Correspondance entre élèves : conditions d’une activité mathématique “ créative ” et problématisée à la fin du lycée

Magali Hersant

► To cite this version:

Magali Hersant. Correspondance entre élèves : conditions d’une activité mathématique “ créative ” et problématisée à la fin du lycée. Educational Studies in Mathematics, 2011, 78 (3), pp.343-370. 10.1007/s10649-011-9327-0 . hal-01217992

HAL Id: hal-01217992

<https://hal.science/hal-01217992>

Submitted on 10 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Correspondance entre élèves : conditions d'une activité mathématique « créative » et problématisée à la fin du lycée

Magali HERSANT – IUFM des Pays de la Loire – CREN

Abstract : Nous caractérisons les raisonnements utilisés par des élèves de classes de Terminale Scientifique en France (élèves de 18 ans) dans une « correspondance mathématique » visant à résoudre un problème et cherchons à savoir si ces élèves mobilisent des raisonnements créatifs et problématisés. Les résultats obtenus montrent que, dans les conditions expérimentales de cette correspondance, les élèves de la fin du lycée ont une activité mathématique peu ordinaire, plus créative et plus problématisée qu'à l'habitude. Cela nous conduit à étudier les conditions qui ont permis à une telle activité de se développer et à proposer des pistes pour utiliser un tel dispositif dans les classes afin de permettre des apprentissages dans le domaine de la résolution de problème en mathématiques et de faciliter la transition secondaire-supérieur.

Keywords : transition secondaire-supérieur, résolution de problème, raisonnement créatif, problématisation, conceptualisation, maximum d'une fonction

1. Introduction

Cet article trouve son origine dans les travaux du groupe ECCEmaths¹. Suite à des remarques de nos collègues de l'Université déplorant le manque de capacité des étudiants à mener une activité de recherche de problèmes mathématiques, nous avons entrepris de cerner ce que signifie se mettre en situation de recherche d'un problème mathématique pour un élève de la fin du lycée ou du début de l'Université. Nous nous sommes en particulier donné pour objectif d'identifier les capacités des élèves de ce niveau à chercher et résoudre des problèmes. En effet, même si des résultats de recherche semblent aller dans le même sens que les remarques des collègues de l'Université (pour une synthèse, voir Gueudet, 2008), il nous a paru important de renseigner encore la question. Accepter ainsi cette remarque reviendrait en effet à accepter, d'une certaine façon, un échec de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire. L'enjeu est donc de taille. C'est ainsi que nous avons organisé une « correspondance mathématique » entre des lycéens et des élèves de première ou seconde année du supérieur (étudiants de 18 ans et plus) pour étudier les capacités des lycéens en matière de résolution de problème. Les productions des élèves recueillies dans ce cadre ont étonné les enseignants : elles témoignent de la capacité des élèves à avoir une activité mathématique plus riche que celle qu'ils laissent voir habituellement à leurs professeurs : sans être de très bons élèves, ils imaginent des procédures de résolution originales, émettent des conjectures, se montrent critiques quant à leurs résultats, se posent des questions et, dialectiquement, font évoluer leur conception d'une notion mathématique (le maximum d'une fonction).

L'objet de cet article est de présenter et de discuter les résultats concernant les capacités de résolution de problème des lycéens obtenus dans ces conditions particulières. Pour cela, nous situons d'abord notre travail dans le contexte plus large des travaux didactiques réalisés sur la transition secondaire-supérieur en mathématiques et précisons le cadre théorique utilisé pour analyser les productions des élèves. Puis, après avoir présenté l'analyse détaillée de deux correspondances de lycéens et les résultats obtenus sur l'ensemble des correspondances, nous cherchons à identifier les conditions qui ont permis aux élèves d'avoir une activité mathématique plus riche que celle donnée à voir habituellement à leur professeur. Cela nous invite ensuite à envisager l'utilisation d'un dispositif similaire dans les classes pour permettre des apprentissages dans le domaine de la résolution de problème.

2. Problématique

2.1. Les raisonnements des élèves dans la transition secondaire-supérieur : une tension entre ce qui est possible et ce qui est donné à voir

Le constat de certains enseignants du supérieur à l'origine des travaux du groupe ECCE n'est pas isolé et rejoint des résultats de travaux en didactique des mathématiques. Dans sa synthèse récente sur la transition secondaire – supérieur, Gueudet (2008) montre que trois aspects de cette transition susceptibles de générer des difficultés pour les élèves sont considérés dans les recherches : les modes de pensée et l'organisation des connaissances ; la question de la preuve et de la communication des mathématiques ; la transposition didactique et le contrat

¹ Recherche INRP – IUFM des Pays de la Loire – IREM de Nantes « ECCEmaths » qui vise à comprendre à quoi correspond la recherche d'un problème de mathématiques pour des élèves de la fin du lycée (élèves de 18 ans) et du début de l'université. Pour plus de précision, voir le site : <http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/archives/partenariat-inrp-08-09/eccemaths/>

didactique. Il ressort qu'une certaine flexibilité des connaissances et une certaine autonomie dans la résolution d'un problème sont attendues des étudiants à l'Université alors qu'elles leur font défaut : leurs connaissances sont rigides et peu structurées.

Par ailleurs, d'autres travaux nous renseignent sur l'activité des étudiants. Lithner notamment étudie les raisonnements utilisés par des étudiants de premières années à l'Université (Lithner, 2000, 2003, 2008) et distingue deux grands types de raisonnements : les raisonnements de type « imitatifs » où les élèves reprennent des raisonnements utilisés, voire institutionnalisés en classe (par exemple sous la forme de méthodes), en référence à leur expérience plus qu'aux propriétés mathématiques ; les raisonnements « créatifs » où les élèves font preuve d'une certaine autonomie et fondent leur raisonnement sur les propriétés mathématiques intrinsèques des objets. Les tests que Lithner réalise concernent la résolution de tâches intermédiaires entre tâches routinières et « authentiques » problèmes de recherche. Dans ces conditions, les étudiants mobilisent peu de raisonnements « créatifs » et beaucoup de raisonnements basés sur des expériences mathématiques antérieures non questionnées. Ils utilisent des indices de surface pour mobiliser leurs connaissances et résoudre le problème sans mettre en jeu une compréhension approfondie des concepts, ce qui les conduit à des résultats faux qu'ils questionnent peu ou à des non-résolutions. Ainsi, Lithner montre que les étudiants de première année de l'Université ne questionnent pas les savoirs en jeu dans les problèmes et cherchent plus à produire (rapidement) une solution du problème qu'à construire le problème et les nécessités associées. Si l'on considère à la suite de Fabre et Orange (Orange, 2005a, 2005b) que problématiser signifie construire le champ des possibles et des nécessités qui organisent le problème, on peut dire que Lithner montre que les étudiants ne problématisent pas : ils considèrent les problèmes proposés essentiellement comme des problèmes techniques et ne cherchent pas à identifier les nécessités qui les fondent. Comme l'indique Lithner, cela a pour conséquence de brider les possibilités d'apprentissages mathématiques, dans la mesure où la résolution de problèmes et l'apprentissage de concepts sont intimement liés.

En France, les travaux de Battie (2003) dans le champ de l'arithmétique aboutissent à des conclusions semblables à celles de Lithner. Mais Battie montre aussi que les étudiants sont capables de mobiliser des raisonnements originaux et « réfléchis » quand on leur en donne l'occasion. De cette façon, elle pointe une tension qui nous semble dépasser le cadre de l'enseignement de l'arithmétique entre ce que les étudiants donnent à voir de leurs capacités en matière de résolution de problème et ce qu'ils sont capables de faire sous certaines conditions.

2.2. La correspondance mathématique pour contourner l'adresse à l'enseignant

Les recherches du groupe ECCEmaths se situent au cœur de la tension mise en évidence par Battie (2003). Pour recueillir des données sur la façon dont les élèves mènent une activité de recherche d'un problème de mathématiques, le groupe a d'abord réalisé une première étude utilisant des narrations de recherche² (Sauter, 2000 ; Bonnafé et al., 2002) de problèmes ouverts (Arsac et Mante, 2007) et des questionnaires (pour plus de détails voir <http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/archives/partenariat-inrp-07-08/ecce-math/>). Mais les résultats obtenus nous ont semblé avoir une portée limitée car les écrits des élèves ressemblaient fort à des « copies » adressées de façon convenue aux enseignants. Cette étude ne nous semblait donc pas permettre de conclure quant aux potentialités des élèves en matière de résolution de problème dans la mesure où nous avions l'impression de ne pas accéder réellement au potentiel des élèves.

Attribuant au destinataire de l'écrit un rôle capital dans ce que les élèves livrent de leur activité de résolution d'un problème, nous avons donc cherché un dispositif où l'écrit ne serait pas destiné à l'enseignant. C'est ainsi que nous avons mis en place un échange exclusivement épistolaire entre des élèves volontaires de Terminale Scientifique (18 ans, dernière année du lycée) et des étudiants en première ou deuxième année d'université. De façon relativement naïve, nous avons attribué à cette « correspondance mathématique » les caractéristiques suivantes³ pour contourner le biais identifié. Les élèves sont presque pairs (une à deux années de différence dans le cursus). L'élève le moins avancé dans le cursus initie la correspondance, la consigne qui lui est donnée est la suivante : « écrire en détails vos essais, tentatives, pistes de recherche et résultats (partiels ou intermédiaires) ». Son correspondant a pour tâche de l'aider à avancer dans sa recherche, sans toutefois lui fournir la réponse. Entre autres, il ne doit pas hésiter à demander des précisions. La correspondance est organisée par les enseignants qui distribuent le problème au même moment aux correspondants et transmettent les lettres à des dates précises (une

² C'est une activité où l'élève raconte, par écrit, dans un langage naturel, libéré de tout formalisme, son travail de recherche lors de la résolution de problèmes.

³ Le dispositif « correspondance mathématique » en tant que dispositif de recueil de données a été conçu par l'ensemble du groupe ECCEmaths. L'analyse des productions recueillies et des conditions écologiques permettant ces productions présentées dans cet article correspond à mon propre travail. Le terme « naïf » est utilisé ici pour indiquer les choix qui ont été effectués par le groupe pour contourner l'adresse à l'enseignant et accéder aux raisonnements des élèves.

quinzaine de jours entre chaque échange). Mais, les professeurs n'ont pas connaissance du contenu des lettres, n'échangent pas avec les élèves sur leur résolution et ne répondent pas aux questions à ce sujet. A l'issue des échanges épistolaires, une rencontre entre les correspondants est organisée. C'est une occasion de mutualiser les démarches de résolution utilisées, de proposer des procédures de résolution du problème, de répondre aux questions qui se posent encore sur le problème, de demander aux lycéens et étudiants ce qu'ils ont appris avec cette correspondance et de recueillir leurs avis sur le dispositif.

2.3. Un problème susceptible de révéler les capacités des élèves en matière de résolution de problème

Souhaitant étudier le potentiel des élèves en matière de résolution de problème, il nous fallait choisir un problème qui résiste un peu aux lycéens, sans toutefois les décourager. Nous avons retenu le « problème ouvert » (au sens de Arsac et Mante, 2007) suivant proposé dans des ressources existantes (Gras, Bardy, Parzys, 2002) :

L'expression $\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ admet-elle un maximum lorsque le point de coordonnées (x,y) décrit le premier quadrant ($x \geq 0$; $y \geq 0$) ? Si oui, le déterminer.

Là encore, même s'il a été discuté dans le groupe ECCEmaths, ce choix s'est fait de façon relativement naïve. Le problème fait intervenir une fonction à deux variables alors qu'au lycée, les élèves étudient seulement les fonctions d'une variable réelle. En particulier, les lycéens savent utiliser depuis l'année précédente (classe de 1^{ère} S) les dérivées pour étudier les variations d'une fonction d'une variable réelle et utilisent régulièrement cette routine. Nous savions aussi que, compte tenu de leurs connaissances, les élèves pourraient résoudre le problème de plusieurs façons⁴, sans recours à une routine, et, dans tous les cas, tenter une exploration numérique. Ainsi, nous étions sûrs que la procédure « experte » de résolution du problème (utilisation des dérivées partielles) n'était pas disponible au niveau du lycée et nous savions que ce problème résisterait un peu aux lycéens.

Il s'agit maintenant de mener une analyse *a priori* du problème plus étoffée pour dépasser la liste des raisonnements, corrects ou erronés, que les élèves sont susceptibles de mobiliser. Dans la mesure où nous souhaitons accéder aux capacités des élèves à chercher et à résoudre des problèmes de mathématiques, nous nous attachons particulièrement ici à préciser en quoi ces procédures sont basées sur une utilisation superficielle de définitions et propriétés mathématiques et en quoi elles relèvent ou pas d'une certaine créativité.

Pour faciliter l'écriture et la lecture, nous nommons f la fonction dont on cherche un maximum dans le premier quadrant.

La procédure qui consiste à calculer les **dérivées partielles** de la fonction f pour déterminer un éventuel point critique dans le premier quadrant puis à vérifier, le cas échéant, que ce point est un maximum en utilisant les dérivées secondes n'est pas disponible pour les lycéens. Mais, si les élèves se basent uniquement sur des indices de surface et leur expérience antérieure comme l'a observé Lithner, ils tenteront de **dériver la fonction f** simultanément en x et en y , comme si les deux variables correspondaient à une seule, pour chercher la valeur où la dérivée s'annule. Cette procédure constitue typiquement une procédure de type imitatif au sens de Lithner. Elle mobilise en particulier la conception du maximum comme point critique d'une fonction qui est la conception essentiellement utilisée dans les deux dernières années du lycée. Dans ce cas, il sera intéressant de voir si le résultat obtenu fait réagir les élèves et comment. Cela ouvre en effet des possibilités différentes de questionnement puisque la « dérivée » s'annule en $xy = \frac{1}{2}$, ce qui ne correspond pas à un point, comme habituellement.

L'utilisation de la dérivée pour étudier les variations d'une fonction à une variable réelle est routinisée à ce niveau de scolarité. Aussi, une fois qu'ils auront identifié les spécificités du problème (fonction à deux variables) et dépassé les indices de surface, les lycéens peuvent être tentés de se ramener à une fonction à une variable pour calculer sa dérivée. Après avoir trouvé un moyen d'y parvenir, ils reviennent ainsi à l'utilisation d'une sorte d'algorithme mais en ayant bien identifié son domaine de pertinence, contrairement à ce qui se passe pour la procédure précédente. C'est pour cette raison que nous associons cette procédure à un raisonnement créatif.

Le passage en **coordonnées polaires** permet alors de résoudre le problème. La fonction f peut s'écrire

comme le produit de deux fonctions d'une variable réelle dérivables ($f(x,y) = f(r, \theta) = \frac{r}{1+r^2} (\cos \theta + \sin \theta)$ = $g(r) \cdot h(\theta)$ avec r réel positif et θ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$). La combinaison des maxima obtenus pour ces deux fonctions ($g(r)$ est inférieur à $\frac{1}{2}$ et $h(\theta)$ est inférieur à $\sqrt{2}$) permet de trouver le maximum de la fonction initiale. Le passage par les coordonnées polaires est rencontré pour la première fois l'année précédant la Terminale et

⁴ Dans le groupe ECCEmaths, Simon Moulin, en particulier, s'est attaché à une rédaction précise de ces solutions mathématiques.

réactivé au début l'année de Terminale avec l'introduction des nombres complexes. Dans la scolarité des élèves cet outil est rarement associé à l'étude des variations d'une fonction, ce qui le rend peu disponible dans un tel contexte en général. Cependant, ici, le dénominateur de l'expression peut évoquer aux élèves l'équation d'un cercle et les faire penser au passage en coordonnées polaires. Plus facilement, l'expression de la fonction peut évoquer aux élèves l'utilisation des nombres complexes, plus familiers en Terminale bien que non associés au

contexte de la dérivation. Mais l'expression alors obtenue ($f(x, y) = \frac{1}{2} \times \frac{(1-i)z + (1+i)\bar{z}}{1+z\bar{z}}$), d'emblée, apparaît difficile à étudier.

Toujours dans l'idée de se ramener à une fonction à une variable, la **symétrie** de la fonction peut inviter à poser $x = y$. On trouve alors que le maximum de la fonction restreinte à la droite d'équation $x = y$ est atteint en

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Ce résultat correspond à la solution du problème mais, telle quelle, la procédure utilisée ne le prouve pas. Il faudrait compléter par l'étude des cas où $x > y$ et $x < y$. Cette piste originale, même si elle ne permet pas de résoudre le problème, permet une exploration par restriction à un problème plus simple. Son utilisation témoigne pour nous d'une certaine créativité dans la résolution du problème dans la mesure où elle requiert d'abord de repérer la symétrie de la fonction (travail effectué deux ans avant dans le cursus, à propos des fonctions d'une variable réelle) et d'imaginer en quoi cela peut être utile pour le problème posé. Cette créativité est exercée pour se ramener à une situation connue. Si les élèves ont cette idée, il sera intéressant de voir quel statut ils attribuent à leur résultat. En particulier, conclure à partir de ce raisonnement que le maximum de la fonction est atteint en $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ témoigne plus d'une recherche orientée vers la production de la solution que d'une recherche orientée vers la compréhension du problème, sa problématisation.

Une autre façon de se ramener à l'étude d'une fonction à une variable réelle est de décider de **fixer une des**

variables, par exemple x , et de considérer la fonction $f(y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ où x est un paramètre. Cette procédure ne permet pas d'aboutir, mais son utilisation témoigne d'une créativité certaine dans la mesure où il n'est pas commun au lycée de procéder ainsi. De plus, le recours à cette procédure montre une intuition correcte des élèves. Enfin, toujours pour se ramener à une fonction à une variable, on peut donner une **valeur numérique à**

une des deux variables. Par exemple, on peut se ramener ainsi à la fonction $f(y) = \frac{1+y}{2+y^2} = f(1, y)$. L'étude consiste alors en celle d'une restriction de la fonction. Dans ces deux derniers cas, le choix de la procédure n'est pas guidé par des indices de surface mais par les contraintes de la situation (le problème et les connaissances dont les élèves disposent).

Sans chercher à revenir ainsi à une fonction à une variable, les élèves peuvent aussi mobiliser, plus ou moins explicitement, la définition connue du maximum d'une fonction pour résoudre des problèmes d'extrema : le maximum d'une fonction est le **plus petit des majorants** atteint. Cette méthode est, d'une certaine façon plus élémentaire car elle ne fait pas appel à la dérivée, mais son apparition nous paraît plus incertaine car le travail des inégalités dans le cas présent mobilise un raisonnement très contextualisé lié à la capacité des élèves à reconnaître la possibilité de transformer l'expression de façon « intéressante ». En effet, comme f est positive dans le premier quadrant, dire que k (un réel positif non nul) est un majorant de $f(x, y)$ équivaut à dire que pour

tout (x, y) dans le premier quadrant $(x - \frac{1}{2k})^2 + (y - \frac{1}{2k})^2 + 1 - \frac{1}{2k^2} \geq 0$, en particulier pour $x = y = \frac{1}{2k}$. Ainsi k doit être supérieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Le plus petit des majorants correspond à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et comme $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ on a bien trouvé le maximum de la fonction. Dans ce cas, le raisonnement des élèves est fortement ancré dans les mathématiques et témoigne d'une créativité.

Une autre méthode accessible pour un lycéen consiste à utiliser un raisonnement avec les **courbes de niveau**. En cherchant à déterminer l'intersection de la surface déterminée par f avec un plan d'équation $z=k$ ($k>0$ car f est

positive pour (x, y) dans le premier quadrant), on obtient l'égalité suivante :

Ainsi l'intersection de la surface avec la plan d'équation $z=k$ est vide si $\frac{1}{2k^2} - 1$ est négatif, est un cercle si ce nombre est positif et est réduite à un point s'il est nul, c'est-à-dire lorsque $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Le maximum de la fonction f

est donc atteint lorsque $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Cette méthode n'est disponible que pour les élèves de Terminale S qui suivent la spécialité mathématique, car ils étudient alors les courbes de niveau dans le chapitre « surfaces de l'espace ».

Enfin, deux méthodes très empiriques qui ne mettent pas non plus en jeu l'idée de maximum comme point critique peuvent permettre de localiser le maximum de la fonction. La première consiste à utiliser le fait que **le maximum est la plus grande valeur atteinte par la fonction** et à chercher à le localiser en calculant des valeurs bien choisies de la fonction. Cette procédure requiert une forme de contrôle particulier puisque la fonction a deux variables et qu'il faut envisager simultanément leurs variations. Dans ce cas, l'utilisation d'un tableur est précieuse, à conditions de bien garder le contrôle de ce qui est fait. Toutefois, cette procédure n'est pas complètement satisfaisante dans la mesure où elle ne permet pas de trouver exactement le maximum de la fonction (le point où il est atteint a des coordonnées irrationnelles). Cette méthode empirique est tout à fait disponible pour les élèves s'ils acceptent, à un moment, d'explorer le problème pour se faire une idée de la solution, sans chercher à tout prix à trouver cette solution rapidement avec des techniques routinisées. Une autre méthode empirique pour localiser le maximum de la fonction, consiste à **utiliser un logiciel** pour représenter la surface de la fonction. Cette méthode n'est disponible que pour les élèves de spécialités mathématiques et n'apporte pas non plus de preuve.

Ainsi, pour résoudre ce problème, un élève de Terminale S dispose *a priori* de plusieurs procédures qui se distinguent en particulier par quatre aspects : elles sont plus ou moins disponibles pour lui, c'est-à-dire qu'elles correspondent pour lui à une expérience mathématique plus ou moins récente ; elles sont plus ou moins associées à des indices de surfaces activés par l'énoncé ou le contexte du problème (problème d'étude de variation) ; elles utilisent des raisonnements plus ou moins algorithmiques ; elles mobilisent, de façon plus ou moins explicite, la conception de maximum comme point critique ou comme le plus petit des majorants atteint. Dans l'analyse nous n'avons pas particulièrement insisté sur ce dernier point, mais il est pourtant essentiel. En effet, la conception la plus disponible de la notion de maximum pour les élèves de Terminale S est celle de « point critique », car celle de plus petit des majorants atteint a été surtout travaillée au début du lycée (soit 2 ans avant la Terminale). Or, sauf s'ils utilisent le passage en coordonnées polaires, les élèves devront mobiliser la conception « plus petit des majorants atteint » pour aboutir.

2.4. Question traitée

Prenant appui sur les travaux de Battie, nous faisons l'hypothèse que les capacités des élèves en matière de résolution de problème dépassent ce qu'ils laissent voir à leurs enseignants et peuvent se révéler sous certaines conditions qui restent à identifier. Pour contribuer à cette identification, nous menons une étude dans un cadre spécifique, celui de la correspondance mathématique, et étudions l'activité déployée par les élèves (en quoi relève-t-elle d'une application de techniques routinières non questionnées ? en quoi relève-t-elle d'une activité mathématique problématisée ?) à l'intérieur de ce cadre, pour ensuite discuter de la relation entre cette activité et les conditions particulières créées par la correspondance mathématique (en quoi les conditions de la correspondance, différentes des conditions habituelles, ont-elles favorisé ou pas une activité inhabituelle des élèves ?). Nous analysons l'activité mathématique des élèves à partir de leurs écrits en considérant trois référents théoriques.

3. Cadre théorique et méthodologie pour l'analyse des correspondances mathématiques

3.1. Cadre théorique

L'analyse *a priori* du problème montre que dans la correspondance proposée les lycéens sont confrontés à la résolution d'un problème qui leur demande une certaine adaptation. Le cadre théorique de l'activité en situation développé par Vergnaud (1996, 2007) nous semble particulièrement adéquat pour reconstruire leur activité mathématique dans cette situation à partir de leurs écrits. D'une part, une place importante est attribuée à la situation : l'activité est toujours une activité en situation, sous certaines conditions. D'autre part, l'activité y est envisagée sous l'angle de la résolution de problème et de l'adaptation à une situation, elle est toujours associée à la conceptualisation.

Le schème est un concept majeur de cette théorie de l'activité ; il est défini comme « une forme invariante d'organisation de l'activité et de la conduite pour une classe de situations déterminée » mobilisé dans l'objectif de réaliser un but. Un schème n'est pas en général un algorithme, comme l'indique Vergnaud « les schèmes sont opportunistes » et le sujet « fait feu de tout bois » (Vergnaud, 2007, p. 20). Les invariants opératoires sont des composants d'un schème et correspondent aux théorèmes-en-acte et aux concepts-en-acte, ils permettent « de prélever et de sélectionner l'information pertinente et d'en inférer des conséquences utiles pour l'action, le contrôle et la prise d'information subséquente » (Vergnaud, 2007, p. 17).

Ce cadre théorique constitue un cadre cognitif et didactique qui permet de saisir l'activité mathématique notamment en référence aux buts que se fixe le sujet et aux invariants opératoires mobilisés. Le schème est associé au raisonnement dans la mesure où il permet de mettre en œuvre les raisonnements. Mais, à

notre connaissance, ce concept ne permet pas une qualification des raisonnements utilisés par les élèves dans le cadre de la résolution de problème en mathématiques. Or cela nous est nécessaire. Pour qualifier les raisonnements des élèves, nous référons donc à deux cadres théoriques qui présentent des intérêts complémentaires pour notre étude : celui développé par Lithner (2000, 2003, 2008) et celui de la problématisation développé par Fabre et (Orange, 2005a, 2005b).

L'approche de Lithner, comme celle de Vergnaud, tient compte du contexte de la situation, mais de façon plus institutionnelle : il considère que le raisonnement produit par un élève est un raisonnement effectué dans un certain « milieu », sous certaines contraintes et en référence à une certaine expérience mathématique. Il s'intéresse aux raisonnements des élèves pour les tâches qui se situent entre tâches routinières et véritables problèmes de recherche et son point de vue l'amène à les qualifier en fonction de leur degré mathématique, en référence à des raisonnements déjà connus des élèves et au curriculum : les raisonnements des élèves sont-ils fortement ancrés dans les propriétés intrinsèques des objets mathématiques ou reposent-ils seulement sur des indices de surface ? Il caractérise ainsi parmi les raisonnements imitatifs les FAR (*Familiar Algorithmic Reasoning*) : l'élève identifie, sur la base d'indices de surface, la tâche à une tâche familière et met en œuvre l'algorithme correspondant à cette tâche sans se poser plus de questions. Par exemple, dans le problème présenté précédemment, lorsque les élèves « dérivent » la fonction f pour déterminer l'existence éventuelle d'un maximum et le localiser, nous considérons que leur raisonnement est de type FAR dans la mesure où ce qui préside à ce choix repose sur des indices de surface et une routine scolaire. Lithner pense que ces raisonnements de type FAR brident les possibilités de compréhension et finalement d'apprentissage en profondeur des notions mathématiques. Il explique leur prégnance et le manque de créativité des étudiants par les conditions du travail scolaire ou universitaire, en particulier le défaut de dévolution et le contrat didactique (Brousseau, 1997).

Lithner s'intéresse spécifiquement aux raisonnements des élèves et non aux conceptualisations associées à ces raisonnements. Sa caractérisation tient compte du contrôle que l'élève exerce sur son activité mais sans envisager l'effet de ce contrôle sur la conceptualisation. En particulier, les raisonnements créatifs sont caractérisés par le fait que l'élève est capable de justifier la méthode qu'il utilise et que les conclusions tirées sont vraies ou plausibles, mais Lithner, au niveau de l'analyse du raisonnement, n'étudie pas la conceptualisation associée. Cet aspect de la résolution du problème, qui est essentiel pour nous, est présent dans le cadre de Vergnaud.

Une partie de l'activité de résolution de problème n'apparaît pas dans l'approche de Lithner, en particulier tout ce qui concerne la façon dont l'élève identifie, le cas échéant, pourquoi la solution qu'il propose est correcte / acceptable ou pas, les questions qu'il se pose à cet égard et la façon dont cela lui permet d'avancer dans la résolution du problème, bref, d'une certaine façon, la représentation que l'élève se fait du problème au fil de la recherche. Après tout, un raisonnement erroné basé sur des indices de surface peut tout à fait être exploité positivement pour la suite de la résolution du problème. Comme l'indique Vergnaud les schèmes sont opportunistes :

lorsque le sujet ne dispose pas de schème tout prêt dans son répertoire, et doit improviser [...] (il) fait feu de tout bois en puisant dans ses ressources cognitives, c'est-à-dire dans les schèmes antérieurement formés susceptibles d'ouvrir une voie à la recherche de la solution. (Vergnaud, 2007, p. 20)

Cet aspect de la résolution d'un problème est au cœur du cadre de la problématisation développé par Fabre et Orange initialement dans le domaine des Sciences de la Vie et de la Terre (Orange, 2005a, 2005b). Dans cette approche, en effet, la représentation que l'élève se fait du problème est envisagée du point de vue de la dialectique entre le registre des faits (empirique) et le registre des nécessités (apodictique). Le travail du problème correspond à ce que fait l'élève pour poser le problème à partir de la question qui lui est adressée, pour dégager les possibles et les nécessités, pour cerner la solution. En particulier, dans ce cadre, deux principaux types d'activité sont distingués. L'activité orientée par la recherche de solution, sans questionnement sur les nécessités intrinsèques au problème, et donc aux savoirs, est qualifiée de *problémation*. L'activité orientée par la construction scientifique du problème et la recherche de nécessités est qualifiée de *problématisation*. Ce cadre théorique a un fort ancrage épistémologique bachelardien et les nécessités y tiennent une place majeure : il ne s'agit pas uniquement de « savoir que » mais de savoir « pourquoi cela est ne peut pas être autrement ». On retrouve ici d'une certaine façon les préoccupations de Lithner avec quelques nuances. En effet, dans le cadre de la problématisation la tension n'est pas posée entre l'appris par cœur et le créé mais entre l'empirique (registre des faits) et l'apodictique (registre des nécessités). Les connaissances antérieures des élèves n'ont pas de statut particulier, elles sont soit des nécessités, soit des faits.

Ces deux approches qui ont des fondements différents sont complémentaires pour qualifier l'activité des élèves : prise en compte du « milieu » institutionnel dans lequel est produit le raisonnement, ce qui est important dans notre étude ; ancrage épistémologique qui permet de qualifier le travail du problème au sens de la recherche de nécessités ou pas. Elles permettent de compléter l'analyse de l'activité effectuée dans le cadre de Vergnaud en qualifiant les raisonnements issus de la mise en œuvre de schèmes et s'articulent bien avec elle. En particulier, d'une certaine façon, pour les raisonnements imitatifs comme les FAR les conditions institutionnelles surdéterminent les conditions de la situation : le contrôle de l'activité et la prise d'information pour l'activité qui sont des composantes du schème de la résolution d'un problème mathématique donné sont subordonnées, dans le

contexte scolaire, à un autre schème de la résolution d'un problème mathématique, en général à l'école, organisé autour de la règle « s'appuyer sur des indices de surface pour déterminer la procédure de résolution ».

3.2. Méthodologie d'analyse des correspondances

Les lettres ne nous livrent pas directement l'activité mathématique des lycéens, cette activité doit être reconstruite pour permettre d'analyser la façon dont ils cherchent le problème et la ou les conceptualisation(s) de la notion de maximum d'une fonction qu'ils mobilisent. Pour ce faire, nous adoptons le point de vue du lycéen qui écrit, et en particulier ce qu'il tient pour vrai, correct et ce qu'il tient pour faux, erroné ou douteux. Considérant que l'activité du lycéen est engendrée par des schèmes, nous décrivons ces schèmes à partir des buts du lycéen que nous inférons à partir de son texte, des règles d'action et des théorèmes-en-acte qu'il met en oeuvre.

La recherche s'étale sur un temps assez long, le raisonnement peut être mené en plusieurs étapes et des changements d'orientation sont possibles dans l'activité. Pour tenir compte du décours de l'activité nous découpons le raisonnement du lycéen en unités relatives à un but que nous appelons boucle de raisonnement. Une boucle de raisonnement est organisée autour d'un but (et de sous-buts) que nous inférons à partir de la conduite de résolution de problème du lycéen et s'achève par une conclusion que le lycéen tire du raisonnement déployé. Nous appelons préférentiellement cette conclusion issue car elle ne correspond pas nécessairement à une conclusion (qui a un caractère définitif) mais peut être, par exemple, la formulation, directe ou indirecte, d'une question. A l'intérieur d'une boucle de raisonnement, le lycéen essaie de réaliser son but en effectuant des choix stratégiques qui requièrent la mobilisation de connaissances mathématiques et aboutissent quelquefois à des résultats provisoires qui génèrent des sous-buts. Ces choix stratégiques qui littéralement génèrent l'activité correspondent aux règles d'action du lycéen.

Nous utilisons le terme de boucle de raisonnement plutôt que celui de raisonnement comme le fait Lithner car à chaque but est associée une issue qui permet une forme de clôture du raisonnement, provisoire ou définitive, mais ne correspond pas nécessairement à une conclusion sur le problème. Ainsi, la boucle peut-être reprise à un autre moment de la recherche pour arriver à une autre issue. En particulier, l'issue d'une boucle de raisonnement associée à un but peut être une question qui ramène au but initial et invite à d'autres choix stratégiques : cela « boucle ».

Nous résumons ces éléments sous la forme d'un tableau (voir annexes 1 et 2). Dans la première colonne figurent les buts et sous-buts (reconstruits) de l'activité, dans la seconde colonne les choix stratégiques effectués pour réaliser le but (ou sous-but) et dans la troisième le résultat de cette action qui correspond soit à une issue intermédiaire ou provisoire soit à l'issue de la boucle. Les questions indiquées dans cette troisième colonne correspondent aux questions qu'adresse l'élève, au style direct ou indirect, à son correspondant ; ces questions sont résumées, toujours au style direct, par nos soins. Les buts, choix stratégiques et issues regroupés dans un cadre (sur trois colonnes) correspondent à une boucle de raisonnement.

Ces choix méthodologiques et de présentation permettent de suivre l'évolution chronologique de la démarche du lycéen mais ont pour conséquence de séquentialiser son activité reconstruite, engendrée à partir de l'ensemble des éléments dont il dispose à un temps t , et de masquer la dynamique de son raisonnement. Pour atténuer cette difficulté, on peut essayer de « penser » l'activité du lycéen à un temps t en tenant compte de son activité antérieure.

Puis, nous caractérisons l'activité mathématique de l'élève selon trois dimensions. La première correspond au type de raisonnement utilisé. L'analyse *a priori* du problème qui indique les raisonnements possibles et les situe par rapport aux connaissances disponibles des élèves nous permet de qualifier les raisonnements effectivement employés de raisonnements créatifs ou imitatifs, sachant que les connaissances mobilisées par les lycéens le sont soit par recours à une technique, une méthode routinière justifiée par un théorème, mais qui est devenue tellement familière qu'elle n'est pas systématiquement associée à une explicitation de ce théorème (par exemple, le lycéen calcule la dérivée pour trouver les points critiques de la fonction) ; soit par recours plus explicite à un théorème, à une définition, à une propriété mathématique ; soit par l'utilisation d'une démarche « expérimentale » (faire des schémas, des essais numériques, les observer, conjecturer). Nous caractérisons les raisonnements des élèves au niveau d'une boucle. Ensuite, pour rendre compte de la façon dont l'élève travaille le problème au sens de la problématisation, nous considérons les issues successives qui nous renseignent sur les questions que se pose l'élève et sur leur propos. Nous distinguons en effet trois types de questions : celles qui concernent la validité du résultat obtenu, celles qui concernent la validité de la démarche utilisée, celles qui concernent des aspects de la résolution. Les deux premiers types témoignent d'une réflexivité de l'élève qui se pose des problèmes quant à la nécessité du résultat obtenu et correspondent donc à une démarche de problématisation. Le dernier type de question correspond à un problème technique et est orienté vers la recherche de la solution (par exemple : comment faire pour traiter ces inégalités avec deux inconnues ?). La qualification de l'activité du lycéen en termes de problématisation est effectuée au niveau de la résolution du problème dans son ensemble. Enfin, pour caractériser l'évolution de la conceptualisation de la notion de maximum d'une fonction associée à la résolution du problème, nous identifions les théorèmes-en-acte (Vergnaud, 1996) que l'élève met en oeuvre successivement au cours de la correspondance. Là encore, la caractérisation tient compte de l'activité de l'élève au niveau de l'ensemble.

3.3. Profil des élèves qui ont participé à la correspondance

Les correspondances étudiées dans cet article ont été réalisées par des élèves volontaires. Les seize lycéens qui ont participé à la correspondance sont tous en Terminale S mais ont choisi des spécialités différentes : six sont en spécialité « mathématiques » (M), cinq en spécialité « Sciences de la Vie et de la Terre » (SVT), quatre en « Sciences de l'Ingénieur » (SI) et un en « Physique Chimie » (PC). Ces élèves sont issus de trois classes d'établissements différents et ont donc des enseignants différents. Ils ne sont pas tous de « très bons » élèves.

A titre indicatif, nous résumons dans le tableau 1 leur profil à partir de la spécialité qu'ils ont choisi, de remarques de l'enseignant et des notes obtenues en mathématiques en moyenne sur l'année (pour les quatre premiers élèves issus d'une même classe) ou au baccalauréat (examen commun à tous les élèves) par chacun des lycéens ; ces notes sont comprises entre 0 et 20. Dans la dernière colonne « nc » signifie non connu. La première colonne indique le numéro du lycéen, c'est le même utilisé dans tout l'article.

CM	Spécialité	Remarques de l'enseignant	Moyenne annuelle/20	Note au bac/20
1	M	Très « intuitif » et aime chercher mais manque parfois d'esprit critique. Cherche sans rien écrire ou brouillon illisible.	14.4	nc
2	PC	Travailleur, beaucoup de difficultés.	9.4	nc
3	M	Consciencieuse, aime travailler.	12.6	nc
4	M	Manque d'esprit critique.	14.3	nc
5	SVT	Faible en maths mais sérieuse, recherche du sens.	8	9
6	SVT	Très bon élève, se pose des questions en maths.	17	17
7	SI	Bon élève, peu exigeant avec lui-même, pourrait faire mieux.	14.5	15
8	SVT	Elève qui attend des « recettes ».	13	13
9	SI	A des difficultés à explorer, élève qui prend peu d'initiative.	9.5	11
10	SI	Elève volontaire et sérieux.	13.5	15
11	SI	Sérieux, peu inventif, scolaire.	12	15
12	SVT	Se demande à quoi servent les maths, manque de bases.	7	8
13	SVT	Très faible.	6	5
14	M	Scolaire.	13.8	12
15	M	Excellente élève.	16.5	20
16	M	Elève brillante.	17.4	18

Tableau 1 Profil des élèves participant à la correspondance

Les notes obtenues par les élèves en moyenne sur l'année ou au bac illustrent leur niveau en mathématiques et permettent de situer les élèves les uns par rapport aux autres (en particulier la note de bac). Les élèves 12 et 13 sont en grande difficulté en mathématiques. Les élèves dont les notes sont autour de 10 ont des niveaux très moyens.

Les correspondances ont été réalisées aux mois de février et mars de l'année 2008, les correspondants ont rédigé deux lettres chacun et, pour chacune des échanges, le lycéen disposait d'une quinzaine de jours pour réfléchir au problème et rédiger sa lettre.

4. L'activité des élèves dans la correspondance : résultats

Il est impossible dans l'espace d'un article de présenter en détail l'analyse des seize correspondances. Nous avons choisi de détailler l'analyse de deux correspondances et de présenter de façon plus synthétique les résultats obtenus sur l'ensemble des élèves pour la première lettre. L'étude détaillée permet de préserver la chronologie de l'activité des élèves et montre la dynamique de la résolution de problème.

Les deux correspondances étudiées en détails correspondent respectivement aux correspondances 3 et 1. Elles ont été choisies car l'activité mathématique des élèves n'y est pas réduite à une utilisation de raisonnements de type FAR et permet, de façon concomitante, des apprentissages mathématiques.

4.1. Activité d'Olivia (élève 3)

L'activité reconstruite de cette élève est présentée dans l'annexe 1. La lecture de haut en bas du tableau est chronologique.

a) Chronique de la correspondance

Pour permettre au lecteur de comprendre comment nous reconstruisons l'activité de l'élève à partir d'une correspondance nous illustrons la chronique avec des extraits de lettres. L'ensemble de la correspondance entre Olivia et son correspondant fait quatorze pages, il est impossible de la livrer dans son intégralité.

La première lettre débute par l'énoncé où les mots « maximum » et « premier quadrant » sont entourés. La lycéenne écrit ensuite : « Pour résoudre ce problème, j'ai pensé à plusieurs méthodes mais je ne sais pas si elles sont possibles ou justes ». Ces méthodes sont les suivantes :

- « 1ère idée : J'ai pensé à la méthode de dérivation mais je ne sais pas le faire avec deux inconnues. Je ne sais pas si j'ai le droit mais je choisis de remplacer y par x c'est-à-dire, on considère $x = y$ d'où ... Peut-on

conclure que $f(x,y)$ admet un maximum en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ puisqu'on avait considéré $x = y$ au départ ? »

- « 2ème idée : Dans l'expression, on reconnaît l'équation d'un cercle au dénominateur J'ai pensé à faire le lien avec les coordonnées polaires.... Je suis bloquée à ce niveau et je ne sais pas si ma démarche est bonne. »
- « 3ème idée : Après l'essai avec les polaires, cela me donne l'idée de m'attarder aux complexes puisqu'il y a un lien. ... A ce niveau, je ne sais pas comment faire le lien entre $x+iy$ et $f(x,y)$ sachant que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. »

Sa première lettre s'achève de la façon suivante : « Voilà toutes les démarches essayées mais je ne suis sûre d'aucune d'entre-elles. Merci de m'éclairer ».

La réponse du correspondant débute par une explication concernant l'invalidité de la première idée. Puis, l'étudiant propose d'exploiter l'idée 2 pour majorer $f(x,y)$ par une fonction d'une seule variable $h(r)$ qui ne tend pas vers l'infini quand r tend vers l'infini. Il fait ensuite un petit cours sur les dérivées partielles qui est une proposition d'utiliser cette notion pour résoudre le problème.

Entre la rédaction de sa première lettre et la réception de la lettre de son correspondant, la lycéenne a poursuivi sa recherche, de façon infructueuse, en utilisant les coordonnées polaires :

« J'ai continué mes démarches en fonction de ce que j'avais commencé avant sur les coordonnées polaires (idée $r(\cos\theta + \sin\theta)$

2). J'avais obtenu $f(x,y) = \frac{1}{1+r^2}$... ».

Les indications de l'étudiant lui donnent ensuite l'idée d'écrire la fonction $f(r;\theta)$ comme le produit de deux fonctions à une variable et, ainsi, de se ramener aux techniques qu'elle connaît et de résoudre le problème.

Dans la seconde partie de sa lettre, Olivia revient sur les commentaires de son correspondant et indique : « j'aimerais comprendre pourquoi ma première idée n'était pas exacte, qu'est-ce qui fait qu'on ne peut pas utiliser cette méthode puisque je trouve le même résultat que celui de la méthode avec r et θ ».

Ainsi, la première boucle de raisonnement correspond au but 1 « trouver (directement) le maximum de la fonction f » et s'achève sur une question : ai-je le droit de dériver f comme une fonction à une variable ? Les autres boucles de raisonnement correspondent à différentes stratégies déployées pour répondre au but 2 « se ramener à une variable pour pouvoir dériver ». Dans la seconde boucle, la stratégie de l'élève consiste à poser $x = y$ et à formuler une question relative à la validité du résultat obtenu. Dans la troisième boucle, l'élève utilise le passage par les coordonnées polaires. Cette stratégie correspond à une exploration du problème dans la durée : elle est entamée dans la première lettre, provisoirement abandonnée suite à la rencontre d'un problème technique, mais est poursuivie entre le moment où l'élève envoie sa première lettre et sa seconde, puis reprise dans la seconde lettre en utilisant l'aide fournie par le correspondant. Dans la quatrième boucle l'élève essaie d'utiliser les nombres complexes pour séparer les variables x et y mais se heurte à une difficulté technique.

Cette chronique met en évidence l'importance des aspects temporels de la résolution du problème par l'élève et les relations entre les différentes boucles de raisonnement. Intéressons nous maintenant à la caractérisation de sa résolution du problème puis à l'évolution de sa conceptualisation de la notion de maximum d'une fonction.

b) Raisonnements et travail du problème

Pour cette élève, la résolution du problème s'organise d'abord à partir de la mobilisation de techniques algorithmisées (dériver la fonction, trouver ses points critiques, étudier ses variations et déterminer les éventuels minima et maxima) probablement à partir d'indices de surface (faible ancrage mathématique au sens de Lithner) et par référence à une situation familière (trouver le maximum d'une fonction à une variable). L'élève pense à dériver, mais indique qu'elle ne sait pas le faire avec deux « inconnues ». On peut donc dire qu'initialement son raisonnement correspond à un *familiar algorithmic reasoning*. Mais elle mobilise aussi des connaissances mathématiques relatives au domaine d'application et de validité de la technique mobilisée, ce qui l'amène à

questionner la validité de sa démarche et à se fixer un nouveau but tenant compte du domaine de validité de la technique dont elle dispose, c'est le but B2 : se ramener à une variable. Pour réaliser ce but, elle déploie plusieurs stratégies. La première est probablement guidée par la symétrie de la fonction. Olivia pose $x = y$ et élimine de fait une des deux variables. Elle dérive alors la fonction obtenue, cherche, par la méthode habituelle,

les points critiques de la fonction et conclut à un maximum en $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mais elle interroge la validité de ce résultat au regard de la démarche utilisée : c'est la question Q2. Probablement pour tester sa robustesse, Olivia envisage une autre stratégie qui consiste à passer en coordonnées polaires (référence à une routine utilisée en classe), mais abandonne rapidement : la fonction obtenue a toujours deux variables et elle ne sait pas l'étudier. La troisième boucle s'achève donc provisoirement sur une difficulté technique qui donne lieu à la question Q3 (comment étudier cette fonction ?) et l'expression d'un doute sur la validité de la démarche. Cet obstacle génère le déploiement d'une autre stratégie pour répondre au but B2 : utiliser les complexes (boucle de raisonnement 4). Cette stratégie aboutit aussi à une impasse pour des raisons d'ordre technique (« je ne sais pas comment faire le lien entre $x+iy$ et $f(x,y)$ ») et génère donc une nouvelle question d'ordre technique (Q4). La première lettre s'achève sur ces difficultés. Ayant, probablement exploité toutes les stratégies à sa disposition pour se ramener à une variable, l'élève s'engage alors dans un raisonnement plus créatif ; elle représente graphiquement un repère où figurent les coordonnées cartésiennes et polaires (voir annexe 1, début de la deuxième lettre). De l'observation de son graphique elle tire d'abord que si « x et y sont très grands alors r est aussi très grand » et tire une première conjecture - $f(x,y)$ est grand quand r est grand - qu'elle remet immédiatement en cause (« θ intervient aussi »). Les remarques de son correspondant l'amènent à écrire $f(r;\theta)$ comme le produit de deux fonctions d'une variable pour lever la difficulté technique. Elle parvient finalement à trouver un résultat qui

semble la satisfaire (non remis en cause) : f admet un maximum qui est atteint quand $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cependant ce résultat ravive sa question Q2 : son correspondant a invalidé la méthode utilisée dans la boucle 1, elle n'a pas bien compris pourquoi, mais elle constate que la méthode permettait d'obtenir le même résultat. D'où une nouvelle question Q5 : pourquoi est-ce que mon idée était fausse puisque je trouve le même résultat ?

En résumé, cette élève utilise d'abord un raisonnement de type FAR qui est rapidement questionné et permet d'identifier, en référence au domaine de validité d'un théorème, la singularité de la question. Elle balaie alors les stratégies qu'elle connaît pour se ramener à une fonction à une variable et donc au cadre d'utilisation possible du théorème qu'elle utilise habituellement pour trouver les points critiques d'une fonction (adaptation à la situation en essayant de revenir à une situation connue). Ainsi, l'élève ne disposant pas d'un schème déjà constitué pour résoudre le problème cherche à se ramener à une situation pour laquelle elle dispose d'un schème mais sans succès. Une fois ce balayage effectué, elle recourt à un raisonnement complètement créatif et essaie de voir comment f varie en fonction des deux variables, en s'appuyant sur un graphique. Finalement, elle utilise de façon détournée la suggestion de son correspondant pour écrire la fonction comme le produit de deux fonctions à variables séparées.

A travers cette correspondance, il apparaît que le but ultime de l'activité de résolution du problème pour cette élève n'est pas la simple production d'un résultat du type « f atteint son maximum lorsque ... » mais bien une production compréhensible et problématisée de ce résultat. Dans les termes de la problématisation, la recherche n'est pas orientée vers la solution mais vers la problématisation (savoir que ça ne peut pas être autrement). En effet, le travail du problème génère des interrogations relatives à la validité de sa démarche (Q1, Q2, Q5), de son résultat (Q2) et d'ordre technique (Q3, Q4) qui l'amènent à questionner, et peut-être même identifier, d'une part les domaines de validité des théorèmes et techniques qu'elle utilise habituellement et d'autre part la singularité du problème par rapport aux autres problèmes rencontrés jusque là.

c) Conceptualisation de la notion de maximum

Les lettres de cette élève mettent en évidence une évolution de la conceptualisation de la notion de maximum d'une fonction au cours de la recherche du problème qui se caractérise par la mise en oeuvre successive de concepts-en-acte et théorèmes-en-acte, la plupart du temps en association étroite avec les questions posées par le travail du problème.

Les écrits de l'élève montrent qu'initialement, le « maximum d'une fonction », quelle qu'elle soit, correspond pour elle à un « point critique ». Les premiers théorèmes-en-acte successivement associés à ce concept-en-acte au cours de la recherche du problème sont :

- TA1 : le maximum d'une fonction correspond à un point où la dérivée de la fonction est nulle ;
- TA2 : le maximum d'une fonction d'une variable correspond à un point où la dérivée de la fonction est nulle ;
- TA3 : le maximum d'une fonction f de deux variables correspond à un point où la dérivée de $f(x,x)$ s'annule.

Ce troisième théorème-en-acte est rapidement mis en doute.

Puis, dans la recherche entre la première et la seconde lettre, lorsque l'élève utilise une représentation graphique, le maximum d'une fonction n'est plus envisagé comme un point critique mais comme « le point le plus haut de la courbe ». Un quatrième théorème-en-acte est alors à l'œuvre :

- TA4 : le maximum d'une fonction est soit le point de changement de variation de la fonction (si elle est croissante puis décroissante), soit le point le point à l'origine (si elle décroît).

Ce point de vue qui est ensuite abandonné permet à l'élève d'identifier clairement que le maximum d'une fonction de deux variables dépend de ses deux variables (cf. début de la reprise de la boucle 2 dans la lettre 2), c'est le théorème-en-acte TA5. Enfin, l'élève utilise un dernier théorème-en-acte, TA6 : le maximum d'une fonction de deux variables produit de deux fonctions d'une variable est le produit du maximum de chacune de ces fonctions.

L'écart entre le TA1 et le TA6 témoigne de l'évolution, contextualisée à ce problème, de la conceptualisation de la notion de maximum d'une fonction pour cette élève ; il nous semble qu'il y a là des apprentissages potentiels dans la mesure où, d'une part, la recherche du problème permet à l'élève d'identifier les domaines de validité des théorèmes qu'elle utilise et, d'autre part, l'amène à lever des implicites dans les connaissances qu'elle mobilise.

4.2 Activité de Mathieu (élève 1)

Le résumé de l'activité reconstruite de Mathieu figure dans l'annexe 2.

a) Chronique de l'activité mathématique

La première boucle de raisonnement reconstruite correspond à un inventaire des propriétés mathématiques connues de l'élève et en relation avec la notion de maximum d'une fonction ; certaines sont correctes d'autres pas :

- Si la fonction admet un maximum, alors l'expression admet un majorant.
- Si la fonction n'admet pas de maximum, alors l'expression tend vers $+\infty$ lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
- Mais cette expression n'est pas une fonction, donc l'étude de la limite, du signe de la dérivée et du sens de variation de l'expression ne correspondent pas dans ce problème.

Nous y associons le but B1 non spécifique de la résolution de ce problème : déterminer une stratégie de résolution du problème.

Cet inventaire lui permet d'identifier la singularité du problème (f n'est pas une fonction d'une variable réelle) avant de revenir à la recherche du maximum (boucle 2). Ayant « montré » que la fonction admet un maximum en calculant les limites en 0 et $+\infty$, il cherche alors à le localiser, c'est son but B3 auquel est associée la boucle 3. Pour cela, il recherche d'abord l'allure de ce qu'il pense être une la courbe (il fait une erreur) d'où il tire la conjecture C1 « le maximum de la fonction existe lorsque x et y sont proches de 0 » qu'il teste en étudiant les limites de la fonction autour de (0,0). Il conclut que le maximum ne se trouve pas en (0,0) ni en l'infini. Il effectue alors des calculs de valeurs organisés (cf. tableau 2) qui lui permettent de localiser pour chacun des tests un maximum.

test	Valeurs de f calculées	Remarques écrites par l'élève, maximum observé
	$x = y$, x et y variant de 0.1 à 1 avec un pas de 0.1	
1	$y = 0.1$, x varie de 0.1 à 1 avec un pas de 0.1	Max pour $x = 0.8$, $M1 = 0.545$
2	$y = 0.2$, x varie de 0.2 à 1 avec un pas de 0.1	Max pour $x = 0.8$, $M2 = 0.595$, $M1 < M2$
3	$y = 0.3$, x varie de 0.3 à 1 avec un pas de 0.1	Max pour $x = 0.8$, $M3 = 0.635$ $M1 < M2 < M3$
4	$y = 0.4$, x varie de 0.4 à 1 avec un pas de 0.1	pour $x = 0.7$, $M = 0.66$ pour $x = 0.8$, $M = 0.66$ on ne sait pas lequel des deux est le maximum $M1 < M2 < M3 < M4$

Tableau 2 Dans ce tableau, M_i correspond à la valeur maximale de la fonction obtenue par le test i

De ses calculs, Mathieu infère que le maximum de la fonction se situe autour de $x = 0.7$ ou 0.8 et qu'il augmente avec y . Puis, en tâtonnant, il trouve que ce maximum est atteint pour $y = 0.71$. Ce résultat semble constituer pour lui une étape de la résolution du problème et non une conclusion. Il paraît en effet douter de la valeur obtenue, mais surtout il s'interroge sur l'unicité du maximum. D'où un nouveau but B6, proche de B3 mais distinct – trouver le ou les maximum de f – et une quatrième boucle de raisonnement. Pour atteindre ce but, il s'autorise à dériver f selon x et y à la fois en exprimant toutefois un doute sur la pertinence de cette méthode. Il

achève sa première lettre par l'affirmation « l'expression n'a qu'un seul maximum sur le premier quadrant » et la question indirecte « je ne sais pas si ma dérivée est vraie ou si elle est possible tout simplement ».

Dans la seconde lettre, après avoir effectué un récapitulatif de ce qui est connu sur le problème, l'élève effectue essentiellement une reprise dans la boucle de raisonnement 4 en utilisant la « dérivée » qu'il a calculée auparavant. Il conclut d'abord qu'il y a un seul maximum atteint quand $xy = \frac{1}{2}$ et cherche alors à déterminer le

couple (x,y) pour lequel il est atteint. En dérivant, selon x , la fonction $f(x,y) = f(x, \frac{1}{2x})$ il trouve un point critique

quand y vaut approximativement 0.7. Il remarque que c'est environ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et émet la conjecture C2 : le maximum

est atteint en $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il valide ensuite cette conjecture en dérivant la fonction $f(x,x)$ qu'il considère comme une fonction à une seule variable. Pour lui, à ce stade, le problème n'est pas résolu car il faudrait encore expliquer pourquoi $x = y$.

b) Raisonnements et travail du problème

Pour Mathieu, un premier aspect du travail du problème consiste à déterminer une stratégie globale de résolution du problème (boucle 1) à partir d'une première analyse et d'une sorte d'inventaire des propriétés relatives au maximum d'une fonction. Ce schème général de résolution de problème lui permet d'écarter la stratégie utilisant la dérivée. Il s'engage alors dans une étude des limites de la fonction pour montrer qu'elle admet un maximum. Dans ses raisonnements, Mathieu se ramène toujours à une fonction à une variable en fixant, assez naturellement, une variable. Utilisant ainsi des propriétés mathématiques, il « montre », que ce maximum existe (boucle 2) puis cherche à le localiser (boucle 3) par différents moyens que l'on peut qualifier de raisonnements créatifs.

Sa première stratégie consiste à s'appuyer sur une représentation graphique, erronée et partielle, de la fonction (il se restreint à $f(x,1)$). De l'observation de cette courbe, il tire la conjecture C1 « le maximum existerait lorsque x et y sont proches de 0 ». Il teste en partie cette conjecture en effectuant des calculs de limites et conclut que le maximum n'est pas à l'origine. Dans cette boucle, Mathieu utilise un raisonnement « créatif » (au sens de Lithner) en association avec des calculs sur les limites. Son raisonnement permet une première exploration du problème, mais les différents résultats obtenus ne sont pas confrontés et des incohérences existent (calcul de limite en $(0,0)$ alors que f est définie et aisée à calculer en $(0,0)$; limite en $(0,0)$ et allure de f).

Sa seconde stratégie pour localiser le maximum de f relève aussi d'un raisonnement créatif : il réalise des tables de valeurs qu'il observe pour déterminer comment évoluent les valeurs de f en fonction des variations de x , les y étant fixés successivement. Cette stratégie s'ancre en partie dans la conjecture C1 (le maximum est proche de 0) puisque l'élève donne à x et y des valeurs comprises entre 0 et 1. L'« observation » des valeurs de la fonction l'amène à formuler une question (Q1) orientée vers la résolution du problème qui marque l'identification d'un nouveau problème mathématique : pour quelle valeur de y le maximum de $f(x,y)$ est-il le plus grand ? La résolution « en tâtonnant » de ce problème débouche sur la formulation d'une question relative à la validité du résultat et, implicitement, à la validité de la démarche qui est non exhaustive (Q2) : « l'expression a-t-elle plusieurs sommets ou un seul ? ».

Ainsi, dans la troisième boucle de raisonnement, la démarche de Mathieu est fortement guidée par une intuition : le maximum est proche de l'origine. Cela pourrait expliquer qu'il n'identifie pas les incohérences dans sa démarche.

Dans la boucle 4, Mathieu revient à des techniques utilisées classiquement à son niveau de scolarité pour localiser le maximum d'une fonction d'une variable : il utilise la dérivation. Même s'il questionne d'emblée la validité de sa procédure (Q3), nous considérons que son raisonnement cesse d'être un raisonnement créatif : nous l'interprétons comme un « repli » vers une procédure routinisée utilisée sur la base d'indices de surface. Il « dérive » à la fois selon x et y puis recherche les points critiques de f à partir de cette dérivée mais doute de la validité du résultat obtenu et de la démarche utilisée (Q4) : « ma dérivée est-elle vraie ou tout simplement possible ? ».

La seconde lettre débute par un inventaire de ce qui est connu et reconnu comme vrai, avec une garantie de validité donnée par le correspondant. Reprenant alors le raisonnement de la boucle 4, Mathieu affirme que la fonction admet un seul maximum dans le premier quadrant, en $xy = \frac{1}{2}$. Ainsi, les questions Q1 et Q2 qui ont émergé avec un raisonnement créatif construit en référence à la singularité du problème ne sont pas reprises dans ce raisonnement plus associé à l'usage d'une technique algorithmisée, et ce malgré la remarque du correspondant : « tu as 6 possibilités [...] tu as oublié de regarder les réels qui vérifiaient l'équation donnée ». Pour cet élève, tout se passe comme si le retour à un raisonnement de type algorithmisé empêchait un certain type de questionnement.

L'égalité $xy = \frac{1}{2}$ lui permet d'exprimer y en fonction de x et de revenir à une fonction à une seule variable qu'il dérive pour en trouver le maximum. La dérivée obtenue est un quotient dont le dénominateur est un polynôme de degré 6 qu'il ne cherche pas à simplifier et dont il approxime le 0 à 0.7. Ce résultat corrobore ses résultats précédents mais ne le satisfait pas car cela « reste une approximation ». De nouveau, cet élève semble

fortement guidé par l'intuition que le maximum est atteint pour une valeur de y proche de 0.7 mais qu'il n'est pas un nombre « simple ». Il conjecture que cette valeur est $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et vérifie une partie de sa conjecture C2 en dérivant la fonction $f(x,x)$ comme une fonction à une variable. Ce raisonnement qui repose sur des hypothèses successives, le conduit à une dernière question relative à la preuve du problème (Q5) : comment expliquer que $x = y$?

En résumé, cet élève utilise plutôt un raisonnement de type « créatif » (Lithner, 2007) bien marqué par la formulation écrite de conjectures tirées d'expériences qui jalonnent sa recherche et de réfutations ou validations, mais sans avoir de contrôle systématique des résultats intermédiaires établis. Il ne pose pas réellement de questions d'ordre technique, car il les contourne toujours en revenant à l'utilisation de valeurs numériques approximatives, mais en revanche le travail du problème est jalonné par l'identification de nouveaux problèmes à résoudre (Q1 et Q5) et orienté vers la recherche de nécessités (Q5). Il pose des questions sur la validité des résultats obtenus et des démarches utilisées, en particulier quant à leur correction mathématique et à l'exhaustivité des résultats qu'elles permettent d'obtenir à partir de la moitié de la boucle 3. Globalement, il semble mener une enquête, à partir d'hypothèses plus ou moins fondées, pour localiser le ou les maximum de la fonction f avant de donner une preuve de ce résultat.

c) Conceptualisation de la notion de maximum

Pour Mathieu, dans la résolution de ce problème, le maximum d'une fonction est d'abord associé à la croissance et à la majoration (boucles 1, 2, 3). Le concept-en-acte « maximum d'une fonction » correspond à « plus grande valeur de la fonction » ; il est mis en oeuvre car l'élève écarte dans un premier temps la possibilité de dérivation de la fonction. Les théorèmes-en-acte correspondant sont étroitement liés à sa conceptualisation de la notion de fonction. Ce sont les suivants :

- TA1 : si une fonction admet un maximum, alors elle a un majorant ;
- TA2 : si une fonction positive n'admet pas de maximum, alors elle tend vers $+\infty$;
- TA3 : une fonction a une seule variable, s'il y a plus d'une variable c'est une expression algébrique ;
- TA4 : on peut étudier les limites d'une expression mais pas son sens de variation, ni sa dérivée donc pour déterminer le maximum d'une expression on étudie son allure et ses limites, en fixant successivement les variables x et y ;
- TA5 : le maximum d'une expression $f(x,y)$ correspond au maximum des maxima de $f(x,y_i)$, les y_i étant successivement fixés ; on peut le localiser avec des tests de valeurs.

Les trois premiers TA préexistent probablement à la résolution du problème, c'est-à-dire qu'ils ne semblent pas évoluer avec le travail du problème. Le travail du problème avec ces cinq théorèmes-en-acte n'aboutit pas, ce qui le conduit à mobiliser le concept-en-acte de « maximum » comme « point critique » (boucle 4). Les théorèmes-en-acte associés sont alors les suivants :

- TA6 : le maximum d'une fonction de deux variables correspond à un point où la dérivée de cette fonction est nulle ;
- TA7 : le maximum d'une fonction $f(x,y)$ correspond à un point où la dérivée de $f(x, g(x))$, avec $y=g(x)$, est nulle.

4.3. Activité de l'ensemble des élèves

Nous présentons ici de façon synthétique les résultats issus de l'analyse des seize premières lettres des lycéens pour ce qui concerne les raisonnements utilisés et le travail du problème. Le tableau 3 qui figure en annexe 3 indique les résultats obtenus pour chacune des correspondances.

Rappelons que le problème correspond à une situation nouvelle pour les élèves, des adaptations de schèmes existant sont donc nécessaires. En référence à l'analyse *a priori* du problème, nous distinguons donc parmi les schèmes qui génèrent les raisonnements des élèves ceux qui correspondent à une recherche d'adaptation à la situation et les autres. Les premiers constituent pour nous des raisonnements créatifs, même s'ils visent à se ramener à un contexte familier et à un raisonnement connu, car ils ne peuvent pas être associés à une expérience mathématique récente dans une situation.

Sept élèves sur seize recourent à un moment ou à un autre à un schème utilisant la « dérivation » : ils cherchent à localiser le maximum de la fonction en dérivant la fonction f à la fois en x et en y . Ce raisonnement dénote clairement une non adaptation à la situation. Les règles opératoires utilisées sont les théorèmes connus sur les fonctions à une variable. Le concept-en-acte sous-jacent est celui de maximum comme « point critique ». Ces schèmes correspondent à des raisonnements de type FAR mobilisés par les élèves sur la base d'indice de surface, sans prise en compte du domaine de validité du théorème. Mais il est à noter que, parmi ces sept élèves, trois seulement recourent d'emblée à un tel raisonnement, les quatre autres le font après avoir échoué avec au moins une autre procédure. On ne peut donc pas dire que dans cette situation les élèves recourent massivement à un FAR. Par ailleurs, il est à noter que les élèves qui ont recours à ce schème questionnent souvent (sauf les

élèves 9 et 12) le résultat obtenu ou (non exclusif) la validité de la démarche utilisée. Parfois même ils questionnent la méthode avant d'effectuer le calcul, mais le font tout de même, probablement pour « voir ce que ça donne ». Le résultat trouvé n'est pas semblable à celui qu'ils obtiennent habituellement ($xy = \frac{1}{2}$) et rend difficile la poursuite du problème, les élèves le constatent et s'interrogent. Ils ne semblent pas uniquement préoccupés par la solution du problème, mais aussi par les nécessités intrinsèques au problème.

Cinq élèves utilisent dans leur première lettre l'*exploration numérique* pour localiser le maximum de la fonction. L'utilisation d'un raisonnement de ce type témoigne d'une identification de la spécificité de la situation et d'une adaptation à cette spécificité. Les schèmes utilisés sont organisés autour de la mobilisation d'une conception du maximum qui n'est pas celle majoritairement utilisée en classes de 1^{ère} (17 ans) et Terminale (18 ans) : le maximum comme la plus grande valeur prise par la fonction. Ils ne correspondent pas à un algorithme (il n'y pas de programme prédéfini pour trouver, en un nombre d'étapes définies, la solution) mais plus à une recherche empirique dont les buts successifs visent à calculer et comparer des valeurs de la fonction pour approcher de plus en plus finement la valeur de son maximum. Ces raisonnements correspondent pour nous typiquement à des raisonnements créatifs que l'activité de Matthieu illustre bien. L'usage de tels schèmes permet d'avoir une idée de l'endroit où est atteint le maximum, mais ne permet pas de prouver. Les élèves qui procèdent de cette façon émettent des conjectures (4 sur 5), interrogent les résultats obtenus (2 élèves sur 5) mais ne se posent pas de questions sur leur démarche ou sur des aspects techniques, alors que le plus souvent ils manquent certainement de recul sur leurs calculs. Leur activité est donc créative mais peu problématisée.

Cinq élèves pensent à utiliser des *inégalités* pour résoudre le problème. Leur raisonnement repose sur l'idée que le maximum est atteint quand le rapport est le plus grand possible. A partir de là, les élèves travaillent avec les inégalités pour déterminer le maximum de la fonction sans y parvenir. Ils cherchent ainsi implicitement à trouver le plus petit des majorants atteint de la fonction mais le raisonnement est délicat à mener. La mise en œuvre d'un tel schème montre une certaine créativité dans la mesure où, comme nous l'avons indiqué dans l'analyse *a priori* du problème, cette procédure a été travaillée en seconde et pas ensuite et est peu disponible pour des élèves de Terminale. L'utilisation de ce raisonnement génère seulement des questions techniques (2 élèves sur 5), ce qui est normal vu la difficulté technique de la résolution. L'activité de ces élèves apparaît donc à la fois créative et peu problématisée.

Quatre élèves étudient sans succès, comme le fait Mathieu, les *limites* de la fonction pour avoir une idée de son sens de variation. Cette procédure génère très peu de questions, seul un élève formule des questions techniques.

Plusieurs autres raisonnements des élèves correspondent à des schèmes de résolution du problème qui visent en premier lieu à se ramener à une situation qui permet l'utilisation du schème de dérivation, c'est-à-dire se ramener à une fonction à une variable. Ces schèmes dénotent une adaptation à la situation différente des précédents puisqu'ils sont orientés vers un refuge (bien normal) dans une situation connue, une recherche de raisonnement de type FAR. Le concept de maximum comme point critique constitue un invariant opératoire de ces schèmes. Pour ce faire, quatre élèves pensent à mobiliser le passage par les *coordonnées polaires*, ce qui correspond, d'après notre analyse *a priori*, à une connaissance disponible pour les élèves mais dans des situations, habituellement, différentes de problème de maximum. Ces élèves aboutissent rarement à un résultat et posent des questions techniques (deux élèves). Quatre autres élèves se ramènent à un problème connu en *fixant une des deux variables* pour pouvoir dériver (3 élèves) ou en donnant une ou plusieurs *valeurs numériques à une de deux variables* (1 élève). Six élèves se restreignent, à un moment, au cas de $x = y$, le plus souvent cela apparaît comme un choix non justifié (voir Olivia). Cela permet à trois d'entre eux de formuler une conjecture sur la localisation du maximum de la fonction. L'exemple d'Olivia illustre les investigations que peuvent faire les élèves. Ces raisonnements créatifs sont donc associés à une problématisation.

Ainsi, dans les seize premières lettres, donc indépendamment de l'aide du correspondant, un peu moins de la moitié des élèves recourent, à un moment, à un schème utilisant la « dérivation » qui correspond typiquement à la mobilisation d'une FAR. Et, 11 élèves sur les 16 qui ont participé à la correspondance utilisent un schème qui vise à se ramener à une variable pour pouvoir dériver, c'est-à-dire se ramener à un FAR. Cela nous semble raisonnable comme attitude. Pour cela les élèves font preuve de créativité. Les autres élèves utilisent aussi des raisonnements créatifs.

4.4. Conclusion

Ces résultats témoignent que l'activité mathématique des élèves est plurielle, avec tantôt recours à des raisonnements de type FAR tantôt des raisonnements créatifs, et aussi plurielle dans la mesure où rares sont les élèves qui n'explorent qu'une seule piste. On retrouve ici la dimension adaptative du schème qui, comme l'indique Vergnaud, « fait feu de tout bois ». Ils apparaissent plus contrastés que ceux obtenus par Lithner. Les raisonnements de type FAR ne sont pas majoritaires et révèlent une activité non essentiellement orientée vers la solution du problème à travers les questions que posent explicitement les élèves : sept élèves s'interrogent au moins une fois sur la validité du résultat obtenu, sept (pas exactement les mêmes) s'interrogent sur la validité de leur démarche et huit sur des aspects techniques de la résolution. Ces dernières questions qui témoignent d'une orientation de la recherche vers la solution sont à peine plus nombreuses alors que les élèves sont dans une situation techniquement difficile pour eux. Cela montre que les élèves s'inscrivent dans une démarche de problématisation : globalement (à quelques exceptions près) les élèves tiennent à résoudre le problème et à le

comprendre et pas seulement à apporter une solution à la question posée. Ces résultats appellent aussi de nouvelles investigations pour affiner les relations entre créativité et problématisation et rendre compte de l'épaisseur de l'activité mathématique des élèves.

L'activité des élèves dans ce cadre correspond-elle à ce que les élèves montrent d'habitude à leur enseignant ? Sinon, en quoi les conditions créées par la situation pourraient-elles expliquer cet écart ?

5. Discussion : activité mathématique déployée et conditions écologiques de cette activité

Pour savoir si l'activité déployée par les lycéens dans notre cadre d'investigation correspond ou pas à leur activité « normale » nous avons demandé à leur enseignant de nous indiquer, librement, s'ils étaient étonnés par les productions (lettres) de leurs élèves et en quoi. Les résultats de cette enquête sont présentés dans l'annexe 4.

Globalement, les enseignants sont effectivement étonnés : pour 12 élèves sur 16 l'activité déployée dans la correspondance mathématique ne correspond pas à l'activité habituelle des élèves en classe et dans leur écrit. D'après leur profil (voir tableau 1), les élèves qui n'étonnent pas du tout leur professeur sont soit de très bons élèves (élève 16) soit des élèves scolaires qui attendent facilement de l'aide (élèves 7, 9, 14). L'étonnement peut être assez faible pour les élèves qui ont beaucoup de difficultés (élève 2) ou les élèves qui attendent d'habitude de l'aide (élève 8). La capacité de recul de certains élèves que l'on peut relier aux questions qu'ils posent, leur créativité dans les raisonnements mobilisés, leur ténacité et leur motivation provoquent le plus d'étonnement chez les enseignants qui n'observent pas ces comportements habituellement alors que les élèves en ont vraisemblablement la capacité. Une autre chose étonne aussi les enseignants : certains élèves réfractaires à l'écriture comme trace d'un raisonnement rapportent volontiers leur démarche dans les correspondances.

Les résultats obtenus dans notre cadre d'investigation montrent que les lycéens, dans des conditions différentes des conditions habituelles de classe, ont une activité plus créative et plus problématisée que celle qu'ils laissent voir à leur enseignant. Nous retrouvons ici des résultats semblables à ceux de Battie (2003) et la tension identifiée entre ce que les élèves donnent à voir de leur capacité dans le cadre scolaire habituel et ce dont ils sont capables dans certaines conditions. Il s'agit maintenant d'identifier les conditions écologiques qui ont permis de révéler ces potentialités et seraient reproductibles dans le cadre relativement ordinaire d'une classe de lycée.

Revenons aux travaux de Lithner. Pour lui, les élèves mobilisent préférentiellement des raisonnements de type imitatifs car ils se développent dans un milieu (au sens large) qui favorise l'imitation : le contrat didactique en place dans ces institutions ne favorise pas la créativité et il y a un manque de réelle dévolution (Brousseau, 1997). De ce point de vue, il est évident que la correspondance mathématique permet une rupture avec le contrat didactique habituel dans la mesure où l'enseignant n'est pas un des protagonistes de l'échange épistolaire. Par ailleurs, même si les élèves savent qu'ils correspondent avec un étudiant plus avancé qu'eux qui a pour rôle de les aider, la responsabilité de la production d'une solution et d'une validation de cette solution leur incombe largement. Il ne faut pas nier non plus, à cet égard, que pour les lycéens cette correspondance constitue probablement une sorte de défi (rappelons que les enseignants sont étonnés par la motivation et la ténacité de certains élèves). Par ailleurs, la variable « durée » nous semble aussi contribuer à la dévolution du problème. En effet, même si l'élève a tendance à attendre de l'aide il sait qu'elle ne sera pas disponible immédiatement. La dévolution du problème dans ce cadre est donc certainement plus grande qu'en classe. Certaines remarques d'élèves formulées lors de la restitution montrent qu'effectivement ils se sentaient pleinement responsables de la résolution du problème. Par exemple, l'élève 5 déclare : « l'exercice de recherche avec la fac a permis de donner une autre dimension aux maths car cette fois, on n'a plus à suivre les idées des autres et à les réemployer, c'est nous qui construisons à partir de ce que l'on sait ! ». Mais, toujours du point de vue de la dévolution du problème, il faut souligner que celle-ci est possible seulement si le problème lui-même le permet. En effet, la dévolution du problème concerne la recherche d'une solution et sa validation. Il faut donc que le milieu de la situation didactique permette des rétroactions en cas d'erreurs des élèves. Ici, il s'avère que le problème choisi « naïvement » présente ces caractéristiques. En effet, lorsque les élèves mobilisent un schème utilisant la « dérivation », le résultat obtenu n'est ni conforme aux résultats habituellement obtenus, ni facile à exploiter pour déterminer le maximum de la fonction. De fait, comme nous l'avons vu en particulier à travers l'analyse détaillée des correspondances, les élèves se questionnent, invalident la procédure et en cherchent une autre plus adaptée. Cette rétroaction du milieu permet l'identification des spécificités du problème (recherche de maximum pour une fonction à deux variables) et l'apparition non ordinaire de schèmes qui correspondent à une adaptation à la situation nouvelle rencontrée et à des raisonnements « créatifs ».

Une autre caractéristique de ce qui est donné à voir de l'activité des élèves concerne le nombre inhabituel de questions formulées par les élèves, ce que les enseignants nomment « recul ». Nous pensons que la correspondance crée des conditions qui favorisent l'explicitation de ces questions. Cette explicitation est certainement facilitée par l'adresse à un presque pair, qui peut être considéré comme un « grand frère » : étant plus avancé, il a une légitimité par rapport au savoir et est donc reconnu comme pouvant apporter de l'aide mais, comme il est presque pair, cette légitimité n'est pas aussi écrasante que celle d'un professeur. Toutefois, la correspondance mathématique crée aussi d'autres conditions qui rendent presque nécessaires la formulation de

ces questions. D'abord, si le lycéen veut que l'étudiant l'aide il a tout intérêt à faire comprendre son raisonnement et les raisons pour lesquelles, éventuellement, il reste bloqué. D'où, en particulier, la formulation de questions d'ordre technique. Ensuite, la correspondance inscrit la résolution du problème dans la durée. Le lycéen a donc intérêt à garder une trace de son activité et, en particulier, des pistes explorées, de ce qu'elles ont permis d'obtenir, de ce qui pose encore question dans cette exploration. D'où la formulation de questions qui correspondent à une problématisation que les enseignants ne retrouvent pas dans leurs écrits ordinaires.

Par ailleurs, comme nous l'avons vu au cours de l'analyse détaillée des deux correspondances, la recherche de ce problème permet, au moins au cours de la correspondance, une évolution des conceptualisations des élèves en ce qui concerne la notion de maximum d'une fonction. Là encore, les caractéristiques du problème nous semblent essentielles : le milieu permet l'invalidation d'une procédure qui mobilise la conception de maximum comme point critique ; les raisonnements les plus disponibles qui permettent de résoudre le problème mobilisent plutôt la conception de maximum comme la plus grande valeur de la fonction. Mais l'écriture rendue nécessaire dans la correspondance contribue à l'évolution de cette conceptualisation dans la mesure où elle permet une sorte de conscientisation des théorèmes-en-acte mobilisés par les élèves.

Ainsi, la correspondance mathématique réalisée a créé des conditions écologiques qui, dans le cadre de notre recherche, ont permis, globalement, à des élèves volontaires de niveaux mathématiques variés d'exercer une activité mathématique plus créative et plus problématisée qu'à l'habitude. Nous pensons que ces conditions pourraient être utilement exploitées dans l'enseignement secondaire pour permettre aux élèves de développer des connaissances en matière de résolution de problème et ainsi contribuer à faciliter la transition secondaire-supérieur. A quelles conditions est-il possible de transférer ce dispositif dans l'enseignant « ordinaire » pour permettre des apprentissages des élèves ?

Au préalable, il faut remarquer que, contrairement à d'autres dispositifs comme la narration de recherche (Sauter, 2000 ; Bonnafé et al., 2002), la mise en place d'une correspondance mathématique ne nécessite pas l'installation progressive d'un contrat didactique différent avec l'enseignant car l'élève s'adresse à une autre personne que le professeur. Ensuite, sans garantir l'exhaustivité, voici des conditions qui nous semblent primordiales à remplir pour permettre un passage réussi vers les classes « ordinaires ». D'abord, il faut choisir un bon problème, c'est-à-dire un problème qui résiste un peu, garantisse un minimum de rétroactions et puisse se résoudre de plusieurs façons au niveau de scolarité considéré. Une banque de tels problèmes, avec leur analyse *a priori*, serait à constituer. Ensuite, il nous semble qu'il faut que les enseignants disposent de moyens efficaces d'analyser les lettres de leurs élèves pour que le dispositif ne soit pas trop coûteux. Leur proposer une analyse à partir des buts que se fixent les élèves, des moyens utilisés et des questions posées en référence à l'analyse *a priori* du problème devrait pouvoir les aider. Cette aide à l'analyse de l'enseignant est essentielle car, pour permettre la pérennité des apprentissages qui sont en germe dans les correspondances mathématiques, du point de vue de l'ouverture des raisonnements utilisés, de la démarche de problématisation et des conceptions des notions qui interviennent dans le problème, il faut qu'un moment d'institutionnalisation suive l'échange épistolaire. Ce moment doit, d'une part, reprendre les principaux raisonnements proposés par les élèves et les questions qui y sont associées avec des apports de l'enseignant sur la validité des raisonnements et les questions des élèves, l'intérêt de la formulation de questions pour l'avancée dans la recherche du problème. D'autre part, il doit aussi comprendre une explicitation des théorèmes-en-acte et des conceptions mobilisés par les élèves. Une institutionnalisation à ces deux niveaux devrait permettre une meilleure disponibilité des connaissances des élèves lors de la résolution de problème mais elle modifie aussi le contrat avec les élèves, des modalités de travail sont donc à trouver.

De cette façon, l'usage de la correspondance mathématique deux à trois fois dans l'année à la fin du lycée ou au tout début de l'Université constitue un dispositif qui, parmi d'autres, pourrait faciliter la transition secondaire-supérieur à plusieurs titres non indépendants. Dans sa synthèse, Gueudet (2008) pointe les différences au niveau du contrat didactique et de la transposition didactique des connaissances dans les deux institutions. La correspondance mathématique permet un travail largement autonome des lycéens, sur une période assez longue, ce qui implique qu'ils se sentent vraiment responsables de la résolution du problème ; cela les accoutume au contrat didactique en place à l'Université. Elle pointe aussi le manque de flexibilité des connaissances des lycéens et leur défaut de disponibilité pour la résolution de problèmes. Or, avec un problème bien choisi et une institutionnalisation adaptée, la correspondance mathématique peut contribuer à rendre disponible les connaissances mathématiques des élèves et aussi à les rendre moins rigides. Pour cela, il convient, bien entendu, de développer des problèmes adaptés.

Références

- Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : CRDP.
- Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Paris : Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.
- Bonnafé, F., Chevalier, A., Combes, M.C., Deville, A., Dray, L., Robert, J.P., & Sauter, M. (2002). *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*. Montpellier : IREM de Montpellier.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics, 1970-1990*. Dordrecht : Kluwer.
- Gras, R., Bardy, P., & Parzysz, B. (2003). *Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée*. Paris : APMEP.

- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237-254.
- Lithner J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2), 165-190.
- Lithner J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52(1), 29-55.
- Lithner J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276.
- Orange C. (2005a). Problème et problématisations dans l'enseignement scientifique. *ASTER*, 40, 3-11. Téléchargé le 17 décembre 2010 du site <http://www.inrp.fr/editions/revues/aster/pdf/aster-40/ra040-probleme-et-problematisation-dans-l-enseignement-scientifique.pdf>.
- Orange, C. (2005b). Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques. *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*, 38(3), 70-92. Téléchargé le 17 décembre 2010 du site http://creas.educ.usherbrooke.ca/Archives/OrangeChr_Lecture.pdf.
- Sauter, M. (2000). Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège. *Repères IREM*, 39, 7-20. Téléchargé le 17 décembre 2010 du site <http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/39sauter.pdf>.
- Vergnaud G. (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. Dans R. Noirfalise, & M.J. Perrin-Glorian (eds), *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 174-185). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.
- Vergnaud G. (2007). Représentation et activité : deux concepts étroitement associés. *Recherche en Education*, 4, 9-22. Téléchargé le 17 décembre 2010 du site <http://www.recherches-en-education.net/spip.php?article114>.

ANNEXE 1 : boucles de raisonnement pour Olivia

Première lettre : quatre boucles de raisonnement

B1 : trouver (directement) le max de f	Dériver $f(x, y)$	Q1 : ai-je le droit de dériver ?
B2 : me ramener à une variable pour dériver	Poser $x = y$	$g(x) = \frac{2x}{1+2x^2}$
B3 : trouver le max de g s'il existe	Dériver $g(x)$	max de g pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Q2 : peut-on conclure que $f(x,y)$ admet un max quand $x =$ $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$?
B2 : me ramener à une variable pour dériver	Passer en polaires : $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$	$f(x,y) = \frac{r(\cos \theta + \sin \theta)}{1+r^2}$
B'3 : trouver le max de $f(x,y) = f(r, \theta)$, s'il existe		Q3 : comment étudier cette fonction ?
B2 : me ramener à une variable pour dériver	Passer aux complexes ($z = x + iy$), séparer R et I	Q4 : comment faire le lien entre $x+iy$ et $f(x,y)$?

Deuxième lettre : reprise de la boucle 3

B'3 : trouver le max de $f(x,y) = f(r, \theta)$ s'il existe		$f(x,y)$ grand quand r est grand. Non, θ intervient aussi
---	---	---

écrire $f(r, \theta)$ comme
produit de 2
fonctions

$$f(r, \theta) = h(r)l(\theta) \text{ avec } h(r) = \frac{1}{1+r}, g(\theta) = \cos \theta + \sin \theta$$

B4 : chercher le
max de h et le max
de l s'ils existent

Dériver les fonctions

$h(r)$ max pour $r = 1$ $l(\theta)$ max
pour $\theta = \pi/4$

B2 : chercher le
max de f s'il existe

$f(r, \theta)$ max quand $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$
Q5 : pourquoi est-ce que ma
première idée était fausse alors
que je trouve le même résultat ?

ANNEXE 2 : boucles de raisonnement pour Mathieu

B7 : résumer ce qu'on sait	Inventaire avec appui sur correspondant	x ou $y \rightarrow \infty, f(x,y) \rightarrow 0$ le max est entre 0 et 1 la fonction est majorée
B6 : trouver le(s) max de f	Dériver $f(x,y)$	Un seul max, quand $xy = \frac{1}{2}$ i.e. quand $y = \frac{1}{2x}$
B8 : trouver le max de $f(x, \frac{1}{2x})$	Dériver	Max quand $y = 0.7$ Confirme mes approximations mais reste une approximation
	Fait numérique : $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7$	C2 : max $x = y = \sqrt{\frac{1}{2}}$
B9 : vérifier C2	Dériver $f(x,x) = f(x)$	max quand $x = y = \sqrt{\frac{1}{2}}$
		Q5 : comment expliquer que $x=y$?

ANNEXE 3 : Résultats de l'analyse de chaque correspondance

Le tableau 3 ci-dessous indique les résultats de l'analyse des seize premières lettres écrites par les lycéens. Dans la première colonne figure le numéro de la correspondance. Dans la seconde le type de schème utilisé par le lycéen. Chaque lycéen peut utiliser plusieurs schèmes lorsqu'il cherche le problème, une ligne est attribuée à chaque schème. Ces schèmes qui correspondent aux boucles de raisonnement sont caractérisés par leur but et les règles d'action que se donne le lycéen.

Pour les schèmes « limites », le but est de déterminer les limites de la fonction pour déterminer si un maximum existe. Pour les schèmes « numérique » le but est de localiser le maximum de la fonction en effectuant une exploration numérique, éventuellement avec une étude de l'allure de la courbe. Les schèmes « dérivation » ont pour but de déterminer le maximum de la fonction en la dérivant simultanément selon x et y . Les schèmes « inégalités » visent à étudier la valeur maximum que peut prendre la fonction avec des inégalités, ils sont générés implicitement par l'idée de plus petit des majorants. « SA » signifie schème d'adaptation, il y en a plusieurs types. « SA, Polaire » correspond aux schèmes qui visent à se ramener à une variable en utilisant le passage en coordonnées polaires. « SA, 1VE », « SA, 1VQ », « SA, 1VP », « SA, FI », « SA, facteur » correspondent respectivement aux schèmes qui visent à se ramener à une variable en posant $x=y$, en fixant une des deux variables et en faisant varier l'autre, en donnant une valeur numérique à une des deux variables, en essayant d'exprimer l'une des deux variables en fonction de l'autre, en essayant de factoriser pour éliminer une des deux variables.

Les autres colonnes du tableau indiquent si le lycéen se questionne sur la validité de son résultat (Résultat ?), sur la validité de sa démarche (Démarche ?), sur la façon de régler un problème technique rencontré du type « comment faire pour dériver une fonction à deux variables » (Technique ?). « Résultat » signifie que le lycéen aboutit à un résultat (éventuellement partiel, non satisfaisant ou faux), qu'il n'abandonne pas en cours son raisonnement. « Conjecture » indique qu'il émet explicitement une conjecture.

N°	Type de schèmes	Résultat ?	Démarche ?	Technique ?	Conjecture	Résultat
1	Autre					x
	Limites					x
	Numérique	x			x	x
	Dérivation	x	x		x	x

2	Numérique	x			x	
	SA,1VPQ					x
3	Dérivation		x			
	SA, 1VE	x				x
	SA, Polaire			x		
	Sa, Complexe			x		
4	Numérique				x	
	Dérivation	x				x
5	SA, 1V Facteur					
	SA, 1VE			x		
	SA, 1VPP	x				x
	SA, 1VPP	x				x
	SA, 1VPP					
	SA, Polaire			x		
6	SA, 1VE					x
	SA, autre			x		
7	SA,1VE	x	x	x		x
8	Autre					
9	Limite					x
	Dérivation				x	x
	SA, FI					
10	Inégalité			x		x
	Numérique				x	
11	Numérique					x
	Limite			x		x
	SA, 1V Facteur		x			
	Autre					
	Autre		x			x
12	Dérivation			x		
	SA, Facteur					
	Inégalités		x			
13	SA, Polaire					
	Dérivation					
14	Dérivation	x		x		
	Inégalités					
15	SA, autre				x	
	Inégalités			x		x

	SA, autre			x		x
	SA, 1VE			x		x
16	Autre					
	SA, FI (fonction implicite)			x		
	Limite					x
	Inégalités					x
	SA, Polaire					x
	TOTAUX	7 élèves	7 élèves	8 élèves	6 élèves	12 élèves

Tableau 3 Analyse des 16 correspondances

ANNEXE 4 : Résultats de l'enquête menée auprès des enseignants

Le tableau 4 ci-dessous indique si le professeur de mathématiques de chacun des lycéens est étonné par sa production au cours de la correspondance mathématique (première colonne) et, si oui, par quoi (deuxième colonne).

N°	Le professeur est-il étonné ?	Par quoi ?
1	OUI	Ecriture, recul.
2	PEU	Participation.
3	OUI	Recul, créativité.
4	OUI	Recul, démarche organisée et rigoureuse.
5	OUI	Créativité, motivation.
6	OUI	Fait moins bien que d'habitude.
7	NON	
8	PEU	Manque de « combativité » par rapport à l'habitude.
9	NON	
10	OUI	On sent qu'il a des idées.
11	OUI	Ecriture mais s'il n'est pas sûr de lui, persévérance.
12	OUI	Posture de recherche.
13	OUI	Ténacité, créativité.
14	NON	
15	OUI	Pertinence.
16	NON	

Tableau 4 Résultats de l'enquête menée auprès des enseignants