



Le paradoxe du Monty Hall est-il vraiment résolu?

Léo Gerville-Réache

► **To cite this version:**

| Léo Gerville-Réache. Le paradoxe du Monty Hall est-il vraiment résolu?. 2015. <hal-01245148v2>

HAL Id: hal-01245148

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01245148v2>

Submitted on 19 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Le paradoxe du Monty Hall est-il vraiment résolu?

Léo Gerville-Réache

IMB - UMR 5251 - Université de Bordeaux

Le paradoxe du Monty Hall est un paradoxe apparu essentiellement en septembre 1990 dans la rubrique "Ask Marilyn" du Parade Magazine. La question était précisément la suivante : *"Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors. Behind one door is a car, behind the others, goats. You pick a door, say #1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say #3, which has a goat. He says to you, "Do you want to pick door #2?" Is it to your advantage to switch your choice of doors? Craig F. Whitaker, Columbia, Maryland"*. Les débats entre les "pro-switch" et les "neutre-switch" furent relativement violents. Nous revenons dans ce papier sur ce paradoxe dont les arguments des uns et des autres traduisent en réalité des conceptions différentes de la notion de probabilité. Aussi nous montrons qu'il est en réalité très délicat de trancher vers une solution unilatérale. Cela même si l'énoncé initial, relativement ambigu, est décomposé en plusieurs variantes, chacune ne laissant apparemment plus aucune place à l'ambiguïté.

Souvent, un "paradoxe" semble émerger alors qu'en réalité, il s'agit d'une ambiguïté dans l'énoncé. Le paradoxe de Bertrand est un exemple bien connu pour cela. Aussi, parmi les pistes d'analyse et finalement de résolution d'un paradoxe, la recherche d'une ambiguïté est une démarche nécessaire (parmi d'autres). Il se peut alors que, finalement, plusieurs variantes se dégagent, chacune donnant une solution différente. On explique alors clairement les sources du paradoxe et les choses rentrent dans l'ordre. Par exemple, l'énoncé suivant ne laisse visiblement plus aucune ambiguïté sur le processus du jeu et "switcher" apparaîtrait comme incontestablement optimal.

Un énoncé actuel exempt d'ambiguïté (apparemment...)

"Un énoncé non équivoque du problème, incluant donc expressément les contraintes du présentateur, décrit par Mueser et Granberg (1999) comme suit (Source, Wikipédia 2015):

- *Derrière chacune des trois portes se trouve soit une chèvre, soit une voiture, mais une seule porte donne sur une voiture alors que deux portes donnent sur une chèvre. La porte cachant la voiture a été choisie par tirage au sort.*
- *Le joueur choisit une des portes, sans que toutefois ce qui se cache derrière (chèvre ou voiture) soit révélé à ce stade.*
- *Le présentateur sait ce qu'il y a derrière chaque porte.*
- *Le présentateur doit ouvrir l'une des deux portes restantes et doit proposer au candidat la possibilité de changer de choix quant à la porte à ouvrir définitivement.*
- *Le présentateur ouvrira toujours une porte derrière laquelle se cache une chèvre, en effet :
 - *Si le joueur choisit une porte derrière laquelle se trouve une chèvre, le présentateur ouvrira l'autre porte où il sait que se trouve également une chèvre.*
 - *Et si le joueur choisit la porte cachant la voiture, le présentateur choisit au hasard parmi les deux portes cachant une chèvre. (on peut supposer qu'un tirage au sort avant l'émission a décidé si ce serait la plus à droite ou à gauche).**
- *Le présentateur doit offrir la possibilité au candidat de rester sur son choix initial ou bien de revenir dessus et d'ouvrir la porte qui n'a été choisie ni par lui-même, ni par le candidat.*

La question qui se pose alors est :

- *Le joueur augmente-t-il ses chances de gagner la voiture en changeant son choix initial?*
- *Ou formulé autrement, cela revient à dire : Est-ce que la probabilité de gagner en changeant de porte est plus grande que la probabilité de gagner sans changer de porte?*
- *Ou encore : Quelle est la meilleure stratégie : Faire un nouveau choix ou rester avec le choix initial ? Les chances de gain vont-elles augmenter, diminuer ou bien resteront-elles les mêmes?"*

Si le processus de désignation par le joueur et le présentateur est parfaitement explicité et sans ambiguïté, cela n'est pas le cas de la (ou des) question(s) posée(s) en fin d'énoncé. Si ces formulations vous semblent parfaitement claires, je vous renvoie par exemple aux écrits de De Scheemaekere X. (2012) sur le concept de probabilité, sur les écrits autour du paradoxe Newcomb sur le concept de stratégie optimale (élimination des stratégies fortement dominées VS maximisation de l'utilité espérée) ou encore sur le concept "d'intérêt à faire..." dans Gerville-Réache (2015a).

En effet, prenons la formulation première de la question : *Le joueur augmente-t-il ses chances de gagner la voiture en changeant son choix initial?* Qu'entend-on par là? En particulier, il manque une précision essentielle. "*Le joueur augmente-t-il ses chances de gagner la voiture en changeant son choix initial, cette fois-ci?*" ou bien *Le joueur augmente-t-il ses chances de gagner la voiture en changeant son choix initial, systématiquement?* Ha! Cela semble sans aucune importance! Et pourtant, si l'on regarde la version avec l'ajout du terme *systématiquement*, on associe les termes "chances de gagner la voiture" au concept fréquentiste de la probabilité (concept statistique via la loi des grands nombres). Ce choix implique en particulier que la connaissance, par le joueur, de la porte effectivement ouverte par le présentateur (à chaque répétition du jeu), n'aura aucune influence sur la stratégie du joueur.

Pour le joueur, l'optimalité de la stratégie est donc définie par la fréquence de victoire (gagner la voiture) sur un grand nombre de répétitions du jeu, et cela en appliquant soit systématiquement le "je swiche" soit systématiquement le "je garde". Il est ici clair que le "je swiche" produira en moyenne 2/3 de victoire et le "je garde", seulement 1/3. Aussi, dans une conception fréquentiste de la probabilité, la stratégie de switcher systématiquement est ici optimale (NB : cela, quelque soit la porte ouverte par le présentateur). Soit... mais il est alors inutile de préciser le processus de choix d'ouverture de porte par le présentateur. En effet la stratégie ne dépendant pas de ce processus et seule l'élimination d'une porte est importante ; la stratégie étant systématique, les dites ambiguïtés sur l'énoncé et en particulier, celle qui semble centrale (*si le joueur choisit la porte cachant la voiture, le présentateur choisit au hasard parmi les deux portes cachant une chèvre*) sont, par définition, sans importance.

Cette courte évocation de la problématique de l'optimalité d'une stratégie montre que l'absence de précision sur le choix du concept de probabilité est en réalité l'un des points essentiels du débat. En effet, si le "je swiche systématiquement" produit nécessairement une fréquence de victoire de 2/3 (supérieure au 1/3 du "je garde systématiquement"), existe-t-il d'autres concepts de la probabilité qui produisent des stratégies optimales différentes? En particulier, avec quelle conception de la probabilité, et sous quel processus d'ouverture du présentateur, la stratégie du "je swiche systématiquement" n'est plus optimale?

Quelques variantes...

Dans les trois variantes qui suivent, présentées par exemple par Delahaye (2005), Sindbad est le joueur et le vizir est le présentateur.

1. Après le choix initial de Sindbad, le vizir ouvre au hasard une des deux portes non choisies. S'il découvre le trésor, la partie est annulée et la partie est recommencée. Est-il encore vrai que Sindbad a intérêt à changer de choix lors des parties qui ne sont pas annulées?

2. Après le choix initial de Sindbad, le vizir ouvre au hasard une des deux portes ne donnant sur rien. S'il ouvre la porte choisie par le joueur, la partie est annulée et la partie est recommencée. Même question : Sindbad doit-il changer?

3. Lorsque le trésor se trouve derrière la porte choisie par Sindbad, le vizir, qui normalement doit choisir au hasard entre les deux autres, choisit systématiquement la porte la plus à gauche parmi les portes restantes (si le joueur a choisi A et qu'elle cache le trésor, le vizir ouvre donc la porte B). Même question : Sindbad doit-il changer?

Dans ces trois variantes, Delahaye conclut que la stratégie systématique qui consiste à changer conduit à une fréquence de victoire $2/3$. Pourrait-il en être autrement? C'est possible pour les variantes 1 et 2. En effet, ces deux variantes ne prennent pas en compte toutes les parties commencées. Aussi, il convient d'être prudent sur les conséquences d'une telle sélection. En revanche, la variante 3 prend bien en compte toutes les parties commencées et par conséquent, la fréquence de victoire de la stratégie systématique de changer sera nécessairement de $2/3$.

Pour la variante 1, il est clair que la probabilité au sens fréquentiste d'annuler la partie est de 0 si le joueur a choisi la bonne porte (celle avec le trésor) au départ. La variante 1 augmente la fréquence de victoire de la stratégie "je garde systématiquement". Les deux stratégies systématiques (garde VS change) sont ici équivalentes avec des fréquences de victoires de $1/2$ pour chacune.

Pour la variante 2, ce sont les parties où le vizir ouvre la porte choisie initialement par Sindbad qui sont annulées. Ici, lorsque Sindbad ne choisit pas la bonne porte au départ, la probabilité d'annulation de la partie est de $1/2$ alors que cette probabilité est de 0 si Sindbad choisit la bonne porte au départ. Cela conduit aussi à l'égalité des fréquences de victoires des deux stratégies systématiques.

Les variantes 1 et 2 montrent que l'ambiguïté sur le processus d'ouverture du présentateur peut conduire à des variantes qui, même dans un cadre fréquentiste, produisent des stratégies optimales différentes. Aussi, dans la formulation initiale de Whitaker, les ambiguïtés, sur la certitude (ou pas) de révéler une porte qui cachait une chèvre et la certitude (ou pas) de révéler une porte autre que celle choisie au départ par le joueur, rendent possible une optimalité (au sens fréquentiste) différente. Pour autant, il existe une source d'ambiguïté et de confusion plus importante encore. Celle-ci est directement liée au concept de probabilité conditionnelle VS situationnelle. Cette distinction a été introduite et utilisée dans l'analyse du paradoxe des deux enveloppes par Gerville-Réache (2015b).

La référence à la probabilité conditionnelle...

Ici, nous sortons de l'analyse dans le cadre fréquentiste du concept de probabilité pour nous appuyer sur le concept plus général de Kolmogorov de la probabilité et plus particulièrement de probabilité conditionnelle : Kolmogorov (1933) introduit, page 6 de son ouvrage (*Foundation of the theory of probability*), la probabilité conditionnelle comme suit : "If $P(A) > 0$, then the quotient

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

is defined to be the conditional probability of the event B under the condition A."

NB: $P(AB)$ signifie $P(A \cap B)$ et $P_A(B)$ est indifféremment noté de nos jours : $P(B|A)$.

En appliquant cette définition, que doit-on conclure de la probabilité que la voiture soit derrière la porte #1 (choisie au départ) sous la condition qu'une chèvre soit derrière la porte #3. Il est essentiel de noter qu'ici, le processus d'ouverture du présentateur n'intervient pas. En effet, il n'est pas un fait ici qu'une chèvre est derrière la porte #3, c'est seulement une hypothèse. Aussi, on a :

$$P_{\#3=\text{chèvre}}(\#1 = \text{voiture}) = \frac{P(\#1 = \text{voiture} \cap \#3 = \text{chèvre})}{P(\#3 = \text{chèvre})} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

Cette probabilité de 1/2 ne dépend pas des numéros de portes! Par exemple, le joueur choisissant la porte #3 au départ, on a également : $P_{\#2=\text{chèvre}}(\#3 = \text{voiture}) = 1/2$. Voici le point d'achoppement fondamental du paradoxe : quelque soit la porte par laquelle on conditionne la probabilité que la porte choisie au départ par le joueur soit la bonne, la probabilité conditionnelle à une porte cachant hypothétiquement une chèvre, vaut 1/2 et pas 1/3! Ici la probabilité conditionnelle, bien que ne variant pas d'un conditionnement à l'autre, ne coïncide pas avec la probabilité inconditionnelle.

Mais alors, à quoi doit-on faire référence pour définir une stratégie optimale. L'analyse via la probabilité conditionnelle nous dit que toutes les probabilités conditionnelles sont de 1/2 et ne dépendent donc pas du conditionnement et pourtant la probabilité inconditionnelle que la voiture se trouve derrière la porte choisie au départ vaut clairement 1/3!

Le paradoxe est à son comble. En effet, faire référence à la probabilité inconditionnelle qui vaut 1/3 et qui est en cohérence avec l'optimalité (au sens fréquentiste) de la stratégie systématique du switch, **c'est abandonner l'idée-force que lorsque l'ensemble des probabilités conditionnelles associées à un événement sont égales, la probabilité inconditionnelle doit alors être de cette même valeur**. Voilà un bien intéressant dilemme discuté dès 2005 par Dietrich et List.

Conclusion

L'analyse du paradoxe du Monty Hall n'est pas aussi simple que l'on pourrait sembler le croire. La conception fréquentiste de la probabilité, cachée en réalité dans le consensus actuel autour de l'optimalité du switch dans la version dite "sans ambiguïté" de Mueser et Granberg n'est pas satisfaisante. Elle laisse sans réponse un problème essentiel de cohérence par rapport au concept de probabilité conditionnelle. C'est ce problème qui semble également être au cœur de l'analyse du paradoxe des deux enveloppes et de la position très critique de Hájek (2003) sur la définition même de la probabilité conditionnelle de Kolmogorov. Le concept de probabilité situationnelle a alors émergé (Gerville-Réache 2015b). Sans résoudre nécessairement tous les problèmes, ce dernier concept distingue une probabilité relative à une hypothèse (probabilité conditionnelle) et une probabilité relative à un fait (probabilité situationnelle).

En particulier, dans un jeu unique, où la conception fréquentiste de la probabilité perdre clairement de sa pertinence comme référence, c'est certainement la distinction entre probabilité conditionnelle et situationnelle qui permet de rationaliser la pertinence, ou pas, du switch. Typiquement, dans l'énoncé de Mueser et Granberg, le joueur ayant choisi au départ la porte #1, à la question "*Le joueur augmente-t-il ses chances de gagner la voiture en changeant son choix initial?*", la réponse NON est cohérente, si l'on suppose qu'une chèvre se trouve derrière la porte #3. Mais la réponse OUI est cohérente dès qu'il s'avère qu'une chèvre se trouve derrière la porte #3! Enfin, si l'on suppose que le présentateur va ouvrir la porte #3,

alors c'est le OUI qui est également cohérent! Comme l'écrivait Raymond Smullyan en 1993 : "Ça y est je suis fou".

En réalité, cette difficulté théorique est due au fait que si le présentateur ouvre la porte #3, cela implique nécessairement qu'il y a une chèvre derrière la porte #3 (dans la version de Mueser et Granberg), mais réciproque est fautive. En effet, s'il y a une chèvre derrière la porte #3, cette porte ne sera pas nécessairement ouverte par le présentateur. Aussi, le conditionnement par l'hypothèse qu'il y aurait une chèvre derrière la porte #3 n'est pas adapté au problème. Seul un énoncé parfaitement clair sur le processus d'ouverture et le conditionnement par l'hypothèse que le présentateur ouvre la porte #3 ou encore l'utilisation d'une probabilité situationnelle (relative au fait que le présentateur ait effectivement ouvert la porte #3) permet une approche cohérente avec l'approche fréquentiste.

On retrouve cette difficulté également dans un paradoxe d'apparence plus simple et qui n'a curieusement pas connu de polémique. Il s'agit du paradoxe des trois pièces de Galton : *On lance trois pièces de monnaie. Quelle est la probabilité que toutes trois retombent du même côté, que ce soit pile ou face ? Un sur quatre, c'est clair. Pourtant, si je lance trois pièces, il y en a forcément deux qui tomberont du même côté ; la troisième a donc une chance sur deux d'être tombée du même côté que les deux autres. Donc il y a une chance sur deux que les trois pièces soient tombées du même côté!* Voir par exemple l'analyse sur le site <http://mesparadoxespreferes.monsite-orange.fr/>

Bibliographie

- [1] De Scheemaekere X. (2012). *Fondements philosophiques du concept de probabilité*. Eme (Modulaires Européennes).
- [2] Delahaye, J.P. (2005). Le trésor et les Sophies. *Pour la science* N°336, 90-94.
- [3] Dietrich F., List C. (2005). The Two-Envelope Paradox: An Axiomatic Approach, *Mind New Series*, Vol. 114, No. 454 , pp. 239-248.
- [4] Gerville-Réache L. (2015a). Note sur le paradoxe des deux portefeuilles (Wallet paradox). *hal-01139292v1*
- [5] Gerville-Réache L. (2015b). Quand la probabilité conditionnelle croise la statistique, *CFIES*, Bordeaux, 6p.
- [6] Hájek A. (2003). What Conditional Probability Could Not Be, *Synthese*, Volume 137, Issue3, pp. 273-323.
- [7] Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse Der Mathematik; Foundation of the theory of probability*, Chelsea Publishing Company, 1950.
- [8] Mueser, Peter R. & Granberg, Donald (1999). The Monty Hall Dilemma Revisited: Understanding the Interaction of Problem Definition and Decision Making. *University of Missouri. Working Paper* 99-06. Retrieved 2010.
- [9] Problème de Monty Hall. (2015, octobre 24). *Wikipédia, l'encyclopédie libre*.
- [10] Vos Savant, M. (1990), Ask Marilyn, *Parade Magazine*.