L'Analyste de Berkeley vs le Traité des Fluxions de Maclaurin : une certaine idée de la preuve en mathématiques

Olivier Bruneau

« L'*Analyste* de Berkeley versus le *Traité des Fluxions* de Maclaurin :
une certaine idée de la preuve en mathématiques »

Introduction

Lors de la parution en 1734 de l'*Analyste*[1] par l'évêque irlandais Berkeley, un vent de contestation se leva contre ce livre en Grande-Bretagne. Cet opuscule critique fermement le calcul newtonien et leibnizien, en particulier leurs fondements. De nombreux britanniques ont répondu vivement à cet affront sans réel succès[2]. Mais, en 1742, Maclaurin, mathématicien écossais, fait paraître un long ouvrage, le *Treatise of Fluxions*[3]. Il veut, par cet écrit, pourfendre les attaques de l'irlandais qu'il considère non justifiées.
Ainsi, nous tenterons, tout d'abord, d'énoncer les critiques de Berkeley, de quels ordres elles sont, et par quels procédés elles furent établies ; puis, nous étudierons comment Maclaurin a répondu à Berkeley, ainsi comment il a su proposer une nouvelle approche de ce champ mathématique.

Berkeley et sa critique de l'analyse newtonienne[4].

Dans les différents écrits de Berkeley, la critique des fluxions et des infiniment petits est largement présente et est un de ses soucis majeurs à la fois philosophiques et mathématiques. A la lecture de ces ouvrages, on peut lire plusieurs attaques qui sont de différents ordres. Nous allons essayer de les différencier pour en donner une idée. Nous ne prétendons pas faire une analyse exhaustive de toutes les interrogations que Berkeley émet à propos du nouveau calcul, mais nous allons prendre quelques exemples qui résument assez bien sa vision du calcul différentiel et montrer pourquoi il rejette ce type de mathématiques. Nous dégageons trois grandes critiques dans l'ensemble de ses ouvrages (même si la majeure partie de sa critique se situe dans son *Analyste*, dans les *Notes philosophiques* et dans le *Traité des Principes de la Connaissance Humaine*). La première des trois concerne la relation de Berkeley avec le savoir, c'est-à-dire sa conception philosophique du savoir et son appréhension. La deuxième se situe plus sur l'utilisation du vocabulaire et sa relation avec le sens. Enfin, Berkeley critique fermement le calcul newtonien car le procédé démonstratif utilisé n'est pas rigoureux.

Loin de rejeter les résultats trouvés par cette méthode, c'est le fondement qu'il considère comme faux, c'est ce qu'il annonce au début de l'*Analyste* : « La méthode des fluxions est la clé universelle à l'aide de laquelle les mathématiciens modernes révèlent les secrets de la géométrie et, par suite, de la Nature. Et, comme c'est elle qui les a mis à même de dépasser de façon si frappante les anciens dans la découverte des théorèmes et la solution des problèmes, l'exercice et l'application en sont devenus la principale sinon la seule occupation de tous ceux qui, de nos jours, passent pour de profonds géomètres. Mais cette méthode est-elle claire ou

[1] Berkeley, *The Analyst ; or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician…*, Londres, Tonson, 1734.
[2] Pour plus de détails, cf. Guicciardini, N, *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800,* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
[3] Maclaurin, *The Treatise of Fluxions in two Volumes*, Edimbourg, 1742. Maclaurin, *Traité des Fluxions*, trad. Pezenas, Paris, Jombert, 1748 (c'est cette édition que nous utiliserons dans la suite de cet exposé).
[4] Pour une étude systématique de l'œuvre « mathématique » de Berkeley, lire Douglas Jesseph, *Berkeley's Philosophy of Mathematics*, University of Chicago Press, Chicago, 1993.

obscure, cohérente ou contradictoire, démonstrative ou incertaine ? Je vais (…) en faire la recherche avec la plus grande impartialité »[5].
Avant de rentrer dans le détail, nous allons laisser le soin à Berkeley de définir ce qu'est une fluxion : « On suppose que les lignes sont engendrées par le mouvement de points, les plans par le mouvement de lignes (…). Et comme les quantités engendrées en des temps égaux sont plus ou moins grandes, selon la plus ou moins grande vitesse avec laquelle elles s'accroissent et sont engendrées, on a trouvé une méthode pour déterminer les quantités à partir des vitesses de leurs mouvements générateurs. Ces vitesses sont appelées fluxions, et les quantités engendrées sont appelées quantités fluentes. On dit que ces fluxions sont à peu près comme les incréments des quantités fluentes engendrées dans les plus petites particules égales de temps. »[6]

Une critique d'ordre philosophique

Tout d'abord, nous allons décrire la philosophie des mathématiques de Berkeley. Ce dernier est très empreint de la vision baconienne du savoir, et l'approche empiriste est omniprésente, même dans les mathématiques. Celles-ci doivent prendre naissance dans l'expérience, et donc doivent rendre compte d'un système du monde effectif, en d'autres termes la mathématique chez Berkeley doit représenter le monde qui nous entoure et ne doit donc pas posséder un degré d'abstraction élevé.
Nous allons voir que si on suppose que le calcul des fluxions peut s'inscrire dans l'algèbre ou l'arithmétique alors on arrive à une contradiction, et donc on rejette cette théorie. Chez Berkeley, l'arithmétique et par extension l'algèbre a pour objet la combinaison de signes et de symboles qui ne sont pas la représentation abstraite d'un nombre ou d'une quantité. Leur vérité ne dépend que du choix arbitraire des notations et des règles de calculs telles que l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, les puissances, les logarithmes,…. Ainsi, dans le *Traité des Principes de la Connaissance Humaine*, on peut lire que « le nombre [est] entièrement une création de l'esprit, c'est ce qui sera évident à celui qui considère qu'une même chose peut porter plusieurs dénominations numériques différentes, selon que l'esprit la regarde sous différents rapports : c'est ainsi que la même étendue est une ou trois ou trente-six, selon que l'esprit la considère eu égard à un pouce, un pied, ou un yard. Le nombre est si visiblement relatif et dépendant de l'entendement des hommes qu'il est étrange de penser que l'on eût pu lui donner une existence absolue, hors de l'esprit. »[7] D'après Berkeley, la quantité que l'on appelle fluxion peut être considérée comme un infiniment petit (nous le verrons plus bas), c'est-à-dire une quantité non nulle plus petite que n'importe quelle quantité finie. Par des manipulations de notations et de règles calculatoires, il arrive à la conclusion que cette fluxion est nulle. Or en algèbre, une quantité ne peut être à la fois nulle et non nulle. Par conséquent, une fluxion n'est pas une quantité algébrique.
Si les fluxions n'appartiennent pas au domaine de l'algèbre, alors, si elles existent, elles doivent appartenir à la géométrie. Chez Berkeley, la géométrie est la science du monde perceptible, du monde sensible. Ainsi, ce doit être l'imagination et les sens qui doivent être mis en jeu et non l'intelligence pure ou la mémoire. De fait, l'abstraction est aussi bannie de la géométrie, et le traitement algébrique de la géométrie est valable si les symboles utilisés correspondent à un objet géométrique clairement conçu, par exemple x peut correspondre à l'aire d'un carré de côté a et ici $x = a^2$. Comme la fluxion est une quantité infinitésimale, ou un mouvement naissant, peut-on représenter cette quantité géométriquement ? La réponse de Berkeley est négative, car il ne peut concevoir une quantité évanescente comme une quantité

[5] Berkeley, l'Analyste, *Œuvres*, Vol. II, p. 273.
[6] Berkeley, *op. cit.*, p. 273-274.
[7] Berkeley, Traité des Principes de la Connaissance Humaine, *Œuvres*, vol. I, trad. Phillips, Paris, PUF, 2ème éd., 1997, p. 325

que l'on peut voir distinctement. Par exemple, on ne peut pas la représenter à l'aide d'une droite finie (*id est* un segment) car cette quantité est plus petite que n'importe quelle quantité finie, et on pourra donc dessiner un segment plus petit que celui représentant la fluxion, et être en contradiction avec la définition de la fluxion. De plus, si l'on pouvait la représenter (par un segment), ce serait au prix d'un lourd effort d'abstraction qu'il refuse. Ainsi, la fluxion n'est pas une quantité géométrique. De plus, dans la partie « questions » de l'*Analyste*, il affirme « bien que la géométrie soit une science, que l'algèbre soit reconnue comme telle, et l'analyse une méthode tout à fait excellente, néanmoins, dans l'application de l'analyse à la géométrie, n'a-t-on pas admis des principes faux et des méthodes de raisonnements erronés ? »[8] Une autre définition de la fluxion équivalente aux précédentes est que la fluxion peut être considérée comme une vitesse instantanée. Mais, dans la même volonté de nier l'abstraction, il rejète formellement le concept de vitesse instantanée car « en vérité, [dit-il], puisqu'il est impossible de concevoir la vitesse hors du temps et de l'espace, hors d'une longueur finie ou d'une durée finie, ce doit être, semble-t-il, au dessus de la puissance humaine de comprendre même les premières fluxions »[9]

Une critique d'ordre linguistique

Ainsi, nous venons de montrer que Berkeley refuse les fluxions car cela est contraire à l'expérience ; nous allons voir qu'il a pris une autre approche pour critiquer ces fluxions qui est d'ordre plus linguistique. Cette critique a surtout été faite dans ses écrits de jeunesse. Aucun mot ne peut être utilisé s'il ne désigne pas une idée claire et précise. Un mot n'est valide uniquement que si le sens qui se trouve derrière, ce qu'il exprime, peut être compris par tout le monde sans trop d'effort.

Dans les *Notes Philosophiques*, aux paragraphes 354, 354*a*, 421 et 422, on peut y lire que :

« N'employer aucun mot sans une idée. (§ 422)

Axiome : pas de raisonnement sur des choses dont nous n'avons aucune idée. Donc pas de raisonnement sur les infinitésimaux. (§ 354 et 421)

Et on ne peut pas objecter que nous raisonnons sur des nombres qui sont seulement des mots et non des idées, car ces infinitésimaux sont des mots inutiles si on n'admet pas qu'ils représentent des idées. (§354 a) »[10]

Dans un paragraphe de l'*Analyste*, on retrouve cette même critique, avec plus de virulence, dans le paragraphe 8, il dit :

« En vérité on doit reconnaître que les mathématiciens modernes ne considèrent pas ces points [les fluxions et les infinitésimaux] comme des mystères, mais comme clairement conçus et maîtrisés par leurs esprits à l'ample compréhension. Ils n'hésitent pas à dire qu'à l'aide de cette nouvelle analyse, ils peuvent pénétrer jusque dans l'infini lui-même, qu'ils peuvent même étendre leurs vues au-delà de l'infini (…). Mais, en dépit de toutes ces affirmations et prétentions, on pourrait demander à bon droit, puisque d'autres hommes en d'autres recherches ont souvent été abusés par les mots ou les termes, si ceux-ci n'ont pas été étrangement abusés et trompés par leurs propres signes particuliers, symboles ou notations algébriques. Rien n'est plus facile que d'inventer des expressions ou des notations pour les fluxions et les infinitésimaux des premier, second, troisième, quatrième ordres et des ordres suivants en procédant de la même façon réglée sans fin ni limite $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ddddot{x}$, etc., ou $dx, ddx, dddx, ddddx$, etc. En effet, ces expressions sont claires et distinctes, et l'esprit n'éprouve aucune difficulté à concevoir qu'on puisse en prolonger la suite au-delà de toute limite assignable. Mais, si nous écartons le voile et regardons derrière, si, mettant de côté les

[8] Berkeley, *L'Analyste*, p. 330.
[9] Berkeley, *L'Analyste*, p. 319.
[10] Berkeley, Notes Philosophiques, *Œuvres*, vol. I, p. 68 et 78.

expressions, nous nous appliquons à considérer attentivement les objets eux-mêmes qui sont censés être exprimés ou indiqués par leur moyen, nous trouverons beaucoup de vide, d'obscurité et de confusion ; bien plus, si je ne me trompe pas, des impossibilités et des contradictions franches »[11]

Mais cette critique ne tient pas la route, ou elle est d'un niveau moindre que la précédente car l'histoire des mathématiques nous fournit des exemples qui au départ n'étaient pas clairs mais dont le sens s'est éclairci. Nous pouvons penser aux irrationnels, aux nombres négatifs, ou aux imaginaires.

C'est pourquoi, Berkeley ne donne pas beaucoup d'importance à cette objection et ne s'étend pas plus sur le sujet.

Une critique d'ordre technique

Mais, sa critique la plus intéressante et peut-être la plus originale par rapport aux autres critiques vues plus haut qui restent relativement classiques se situe sur la preuve même des résultats. Sans pour autant nier la validité des résultats, il s'offusque de la démarche opérée en particulier par Newton dans ces différents opuscules.

Nous allons étudier plusieurs démonstrations qui nous semblent importantes.

La première est : quelle est la fluxion de l'aire d'un rectangle ?

Soient A et B la longueur des côtés du rectangle et a et b leur incrément respectif. L'aire est égale à AB. Newton, dans les *Principia*[12] (livre II, lemme 2), pose :

$$S_1 = \left(A - \frac{1}{2}a\right)\left(B - \frac{1}{2}b\right) = AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$$

$$S_2 = \left(A + \frac{1}{2}a\right)\left(B + \frac{1}{2}b\right) = AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$$

Puis dans un deuxième, il assure que la fluxion de AB est égale à $S_2 - S_1 = aB + bA$[13]. Berkeley considère, que ce ne sont pas les demi-incréments qui faut considérer mais les incréments entiers ce qui donne $S_1^{'} = (A+a)(B+b) = AB + aB + bA + ab$ auquel il faut retrancher l'aire du rectangle c'est-à-dire AB et on arrive au résultat $aB + bA + ab$. Pour retrouver le résultat de Newton, il faut faire disparaître la quantité ab. Or d'après Berkeley, « on ne peut parvenir à se débarrasser de ab par un raisonnement légitime »[14]. Ainsi, Berkeley pointe du doigt que la démarche de Newton manque de clarté, qu'un artifice de calcul permet de ne pas devoir négliger cette quantité ab, donc de ne pas considérer cette quantité comme infinitésimale. Il va plus loin en disant qu'on peut pas négliger des quantités en mathématiques et que cette théorie des fluxions n'est valable que comme une méthode d'approximation. Il demande alors, « ne vaudrait-il pas mieux donner de bonnes approximations que de prétendre atteindre l'exactitude à l'aide de sophismes ? »[15].

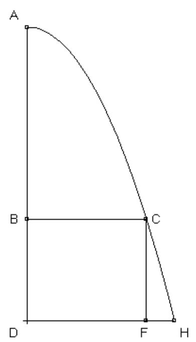
Il étend ce problème à une autre question qui est, si x est une variable et o un incrément de x, quelle est la fluxion de x^n où n est un entier naturel non nul ?

Il présente l'algorithme suivi par Newton dans le *Tractatus de Quadratura Curvarum*, premièrement il évalue $(x+o)^n - x^n = nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \ldots$ Puis il divise cette quantité par o, puis, il fait évanouir o, il trouve alors que cette quantité est égale à nx^{n-1}. Berkeley

[11] Berkeley, *L'Analyste*, p. 278-279.
[12] Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Londres, 1687.
[13] Cette démarche a été utilisée par différents auteurs du 18ème siècle, en particulier dans les manuels scolaires.
[14] Berkeley, *L'Analyste*, p. 282.
[15] Berkeley, *L'Analyste*, p. 328.

s'insurge contre le fait que dans un premier temps on suppose que o est non nulle puis dans un deuxième temps on le considère nul. Ici, le problème réside dans le fait que quand il divise par o, il fait l'opération $\frac{0}{0}$ (si on considère que o est nul), ce qui est relativement gênant en mathématiques. Dans ce procédé algorithmique, Newton étudie la quantité $\frac{o}{(x+o)^n - x^n} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Cette quantité est formellement un quotient de deux quantités (petites) que l'on représente par Δx et Δy. Après avoir calculé ce rapport, Newton passe à la limite, c'est-à-dire il regarde ce qu'il se passe lorsque Δx s'évanouit – en langage moderne, on écrit cela $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy}$. Dans ce passage à la limite, il y a un changement de nature, contrairement à la quantité $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, $\frac{dx}{dy}$ n'est pas le rapport entre dx et dy mais une quantité à part entière. En fait, Berkeley comme la plupart des successeurs de Newton n'a pas saisi la nuance de ce changement de nature[16], et sa critique concernant le quotient $\frac{0}{0}$ n'a plus d'effet.

Son dernier argument contre le calcul fluxionnel donne une explication sur la validité des résultats qui sont dus à la compensation de deux erreurs lors du raisonnement. Nous allons simplement en étudier un seul cas : Soit $AB = x$, $BC = y$, $BD = o$, si l'aire de l'ABC vaut x^2, alors que vaut BC ?



Il utilise la méthode des fluxions. Quand x devient $x+o$, l'aire devient égale à $(x+o)^2 = x^2 + 2xo + o^2$ d'une part, et d'autre part l'aire ABC devient l'aire ADH qui est égale à $BCFD + FCH$ où $BCFD$ est un rectangle d'aire oy. Il suppose maintenant que $FCH = qo^2$. Alors on a l'égalité $2xo + o^2 = oy + qo^2$. Il divise par o, on arrive à $2x + o = y + qo$, il fait disparaître o (o tend vers 0). Il conclut en disant que $y = 2x$. Berkeley ajoute que « en ce qui concerne ce raisonnement, on a déjà remarqué qu'il n'est ni légitime, ni logique, de supposer que o s'évanouit, c'est-à-dire s'annule, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'incrément, à moins de rejeter à la fois l'incrément lui-même et ses conséquences, c'est-à-dire tout ce qui ne pouvait pas être obtenu sans supposer cet incrément. On doit néanmoins reconnaître que le problème reçoit la solution correcte et la vraie conclusion par l'emploi de cette méthode. On demandera donc : comment se fait-il que le fait de négliger o n'entraîne pas d'erreur dans la conclusion ? Je réponds que la véritable raison en est manifestement la suivante : q étant égale à l'unité, qo est égal à o, et, par conséquent : $2x + o - qo = y = 2x$ les quantités égales qo et o se détruisant puisque de signes contraires »[17]. Détaillons un peu plus pour pouvoir comprendre qu'il peut assurer que les quantités qo et o sont opposées. Quand il fait s'évanouir o, il dit que dans ce cas, ACH serait une droite, et donc les triangles ABC et FCH sont semblables. Cela conduit à l'égalité de rapport $\frac{FC}{AB} = \frac{FH}{BC} \Rightarrow FH = o\frac{y}{x} = o\frac{2x}{x} = 2o$. Ainsi l'aire $FCH = \frac{2o^2}{2} = o^2$, ainsi $q = 1$ et donc $o - qo = 0$. Dans cet exemple, Berkeley montre bien que l'erreur instaurée par

[16] Pour plus de détail, voir Michel Blay, Deux Moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley, *Revue d'Histoire des Sciences*, 39, 3, 1986, p. 223-253.
[17] Berkeley, *L'Analyste*, p. 304.

l'apparition de *o* est compensée par une autre erreur qui est plutôt d'ordre géométrique, et que la méthode des fluxions ou des différences est inutile, car en utilisant l'évanouissement de *o*, il cache l'autre erreur, et que l'on peut arriver au bon résultat sans tomber dans les travers de l'analyse. Dans cet exemple simple, la compensation se fait facilement et ne pose pas de problème. Les compensations peuvent être de type algébrique c'est-à-dire qu'une quantité algébrique est annulée par une autre du même type, mais aussi, de type algébrico-géométrique c'est-à-dire qu'une quantité algébrique est compensée par une géométrique. Dans ce dernier cas, il est très peu précis, il dit simplement que cela se compense et ne donne pas de démonstration.

La diversité de ces critiques, de natures différentes, tantôt plutôt philosophique, tantôt linguistique, tantôt mathématique, nous montre que le calcul des fluxions et des différences a été un objet d'étude tout au long de sa vie, même si son œuvre majeure traitant du calcul newtonien et leibnizien ne paraît qu'en 1734. La dernière interrogation nous révèle autre chose, elle nous incite à penser que Berkeley est convaincu que l'on peut trouver une autre méthode se basant à la fois sur la méthode des fluxions et sur les mathématiques des Anciens ; il considère que les fondements de cette « nouvelle géométrie » n'est pas en adéquation avec « l'ancienne ». Maintenant, intéressons-nous à la réplique de Colin Maclaurin.

Maclaurin et sa défense du calcul newtonien

Pour étudier la réponse de Maclaurin, nous allons prendre appui sur un ouvrage publié en 1742 s'intitulant *Treatise of Fluxions* qui recouvre à peu près tout ce que l'on peut faire avec le calcul fluxionnel en 1742. Entre 1734 et 1742, il y eut plusieurs réponses à l'*Analyste* écrites par des mathématiciens britanniques tels que Jurin, Colson. Dans la préface du Traité des Fluxions, nous pouvons lire que « c'est pourquoi, dès que cette pièce [l'*Analyste*] fut tombée entre mes mains, (et avant que j'eux connoisance des Ouvrages que d'autres avoient entrepris pour la réfuter), je formai le dessein de démontrer ces élémens à la manière des Anciens, et de ne les appuyer que sur un petit nombre de principes incontestables, par les démonstrations les plus rigoureuses. »[18] Très tôt, dans l'ouvrage, il donne son argumentaire : donner une vue rigoureuse des fluxions, c'est-à-dire avec un procédé démonstratif légitime. C'est ce qu'il appelle « à la manière des Anciens », en référence aux mathématiciens grecs (Archimède, Euclide, …).

Une défense axiomatique

Même s'il a pris du retard dans son édition, le but de cet ouvrage reste inchangé : clore le débat, fournir une réponse satisfaisante qu'on ne pourra pas contredire. Comme garant de sa bonne foi, il appelle les grands géomètres grecs et annonce que « si la Géométrie est universellement estimée par les grands avantages qu'on en retire, on peut dire qu'elle ne se fait pas moins admirer par l'évidence de ces connoissances. Les Démonstrations Mathématiques ont toujours terminé toutes les disputes, et elles ne permettent pas de douter, ni de chicaner. La Géométrie a acquis ce caractère d'évidence par le grand soin que les Anciens ont pris de n'admettre que peu de principes évidens par eux-mêmes, et de ne donner, pour démonstrations, que ce qui étoit conclu évidemment de ces premiers principes. »[19]
Ainsi, d'une part, il va s'attacher à respecter ce que faisaient les anciens, à partir d'un groupe d'axiomes, il va déduire l'ensemble des propositions traitant des fluxions. Pour cela, il a

[18] Maclaurin, *Traité des Fluxions*, vol. I, préface, p. ix.
[19] Maclaurin, *Traité des Fluxions*, vol. I, p. 3

besoin d'un corpus mathématique déjà établi, ce dernier est un ensemble des connaissances mathématiques grecques et l'approche cinématique initiée par Archimède et continuée par Galilée et Newton. En effet, « dans la matière que je me propose d'expliquer et de démontrer dans ce *Traité*, nous avons recours à la génération des quantités, et nous en déduisons les relations, en comparant les puissances qui sont conçues les engendrer ; ou en comparant les quantités qui ont été formées, nous découvrons les relations de ces puissances et des autres quantités qu'elles sont censées représenter. La puissance que l'on conçoit former les grandeurs en Géométrie est le mouvement. »[20]

Nous nous souvenons que la notion de vitesse instantanée était refusée clairement et donc, toute relation entre fluxion et vitesse ne pouvait avoir lieu, ce fut l'un des motifs de rejet de cette théorie. Ici, Maclaurin, tout en se démarquant de la méthode des premières et dernières raisons, va utiliser un ensemble de définitions qu'il considère intangibles, et, à partir de celles-ci et d'une axiomatisation très courte, il s'engage dans son procédé démonstratif. Enumérons-le.

Dans le *Traité*, il annonce les différentes définitions des objets sur lesquels il va s'appuyer pour former sa théorie : « Les lignes sont produites par le mouvement des points ; les surfaces par le mouvement des lignes ; les solides par le mouvement des surfaces, les angles par la rotation de leurs côtés, en supposant toujours l'écoulement du tems uniforme. »[21]

Nous retrouvons ici la définition qu'avait donné Berkeley dans l'*Analyste*, et on peut donc dire que les deux hommes parlent des mêmes objets. Maclaurin, dans son souci de clarté et d'explication, affine un peu plus les objets essentiels que sont l'espace et le temps, surtout leur aspect continu et le fait que ces quantités sont homogènes, c'est-à-dire que l'on peut les utiliser dans une même phrase mathématique (on va pouvoir diviser l'espace par le temps).

De plus, il prend garde de bien préciser qu'il refuse les indivisibles, et, surtout pour les quantités spatio-temporelles : « Je ne prendrai aucune partie du tems ou de l'espace comme indivisible, ou comme infiniment petite »[22] Après, il met en relation ces deux concepts (le temps et l'espace) et cela donne la définition de la vitesse : « La vitesse d'un mouvement uniforme est mesurée par l'espace qui est parcouru dans un tems donné. Si l'action de la puissance varie, son action à chaque terme du tems n'est pas mesurée par l'effet qu'elle produit actuellement après chaque terme, mais par l'effet qu'elle auroit produit, si son action avoit été continuée uniformément après ce terme ; de même la vitesse d'un mouvement variable, à chaque terme donné du tems, n'est pas mesurée par l'espace qui est parcouru actuellement après ce terme dans un tems donné, mais par l'espace qui auroit été parcouru, si le mouvement avoit été continué uniformément après ce terme. »[23]

Ainsi, la vitesse d'un mouvement est mesurée par l'espace qui est parcouru dans un temps donné. De plus, la vitesse en un point est donnée par le rapport entre l'espace parcouru avec cette vitesse (considérée comme uniforme) pendant un temps fixé. Même s'il refuse de l'avouer, cette manière de voir la vitesse en un point est très proche de la vitesse instantanée, mais détourne la difficulté de considérer la limite du rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ où Δt tend vers 0.

Plus loin, il affirme encore : « Lorsque nous supposons qu'un corps a telle ou telle vitesse à chaque terme du tems, pendant lequel il se meut, nous ne prétendons pas dire qu'il ait quelque mouvement dans ce terme, limite ou moment du tems, ou dans un point indivisible de l'espace : mais comme nous mesurons toujours une vitesse par l'espace qui auroit été décrit, si ce mouvement avoit été continué uniformément depuis ce terme pendant un tems fini

[20] Maclaurin, *Traité des Fluxions*, vol. I, p. 2.
[21] Maclaurin, *Traité des Fluxions*, vol. I, p. 5.
[22] Maclaurin, *Traité des Fluxions*, vol. I, introduction p. iii.
[23] Maclaurin, *Traité des Fluxions*, vol. I, p. 4-5.

déterminé, on ne pourra pas dire que nous prétendions concevoir un mouvement ou vitesse, sans aucun égard à l'espace et aux tems. »[24]

La difficulté d'utiliser cette définition est dans le fait qu'on doit étudier un espace qui **aurait été** décrit, donc qui n'a pas été décrit. Déjà, nous pouvons dire que l'on s'éloigne d'une définition expérimentale et qu'on s'approche d'une définition plus abstraite. Mais, l'originalité de Maclaurin se retrouve ici, car au lieu d'étudier une vitesse « instantanée » mal définie, il insiste sur le fait que les mouvements étudiés sont uniformes et donc facilement calculables.

A partir de cela, il annonce ce que sont une fluxion et une fluente. Cette dernière est, pour lui, une quantité géométrique qui évolue dans le temps (elle diminue ou elle augmente) par le mouvement, à l'instar de la définition de la droite et autres figures géométriques rencontrées plus haut. Ainsi, une figure géométrique peut donc fluer. Nous avons donné plus haut la définition de la vitesse chez Maclaurin car chez lui, fluxion et vitesse sont très liées. En effet dans sa définition de la fluxion, il déclare que la fluxion d'un corps est la vitesse du mouvement de ce corps, ainsi « La vitesse, avec laquelle une quantité flue, à chaque terme du tems pendant lequel elle est supposée se former, se nomme fluxion, qui est par conséquent, toujours mesurée par l'incrément ou le décrément que ce mouvement auroit produit pendant un tems donné, s'il avoit été continué uniformément depuis ce terme sans aucune accélération ou retardement. »[25]

De cela, il peut énoncer ces axiomes. Après avoir défini le temps, l'espace, et ainsi énoncé sa définition de la vitesse, il expose ces quatre axiomes sur lesquels toute sa théorie va s'échafauder :
« Axiome I : L'espace décrit par un mouvement accéléré est plus grand que celui qui auroit été décrit dans le même tems, si le mouvement n'avoit pas été accéléré, mais continué uniformément depuis le commencement du tems.

Axiome II : L'espace parcouru par un mouvement accéléré pendant le tems de l'accélération est plus petit que l'espace qui auroit été parcouru dans un tems égal par un mouvement acquis par cette accélération, et continué uniformément.

Axiome III : L'espace parcouru par un mouvement retardé est moindre que celui qui auroit été parcouru dans le même tems si ce mouvement n'avoit pas été retardé, mais continué uniformément depuis le commencement du tems.

Axiome IV : L'espace décrit par un mouvement retardé pendant le tems du retardement est plus grand que celui qui auroit été décrit dans le même tems par le mouvement qui reste après ce retardement et continue uniformément. »[26]

Une défense passant par une démonstration plus rigoureuse

Après avoir énoncé son axiomatisation, nous n'allons nous intéresser simplement à une seule démonstration. Cette dernière n'est peut-être pas la plus parlante mais la plus abordable.
Prenons la première proposition du second livre: « La fluxion de la racine A étant supposée égale à a, celle du quarré AA sera égale à $2Aa$ »[27].

[24] Maclaurin, *Traité des Fluxions*, vol. I, p. 5.
[25] Maclaurin, *Traité des Fluxions*, vol. I, p. 7.
[26] Maclaurin, *Traité des Fluxions*, vol. I, p. 8-9.
[27] Maclaurin, *Traité des Fluxions*, vol. II, p. ???

La démonstration se base sur l'axiomatisation citée plus haut. Il considère les valeurs successives $A-u$, A et $A+u$[28], ainsi les carrés des valeurs successives sont $A^2-2Au+u^2$, A^2 et $A^2+2Au+u^2$. Les différences avec A^2 sont alors respectivement $2Au-u^2$ et $2Au+u^2$. Ces différences sont croissantes et pour être cohérent avec les axiomes, la fluxion de A^2 est comprise entre $2Au-u^2$ et $2Au+u^2$ (*).
Il démarre ensuite une démonstration par l'absurde.
Soit $\mathrm{Fl}(A)=a$, il suppose que $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)\neq 2Aa$.

1$^{\text{er}}$ temps : $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)>2Aa$, alors $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)=2Aa+ka,$ où $k>0$.

Soit u un incrément de A tel que $u<k$

Si $\mathrm{Fl}(A)=u$ alors $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)=2Au+ku>2Au+u^2$

Or $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)<2Au+u^2$ (d'après (*))

Cela est donc contradictoire. Par conséquent, c'est la supposition initiale qui est fausse.
2$^{\text{ème}}$ temps : $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)<2Aa$, alors $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)=2Aa-ka,$ où $k>0$

Par la même méthode, il arrive aussi à une contradiction.
Donc $\mathrm{Fl}\left(A^2\right)=2Aa$.

Par désir de simplicité, nous avons donné une démonstration de nature algébrique, mais ce qui fait la particularité de ce traité, c'est l'utilisation, dans le premier livre du traité, de façon systématique de la géométrie. Ce que nous venons d'énoncer est en quelque sorte la traduction algébrique d'une procédure de nature géometrique (utilisation du langage et des démonstrations géométriques). De plus, les trois-quarts de l'ouvrage portent sur la dimension géométrique, et seulement le dernier quart sur l'utilisation de l'algèbre.
En résumé, la démarche habituelle de Maclaurin, dans cette méthode, est la suivante :

i) Utilisation de décréments ou d'incréments entre lesquels une partie de la figure va évoluer.
ii) Avec ces incréments, soit par une reductio ab absurdum soit par la méthode des premières et dernières raisons, il compare les différentes vitesses de ces incréments.
iii) Enfin, il conclut.

Conclusion

En guise de conclusion, Maclaurin répond aux questions fondamentales que posent Berkeley. Premièrement, Berkeley s'insurgeait sur l'obscure nature des objets étudiés, la fausse vraisemblance des fluxions. La réponse de Maclaurin est simple, il faut s'efforcer de bien décrire ce qu'est une fluxion, et ce qu'est la nature de la vitesse. Avec cet effort, il donne une définition quasiment métaphysique de la vitesse. De plus, même si son concept de vitesse instantanée est tiré d'une vision mécaniste, il a su sortir de la simple observation pour pouvoir en donner une exposition cohérente. La seconde critique de Berkeley portait sur les fondements du calcul newtonien, il considérait que l'effort de compréhension de ces objets n'avait pas été fait, et que les bases n'étaient pas solides. Ici encore, Maclaurin, par son ambition de donner un corpus axiomatique à ce nouveau pan des mathématiques, répond à Berkeley. Enfin, Berkeley est convaincu que les résultats obtenus par le calcul newtonien peuvent être donnés sans utiliser les infinitésimaux ou les premières et dernières raisons.

[28] Ici, u est considéré comme un incrément positif.

Maclaurin abonde dans son sens, et va même plus loin : il offre dans le *Traité des Fluxions* un ensemble quasi-exhaustif des résultats connus à son époque. Laissons Montucla, historien des mathématiques de la fin du 18ème siècle, conclure : « on peut dire que s'il restait quelques doutes sur la solidité de cette dernière [la méthode newtonienne], ils sont entièrement dissipés par cet ouvrage de M. Maclaurin (…) [et] tout ce qui concerne la méthode des Fluxions (…) y est expliqué avec une profondeur beaucoup supérieure à ce qu'on avait vu auparavant »[29].

Bibliographie

Berkeley G., *The Analyst ; or, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician…*, Londres, Tonson, 1734

Berkeley, G., *Oeuvres*, PUF, Paris, 1987.

Blay M., « Deux Moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley », *Revue d'Histoire des Sciences*, 39, 3, 1986, p. 223-253.

Guicciardini, N, *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800,* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Jesseph, Douglas, *Berkeley's Philosophy of Mathematics*, University of Chicago Press, Chicago, 1993.

Maclaurin C., *The Treatise of Fluxions in two Volumes*, Edimbourg, 1742.

Maclaurin C., *Traité des Fluxions*, trad. P. Pézénas, Jombert, Paris, 1749.

Montucla, *Histoire des Mathématiques*, 2ème éd., Agasse, Paris, 1802.

Newton I., *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Londres, 1687.

Olivier Bruneau

[29] Montucla, *Histoire des Mathématiques*, vol. III, 2ème éd., Agasse, Paris, 1802, p. 119