou écrit (les mots utilisés) et une référence mathématique formelle. D'un point de vue pragmatique les deux règles évoquées « modélisent » ainsi deux démarches de preuves classique :

- pour prouver $\forall x\ P(x)$ l'auteur de la preuve va présenter se démarche en prouvant qu'un élément quelconque vérifie *P*. Il commence ainsi sa preuve par « Soit *a* un élément de $\mathbb{R}$... », il prouve ensuite $P(a)$ (je souligne ici que la conclusion rappelle rarement ce qui a démontré : $\forall x\ P(x)$). Voir aussi les analyses en terme d'opposant / proposant de Thomas Barrier (Barrier, Durand Guerrier 2013).
- à propos de la seconde règle. En théorie, si l'auteur de la preuve sait ou admet que $\exists x \in \mathbb{R}\ P(x)$ est vrai et veut prouver une proposition *Q*, il va dire qu'il considère un certain réel *a* vérifiant $P(a)$, démontrer *Q* à partir de $P(a)$, et conclure que, comme $\exists x \in \mathbb{R}\ P(x)$ est vrai, *Q* est vrai. En pratique, beaucoup de choses sont non dites dans un tel pas de démonstration : le seul fait d'énoncer « il existe un réel *x* tel que $P(x)$ » en plus affirmer une existence, sous-entend en général l'idée que l'on choisit un nombre rendant vrai la proposition et qu'on l'appelle *x* (en général, en effet, l'auteur de la preuve ne renomme pas la variable muette).

Soulignons que, même si d'un point de vue pragmatique le rédacteur dit introduire et manipuler des éléments (appelés éléments génériques par Viviane Durand Guerrier), dans le référent logique choisi ici on le lit comme une manipulation de variables.

Le décalage entre formalisme sous-jacent et énonciation, qui tend notamment à rendre implicites les quantifications, apparaît dans d'autres contextes, celui des textes d'exercices par exemple. C'est ce que Zoé Mesnil souligne dans sa thèse (voir le paragraphe « Introduction et élimination des quantificateurs », Mesnil 2014) : il est fréquent que les propositions elles-mêmes soient formulées en terme d'éléments et non de variables quantifiés, par exemple un texte d'exercice peut être de la forme « considérons un réel *x*. Montrer $P(x)$ » ou « *x* est un réel. Montrer $P(x)$ ».

La mise en évidence des liens complexes entre ce qui est prononcé (ou écrit) et une description formelle de ce qui est dit permet d'envisager la difficulté de ce qui est donné à comprendre aux élèves apprenant les mathématiques.

3 Quantitative, nombre de lignes ou de page dans la preuve

Une troisième partie de l'atelier concernait le travail de thèse d'Yves Gerbier. Cette partie a été rapidement présentée et discutée. Je propose en annexe 2 un résumé de la partie de la thèse concernée. Ce travail est un exemple d'analyse linguistique pragmatique, il permet en effet d'expliciter et de préciser les choix fait par le rédacteur d'une preuve dans l'organisation et l'énonciation d'une preuve.

La méthode adoptée par Yves Gerbier consiste à décrire « le squelette » de la preuve, c'est-à-dire un schéma explicitant les propositions mathématiques en jeux (y compris implicitement) et les liens de déduction les reliant. Ce squelette est commun à plusieurs preuves d'un même théorème et permet d'expliciter des « sous-squelettes » correspondant, pour chaque preuve analysée, aux propositions et liens effectivement cités dans la preuve.

Ces squelettes et sous-squelettes gagneraient à être décrits avec des outils plus formels de façon à en systématiser la forme et à garantir leur rigueur et leur exhaustivité[4]. Là aussi la déduction naturelle est un outil à tester.

Yves Gerbier montre ensuite finement la façon dont chaque auteur de preuve fait des choix relatifs aux contenus et des choix linguistiques (utilisation de tel ou tel marqueur d'inférence notamment). Les notions de principe principal et de conclusion principale sont riches (et centrales dans ce travail) : un auteur d'une démonstration ne peut citer toutes les propositions du contexte nécessaires à garantir la certitude de la validité d'une nouvelle proposition, il en met en général une seule en avant, celle qui lui semble permettre de structurer au mieux son discours, d'apporter le plus d'information au lecteur. Yves Gerbier montre alors que les choix des mots « car », « comme », « parce que » et « puisque » permettent aux auteurs de présenter en nuance ces liens entre propositions.

Je dégage de la lecture (partielle) de ces travaux certains éléments méthodologiques : la nécessité d'un référent formel permettant de se dégager des contraintes linguistiques pour décrire le contenu mathématique de ce qui est dit dans une preuve. Le calcul des prédicats est un référent pour donner une description (ou des descriptions concurrentes) de ce qui est dit lorsqu'un mathématicien énonce une proposition ou une définition mathématique. La déduction naturelle est un bon référent pour proposer une description de ce qui est dit lorsqu'un mathématicien écrit ou dit une preuve. Le fait d'utiliser cette référence formelle permet alors d'analyser le langage des mathématiciens : les usages, les habitudes, les pratiques langagières, les façons de dire et de décrire les objets et leurs relations, et donc la façon de les penser.

Les différents travaux présentés dans l'atelier mettent en évidence et caractérisent la complexité des pratiques langagières des mathématiciens. Les analyses de pratiques langagières de ce type ont été poursuivies et sont à poursuivre. Au-delà de la complexité des pratiques langagières, les travaux d'Yves Gerbier notamment soulignent à quel point à la fois elles sont cadrées, et à quel point elles permettent une grande variété d'expression : malgré le contenu formel du propos, le travail d'écriture d'une preuve est un travail d'auteur.

Ces pratiques langagières diffusent, plus ou moins efficacement, par acculturation, des mathématiciens aux étudiants, des enseignants du secondaire aux élèves, etc. La fin de l'atelier met en évidence de nombreuses questions quant à ces transmissions et ces apprentissages non

4 Il ne s'agit pas ici de remettre en cause la rigueur et l'exhaustivité du travail d'Yves Gerbier, mais de constater que la description des preuves mise en place ne permet pas un usage formel (au sens décrit plus haut).

dits. Les questions relatives à la formation des enseignants (du secondaire, et du supérieur) sont aussi posées : quelle formation des enseignants ? l'explicitation des pratiques langagières, par exemple, suffit-elle ? Comment les élèves et les étudiants intègrent-ils (ou non) ces pratiques langagières ? Quels enseignements aux élèves ?

Les perspectives de travail sont nombreuses : l'élaboration des outils d'analyse et le travail d'analyse du langage des mathématiciens doit être poursuivi. Les pratiques langagières en classe de mathématiques doivent être étudiées (en dépassant l'analyse des manuels scolaires utilisée dans les trois travaux évoqués dans cet atelier). Un travail avec des didacticiens des langues ou des didacticiens du français pourrait aussi enrichir l'approche.

Annexe 1, présentation de la thèse de Rakotovoavi

Difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi, dans les textes mathématiques, de certains adjectifs marqueurs de variance (thèse sous la direction de Daniel Lacombe, soutenue en janvier 1983)

Je présente ici le travail de thèse de Farasololalao Rakotovoavy (Rakotovoavy 1983). Cette thèse est encadrée par Daniel Lacombe, dont la réflexion inspire aussi en partie notre positionnement et nos travaux. Même si l'époque de la thèse est très marquée (notamment par les exemples pris dans les manuels du secondaire du début des années 80) on trouve sans surprise une proximité avec la démarche adoptée dans nos travaux. Les manuels de mathématiques du secondaire du début des années 80 ont un contenu et un style proche des manuels de mathématiques actuellement utilisés dans les premières années de licence, on trouve donc aussi un caractère contemporain à certains des résultats de la thèse concernants la description du langage des mathématiciens.

Je décris ici plus précisément le contenu des trois premiers chapitres (préliminaires, rôles des marqueurs, place des variables susceptibles de recevoir des marqueurs), et résumerons plus rapidement les derniers (étude détaillée de certains cas particuliers et d'exemples, analyse quantitative des manuels choisis).

Préliminaires

Il s'agit ici d'étudier les usages des mots tels que les mots « donné » et « quelconque » des phrases suivantes :

Soit a un réel. Résoudre l'équation $2x + a = 3a + 1$.
Soit a un réel donné. Résoudre l'équation $2x + a = 3a + 1$.
Soit a un réel quelconque. Résoudre l'équation $2x + a = 3a + 1$.
Soit a un réel donné quelconque. Résoudre l'équation $2x + a = 3a + 1$.
Soit a un réel quelconque donné. Résoudre l'équation $2x + a = 3a + 1$. (p1)

Dans ce cas particulier on voit que leur présence ou leur absence ne modifie pas la réponse à la question posée. En est-il toujours ainsi ?

Je reprends, pour commencer, quelques précisions données en début de thèse. Le travail effectué étudie notamment certaines expressions de quantifications, et plus généralement le travail porte sur certaines expressions de mutifications (la façon dont on rend muette une occurrence de variable[5]).

5 Voir par exemple Hache et Mesnil 2012.

Un des questionnements récurrents sur l'expression des mutifications concerne *l'ordre de ces mutifications* : l'auteure distingue l'ordre logique et l'ordre d'écriture. Ces deux notions ne sont pas définies précisément, mais retenons qu'en présence de deux mutifications on dit en général que la première des deux, selon l'*ordre logique*, est celle dont le champ (c'est-à-dire la portion de l'énoncé où la mutification s'applique) englobe le champ de l'autre. L'ordre d'écriture ne correspond pas toujours à l'ordre logique, donnons ici un exemple qui arrive plus loin dans la thèse :

> Il existe un plan, et un seul, contenant un point donné et parallèle à un plan donné. (p31)

La quantification « il existe un plan » arrive la première dans la phrase, alors qu'elle est dans le champ des quantifications universelles portant sur « un point » et « un plan ». L'inversion nécessaire pour rétablir l'ordre logique des quantifications est soulignée par la présence du marqueur « donné ».

Plus loin dans le document l'auteure précise d'une autre façon ce point concernant la mutification. Elle introduit la notion de présentation de variable et les notions de mutification immédiate, prolongée ou différée.

Dans une *présentation de variable* on exhibe une ou plusieurs lettres et on convient qu'elle représentera des objets mathématiques d'espèce déterminée (par exemple : « Dans la suite de ce texte on désignera un vecteur par une lettre latine : u, v, w... »). On déclare en quelque sorte qu'une variable prendra ses valeurs dans un certain ensemble, ou sera astreinte à un certain ensemble. Les présentations de variables sont rarement présentes sans être dans le même temps une mutification.

Par ailleurs, à propos des mutifications, l'auteure distingue trois types de mutifications. Une mutifications est *immédiates* lorsqu'elle s'exerce uniquement sur la phrase considérée, elle est *prolongée* si elle s'exerce sur cette phrase et une ou plusieurs phrases ultérieures, elle est *différée* si elle s'exerce seulement sur des phrases ultérieures. Nous verrons des exemples plus loin. Nous pouvons noter ici que l'auteure utilise très peu la notion de mutification prolongée et lui préfère mutification différée pour toute mutification dont le champ dépasse la phrase considérée.

Je souligne ici un second élément des préliminaires car il situe bien l'objet du travail. Il s'agit de la notion de *niveau épimathématique* d'un texte.

> Nous dirons que, dans un endroit donné d'un texte mathématique donné, un certain syntagme (…) se situe au niveau épimathématique, lorsque ce syntagme ne désigné aucun objet mathématique (en considérant les fonctions, les prédicats, les opérations telles que les quantifications, les valeurs de vérité, etc. comme des objets mathématiques), mais fournit au lecteur une indication sur la manière dont il convient de compléter, de rectifier et de relire entre elles les portions strictement mathématiques du texte environnant ce syntagme, de façon à obtenir soit une proposition mathématique correcte et complète, soit ne démonstration mathématique convenablement mise en forme. (…)
> Un texte mathématique apparaît donc comme un mélange d'expressions d'ordre mathématique et d'ordre épimathématique (sans compter celles qui se situent à d'autres niveaux[6]). Mais la distinction taxonomique ne constitue pas un point de départ : la véritable étude linguistique consiste à découvrir, pour chaque expression épimathématique, le rôle qu'elle joue, c'est-à-dire à analyser les indications qu'elle fournit au lecteur. (p14-15)

6 L'auteure cite par ailleurs un niveau de métadiscours (discours sur le discours mathématique) qui englobe le niveau épimathématique.

Avec cette définition, les marqueurs étudiés ont un rôle d'ordre épimathématique. Dans l'exemple ci-dessus, le marqueur « donné » est une trace, un avertissement, pour le lecteur de l'interversion de l'ordre des quantifications entre ordre logique et ordre de lecture.

Les marqueurs et leurs rôles

Les marqueurs étudiés sont les suivants (quand ils sont utilisés comme des adjectifs dans des syntagmes nominaux servant à désigner des variables) : « arbitraire », « choisi », « donné », « fixe », « fixé », « quelconque », « variable ». L'auteure souligne un certain arbitraire dans ce choix et signale qu'auraient pu être étudiés aussi les usages de « particulier », « constant », « même », « certain » (liste non exhaustive).

L'auteure recense trois rôles pour ces marqueurs dans son corpus (composé de 23 manuels de mathématiques de lycée édités entre 1970 et 1980, l'auteure précise plus loin que des marqueurs apparaissent dans tous ces manuels sans exception, « quelconque » et « donné » apparaissent avec ce rôle dans tous les manuels) :

- renforceur / indicateur de mutification,

On distingue le rôle de renforceur du rôle d'indicateur en fonction du caractère nécessaire de la présence du marqueur pour le sens de la phrase.

Ainsi dans la phrase suivante « quelconque » *renforce* la quantification universelle : « Deux éléments quelconques a et b de F tels que (a,b) soit libre forment une base de F ».

Dans la phase « Deux éléments quelconques de $\mathbb{D}$ sont comparables pour la relation $\geq$ dans $\mathbb{D}$ » la suppression du mot « quelconque » introduit une ambiguité : on ne peut plus savoir si la propriété est quantifiée universellement ou existentiellement. L'auteure signale ce phénomène en disant que « quelconque » *indique* ici la quantification.

- renforceur / indicateur d'ordre de mutification,

L'ordre d'écriture des quantifications dans la phrase « Il existe un plan, et un seul, contenant un point donné et parallèle à un plan donné » n'est pas le même que l'ordre logique. Les deux occurrences du mot « donné » ont un rôle essentiel pour l'indiquer. La phrase a une signification beaucoup moins claire sans ces deux mots. L'auteure dit donc que « donné » a (deux fois) un rôle d'indicateur d'ordre de mutification.

Comme pour le point précédent l'auteure parle aussi de renforcement d'ordre de mutification. Elle prend l'exemple de « fixe » dans « Il existe un point fixe appartenant à toutes les courbes C_t »

- annulateur de restriction.

Il s'agit ici de marqueurs jouant le rôle de renforcer l'absence de condition particulière. Exemple : « Soit a un réel quelconque et b un réel positif, on peut affirmer que $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ ».

Ces mots marqueurs sont d'autant plus important dans ces rôles que les articles en français n'ont, par eux-même, aucun rôle quantificateur ou presque. Ainsi le sens de «un », « une », « des », « le », « la », « les » etc. a-t-il souvent besoin d'être précisé. Deux exemples (sans marqueurs) :

« Un^{i} nombre réel positif est toujours supérieur à un^{ii} nombre réel négatif »

« Un^{iii} nombre réel positif est toujours le carré d'un^{iv} nombre réel négatif »

Les occurrences *i* et *iii* de « un » peuvent être remplacées par une quantification universelle (renforcée par « toujours »), l'occurrence *ii* aussi sans que cela soit très clair (un « quelconque » serait le bien venu), l'occurrence *iv* apparaît dans un contexte de quantification existentielle.

Recensement des places et des rôles des variables susceptibles de recevoir des marqueurs

L'auteure étudie dans cette partie, de façon systématique, différents types de mutifications dans lesquelles sont susceptibles d'apparaitre des marqueurs.

L'auteure développe une analyse fine des mutifications immédiates suivantes et du rôle que peuvent y jouer (ou non) les marqueurs étudiés :

- quantification universelle (explicite ou implicite). Exemple explicite: « H_n est vrai quel que soit l'entier n donné », implicite : « il existe une droite, et une seule, contenant deux points distincts de l'espace ».
- quantification existentielle (explicite ou implicite). L'exemple précédent contient un exemple de quantification existentielle explicite. Exemple implicite : « x est de la forme $au + bv$ avec u et v quelconques de $\mathbb{R}$ ».
- deux mutifications ensemblistes : la mutification ensembliste-compréhension concerne le fait que dans l'expression $\{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \leq 3x + 5\}$ la variable x est muette (on peut dire « l'ensemble des réels x tels que $x - 1 \leq 3x + 5$ »), la mutification ensembliste-image concerne le fait que dans l'expression $\{6p - 2q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$ les variables p et q sont muettes (on peut verbaliser par exemple en « l'ensemble des nombres $6p + 2q$ lorsque p et q sont deux entiers relatifs quelconques »)
- la mutification fonctionnelle : il s'agit par exemple de la mutification de la variable x dans l'expression « l'application de E dans F qui à un élément x quelconque de E associe l'élément ... », ou de l'utilisation combinée des flèches $\longmapsto$ et $\longrightarrow$.
- plus loin dans la thèse l'auteure signale et étudie les mutifications liées aux équations. Par exemple les mutificateurs « l'équation … d'inconnue x » ou « l'équation … en x ». Elle étudie aussi, dans ce cadre des équations, l'usage des mots « paramètres », « constantes », souvent en lien avec les marqueurs « donné », « quelconque » ou « fixé ».

Dans la suite, l'auteure étudie les mutifications différées. Elle y consacre une partie de ce chapitre sur les places et rôles des marqueurs, puis un chapitre spécifique où elle propose une analyse linguistique les différents usages rencontrés. Je me contente ici de préciser la notion.

L'auteure souligne tout d'abord que les mutifications différées concernent très généralement des lettres non encore utilisées et dont le lecteur ne sait donc rien. La mutification différée est donc accompagnée d'une présentation de variable, on a donc à faire à une présentation mutification différée. Le cas le plus fréquent est celui de la présentation quantification universelle différée, notée PUD. L'essentiel du travail de l'auteure sur les mutifications différées concerne donc les PUD (outre les PUD, l'auteure analyse une autre situation de mutification différée, un cas de présentation mutification ensembliste différée).

Exemple de PUD exprimée par une phrase entière : « Soient a, b et c des réels positifs. On peut écrire : $\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$ ».

> Il n'y a aucune formalisation mathématique de la première phrase seule ; elle est nécessairement épimathématique (…) le caractère épimathématique de ces phrases de PUD est marqué entre autre par le fait qu'il est impossible d'en prendre la négation (p51-52)

La première phrase indique ainsi que :

- d'une part les lettres a, b et c désignerons des nombres réels (c'est la partie présentation),
- d'autre part, ces lettres devrons être considérées comme quantifiées universellement dans la seconde phrase (c'est la partie mutification différée).

L'auteure dresse la liste suivante :

> La plupart de ces phrases [PUD exprimée par une phrase entière] commencent par certaines formes actifs de verbes typiques donc voici la liste : soit (qui selon les auteurs s'accorde en nombre ou reste invariable), on désigne, désignons, on donne, on se donne, donnons-nous, on considère, considérons, choisissons, fixons, on suppose, supposons, prenons. (p51-52)

L'auteure étudie ensuite les PUD exprimées par un membre de phrase et l'usage des marqueurs de quantifications dans ces situations.

> On ne retrouve pas dans ce cas de forme aussi typique. Mais on peut quand même signaler des expressions qui interviennent fréquemment pour introduire une PUD dans un membre de phrase. Ainsi on peut noter :

- l'expression « Étant donné » (…) en début de phrase,
- le mot « si » qui est généralement en début de phrase aussi et n'exprime pas une implication
- l'usage du participe présent : étant, désignant, appartenant etc.
- d'autres mots comme : où, avec...
- l'emploi d'une proposition incise entre parenthèses ou entre virgule
  etc. (p55)

Dans le corps de ce texte, je fais une critique en partie négative de l'utilisation de la notion de PUD comme référent pour analyser le langage des preuves. Cette critique n'enlève rien à l'analyse linguistique qui est faite ici de ces moments de présentation de variables.

Annexe 2, présentation de la thèse de Yves Gerbier

Les marqueurs logico – discursifs car, comme, parce que, puisque (thèse sous la direction de Jean Louis Fossat, soutenue en juin 1987).

Je présenterai ici le travail de thèse de Yves Gerbier (Gerbier et Icart Seguy 1987). Il s'agit en fait d'une double thèse, Yves Gerbier est logicien et Hélène Icart Séguy est linguiste. Le choix de travailler sur l'usage des mots « car », « comme », parce que » et « puisque » est lié au fait qu'ils expriment des liens logiques entre des propositions. Ces quatre morphèmes ont été distingué car ils « dénotent de la part du locuteur la volonté d'asserter un lien très fort entre deux propositions ».

Je vais essentiellement ici résumer la première partie de la thèse d'Yves Gerbier. Il s'agit d'arriver à « la notion de principe principal, de conséquence principale, dont nous verrons que les quatre mots étudiés sont des marqueurs privilégiés ».

Yves Gerbier distingue la notion de démonstration formelle et celle de démonstration mathématiques. On pourra ici interpréter ces termes en gardant les idées de « référent formel pour la preuve » et de texte rédigé avec les « pratiques langagières des mathématiciens » développées dans cet article. Comme le souligne l'auteur, « à l'exception des livres de logique mathématiques, on ne rencontre pas de démonstration formelle dans les livres de mathématiques », plus loin : « en réalité, les démonstrations mathématiques ne sont rigoureuses que potentiellement : il manque un grand nombre d'étapes, il y a beaucoup de non-dits ». Yves Gerbier cite à ce sujet Daniel Lacombe :

> « Les descriptions contenues dans les textes mathématiques sont à la fois concentrées (grâce à l'emploi en cascade de conventions d'écriture, en particulier les définitions) et incomplètes (c'est-à-dire laissant au lecteur une grande partie du travail à effectuer seul) ; elles sont même souvent "approximatives" (…). Un texte mathématique réel ne contient en général que des fragments d'énoncés mathématiques et des éléments de démonstrations mathématiques. Par contre (et par conséquent), une grande partie du texte est consacré à fournir des indications sur la façon dont il convient de compléter, de rectifier éventuellement et de combiner entre eux ces fragments et ces ébauches afin d'obtenir des affirmations complètes et des peureves valides » (Lacombe 1984)

Yves Gerbier affirme donc que la démonstration rédigée est un guide permettant au lecteur de faire la démonstration. Il souligne que la démonstration rédigée ne rend pas compte de son élaboration, l'auteur ne raconte « ni les différents raisonnements qu'il a utilisé, ni les détours, ni les impasses ». Il fait une reconstruction, une mise en ordre. Yves Gerbiers met en avant trois critères de mise en ordre (souvent incompatibles, l'auteur de la démonstration fait des compromis entre les trois, des choix) : l'élégance (la forme doit être agréable), l'économie (il faut énoncer seulement l'indispensable) et la compréhensibilité (il faut fournir un guide et non une énigme).

Yves Gerbier introduit ensuite les notions de squelette et d'habillage de la preuve. Pour se faire il compare les preuves de cinq auteurs de manuels du théorème suivant « Quels que soient, l'entier naturel a et l'entier naturel b, il existe deux entiers naturels q et r uniques tels que $a = bq + r$ avec $0 \leq r \leq b$ ». Les cinq preuves relèvent du même schéma global (une preuve de l'existence, une preuve de l'unicité, utilisation explicites ou implicites des mêmes arguments et propriétés, etc.). Le *squelette* de la preuve est la description (sous forme d'un graphe) la plus précise et explicite possible de la preuve en indiquant toutes les propositions mathématiques utilisées (admises ou prouvées) et les liens logiques qui les relient (telle proposition est un axiome, telle proposition de déduit des telles autres, telles propositions sont équivalentes, etc.)[7]. Un *habillage* est le texte d'une démonstration, pour chacun des cinq habillages, Yves Gerbier construit un sous-squelette : il reproduit le squelette de la preuve, mais ne fait apparaître que les propositions citées explicitement par l'auteur et les liens logiques qui les relient dans cette démonstration.

On constate qu'aucun des cinq auteurs n'utilise explicitement toutes les propositions du squelette, que toutes les propositions utilisées par les auteurs sont dans le squelette (il a été construit pour ça), certaines propositions du squelette sont dans tous les sous-squelettes, elles constituent « des points de passage qu'il est nécessaire d'énoncer ». À ce sujet :

> « Une nécessité est en général commune au "groupe social des mathématiciens", lorsqu'ils écrivent une démonstration donnée à l'intention d'un groupe donné en fonction de programme donnés. Il est des principes que l'on peut ne pas citer et d'autres que l'on ne peut ne pas citer, sous peine d'être accusé de n'avoir rien prouvé. C'est un exercice auquel on s'entraine en préparant des "leçons" de CAPES et de l'Agrégation » (Gerbier 1987, p17)

7 J'indique dans le corps de l'article que ce squelette pourrait être précisé, il contient en tout cas ici toutes les propositions citées par les cinq auteurs.

Ce passage fait fortement écho avec les éléments développés par Maryse Rebière citée dans le corps de l'article (Rebière 2013).

Yves Gerbier s'intéresse aussi aux inférences (les liens du sous-squelette) entre les propositions dans chacun des habillages. Il note que, comme pour les propositions, certaines inférences apparaissent dans les quatre habillages (sous différentes formes). Il note que certaines inférences sont marquées linguistiquement. Pour les inférences de sens direct, on rencontre des mots (« donc », « et », « par suite »), des syntagmes (« d'après ») et des propositions relatives. Dans les inférences de sens rétrograde, on rencontre les mots « car », « puisque ». La plupart des inférences ne sont pas marquées linguistiquement, c'est que la succession des propositions dans l'habillage correspond à leur succession logique.

Yves Gerbier s'intéresse donc aux choix des auteurs. Il définit la notion de principe principal et de conséquence principale : on se place dans un contexte où on peut déduire la proposition Q des propositions $P_1, P_2, , P_n$. Pour l'auteur considéré, P_{i_0} est le *principe principal* de la conséquence Q si l'auteur présente dans son habillage le lien qui unit le principe P_{i_0} à la conséquence Q comme étant essentiel, principal. L'auteur estime que P_{i_0} est un des principes les plus forts susceptibles d'entraîner son lecteur vers la conséquence Q. Dans cette situation Q est appelé *conséquence principale* de P_{i_0}. Le calcul des séquents serait bien sûr ici une référence enrichissante pour la description.

Yves Gerbier analyse alors les usages des expressions « Comme P, Q », « puisque P, Q », « Q puisque P », « Q parce que P » et « Q car P ». Il commence par les distinguer fortement d'une simple mise en mot de $P \Rightarrow Q$. Ces quatre mots marquent :

- la déductibilité (formelle) de Q à partir de P
- l'existence d'un lien très fort et très direct (pour l'auteur) entre P et Q (plus loin Yves Gerbier explique que c'est cette condition qui a poussé à ne pas traiter d'autres marqueurs d'inférence comme « donc » : le lien présenté est souvent plus lâche)
- l'existence d'éléments non explicités car allant de soi (Yves Gerbier parle d'enthymème)

Ces mots expriment donc exactement un lien du type principe principal / conséquence principale.

La suite du travail analyse un corpus de manuels d'études supérieures (classes préparatoires, premières années d'Université) qui regroupent 255 occurrences des mots étudiés. Ce sont ces utilisations qui sont analysées : spécificités des auteurs, usages communs, sens fins des expressions, etc. Je ne peux reprendre ici l'ensemble du travail, de même je ne ferai pas allusion au travail d'Hélène Icart Séguy (deuxième partie de cette double thèse) qui aborde les questions de coordination et de subordination d'un point de vue linguistique en proposant une étudie syntaxique et sémantique, puis sémantique et pragmatique de l'usage des mots « parce que », « puisque », « comme » et « car ».

Bibliographie

Barrier (2008), Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques, *Éducation et didactique*, vol 2 – n°3, pp. 35-58, Presses Universitaires de Rennes, Rennes

Barrier et Durand Guerrier (2013), Modélisations logiques en situation de validation, in A. Bronner et al. (2013) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage, XVIe école d'été de didactique des mathématiques*, Carcassonne (Languedoc-Roussillon), 2011, La Pensée Sauvage, Grenoble

Durand Guerrier (2013), « quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques », in A. Bronner et al. (2013) *Questions vives en didactique des* *mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage, XVIe école d'été de didactique des mathématiques, Carcassonne (Languedoc-Roussillon), 2011*, La Pensée Sauvage, Grenoble

Durand Guerrier et Arsac (2003), Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? , *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 23, n°3, pp. 295-342, La Pensée Sauvage, Grenoble

Gentzen (1935) *Untersuchungen über das logische schließen*, traduit de l'allemand : Feys et Ladrière (1955) *Recherches sur la déduction logique*, Presses Universitaires de France, Paris

Gerbier et Icart Seguy (1987), *Les marqueurs logico – discursifs car, comme, parce que, puisque*, Thèse, Université de Toulouse Le Mirail

Gochet et Gribomont (1990), *Logique, méthodes pour l'informatique fondamentale*, vol. 1, Hermès, Paris

Hache (2013), Langage mathématique à la transition primaire / collège, in *Actes du 39ème colloque de la Copirelem, juin 2012*, pp 452-463, Copirelem, Quimper

Hache (2015, à paraître), Exemple d'analyse de pratiques langagières des mathématiciens, usage de « avec », revue *Petit x*, Grenoble

Hache et Mesnil (2013), « Élaboration d'une formation à la logique pour les professeurs de mathématiques », in Gandit M., Grugeon-Allys B. dir. (2013), *CORFEM, Actes des 17ème et 18ème colloques, juin 2012*, pp. 201-224, Université et IUFM de Franche-Comte, Besançon

Lacombe (1984) Les composantes du raisonnement mathématiques, *Les modes de raisonnement, textes des communications du second colloque de l'Association pour la Recherche Cognitive*, Orsay

Mesnil (2014) *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignemen*t, Thèse, Université Paris Diderot, Paris

Rakotovoavy (1983), *Difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi, dans les textes mathématiques, de certains adjectifs marqueurs de variance (exemples principalement empruntés aux manuels du second degré)*, thèse, Université Paris 7, IREM de Paris 7, Paris

Rebière (2013), S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ?, in A. Bronner et al. (2013) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage, XVIe école d'été de didactique des mathématiques, Carcassonne (Languedoc-Roussillon), 2011*, La Pensée Sauvage, Grenoble