(13/1/2016, 16h36)

Fonctions multiplicatives, sommes d'exponentielles, et loi des grands nombres

Gérald Tenenbaum

Abstract. We provide essentially optimal, effective conditions to ensure that, when available, the Halberstam–Richert upper bound for the mean value of a non-negative multiplicative function actually furnishes the true order of magnitude. This is applied, in particular, to short sums of multiplicative functions over arithmetic progressions, to exponential sums with multiplicative coefficients, and to strong law of large numbers with multiplicative weights.

Key-words. Mean values of non-negative multiplicative functions; short sums of multiplicative functions; arithmetical progressions; exponential sums; strong law of large numbers; multiplicative weights; multiplicative coefficients.

Classification AMS 2010. Main 11N37, Secondary 11L07, 11N64, 60F15.

1. Introduction et énoncé des résultats

Une version faible d'un théorème de Halberstam et Richert [13] fournit l'ordre de grandeur générique de la fonction sommatoire d'une fonction arithmétique multiplicative positive ou nulle dont les valeurs sur les nombres premiers sont bornées en moyenne. Le résultat suivant est ainsi établi dans [14] (th. 01) ou [20] (th. III.3.5). Ici et dans la suite, nous réservons la lettre p pour désigner un nombre premier. Nous utilisons également les notations suivantes, relatives à une fonction multiplicative positive ou nulle f et à un nombre réel $x \geqslant 1$:

$$M_f(x) := \sum_{n \leqslant x} f(n), \qquad L_f(x) := \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n}, \qquad E_f(x) := \prod_{p \leqslant x} \Big(1 + \frac{f(p)}{p}\Big).$$

Théorème A. *Soit f une fonction arithmétique multiplicative positive ou nulle satisfaisant, pour des constantes convenables A et B, aux conditions*

(i) $\displaystyle\sum_{p \leqslant y} f(p) \log p \leqslant Ay \quad (y \geqslant 2)$;

(ii) $\displaystyle\sum_{p} \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{f(p^\nu) \log p^\nu}{p^\nu} \leqslant B.$

Nous avons alors, pour $x > 1$,

$$M_f(x) \leqslant (A + B + 1) \frac{x}{\log x} L_f(x). \tag{1·1}$$

Dans nombre de circonstances, il est utile de disposer de l'information que cette majoration fournit en fait l'ordre de grandeur exact de la fonction sommatoire. Il en va ainsi, par exemple, de l'étude de la répartition dans les progressions arithmétiques et/ou dans les petits intervalles. En effet, sous l'hypothèse supplémentaire[1]

$$(S) \qquad \begin{cases} f(p^\nu) \leqslant A^\nu & (p \geqslant 2,\, \nu \geqslant 1), \\ (\forall \varepsilon > 0) \quad f(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon & (n \geqslant 1), \end{cases}$$

1. Qui implique (i) et (ii), avec éventuellement d'autres valeurs des constantes.

il résulte d'une majoration de Shiu [19] et d'une estimation de Bachman [2] (lemme 1) que, pour chaque $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ fixé, on a

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ n\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)}} f(n) \ll \frac{y}{\varphi(q)\log x} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,q)=1}} \frac{f(n)}{n} \tag{1·2}$$

uniformément pour $x \geqslant 2$, $x^\varepsilon \leqslant y \leqslant x$, $q \leqslant y^{1-\varepsilon}$, $(a,q)=1$.(2) Ici et dans la suite, nous notons φ la fonction indicatrice d'Euler.

Lorsqu'il est acquis que les deux membres de (1·1) sont du même ordre de grandeur pour la fonction $f\mathbf{1}_{\{n:(n,q)=1\}}$, la majoration (1·2) prend la forme canonique

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ n\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)}} f(n) \ll \frac{y}{x\varphi(q)} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,q)=1}} f(n). \tag{1·3}$$

Nous renvoyons aux travaux de Bachman [1], [2], pour une étude directe de cette question naturelle.

Notre premier résultat fournit une condition suffisante essentiellement optimale pour qu'il en soit ainsi. Nous définissons $Q(y) := y\log y - y + 1$ $(y > 0)$, introduisons six paramètres $A > 0$, $B > 0$, σ, τ, $0 < \sigma < \tau < \min\{1-\sigma, 1/(1+A)\}$, $\eta > 0$, $\lambda > 0$, et posons $h := (1-\tau)/(\tau A) > 1$. Pour $x > 1$, nous désignons alors par $\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(x; A, B, \sigma, \tau, \eta, \lambda)$ la classe des fonctions multiplicatives f à valeurs réelles positives ou nulles vérifiant les conditions (i) et (ii) du Théorème A et telles que

(iii) $\forall \delta > 0\, \exists \varepsilon > 0\, \exists y_0 = y_0(\delta) : \displaystyle\sum_{y<p\leqslant y(1+\varepsilon)} f(p)\log p \leqslant \delta y \qquad (y \geqslant y_0),$

(iv) $\displaystyle\sum_{x^\sigma<p\leqslant x^\tau} \frac{f(p)}{p} \geqslant \log\Big(\frac{1+\eta}{1-\mathrm{e}^{-AQ(h)}}\Big),$

(v) $\displaystyle\sum_{\substack{x^\tau<p\leqslant x^{1-\sigma}\\ f(p)\leqslant\eta}} \frac{1}{p} \leqslant \lambda.$

Dans toute la suite, nos estimations sont uniformes relativement à $f \in \mathcal{M}(x)$. Cela signifie notamment que les fonctions $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ et $y_0 = y_0(\delta)$ apparaissant dans (iii) sont supposées fixées.

Il est à noter que la condition (i) peut être remplacée par (iii) quitte à modifier la valeur de la constante A.

Théorème 1.1. *Sous les seules conditions (i) et (ii), nous avons*

$$L_f(x) \asymp E_f(x) \qquad (x \geqslant 1), \tag{1·4}$$

où les constantes implicites dépendent au plus des paramètres A et B.

De plus, pour tous $A > 0$, $B > 0$, σ, τ, $0 < \sigma < \tau < \min\{1-\sigma, 1/(1+A)\}$, $\eta > 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant 2$, on ait

$$M_f(x) \asymp \frac{x}{\log x} L_f(x) \tag{1·5}$$

uniformément pour $f \in \mathcal{M}(x)$.

2. Voir [18] et [15] pour des extensions de ce résultat.

Dans toute la suite, nous désignons comme *admissible* tout système

$$\{A, B, \sigma, \tau, \eta, \lambda, \delta \mapsto (\varepsilon, y_0)\}$$

satisfaisant aux hypothèses du Théorème 1.1, et, par extension, toute classe $\mathcal{M}(x)$ définie à l'aide d'un tel système. Nous n'avons pas cherché ici à déterminer λ en fonction des autres paramètres, mais une expression explicite pourrait aisément être obtenue en suivant les calculs du paragraphe 2.

Il est facile de voir que des conditions de type (iv) et/ou (v) sont essentiellement nécessaires à la validité du résultat. Si, par exemple, k est un entier fixé au moins égal à 2 et si f est la fonction multiplicative définie par

$$f(p^\nu) := \begin{cases} 1 & \text{si } x^{1/k} < p \leqslant x^{1/k+1/k^2}, \\ 0 & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$

nous avons $f(n) = 0$ pour $x^{1-1/k^2} < n \leqslant x$ puisque le support de f est inclus dans l'ensemble des entiers n possédant au plus $(k-1)$ facteurs premiers, tous majorés par $x^{(k+1)/k^2}$. Il s'ensuit que $M_f(x) \leqslant x^{1-1/k^2}$ alors que le membre de droite de (1·5) est de l'ordre de $x/\log x$.

Nous observons par ailleurs que les conditions (iv) et (v) sont relatives à la même valeur de x que dans (1·5) : cet aspect du théorème est donc de type effectif.

Une première application, immédiate, du Théorème 1.1 est relative à la majoration (1·3).

Corollaire 1.2. *Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Pour tout nombre réel x assez grand et toute classe admissible $\mathcal{M}(x)$, la majoration* (1·3) *a lieu uniformément pour $x^\varepsilon \leqslant y \leqslant x$, $q \leqslant y^{1-\varepsilon}$, $(a,q) = 1$, et toute fonction f de $\mathcal{M}(x)$ vérifiant l'hypothèse (S).*

Cela découle en effet de (1·2) et du fait que, pour $q \leqslant x$, nous avons

$$\sum_{\substack{x^\sigma < p \leqslant x^\tau \\ p \mid q}} \frac{1}{p} \ll \frac{\log_2 x}{x^\sigma} = o(1) \qquad (x \to \infty),$$

où $\log_k$ désigne la k-ième itérée de la fonction logarithme.

Nous pouvons également énoncer le corollaire suivant, dont une démonstration directe semble difficile d'accès alors qu'il résulte instantanément de (1·5) et (1·4). Nous notons $\Omega(n)$ le nombre des facteurs premiers d'un entier n, comptés avec multiplicité.

Corollaire 1.3. *Soient $z > 0$, et f, g deux fonctions multiplicatives liées par la relation $g = fz^\Omega$. Supposons que, pour $x \geqslant 2$, $\max(f,g) \in \mathcal{M}(x)$ où $\mathcal{M}(x)$ est admissible. Alors*

$$\frac{M_g(x)}{x} \asymp (\log x)^{z-1} \Big(\frac{M_f(x)}{x}\Big)^z. \tag{1·6}$$

Une troisième application de notre résultat concerne la question, initialement posée dans [10], de l'indépendance stochastique structurelle d'une fonction multiplicative et d'un caractère additif. Cette problématique est issue du théorème de Daboussi ([9], [7]) selon lequel l'estimation

$$M_f(x; \vartheta) := \sum_{n \leqslant x} f(n) \mathrm{e}^{2\pi i n \vartheta} = o(x) \qquad (x \to \infty) \tag{1·7}$$

est valide, pour chaque nombre irrationnel ϑ, uniformément lorsque f décrit la classe des fonctions arithmétiques multiplicatives complexes de module au plus 1.

Des progrès spectaculaires ont été accomplis par Montgomery et Vaughan [17] pour préciser quantitativement l'évaluation (1·7). Cependant, au vu de l'estimation triviale $|M_f(x;\vartheta)| \leqslant M_{|f|}(x)$, il est souhaitable d'exprimer les résultats en fonction de cette dernière quantité. Cet aspect du problème a été notamment abordé(3) dans [10] — pour $f(n) := y^{\Omega(n)}$ —, dans [11] et [5] — lorsque $f(n)$ est la fonction indicatrice des entiers friables —, dans [6] — lorsque f est une fonction multiplicative à support friable et bornée en moyenne quadratique —, et dans [8] et [12] — lorsque $|f(p)|$ est égal, ou proche en moyenne, d'une constante.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du corollaire 1 de Bachman dans [3] et du Théorème 1.1. Étant donné un système admissible de paramètres, et la classe $\mathcal{M}(x)$ étant définie, pour chaque x assez grand, disons $x > x_0$, à l'aide de ce même système, nous désignons, pour chaque nombre réel $r > 0$, par $\mathcal{M}_r$ la classe des fonctions multiplicatives complexes f à valeurs dans le disque unité vérifiant $|f| \in \cap_{x>x_0}\mathcal{M}(x)$ et

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{|f(p)|}{p} \geqslant r\log_2 x \qquad (x > x_0). \tag{1·8}$$

Corollaire 1.4. *Soit $r > 0$. Pour tout $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ et uniformément pour $f \in \mathcal{M}_r$, nous avons*

$$M_f(x;\vartheta) = o\big(M_{|f|}(x)\big) \qquad (x \to \infty). \tag{1·9}$$

Plus précisément, pour tous $\vartheta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $x \geqslant 2$, $Q := x/(\log x)^3$, tels que $|\vartheta - a/q| \leqslant 1/qQ$, nous avons, uniformément pour $f \in \mathcal{M}_r$,

$$M_f(x;\vartheta) \ll \frac{x}{\log x} + \frac{\{q/\varphi(q)\}^{3/2}}{\sqrt{q}} M_{|f|}(x) \qquad (x > x_0). \tag{1·10}$$

En effet, (1·10) est établie dans [3] avec $xE_{|f|}(x)/\log x$ à la place de $M_{|f|}(x)$.

Il serait intéressant de déterminer des hypothèses minimales pour la validité de (1·9), y compris lorsque l'on s'affranchit de la condition que f est à valeurs dans le disque unité.

Une autre illustration du champ d'applications du Théorème 1.1 consiste en une preuve très simple d'un résultat de type loi forte des grands nombres avec pondération multiplicative. Nous étendons ainsi le théorème 2 de Berkes, Müller et Weber [4], dans lequel les conditions imposées aux coefficients sont significativement plus restrictives.

Nous nous donnons deux paramètres supplémentaires $\alpha \in]0,1[$, $D > 0$, et notons $\mathcal{M}^*(x)$ la sous-classe de $\mathcal{M}(x)$ constituée des fonctions multiplicatives f satisfaisant en outre aux conditions

$$\text{(vi)} \qquad f(n) \leqslant Dn^{1-\alpha} \qquad (n \geqslant 1),$$

$$\text{(vii)} \qquad \forall T > 0\, \exists H > 0 : \sum_{p\leqslant Tyf(p)} \log p \leqslant Hy \qquad (y \geqslant 2).$$

À l'instar de (i), la condition (vii) exprime que les $f(p)$ sont en moyenne bornés. Nous observons que l'une des hypothèses effectuées dans [4], à savoir l'existence d'un $\kappa > 1$ tel que

$$\sum_{p\leqslant y} f(p)^\kappa \log p \ll y \qquad (y \geqslant 2), \tag{1·11}$$

implique immédiatement (vii) : sous cette dernière hypothèse, la contribution au membre de gauche de (vii) des nombres premiers $p > y$ est en effet $\ll \sum_{p>y} \big(yf(p)/p\big)^\kappa \log p \ll y$. Adjointe à la condition (10) de [4],(4) la condition (1·11) implique également (vi) avec $\alpha = (\kappa - 1)/\kappa$.

3. La liste de références qui suit n'est pas exhaustive.
4. Soit $\sum_{p,\,\nu\geqslant 2} f(p^\nu)^\kappa(\log p^\nu)/p^\nu < \infty$.

Étant donné un système admissible, nous désignons par $\mathcal{M}^*$ la classe des fonctions multiplicatives f appartenant à $\mathcal{M}^*(x)$ pour tout x assez grand.

Théorème 1.5. *Soient $f \in \mathcal{M}^*$ et $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables et de même loi. Alors la moyenne*

$$\frac{1}{M_f(x)} \sum_{n \leqslant x} f(n) X_n \tag{1·12}$$

tend presque sûrement vers l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ lorsque x tend vers l'infini. La convergence est uniforme relativement à f dans $\mathcal{M}^*$.

Nous décrivons ci-dessous deux exemples de fonctions f ne vérifiant pas les conditions de [4] mais appartenant à une classe $\mathcal{M}^*$ adéquate. Nous notons $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ la suite croissante des nombres premiers.

(a) Soit f_1 la fonction multiplicative définie par $f_1(p_j) = 1$ si j n'est pas un carré, $f_1(p_j) = \sqrt{j}$ dans le cas contraire et $f_1(p^\nu) = 0$ si $\nu \geqslant 2$. On constate immédiatement grâce au théorème des nombres premiers que f_1 satisfait à l'hypothèse (iii) ; les conditions (ii) et (vi) sont trivialement remplies, et il en va de même des conditions (iv) et (v) pour tous $\tau < 1/(1+A)$, σ assez petit, et, par exemple, $\eta = \frac{1}{2}$ dans (v). On vérifie la condition (vii) en observant que, pour tous $T \geqslant 1$, $y \geqslant 2$, l'inégalité $p \leqslant Tyf_1(p)$ implique soit $p \leqslant Ty$, soit $p = p_j$ avec $j = r^2$ et donc $r \ll Ty/\log y$. Cependant pour tout $\kappa > 1$, on a

$$\sum_{p \leqslant y} f_1(p)^\kappa \log p \asymp y^{(1+\kappa)/2} (\log y)^{(1-\kappa)/2},$$

de sorte que la première hypothèse (1·11) du résultat de [4] n'est pas réalisée.

(b) Considérons une suite $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ à croissance suffisamment rapide, par exemple $x_k = \exp(k^3)$. Définissons alors une fonction multiplicative f_2 par $f_2(p) := 0$ s'il existe un entier k tel que $x_k^{1-1/k^2} < p \leqslant x_k$, et $f_2(p) := 1$ dans le cas contraire. On vérifie sans peine que f_2 satisfait aux hypothèses (i) à (vii) : nous avons par exemple, pour tout σ fixé dans $]0,1[$,

$$\sum_{\substack{x^\sigma < p \leqslant x \\ f(p) \leqslant 1/2}} \frac{1}{p} \ll \sum_{x_k > x^\sigma} \frac{1}{k^2} = o(1) \qquad (x \to \infty).$$

Cependant, comme $\sum_{p \leqslant x_k} f_2(p) \log p \ll x_k^{1-1/k^2} = o(x_k)$, la dernière condition du théorème 2 de [4][5] est en défaut.

2. Preuve du Théorème 1.1

Nous aurons l'usage du résultat auxiliaire suivant.

Lemme 2.1. *Soit $\delta > 0$. Sous les hypothèses (ii) et (iii), il existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta) \in]0,1]$ tel que l'on ait, pour x assez grand,*

$$\sum_{x < n \leqslant (1+\varepsilon)x} f(n) \leqslant \frac{\delta x}{\log x} L_f(x). \tag{2·1}$$

Démonstration. Notons $M_f(x;\varepsilon)$ le membre de gauche de (2·1). Nous avons

$$\begin{aligned} M_f(x;\varepsilon)\log x &\leqslant \sum_{x < mp^\nu \leqslant (1+\varepsilon)x} f(m) f(p^\nu) \log p^\nu \\ &\leqslant \sum_{m \leqslant x} f(m) \Big\{ \sum_{x/m < p \leqslant (1+\varepsilon)x/m} f(p) \log p + \sum_{\substack{x/m < p^\nu \leqslant (1+\varepsilon)x/m \\ \nu \geqslant 2}} f(p^\nu) \log p^\nu \Big\}. \end{aligned}$$

5. Soit $\sum_{p \leqslant y} f(p) \log p \gg y$ pour y assez grand.

La condition (iii) implique que, dans l'accolade, la première somme est $\leqslant \frac{1}{3}\delta x/m$ si $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ est un nombre positif fixé assez petit et $m \leqslant x/y_1(\delta)$; elle est trivialement $\ll_\delta 1$ dans le cas contraire. La seconde n'excède pas

$$\frac{(1+\varepsilon)x}{m} \sum_{\substack{p^\nu > x/m \\ \nu \geqslant 2}} \frac{f(p^\nu)\log p^\nu}{p^\nu}\cdot$$

Quitte à modifier la valeur de $y_1(\delta)$, cette quantité relève donc d'une majoration identique à la précédente. Nous pouvons donc écrire, pour une constante K_δ convenable,

$$M_f(x;\varepsilon) \leqslant \frac{2\delta x}{3\log x} L_f(x) + \frac{K_\delta}{\log x} M_f(x).$$

Le résultat annoncé découle alors de (1·1). □

Nous sommes à présent en mesure d'établir le Théorème 1.1. Dans toute la suite, nous notons $P^+(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier naturel n avec la convention $P^+(1) = 1$.

Commençons par établir la relation (1·4). Comme $f(1) = 1$, nous pouvons supposer x arbitrairement grand.

La majoration est immédiate au vu des inégalités

$$L_f(x) \leqslant \sum_{P^+(n)\leqslant x} \frac{f(n)}{n} = \prod_{p\leqslant x}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \leqslant E_f(x)\exp\Big\{\sum_{p,\nu\geqslant 2}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\Big\}.$$

Pour établir la minoration, nous nous donnons un paramètre $\varepsilon \in]0,1[$ et considérons la somme friable

$$S_f(\varepsilon;x) := \sum_{\substack{n>x \\ P^+(n)\leqslant x^\varepsilon}} \frac{\mu(n)^2 f(n)}{n},$$

où μ désigne la fonction de Möbius. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, nous pouvons écrire

$$S_f(\varepsilon;x) \leqslant \frac{1}{x^\alpha}\sum_{P^+(n)\leqslant x^\varepsilon}\frac{\mu(n)^2 f(n)}{n^{1-\alpha}} = \frac{1}{x^\alpha}\prod_{p\leqslant x^\varepsilon}\Big(1+\frac{f(p)}{p^{1-\alpha}}\Big).$$

Pour le choix $\alpha := 1/(\varepsilon \log x)$, nous avons $p^\alpha = 1 + O(\alpha\log p)$ pour chaque $p \leqslant x^\varepsilon$. Ainsi

$$S_f(\varepsilon;x) \leqslant \mathrm{e}^{-1/\varepsilon + O(\alpha T)} E_f(x^\varepsilon),$$

où l'on a posé

$$T := \sum_{p\leqslant x^\varepsilon}\frac{f(p)\log p}{p} = \int_2^\infty \sum_{p\leqslant \min(t,x^\varepsilon)} f(p)\log p\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant A\frac{1+\alpha}{\alpha}\cdot$$

Il s'ensuit que pour $\varepsilon = \varepsilon(A)$ assez petit et x assez grand, nous avons $S_f(\varepsilon;x) \leqslant \frac{1}{2}E_f(x^\varepsilon)$, et donc

$$L_f(x) \geqslant \sum_{\substack{n\leqslant x \\ P^+(n)\leqslant x^\varepsilon}}\frac{\mu(n)^2 f(n)}{n} = E_f(x^\varepsilon) - S_f(\varepsilon;x) \geqslant \tfrac{1}{2}E_f(x^\varepsilon).$$

On conclut en observant que, pour x assez grand, la relation (i) implique, via une sommation d'Abel standard,

$$\frac{E_f(x)}{E_f(x^\varepsilon)} = \prod_{x^\varepsilon < p \leqslant x} \Big(1 + \frac{f(p)}{p}\Big) \leqslant \mathrm{e}^A \varepsilon^{-A}, \tag{2·2}$$

d'où

$$L_f(x) \geqslant \frac{\varepsilon^A}{2\mathrm{e}^A} E_f(x).$$

Prouvons à présent la seconde assertion du Théorème 1.1. Au vu de (1·1), seule la minoration de $M_f(x)$ est à démontrer. Posons $w := x^\tau$ et considérons la fonction multiplicative $f_w := \mu^2 f \chi_w$ où χ_w est la fonction indicatrice des entiers w-friables.

Soit $u > 0$. Notant $\alpha := u/\log w = (1 + Ah)u/\log x$, nous avons

$$\sum_{n > x^{1-\tau}} \frac{f_w(n)}{n} \leqslant \frac{1}{x^{\alpha(1-\tau)}} \prod_{p \leqslant w} \Big(1 + \frac{f(p)}{p^{1-\alpha}}\Big) \leqslant E_f(w)\mathrm{e}^{-Ahu+S} \tag{2·3}$$

avec

$$S := \sum_{p \leqslant w} \frac{f(p)(p^\alpha - 1)}{p} \leqslant (w^\alpha - 1)\Big(A + \frac{A}{\log w}\Big) = A\{\mathrm{e}^u - 1\} + o(1),$$

de sorte que l'exposant de l'exponentielle dans (2·3) vaut $A\{\mathrm{e}^u - 1 - uh\}$. Pour le choix $u = \log h$, nous obtenons

$$\sum_{n \leqslant x^{1-\tau}} \frac{f_w(n)}{n} \geqslant \Big\{1 - \mathrm{e}^{-AQ(h)+o(1)}\Big\} E_f(w) \qquad (x \to \infty).$$

Par ailleurs, il découle de l'hypothèse (iv) que

$$\sum_{n \leqslant x^\sigma} \frac{f_w(n)}{n} \leqslant E_f(x^\sigma) = E_f(w) \prod_{x^\sigma < p \leqslant x^\tau} \Big(1 + \frac{f(p)}{p}\Big)^{-1} \leqslant E_f(w) \frac{1 - \mathrm{e}^{-AQ(h)} + o(1)}{1 + \eta},$$

lorsque $x \to \infty$. Il suit

$$\sum_{x^\sigma < n \leqslant x^{1-\tau}} \frac{f_w(n)}{n} \asymp E_f(w) \asymp E_f(x). \tag{2·4}$$

Notons $F_w(t)$ la fonction sommatoire de f_w et observons que

$$F_w(t) \ll \frac{tE_f(x)}{\log x} \qquad (x^\sigma \leqslant t \leqslant x^{1-\tau}) \tag{2·5}$$

en vertu de (1·1) et (1·4). Nous pouvons récrire la somme figurant au membre de gauche de (2·4) sous la forme

$$\left[\frac{F_w(t)}{t}\right]_{x^\sigma}^{x^{1-\tau}} + \int_{x^\sigma}^{x^{1-\tau}} \frac{F_w(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

où le terme tout intégré est $\ll E_f(x)/\log x = o\big(E_f(x)\big)$. Nous avons donc

$$\int_{x^\sigma}^{x^{1-\tau}} \frac{F_w(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \asymp E_f(x). \tag{2·6}$$

Considérons alors, pour $\delta > 0$, l'ensemble $A(w, \delta)$ des nombres réels t de $\left[x^\sigma, x^{1-\tau}\right]$ tels que $F_w(t) \geqslant \delta t E_f(x)/\log x$. Compte tenu de (2·5), il découle de (2·6) que

$$\log x \ll \delta \log x + \int_{A(w,\delta)} \frac{\mathrm{d}t}{t}, \tag{2·7}$$

où la constante impliquée dépend de l'ensemble des paramètres mais pas de δ. Observons à présent que, pour tout $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ assez petit et x assez grand, le Lemme 2.1 implique que

$$[t, t(1+\varepsilon)] \subset A(w, \delta/2)$$

dès que $t \in A(w; \delta)$. Il existe donc une suite finie $\{t_j\}_{j=1}^r$ vérifiant $t_{j+1} > (1+\varepsilon)t_j$ $(1 \leqslant j < r)$ et telle que

$$A(w, \delta) \subset \bigcup_{j=1}^{r} \left[t_j, t_j(1+\varepsilon)\right] \subset A(w, \tfrac{1}{2}\delta). \tag{2·8}$$

D'où, par (2·7), $\varepsilon r \gg \log x$. Cependant, le théorème des nombres premiers implique, pour tout $j \in [1, r]$,

$$\sum_{t_j < x/p \leqslant t_j(1+\varepsilon)} \frac{1}{p} \gg \frac{\varepsilon}{\log x}\cdot$$

Compte tenu de (2·8), nous en déduisons que l'on a

$$\sum_{x/p \in A(w,\delta/2)} \frac{1}{p} \gg 1,$$

et donc, pour $\lambda > 0$ assez petit, en vertu de la condition (v),

$$\sum_{x/p \in A(w,\delta/2)} \frac{f(p)}{p} \gg 1.$$

Il suit

$$M_f(x) \geqslant \frac{\tau}{1+\tau} \sum_{\substack{np \leqslant x \\ x^\tau < p \leqslant x^{1-\sigma}}} f(np) \geqslant \frac{\tau}{1+\tau} \sum_{x/p \in A(w,\delta/2)} f(p) F_w\Big(\frac{x}{p}\Big) \gg \frac{x E_f(x)}{\log x}\cdot$$

3. Preuve du Théorème 1.5

D'après le théorème 3 de [16], la loi forte des grands nombres, i.e., dans les conditions de l'énoncé, la convergence presque sûre de la moyenne (1·12) vers l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$, est réalisée si, et seulement si, nous avons

$$N_f(x) := \sum_{x f(n) \geqslant M_f(n)} 1 \ll x \quad (x \geqslant 1).$$

D'après la condition (vi), et puisque $M_f(n) \gg n/\log n$, la somme $N_f(x)$ porte, pour x assez grand, sur des entiers n n'excédant pas x^β avec, par exemple, $\beta := 2/\alpha$.

Soit $N_f^*(x)$ la contribution à $N_f(x)$ des entiers n de l'intervalle $]x,x^\beta]$. Il existe une constante K, dépendant au plus des paramètres de définition de la classe $\mathcal{M}^*$ telle que, posant $z:=Kx(\log x)/E_f(x)$, nous ayons

$$N_f^*(x)\log x\leqslant\sum_{\substack{x<n\leqslant x^\beta\\ zf(n)\geqslant n}}\log n\leqslant\sum_{m\leqslant x^\beta}\sum_{zf(m)f(p^\nu)\geqslant mp^\nu}\log p^\nu.$$

Comme $f(p^\nu)\leqslant p^\nu$ pour p^ν assez grand, nous pouvons, quitte à modifier la valeur de K, restreindre le domaine de sommation aux entiers m tels que $zf(m)\geqslant m$. Il s'ensuit que la somme intérieure n'excède pas

$$\sum_{p\leqslant zf(p)f(m)/m}\log p+\sum_{p,\,\nu\geqslant 2}\frac{zf(m)f(p^\nu)\log p^\nu}{mp^\nu}\ll\frac{zf(m)}{m},$$

en vertu des conditions (ii) et (vii).

Nous avons donc

$$N_f^*(x)\ll\frac{z}{\log x}\sum_{m\leqslant x^\beta}\frac{f(m)}{m}\ll\frac{zE_f(x)}{\log x}\ll x,$$

où l'avant-dernière majoration résulte de (1·4) et (2·2).

Bibliographie

[1] G. Bachman, Some remarks on nonnegative multiplicative functions on arithmetic progressions, *J. Number Theory* **73** (1998), 72-91.

[2] G. Bachman, On a Brun-Titchmarsh inequality for multiplicative functions, *Acta Arith.* **106**, n° 1 (2003), 1–25.

[3] G. Bachman, On exponential sums with multiplicative coefficients, II, *Acta Arith.* **106** (2003), n°1, 41–57.

[4] I. Berkes, W. Müller, & M. Weber, On the law of large numbers and arithmetic functions, *Indag. Math.* **23** (2012), 547–555.

[5] R. de la Bretèche, Sommes d'exponentielles et entiers sans grand facteur premier, *Proc. London Math. Soc.* (3) **77** (1998), 39–78.

[6] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Entiers friables : inégalité de Turán–Kubilius et applications, *Invent. Math.* **159** (2005), 531–588.

[7] H. Daboussi, La méthode de convolution, in : J. Coquet (éd.), *Théorie élémentaire et analytique des nombres*, Journées SMF–CNRS de Valenciennes, Dép. Math. Univ. Valenciennes (1982), 26–29.

[8] H. Daboussi, On some exponential sums, in *Analytic number theory* (Allerton Park, IL, 1989), 111–118, Progr. Math. 85, Birkhäuser, Boston, MA, 1990.

[9] H. Daboussi & H. Delange, Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.* A **278** (1974), 657–660.

[10] Y. Dupain, R.R. Hall & G. Tenenbaum, Sur l'équirépartition modulo 1 de certaines fonctions de diviseurs, *J. London Math. Soc. (2)***26** n° 3, (1982), no. 3, 397–411.

[11] É. Fouvry & G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.

[12] L. Goubin, Sommes d'exponentielles et principe de l'hyperbole, *Acta Arith.* **73**, n° 4 (1995), 303–324.

[13] H. Halberstam & H.-E. Richert, On a result of R.R. Hall, *J. Number Theory* (1) **11** (1979), 76–89.

[14] R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge Tracts in Mathematics 90, Cambridge, 1988.

[15] K. Henriot, Nair–Tenenbaum bounds uniform with respect to the discriminant, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **152** (2012), no. 3, 405–424 ; Erratum, *ibid.* **157** (2014), no. 2, 375–377.

[16] B. Jamison, S. Orey, W. Pruitt, Convergence of weighted averages of independent random variables, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **4** (1965), 40–44.

[17] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, Exponential sums with multiplicative coefficients, *Invent. Math.* **43** (1977), 69–82.

[18] M. Nair & G. Tenenbaum, Short sums of certain arithmetic functions, *Acta Math.* **180**, (1998), 119–144.

[19] P. Shiu, A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions, *J. reine angew. Math.* **313** (1980), 161–170.

[20] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième édition, coll. Échelles, Belin, 2008, 592 pp.

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Lorraine
BP 70239
54506 Vandœuvre Cedex
France

internet : gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr