Le principe de Gilbreath, généralisation, variantes et magie des cartes

Michel Cayrol

Le principe de Gilbreath, généralisation, variantes et magie des cartes

Michel Cayrol

25 Janvier 2015

Abstract

Résumé. Dans cet article, nous proposons une généralisation du principe de Gilbreath qui recouvre les généralisations déjà proposées dans la littérature. Nous analysons en détail les conditions nécessaires et suffisantes pour que le principe s'applique. Nous étudions en outre certaines classes particulières où de nouvelles propriétés apparaissent, propriétés que nous décrivons en détail. Nous nous penchons aussi sur le cas de l'entrelacement de séquences périodiques, redécouvrant par là-même un cas particulier du principe de Gilbreath.
Cet article a été publié dans le numéro 96 de la revue **Quadrature**[1].

1 Introduction

De nombreux articles [2, 3], dont plusieurs publiés dans Quadrature [4, 5, 6, 7], chapitres d'ouvrages [8, 9, 10], ouvrages [11, 12] ont été consacrés au(x) principe(s) de Gilbreath, chéri(s) particulièrement des magiciens. Le premier principe apparaît dans la description du tour « Magnetic Colors » [2]. Quelques années plus tard, en 1966, Linking Ring publie une généralisation [3], le second principe. Enfin, la propriété appelée « Quasi Gilbreath Principle » a été décrite par Karl Fulves en 1968 [13, 14]. Elle n'est pas concernée directement par le principe de Gilbreath mais s'applique entre autres à des séquences résultant de l'application de ce principe.

Le premier principe affirme que si un jeu de cartes bicolore tel que deux cartes successives sont de couleurs différentes (Rouge, Noir, Rouge, Noir... par exemple) est coupé de telle manière que les cartes supérieures de chaque paquet sont de couleurs différentes[1], alors à l'issue d'un mélange « américain »[2], le paquet résultant du mélange sera constitué de paires successives de cartes où chaque paire est nécessairement bicolore (i.e. contient une carte rouge et une carte noire). Ce résultat provient du fait que la séquence des couleurs des cartes est périodique (R, N). Le second principe, décrit dans la même revue quelques

[1] Si le jeu est coupé de manière aléatoire avant le mélange, il suffit de le recouper entre deux cartes de même couleur et de compléter la coupe pour rétablir la situation.

[2] Riffle shuffle en anglais, mélange par entrelacement dans cet article.

années plus tard, généralise à une période de longueur quelconque. Rangeons par exemple quelques cartes de valeurs 1, 2, 3 (les as, deux et trois d'un jeu de cartes) dans l'ordre $< \mathbf{1\,2\,3\,1\,2\,3\,1\,2\,3\,1\,2} >$ (séquence vue de haut en bas). Si on coupe cette séquence de manière arbitraire, par exemple en soulevant la séquence $< \mathbf{1\,2\,3\,1\,2} >$, et si on la renverse soit $< \mathbf{2\,1\,3\,2\,1} >$, l'entrelacement avec le reste de la séquence à savoir $< 3\,1\,2\,3\,1\,2 >$ retournera par exemple $< \mathbf{2\,1}\,3\,\mathbf{3\,2}\,1\,\mathbf{1}\,2\,3\,1\,2 >$ qui, découpée en séquences de trois éléments, produit $< \mathbf{2\,1}\,3 >$ suivi de $< \mathbf{3\,2}\,1 >$ suivi de $< \mathbf{1}\,2\,3 >$ suivi enfin de $< 1\,2 >$. Chaque séquence de **trois** éléments contient exactement un 1, un 2 et un 3. Cette propriété est vraie quelle que soit la façon de couper et d'entrelacer les deux parties à condition de renverser la partie coupée. Enfin le « Quasi Gilbreath Principle » étudie comment l'insertion d'un élément dans une séquence modifie certaines propriétés de cette séquence.

Qui dit mélange dit permutation. Dans cet article, nous allons analyser en détail la classe des permutations concernées par le mélange impliqué. Dans un premier temps, nous caractériserons cette classe et nous donnerons la forme la plus générale du principe de Gilbreath. Dans la suite, nous nous intéresserons aux mélanges par entrelacement de séquences périodiques et aux perturbations éventuelles des résultats de ces mélanges.

2 G-Permutations, définitions et construction

Dans cette partie, nous allons essayer

- de formaliser les mélanges particuliers impliqués dans le principe de Gilbreath ;
- de présenter quelques propriétés de ces mélanges.

2.1 Présentation informelle

Afin de mieux visualiser les mélanges considérés, décrivons une petite expérience.

Nous représenterons une séquence, par exemple $< 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10 >$ par une chaîne de 21 maillons :

$$-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-$$

où un tiret représente un maillon standard, et un nombre représente un maillon sur lequel a été collée une étiquette portant ce nombre. Suspendons cette chaîne en soulevant un maillon standard. Il existe 11 façons de procéder, une par maillon standard. Chacune d'entre elles segmente la séquence en deux séquences verticales (que nous représenterons horizontalement en les balayant de haut en bas). En soulevant le troisième maillon standard, on obtient $2-1-$ à gauche et $3-4-5-6-7-8-9-10-$ à droite. En soulevant le cinquième maillon standard, on obtient $4-3-2-1-$ à gauche et $5-6-7-8-9-10-$ à droite. Enfin, en soulevant le premier maillon standard, la partie gauche est une séquence vide et la séquence initiale se retrouve du côté droit. Nous allons fusionner les deux parties de la chaîne pour n'en faire qu'une seule. En ouvrant certains maillons d'un côté et/ou de l'autre, chaque chaîne sera éventuellement découpée en chaînons qui seront recombinés (en refermant les maillons ouverts) de telle manière que les positions relatives des maillons numérotés de la partie gauche (resp. droite) seront conservées. Ce qui revient à dire que les deux séquences obtenues en soulevant un maillon vont être entrelacées (mélange américain). Nous allons donc construire une séquence en réunissant les deux parties de telle manière que l'ordre, que chaque partie définit, soit conservé dans la séquence finale. On peut aussi imaginer que l'on dispose d'une pile de dix boîtes pour y mettre les nombres. Il faudra choisir celles qui contiennent les éléments de la première séquence, les autres étant dévolues à la seconde. Il ne restera plus qu'à remplir de haut en bas celles dévolues à la première et à faire de même avec celles de la seconde. On obtiendra par exemple la séquence suivante $<$ $4\,3\,5\,2\,6\,7\,1\,8\,9\,10 >$. Ce processus de construction permet de calculer le nombre de séquences distinctes résultant d'un entrelacement entre la première de longueur 4 et la seconde de longueur 6 (c'est le nombre de façons de choisir 4 boites parmi 10 soit $\binom{10}{4}$). Nous allons donc manipuler des séquences finies d'éléments d'un ensemble fini[3] non vide E donné. Les occurrences d'un même élément seront si nécessaire indicées pour les distinguer. Par exemple a_1 et a_2 dénotent deux occurrences distinctes de a. Les symboles $<$ et $>$ délimiteront les extrémités des séquences, les éléments consécutifs d'une même séquence étant séparés par un espace. Ainsi $< 2\ 3\ 1\ 4 >$ représente une séquence de quatre éléments de l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. $< >$ représente la séquence vide de longueur 0. Si une séquence S est donnée sans préciser l'ensemble E, on supposera que E est l'ensemble des éléments distincts de la séquence S.

Dans la suite de l'exposé, j'utiliserai sans les définir les notions intuitives de préfixe, de suffixe, de concaténation de séquences, de segmentation, de miroir d'une séquence... Les exemples ci-dessous devraient lever toute ambigüité.

- $< 1\ 2\ 3 >$ a pour longueur 3 et est un préfixe de $< 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 >$.
- $< 4\ 5 >$ est un suffixe de $< 1\ 6\ 7\ 4\ 5 >$.
- La concaténation de $< a\ b >$ et de $< a\ d\ e >$ produit $< a\ b\ a\ d\ e >$. Elle a pour longueur la somme des longueurs, $< a\ b >$ en est un préfixe et $< a\ d\ e >$ un suffixe. E pourrait être $\{a, b, d, e\}$.
- Le miroir de $< a\ b\ c\ d\ e >$ est $< e\ d\ c\ b\ a >$.
- La segmentation consiste à découper S en deux séquences S_1 et S_2 telles que S résulte de la concaténation de S_1 et S_2.

Rappelons qu'une séquence définit naturellement la relation « précède » entre les occurrences[4] qui la composent, ainsi nous pourrons affirmer que dans

[3] Certains résultats s'étendent facilement à des séquences infinies.
[4] Ici, a_i dénote une occurrence particulière de a dans une séquence.

$< a_1\, b\, c\, a_2\, d\, e >$, a_1 précède b, c, a_2, d, e, et b précède c, a_2, d, e, et c ne précède pas a_1...

Exemple 1 *Considérons la séquence suivante:*

$$< a\, b\, c\, d\, e > .$$

Nous allons la segmenter en deux séquences. Il y a six façons de procéder:

1. *$< \quad >$, $< a\, b\, c\, d\, e >$ (coupe du paquet vide);*
2. *$< a >$, $< b\, c\, d\, e >$;*
3. *$< a\, b >$, $< c\, d\, e >$;*
4. *$< a\, b\, c >$, $< d\, e >$;*
5. *$< a\, b\, c\, d >$, $< e >$;*
6. *$< a\, b\, c\, d\, e >$, $< \quad >$ (coupe de tout le paquet).*

Maintenant, renversons l'ordre des éléments de la première séquence. Sil n'est pas vide, il correspond au côté gauche de la chaîne décrite dans 2.1, l'extrémité gauche va se retrouver en bas, et comme on les représente en les balayant de haut en bas, elle va se retrouver en dernière position, ce qui revient bien à renverser la première séquence.

1. *$< \quad >$, $< a\, b\, c\, d\, e >$;*
2. *$< a >$, $< b\, c\, d\, e >$;*
3. *$< b\, a >$, $< c\, d\, e >$;*
4. *$< c\, b\, a >$, $< d\, e >$;*
5. *$< d\, c\, b\, a >$, $< e >$;*
6. *$< e\, d\, c\, b\, a >$, $< \quad >$.*

Nous allons entrelacer les deux séquences de chaque ligne de telle manière que la relation « précède » de la séquence résultante contienne les relations « précède » définies par les deux séquences initiales. Ainsi l'entrelacement de $< c\, b\, a >$ et de $< d\, e >$ sera une séquence de cinq éléments distincts de l'ensemble $\{a, b, c, d, e\}$ telle que c précède b qui précède a et d y précède e.

Remarque 1 *Chaque séquence définissant naturellement un ordre total entre ses éléments, l'entrelacement de deux séquences est tout simplement la construction d'un ordre total sur l'ensemble des éléments des deux séquences, contenant les ordres associés à chacune des séquences.*

2.2 Formalisation

Définition 1 *Nous appellerons entrelacement de deux séquences, le processus consistant à construire une séquence qui*

- *contient exactement toutes les occurrences apparaissant dans les deux séquences,*
- *et telle que la relation « précède » définie pour chacune des séquences est conservée dans la séquence résultante.*

Nous appellerons aussi entrelacement des deux séquences toute séquence résultant de ce processus.

Exemple 2 *En reprenant l'exemple 1, l'entrelacement des deux séquences résultant de la segmentation et du renversement du préfixe retourne:*

1. $< a\,b\,c\,d\,e >$ *;*
2. $< a b c d e >$ *ou* $< b a c d e >$ *ou* $< b c a d e >$ *ou* $< b c d a e >$ *ou* $< b c d e a >$. *Noter que* $< a\,b\,c\,d\,e >$ *réapparaît;*
3. $< b\,a\,c\,d\,e >$ *ou* $< b\,c\,a\,d\,e >$ *ou... ;*
4. *etc.*

On obtient ainsi un certain nombre de permutations pour une séquence initiale donnée. Nous appellerons les permutations ainsi construites des G-permutations [5] de la séquence initiale $< abcde >$ (appelées « Gilbreath shuffles » p. 68 dans [9] et « mélanges péristance » dans [12]). Nous allons les caractériser et les dénombrer. Pour cela, nous allons définir un processus de construction simple qui construit exactement toutes les G-permutations d'une permutation initiale donnée. Puis pour une permutation donnée, nous vérifierons qu'elle a pu résulter ou non de cette construction et nous en déduirons qu'elle est ou non une G-permutation.

Définition 2 *Une G-permutation d'une séquence S est une permutation qui résulte de l'entrelacement de deux sous-séquences S_1 et S_2 où S_1 est le miroir de S_3 et où la concaténation de S_3 et de S_2 est la séquence S.*

2.3 Algorithmes de construction

L'entrelacement des deux séquences peut être construit de gauche à droite ou de droite à gauche, ce qui conduit à deux procédures de construction distinctes. Elles correspondent à un balayage de la chaîne après fusion des deux parties, balayage qui peut être effectué de haut en bas ou de bas en haut.

[5] G de Gilbreath

2.3.1 Algorithme 1. « Vider, en agrandissant l'espace libre »

L'idée consiste à partir de la séquence initiale et à la vider en créant un seul espace que nous représenterons par un _ qui sera agrandi de manière itérative jusqu'à épuisement de la séquence. La G-permutation sera construite **de gauche à droite**.

Prenons un exemple: partons de $< 1 2 3 4 5 >$. Nous donnerons en premier la G-permutation en cours de construction, suivie de l'état courant de la séquence initiale. Partons donc de $< \quad >< 1\ 2\ 3\ 4\ 5 >$. Nous allons créer un espace en enlevant dans la séquence de droite un élément au choix. Par exemple **3**. Élément qui sera ajouté **à la droite** de la G-permutation en cours de gestation. La séquence devient : $< 3 >< 12\_45 >$, l'espace a pour frontières 2 à sa gauche et 4 à sa droite. Pour l'agrandir, nous avons le choix : optons pour le retrait de **2**. Nous obtenons : $< 32 >< 1\_45 >$. L'espace grandit. Poursuivons, on peut enlever soit 1, soit 4. Choisissons par exemple **4**. $< 3 2 4 >< 1\ \_\ 5 >$. On peut enlever soit 1 soit 5. Poursuivons avec **1** : nous en sommes à $< 3241 >< \_5 >$. Et terminons avec **5**. La séquence initiale est vide. La séquence des éléments prélevés est $< 3 2 4 1 5 >$. C'est une G-permutation de $< 1 2 3 4 5 >$.

Remarque 2 *Si on avait enlevé en premier l'extrémité gauche* 1*, le processus aurait conduit à la séquence* $< 1 2 3 4 5 >$*, ce qui montre que la séquence est une G-permutation d'elle-même.*

En résumé, on crée un espace en prélevant n'importe quel élément, puis on élargit cet espace (unique) en rognant sur ses extrémités dans la mesure du possible.

2.3.2 Algorithme 2. « Remplir un espace libre »

Cette fois-ci, la G-permutation sera construite **de droite à gauche**, c'est pour cela que chaque nouvel élément collecté sera mis à gauche des précédents. Soit à construire une G-permutation de $< \underline{1}234\underline{5} >$. Partons donc de $< \quad >< \underline{1}234\underline{5} >$. Il suffit de procéder de manière itérative en prélevant une **extrémité** de la séquence initiale, extrémité qui sera donc supprimée de cette séquence. La séquence des extrémités prélevées en empilant ces éléments (cf. exemple qui suit), quand la séquence initiale est épuisée constitue une G-permutation de la séquence initiale.

Par exemple prélevons **1**, nous obtenons $< 1 >< \underline{2}\ 3\ 4\ \underline{5} >$, Nous avons le choix entre 2 et 5 . Prélevons **5** par exemple **que nous mettrons à gauche** de la séquence en cours de construction, nous obtenons $< 5\ 1 >< \underline{2}\ 3\ \underline{4} >$, Nous avons le choix entre 2 et 4. Prélevons **4** par exemple que nous mettrons à gauche ; nous obtenons $< 4\ 5\ 1 >< \underline{2}\ \underline{3} >$, Nous avons le choix entre 2 et 3. Prélevons **2** par exemple ; nous obtenons $< 2\ 4\ 5\ 1 >< \underline{3} >$. Nous n'avons plus le choix. Prélevons **3** : nous obtenons $< 3\ 2\ 4\ 5\ 1 >< \quad >$. $< 3\ 2\ 4\ 5\ 1 >$ est une G-permutation de $< 1\ 2\ 3\ 4\ 5 >$.

Remarque 3 *Notons que le miroir de* $< 3\ 2\ 4\ 5\ 1 >$*, soit* $< 1\ 5\ 4\ 2\ 3 >$*, n'est*

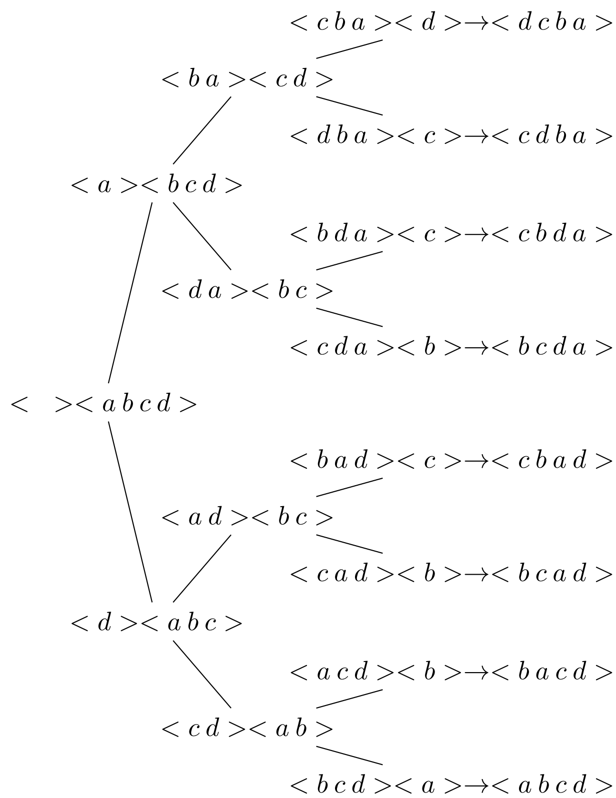


Figure 1: L'arbre des G-permutations

pas une G-permutation de $< 1\,2\,3\,4\,5 >$. *Nous donnons plus loin une procédure permettant de reconnaître une G-permutation d'une séquence donnée.*

Définition 3 *On appellera fenêtre de longueur* p *d'une séquence* S_1 *de longueur* n $(p \leq n)$, *toute sous-séquence* S_2 *de longueur* p *constituée de* p *éléments consécutifs de* S_1. *La fenêtre se définit par la position de ses extrémités dans la séquence initiale.*

Illustrons l'algorithme du 2.3.2 par un arbre (cf. figure 1) qui décrit toutes les possibilités. Dans chaque nœud non-terminal de l'arbre, la permutation de droite est celle où nous allons puiser une extrémité alors que la permutation de gauche est l'état courant de la G-permutation en cours de construction. Les feuilles de l'arbre correspondent aux huit G-permutations possibles de $< abcd >$.

2.3.3 Propriétés

Il est facile de montrer que les deux algorithmes engendrent exactement l'ensemble de toutes les G-permutations d'une séquence. L'analyse de l'arbre de construction permet en outre de montrer qu'il y en a 2^{n-1} pour une séquence initiale de n éléments distincts. Dans l'algorithme du 2.3.2, à chaque instant, on peut choisir entre les deux extrémités sauf pour le prélèvement du dernier élément. Il y a donc $n! - 2^{n-1}$ permutations qui ne sont pas des G-permutations.

Exemple 3 *Pour* $< a\,b\,c >$ *il y a* $3! - 2^2 = 2$ *permutations qui ne sont pas des G-permutations, à savoir* $< a\,c\,b >$ *et* $< c\,a\,b >$.

L'algorithme du 2.3.2 est utilisé dans l'annexe pour définir rigoureusement les G-permutations et pour les produire via un petit programme écrit en Prolog [15] qui pourra surprendre les programmeurs habitués à d'autres langages de programmation plus traditionnels[6].

Chacun des deux algorithmes induit naturellement une procédure simple pour déterminer si une permutation S_1 est ou non une G-permutation de S_2. Ainsi, par exemple, la procédure associée à 2.3.2 consiste à parcourir S_1 **de droite à gauche** et à s'assurer que l'élément courant est bien une extrémité de S_2 qui est aussitôt effacée de S_2 avant de poursuivre.

Exemple 4

- *Soit à tester si* $< 3\,2\,4\,1 >$ *est une G-permutation de* $< 1\,2\,3\,4 >$. 1 *est une extrémité de* $< 1\,2\,3\,4 >$ *qui devient après suppression* $< 2\,3\,4 >$. 4 *est une extrémité de* $< 2\,3\,4 >$ *qui devient* $< 2\,3 >$. 2 *est une extrémité de* $< 2\,3 >$ *qui devient* $< 3 >$. *Enfin* 3 *est une extrémité de* $< 3 >$ *qui devient* $<\ >$. *Donc* $< 3\,2\,4\,1 >$ *est bien une G-permutation de* $< 1\,2\,3\,4 >$.
- *Soit à tester si* $< 2\,4\,3\,1 >$ *est une G-permutation de* $< 1\,2\,3\,4 >$. 1 *est une extrémité de* $< 1\,2\,3\,4 >$ *qui devient* $< 2\,3\,4 >$. 3 *n'est pas une extrémité de* $< 2\,3\,4 >$ *donc la réponse à la question est non.*

Énonçons à présent une propriété des G-permutations qui sera utilisée ultérieurement.

Lemme 1 *Étant donné une séquence initiale* S_1 *de longueur* $n \geq 1$, *et une G-permutation* S_2 *de* S_1, *pour tout* p *tel que* $1 \leq p \leq n$, *la sous-séquence* S *constituée des* p *premiers éléments de* S_2 *est une G-permutation de* p *éléments consécutifs de* S_1.

En d'autres termes, tout préfixe de S_2 est une G-permutation d'une fenêtre de S_1.

Preuve 1 *L'algorithme du 2.3.2 prélève les extrémités de la séquence initiale. Il en résulte qu'à chaque étape, les éléments restants sont toujours des éléments consécutifs de la séquence initiale dont en particulier les* p *derniers prélevés qui se retrouveront en tête de la G-permutation construite.*

Définition 4 *L'amputation d'une séquence résulte de la suppression d'éléments consécutifs d'une fenêtre dans la séquence initiale. L'amputation se définit par la position des extrémités de la fenêtre supprimée.*

[6] L'opposition entre le déclaratif et le procédural.

Exemple 5 *Les amputations de longueur* 2 *de la séquence* $< 1\,2\,3\,4\,5 >$ *conduisent aux séquences* $< 3\,4\,5 >$, $< 1\,4\,5 >$, $< 1\,2\,5 >$ *et* $< 1\,2\,3 >$.

Propriété 1 *Soit une séquence* S *et un G-permutation* G *de* S. *Tout préfixe* P *de* G *est une G-permutation d'une fenêtre* F *de la séquence initiale*[7]. *Le complément de ce préfixe dans la G-permutation* G *est une G-permutation de la séquence initiale amputée de la fenêtre* F *utilisée pour construire le préfixe.*

Cette propriété résulte du processus de construction via l'algorithme du 2.3.2.

Exemple 6 *La G-permutation* $< 3425617 >$ *de* $< 1234567 >$ *peut se scinder en deux séquences,* $< 3\,4\,2 >$ *et* $< 5\,6\,1\,7 >$ *où* $< 3\,4\,2 >$ *est une G-permutation de* $< 2\,3\,4 >$ *et* $< 5\,6\,1\,7 >$ *est bien une G-permutation de* $< 1\,5\,6\,7 >$ *qui résulte de l'amputation de* $< 2\,3\,4 >$ *dans la séquence initiale.*

3 Notion de compatibilité

3.1 Définitions

Définition 5 *Étant donné un symbole de prédicat* P *d'arité*[8] p, *on dira que la séquence* $< x_1\, x_2\, \ldots\, x_p >$ *satisfait* P *ssi la formule logique* $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *est vraie.*

Définition 6 *Étant donné une séquence* S_1 *et un symbole de prédicat* P *d'arité* p, *la séquence sera dite* P*-compatible ssi la formule logique* $P(x_1, x_2, \ldots x_p)$ *est vraie pour toute G-permutation de toute fenêtre* $< x_1\, x_2\, \ldots\, x_p >$ *de longueur* p *de* S_1.

En d'autres termes, P est satisfaite par toute G-permutation de toute fenêtre de longueur p de la séquence S_1. Certains auteurs parlent de fenêtre « glissante ». Notons que P est satisfaite pour toute fenêtre de longueur p de S_1 en vertu de la remarque 2.

Définition 7 *Étant donné une séquence* S_1 *et un symbole de prédicat* P *d'arité* p, *la séquence* S_1 *sera dite* ***fortement*** P*-compatible ssi elle est* P*-compatible et si pour tout* $k \geq 1$, *toute sous-séquence* S_2 *résultant d'une amputation de* $k \times p$ *éléments consécutifs de* S_1 *est* P*-compatible.*

Remarque 4 *Notons que les séquences de longueur inférieure à* p *sont trivialement fortement* P*-compatibles. Notons aussi que toute fenêtre d'une séquence fortement* P*-compatible est fortement* P*-compatible.*

Théorème 1 *Étant donné une séquence* S *de longueur* n *et un symbole de prédicat* P *d'arité* p *avec* $1 \leq p \leq n$ *tels que* S *est* P*-compatible, alors* $P(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ *est vraie pour tout préfixe* $< y_1\, y_2 \ldots\, y_p >$ *d'une G-permutation quelconque de* S.

[7] S en raison du lemme 1.

[8] L'arité est le nombre d'arguments.

Preuve 2 *C'est une conséquence immédiate de la proposition 1. En effet les p premiers éléments constituent une G-permutation d'une fenêtre de longueur p de la séquence initiale, la P-compatibilité implique que cette G-permutation satisfait P.*

Exemple 7 *Considérons la séquence $S =< 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10 >$ et la propriété $P(x, y, z)$ définie par : « la variance de (x, y, z) est égale à $2/3$ ». Cette propriété est vraie pour toutes les G-permutations des fenêtres de longueur 3 de la séquence. Par exemple, la variance de la fenêtre $< 4\,5\,6 >$ est $[(4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2]/3 = 2/3$. La séquence $< 4\,5\,3\,6\,7\,2\,1\,8\,9\,10 >$ est une G-permutation de la séquence initiale. Donc si on prend la fenêtre définie par les trois premiers éléments: $< 4\,5\,3 >$, on peut vérifier facilement que sa variance est aussi de $2/3$. La fenêtre $< 6\,7\,2 >$, définie par les trois suivants en revanche, a pour moyenne 5 et pour variance $[(6-5)^2 + (7-5)^2 + (2-5)^2]/3 = 14/3$. Cela résulte du fait que la séquence $S' =< 6\,7\,2\,1\,8\,9\,10 >$ est une G-permutation de $< 1\,2\,6\,7\,8\,9\,10 >$ qui résulte de l'amputation de la fenêtre $< 3\,4\,5 >$ dans S. S' n'est plus P-compatible, cf. la proposition 1.*

Théorème 2 *Étant donné une séquence S_1 de longueur n, un symbole de prédicat P d'arité p $(1 \leq p \leq n)$ tels que S_1 est fortement P-compatible et une G-permutation S_2 de S_1, alors $P(y_1, \ldots, y_p)$ est vraie pour toute fenêtre $< y_1 \ldots y_p >$ de S_2 de longueur p dont le premier élément a pour position un nombre congru à 1 modulo p.*

Ce théorème dit que non seulement les p premiers éléments de S_2 satisfont P, mais qu'en outre, toutes les fenêtres successives complètes de p éléments satisfont aussi P.

Les fenêtres de longueur p commençant aux positions congrues à 1 modulo p seront parfois appelées tranches dans la suite.

Exemple 8 *Soit $S_1 = < 12345678910 >$ et $P(x, y, z)$ défini par $(z-x)(z-y) > 0$. $P(x, y, z)$ signifie que pour trois éléments distincts, x, y, z, l'élément z est le plus grand ou le plus petit de l'ensemble $\{x, y, z\}$. Il est facile de montrer que pour toute séquence croissante $< a\ b\ c >$ $(a < b < c)$, cette propriété est vraie et qu'elle est aussi vraie pour toute G-permutation de $< a\,b\,c >$. Ceci est vrai également pour toute séquence résultant d'une amputation de S_1 par une fenêtre dont la longueur est un multiple de 3. Le théorème 2 s'applique donc et les fenêtres complètes de longueur 3 commençant en position 1, 4, 7 satisfont P. Par exemple, en prenant la G-permutation $< 5\,4\,6\,7\,8\,3\,9\,2\,1\,10 >$, les fenêtres successives complètes de longueur 3 sont $< 5\,4\,6 >$, $< 7\,8\,3 >$, $< 9\,2\,1 >$ et 6 est bien le plus grand de sa fenêtre, 3 le plus petit ainsi que 1 pour la dernière.*

Remarque 5 *Plus généralement, on peut définir $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ par la valeur de x_p est le plus grand ou le plus petit des éléments de l'ensemble des valeurs des arguments de P. Toute séquence d'entiers croissante (ou décroissante) est fortement P-compatible pour P et ce quel que soit $n \geq 1$.*

Preuve 3 *Nous allons montrer le théorème 2 par induction. Le théorème est vrai par défaut dans le cas d'une séquence de* $0, 1, \ldots, p-1$ *éléments. Dans le cas de* p *éléments on se retrouve dans le cas du théorème 1. Notons en outre que si le théorème 2 est vrai pour une séquence de* $3n$ *éléments, il sera vrai pour une séquence de* $3n+1$ *et* $3n+2$ *éléments puisqu'il n'y a pas de nouvelle tranche. Il suffit donc de montrer qu'il est vrai pour une séquence de* $3n+3$ *éléments. Mais toujours en vertu de la proposition 1, la G-permutation* S_2 *est la concaténation d'une séquence* S_{21} *de* $3n$ *éléments qui est une G-permutation d'une fenêtre* S_{11} *de* S_1 *en vertu de la proposition 4, satisfaisant le théorème en raison de l'hypothèse de récurrence, et de la séquence* S_{22} *qui est une G-permutation de la séquence* S_{12} *de trois éléments résultant de l'amputation de* S_{11} *dans* S_1*.* S_{12} *est* P*-compatible (en raison de la forte compatibilité de* S_1*) et donc* S_{22} *satisfait* P *en raison du théorème 1.*

Remarque 6 *Dans certaines publications, la propriété* P *est du type* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v$ *où* $< x_1\, x_2\, \cdots\, x_n >$ *est une fenêtre de la séquence initiale et* v *une valeur quelconque comme dans l'exemple 7. Cet exemple montre que la* P*-compatibilité n'est pas suffisante pour que toutes les tranches satisfassent* P*.*

3.2 Grands ou petits: un tour étrange

Il s'appuie sur la proposition 5. Je décris ici une version de base que chacun pourra moduler à son goût.

Le magicien explique que pour les cartes comme dans la vie, on ne remarque que ce qui sort de la moyenne et dans une assemblée, on repère les plus grands et les plus petits par exemple. Ainsi dans un paquet de cartes, on gardera la plus grande et la plus petite et on éliminera toutes les autres. Donc pour qu'il y ait élimination, il faut au moins trois cartes, donc trois joueurs, un pour chaque carte. Le magicien continue en expliquant qu'il faut ordonner les cartes pour pouvoir désigner le plus grand et le plus petit élément[9]. Pour cela, on décide d'abord que les deux sont plus petits que les trois, qui sont plus petits que les quatre... qui sont plus petits que les rois, eux-mêmes plus petits que les as, soit :

$$2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < \text{Valet} < \text{Dame} < \text{Roi} < \text{As}$$

Et pour départager plusieurs cartes de même valeur, on ordonne les familles en posant par exemple que les carreaux sont plus petits que les trèfles, eux-mêmes plus petits que les cœurs qui sont plus petits que les piques, soit :

$$\blacklozenge < \clubsuit < \heartsuit < \spadesuit.$$

Par exemple, le deux de carreau est donc la plus petite carte du jeu et l'as de pique la plus grande.

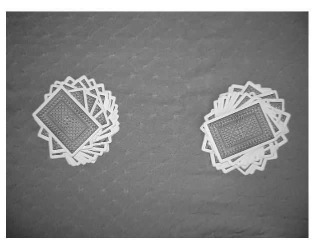
Le magicien demande à un volontaire **V** de l'aider et lui demande de mélanger le jeu. C'est seulement après avoir fait mélanger le jeu que le magicien demande

[9]Tout ordre total convient.

au public de choisir un nombre de joueurs à partir de 3. Comme il y a 52 cartes à distribuer entre les joueurs, il est souhaitable de ne pas dépasser 7 car chaque joueur aurait trop peu de cartes pour jouer. Le public choisit par exemple 5.

Le magicien explique comment va se dérouler la partie. Il demande à trois volontaires de venir jouer avec lui, ce qui avec **V** et lui fera bien cinq joueurs. Le magicien récupère le jeu mélangé par **V**, le dispose faces vers le bas et distribue une carte à chaque joueur, la dernière étant la sienne. Les cartes sont retournées faces vers le haut au moment de la distribution (le magicien récupère donc la carte qui était initialement la cinquième du jeu). Les cinq cartes sont examinées et seules les valeurs extrêmes sont conservées, c'est à dire la plus grande et la plus petite. Les autres sont écartées. Donc deux joueurs ont encore une carte devant eux, cartes qui seront retournées faces en bas pour enregistrer le fait qu'elles ont été jouées. Le magicien distribue à nouveau de la même manière cinq cartes; les extrêmes sont retournées faces vers le bas, et les autres écartées car éliminées. Le jeu se poursuit tant qu'il est possible de distribuer une carte à chaque joueur (donc ici, il restera deux cartes non utilisées). Le gagnant est celui qui a le plus de cartes faces en bas devant lui. Évidemment, le magicien gagne systématiquement, ce qui n'est pas le cas des autres joueurs...

La méthode : le jeu est classé (jeu vu faces en bas, du haut vers le bas) de la plus petite vers la plus grande: 2 de carreau, 2 de trêfle, 2 de cœur, 2 de pique, ..., jusqu'à l'as de carreau, l'as de trêfle, l'as de cœur et enfin l'as de pique. Ensuite l'ordre de 26 premières cartes est renversé allant donc du 8 de trêfle au 2 de carreau, ces 26 cartes constituant le paquet **A** sont suivies par un ou deux Jokers, suivis par les 26 autres allant du 8 de cœur à l'as de pique qui constituent le paquet **B**. Le magicien sort le jeu (classé de l'étui) et prétexte de retirer les jokers ce qui lui permet de séparer le jeu en deux parties, la moitié supérieure et la moitié inférieure. Il pose à coté l'une de l'autre les deux moitiés et en faisant tourner la carte supérieure de chaque paquet sur elle-même en appuyant légèrement déforme chaque paquet qui se transforme en une « rosace » de cartes.



Il fait mine de pousser l'une vers l'autre les deux rosaces afin d'entrelacer toutes les cartes et demande à l'un des joueurs de procéder à l'entrelacement et de regrouper les cartes avant de les redisposer en un beau paquet de 52 cartes. Le magicien n'a plus qu'à procéder comme décrit plus haut, il lui suffit de distribuer sa propre carte en dernier à chaque tour. Il est certain de gagner à tous les coups et ce quel que soit le nombre de joueurs choisis et le mélange du jeu!

Remarque 7 *Une fois que le jeu a été mélangé, le dernier élément de toute* *fenêtre est soit le plus grand, soit le plus petit de la fenêtre, quelle que soit la dimension de cette fenêtre! On peut même, si le public le souhaite, modifier le nombre de joueurs en cours de route en éliminant un ou des joueurs, ou bien en en recrutant de nouveaux. On peut aussi proposer à chaque joueur de prendre plusieurs cartes pour augmenter ses chances, ou bien d'en éliminer pour en prendre de nouvelles! On peut même demander au spectateur de choisir une carte pour le magicien ; ce qui importe, c'est que la carte choisie pour le magicien soit prélevée dans le jeu plus bas que les cartes déjà distribuées. Quoi qu'il en soit, quel que soit le nombre de cartes distribuées à chaque tour, la dernière sera toujours l'une des deux extrêmes!*

*Le tour peut être enrichi de bien des manières. Supposons par exemple que le magicien est capable d'identifier les cartes du paquet **A** par une marque discrète au dos, ou l'exploitation d'une dissymétrie quelconque, genre marges d'épaisseurs différentes. Il sera alors* [10] *en mesure*[11] *de prédire s'il gagnera parce qu'il a la plus petite ou la plus grande suivant qu'elle provient de **A** ou de **B**. On peut aussi à chaque tour distribuer les cartes faces en bas, et le magicien retourne la sienne en premier en annonçant : « Je vais gagner parce que ma carte sera la plus petite/grande » suivant qu'elle provient de **A** ou de **B**. Les possibilités sont infinies.*

3.3 Les cas des magiciens

Le théorème 2 constitue une véritable aubaine pour les magiciens. Il assure que moyennant certaines restrictions, une propriété particulière d'un jeu de cartes va résister à un mélange. Or c'est le fait de mélanger le jeu qui pour le public est censé détruire les propriétés de ce même jeu. C'est ce qui donne à la découverte de cette propriété après mélange, un côté miraculeux.

Nous allons examiner le cas particulier exploité par des générations de magiciens et décliné sous le nom de principe de Gilbreath. Il correspond au cas où le prédicat P décrit en fait des propriétés individuelles des éléments de la fenêtre. Pour une fenêtre de p éléments par exemple, $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est de la forme $Q_1(x_1) \wedge Q_2(x_2) \wedge \ldots \wedge Q_p(x_p)$. Pour qu'une fenêtre de p éléments satisfasse cette propriété à une G-permutation près, il faut la modifier légèrement en définissant $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ selon :

> Il existe une G-permutation $< u_1\, u_2\, \ldots\, u_p >$ de $< x_1\, x_2\, \ldots\, x_p >$ telle que
> $$Q_1(u_1) \wedge Q_2(u_2) \wedge \ldots \wedge Q_p(u_p).$$

Par exemple pour $p = 3$, si une séquence S est fortement P-compatible pour cette propriété, en vertu du théorème 2, chaque fenêtre de longueur 3 d'une G-permutation de de S contiendra un élément qui satisfait Q_1, et un autre qui satisfait Q_2, et un autre qui satisfait Q_3. On retrouve ainsi la caractérisation proposée p. 70–72 par [12]. C'est aussi la généralisation proposée par

[10] avant même de retourner sa carte
[11] en voyant le dos de cette carte

[9] sous le nom d'« Ultimate invariant » et conduisant au théorème « Ultimate Gilbreath Principle ». Toutes ces généralisations sont en fait des cas particuliers du théorème 2.

4 Entrelacement de séquences périodiques

Nous allons maintenant nous placer dans le cadre de séquences périodiques. Pour simplifier l'exposé, nous décrirons quelques propriétés des éléments de ces séquences, mais la périodicité peut être non seulement celle des éléments mais aussi celle de propriétés attachées à ces éléments comme dans l'exemple 11 où l'on s'intéresse non pas aux cartes elles-mêmes, mais à leurs couleurs. Le lecteur généralisera facilement les résultats présentés ici.

4.1 Un exemple

Soit E un ensemble fini de n éléments ($n \geq 2$), p_1 et p_2 deux permutations quelconques de E. Considérons deux séquences périodiques S_1 et S_2 de périodes respectives p_1 et p_2 et de longueurs respectives n_1 et n_2 ; p_1 (resp. p_2) préfixe S_1 (resp. S_2). **Les périodes ont par hypothèse la même longueur** $|\mathbf{E}|$.

Prenons par exemple le cas où $E = \{1, 2, 3, 4\}$, mais en fait la plupart des résultats seront immédiatement généralisables, et choisissons

$$S_1 =< \mathbf{1\,2\,3\,4\,1\,2\,3\,4} > \ (p_1 =< \mathbf{1\,2\,3\,4} >),$$
$$S_2 =< 3\,2\,1\,4\,3\,2\,1\,4\,3\,2 > \ (p_2 =< 3\,2\,1\,4 >).$$

Noter que les séquences ne commencent pas obligatoirement par la même valeur et n'ont pas nécessairement la même longueur. Le système est complètement défini par deux éléments : la séquence S_1 représentée par sa période et la longueur de la séquence. Les périodes étant définies à une rotation près, on conviendra de choisir une période qui préfixe la séquence qu'elle caractérise, donc pour S_1, $p_1 =< \mathbf{1\,2\,3\,4} >$, et sa longueur $n_1 = 8$. La séquence S_2 sera représentée par sa période $p_2 =< 3\,2\,1\,4 >$ et sa longueur $n_2 = 10$.

Les deux séquences vont être mélangées par un entrelacement qui va donc créer une séquence unique dont on pourra extraire chacune des séquences S_1 et S_2. Bien entendu, rappelons que l'ordre créé est compatible avec les ordres relatifs à chaque séquence. A savoir que si a précède b (dans la séquence S avant l'entrelacement), l'élément a (de S) sera avant l'élément b (de S) dans la séquence résultant de l'entrelacement. Afin de distinguer l'origine des éléments, nous allons utiliser une police noir-gras pour les éléments provenant de S_1 et cyan pour ceux provenant de S_2. Voici un résultat d'entrelacement possible:

$$< \mathbf{1}\,3\,2\,\mathbf{2}\,1\,\mathbf{3}\,\mathbf{4}\,4\,3\,2\,\mathbf{1}\,1\,\mathbf{2}\,4\,\mathbf{3}\,\mathbf{4}\,3\,2 > .$$

Cette séquence peut être arbitrairement segmentée : par exemple en $< \mathbf{1}\,3\,2\,\mathbf{2}1\,\mathbf{3}\,\mathbf{4}\,4\,3 >$ résultant de l'entrelacement de $< \mathbf{1\,2\,3\,4} >$ et de $<3\,2\,1\,4\,3>$ et $< 2\,\mathbf{1}\,1\,\mathbf{2}\,4\mathbf{3}\,\mathbf{4}\,3\,2 >$ résultant de l'entrelacement de $< \mathbf{1\,2\,3\,4} >$ et de $<2\,1\,4\,3\,2>$ pour le second. Ainsi tout entrelacement peut être découpé en « sous-entrelacements » de manière simple. Si maintenant la séquence finale est distribuée en tranches de longueur 4, i.e. la longueur de la période $|E|$, on obtient :

$$< \mathbf{1}\ 3\ 2\ \mathbf{2} >< 1\ \mathbf{3}\ \mathbf{4}\ 4 >< 3\ 2\ \mathbf{1}\ 1 >< \mathbf{2}\ 4\ \mathbf{3}\ \mathbf{4} >< 3\ 2 >$$

résultant des sous-entrelacements de

$$\{< \mathbf{1\ 2} >, < 3\ 2 >\}\ \{< \mathbf{3\ 4} >, < 1\ 4 >\}\ \{< \mathbf{1} >, < 3\ 2\ 1 >\}$$
$$\{< \mathbf{2\ 3\ 4} >, < 4 >\}\ \{< >, < 3\ 2 >\}$$

(un entrelacement de $< \mathbf{1\ 2} >$ et $< 3\ 2 >$ concaténé avec un entrelacement de $< \mathbf{3\ 4} >$ et $< 1\ 4 >$ concaténé avec...).

Nous allons nous intéresser à la présence de deux éléments identiques dans la même tranche, après découpage de la séquence résultant de l'entrelacement, en tranches de longueur 4. Par exemple ici, deux 2 dans la première, deux 4 dans la seconde, etc. **Cette présence était-elle prévisible avant l'entrelacement?** Notons d'abord qu'ils ne peuvent pas provenir de la même séquence initiale car séparés dans cette séquence par trois éléments.

Remarque 8 *Remarquons aussi que si deux 4 sont dans la même séquence de 4, on peut refaire un entrelacement où ils seront adjacents dans cette même séquence. En effet, il suffit à l'intérieur de cette séquence d'entrelacer d'abord les préfixes (éventuellement vides) de ces 4 dans cette tranche puis de mettre les deux 4 et enfin d'entrelacer les suffixes (éventuellement vides). Si on considère par exemple la séquence $< \mathbf{2}\ 4\ \mathbf{3\ 4} >$ qui résulte de l'entrelacement de $< \mathbf{2\ 3\ 4} >$ et de $< 4 >$, on peut la décomposer en $\{< \mathbf{2\ 3} >, < >\}\ \{< \mathbf{4} >, < 4 >\}\ \{< >, < >\}$. Ce qui donne $< \mathbf{2\ 3} >< \mathbf{4}\ 4 >< >$ qui concaténées donnent $< \mathbf{2\ 3\ 4}\ 4 >$.*

Donc si deux 4 sont dans une même tranche (ici de quatre éléments),

- *il existe un entrelacement qui les rend adjacents dans cette tranche,*
- *et ils proviennent nécessairement l'un de S_1 et l'autre de S_2.*

Ainsi, la possibilité d'avoir deux 4 dans la même tranche, c'est la possibilité d'avoir deux 4 adjacents dans la même tranche. Qu'en est-il donc de la présence de deux 4 dans la même tranche?

Notons que le deuxième 4 de S_1 est précédé de sept éléments de S_1, alors que le premier 4 de S_2 est précédé de trois éléments de S_2. Cela fait dix éléments. Il est possible de faire un entrelacement de dix éléments, ce qui conduira à deux tranches de quatre éléments plus deux éléments laissant place aux deux 4 pour compléter la troisième tranche. En définitive, pour que deux 4 soient dans une même tranche de quatre, il faut se retrouver dans la situation suivante : $\{\ldots\}, \{\ldots\}, \{\ldots\}, \ldots, \{< \ \ldots 4 \ldots \ >, < \ \ldots 4 \ldots \ >\}, \ldots$ qui devra pouvoir donner après entrelacement $< \ldots >, < \ldots >, < \ldots >, \ldots, < \ldots 4 4 \ldots >, \ldots$ où le 4 de S_1 (resp. de S_2) est à la position a (resp. b) dans S_1 (resp. S_2). Mais alors, il y a $a + b - 2$ éléments constituant les pointillés qui sont à gauche des 4. Le résidu modulo 4 de ce nombre recense les pointillés précédant les 4 dans la tranche où ils sont. Sachant qu'il faudra caser les deux 4 dans une tranche de quatre éléments, il ne peut y avoir au plus que deux éléments à leur gauche. Donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $4k \leq a+b-2 \leq 4k+2$, soit $a+b-2 \neq 3 \pmod 4$, c'est-à-dire $a+b \neq 1 \pmod 4$. Comme on travaille modulo 4, il suffira de connaître a et b modulo 4. Le tableau suivant donne leurs valeurs dans le cas où $p_1 =< \mathbf{1\,2\,3\,4} >$ et $p_2 =< 3\,2\,1\,4 >$.

	1	2	3	4
a	1	2	3	0
b	3	2	1	0

Tableau récapitulatif des possibilités :

couple (i,i)	$a+b$	Ensemble ?	Exemple
$(1,1)$	$0 \pmod 4$	possible	$\{< \mathbf{1} >, < 3\,2\,1 >\}$
$(2,2)$	$0 \pmod 4$	possible	$\{< \mathbf{1\,2} >, < 3\,2 >\}$
$(3,3)$	$0 \pmod 4$	possible	$\{< \mathbf{1\,2\,3} >, < 3 >\}$
$(4,4)$	$0 \pmod 4$	possible	$\{< \mathbf{1\,2\,3} >, < 3 >\}$, $\{< \mathbf{4} >, < 2\,1\,4 >\}$

Examinons le cas où $S_1 =< 1\,2\,3\,4\,1\,2\,3\,4 \ldots >$ et $S_2 =< \mathbf{4\,3\,2\,1\,4\,3\,1} \ldots >$. La période de S_2 est le miroir de la période de S_1.

	1	2	3	4
a	1	2	3	0
b	0	3	2	1

Tableau récapitulatif des possibilités :

couple (i,i)	$a+b$	Ensemble ?
$(1,1)$	$1 \pmod 4$	impossible
$(2,2)$	$1 \pmod 4$	impossible
$(3,3)$	$1 \pmod 4$	impossible
$(4,4)$	$1 \pmod 4$	impossible

Chaque tranche contiendra donc quatre nombres différents. C'est une autre démonstration du principe de Gilbreath (cas des magiciens) qui montre que les deux séquences n'ont pas besoin d'être de la même taille. Ce qui importe c'est que p_1 (la période qui préfixe S_1) soit le miroir de p_2 qui préfixe S_2.

4.2 Critère de double occurrence

Rappelons que E est un ensemble fini non vide de n éléments dont les éléments sont dénotés par les entiers naturels de 1 à n : $E = \{1, 2, \ldots, n\}$. S_1 et S_2 sont deux séquences finies périodiques non vides d'éléments de E. La période de S_1 (resp. S_2) est une permutation p_1 (resp. p_2) de E de longueur p qui préfixe S_1 (resp. S_2). Les deux séquences sont entrelacées, et la séquence résultante distribuée en tranches de p éléments. Comme précédemment, on a $\exists k$ tel que $kp \leq a+b-2 \leq kp+p-2$, soit $a+b-2 \neq p-1 \pmod p$ i.e. $\boxed{a+b \neq 1 \pmod p}$. Énonçons le résultat ainsi obtenu.

Propriété 2 *Soit deux suites périodiques S_1 et S_2 définies dans E, de périodes respectives p_1 et p_2 (périodes et préfixes de longueur p).*

En désignant par $F(x)$ le résidu modulo p de $a+b$ (où a et b dénotent les positions respectives modulo p de l'occurrence de x dans p_1 et dans p_2, i.e. leurs positions dans les périodes initiales), un couple (x,x) peut appartenir à une même tranche d'un entrelacement de S_1 et de S_2 ssi $F(x)$ est différent de 1.

Il existe un tour de magie classique de Karl Fulves [13, 14] qui se fait avec douze cartes, les as, deux et trois des quatre familles. Le magicien a préparé le jeu en le disposant dans l'ordre[12] : $< 1\,2\,3\,1\,2\,3\,1\,2\,3\,1\,2\,3 >$. La période a ici pour longueur 3. Les couleurs ont peu d'importance. Il demande à un spectateur de choisir un nombre entre 1 ou 2 ou 3, disons n et dispose sur la table un billet de banque que le spectateur gagnera si à l'issue d'un mélange suivi d'une distribution de paquets de trois cartes, le nombre choisi apparait plusieurs fois dans l'un des paquets. Le magicien montre les cartes, coupe le paquet et demande au spectateur de mélanger (d'entrelacer) les deux parties. Il ne lui reste plus qu'à étaler les cartes trois par trois. Bien entendu, le spectateur perd toujours car même s'il mélange, le magicien a bien choisi sa coupe.

En effet si la partie coupée montre un 3 sur sa face, la suivante étant un 1, on se retrouve dans la situation : $S_1 =< 1\,2\,3\,1\,\ldots >$ et $S_2 =< 1\,2\,3\,1\,\ldots >$, donc $F(1) = 2$, $F(2) = 1$, $F(3) = 0$ et le couple $(2,2)$ est impossible. Si la partie coupée montre un 1 sur sa face, la suivante étant un 2, on se retrouve dans la situation : $S_1 =< 1\,2\,3\,1\,\ldots >$ et $S_2 =< 2\,3\,1\,2\,\ldots >$, donc $F(1) = 1$, $F(2) = 0$, $F(3) = 2$ et le couple$(1,1)$ est impossible. Enfin si la partie coupée montre un 2 sur sa face, la suivante étant un 3, on se retrouve dans la situation : $S_1 =< 1\,2\,3\,1\ldots >$ et $S_2 =< 3\,1\,2\,3\ldots >$, donc $F(1) = 0$, $F(2) = 2$, $F(3) = 1$ et le couple $(3,3)$ est impossible.

4.3 Une autre propriété

Si on distingue les éléments de S_1 et de S_2, en les colorant comme précédemment, on obtient par exemple $S_1 =< \mathbf{1\,2\,3\,4}\ldots >$ et $S_2 =< 3\,1\,4\,2\ldots >$. Un entrelacement produit une séquence que l'on peut segmenter comme précédemment en tranches (ici des quadruplets puisque $p = 4$). Considérons la première tranche q. Soit q est $< \mathbf{1\,2\,3\,4} >$ auquel cas elle résulte de S_1, soit elle est $< 3\,1\,4\,2 >$ résultant ainsi de S_2, soit elle est obtenue en utilisant au moins un élément de chaque côté. Mais alors, elle contient le premier élément de S_1 et le premier élément de S_2 c'est-à-dire le couple $(\mathbf{1}, 3)$. Dans le cas où la première tranche est unicolore, ce raisonnement s'applique au second... Donc la première tranche non unicolore si elle existe contient nécessairement le couple $(\mathbf{1}, 3)$ alors que les précédentes sont des périodes de S_1 ou de S_2. Ce qui avec les notations précédentes peut s'énoncer ainsi :

Propriété 3 *Si l'entrelacement de deux séquences périodiques S_1 et S_2 (dont la période a pour longueur p) respectivement cyan et* ***noir-gras*** *contient au moins*

[12] Les cartes sont vues de haut en bas, faces vers le bas.

une tranche bicolore, alors chaque tranche précédant la première tranche bicolore de cette séquence est soit la période **noire** *de S_1, soit la période cyan de S_2. En outre la première tranche bicolore contient nécessairement le premier élément* **noir** *de S_1 et le premier élément cyan de S_2.*

Il est facile de constater que la suite de l'entrelacement résulte de l'entrelacement de deux séquences S'_1 et S'_2 qui sont périodiques et dont les périodes sont des « rotations » des périodes initiales. La propriété s'applique donc à nouveau. Illustrons sur un exemple.

Exemple 9 *Soit* $S_1 =< \mathbf{1\,2\,3\,4\,1\,2\,3\,4\,1\,2\,3\,4} \ldots >$ *et* $S_2 =< 3\,1\,4\,2\,3\,1\,4\,2\,3\,1\,4\,2 \ldots >$. *Après entrelacement, on obtient* $< \mathbf{1\,2\,3\,4} >$, $< \mathbf{1\,2\,3\,4} >$, $< 3\,1\,4\,2 >$, $< \mathbf{1\,2\,3}\,3 >$, *suivi d'une séquence qui résulte de l'entrelacement de* $S'_1 =< \mathbf{4\,1\,2\,3\,4\,1\,2\,3} \ldots >$ *et de* $S'_2 =< 1\,4\,2\,3\,1\,4\,2\,3 \ldots >$, *dont les périodes respectives sont* $< \mathbf{4\,1\,2\,3} >$ *et* $< 1\,4\,2\,3 >$. *On sait donc que cette séquence sera constituée d'un certain nombre (éventuellement nul) de tranches unicolores qui seront soit* $< \mathbf{4\,1\,2\,3} >$ *soit* $< 1\,4\,2\,3 >$ *suivies éventuellement d'une tranche bicolore contenant le couple* $(\mathbf{4}, 1)$. *Ce couple s'obtient en analysant la tranche bicolore qui le précède, ici* $< \mathbf{1\,2\,3}\,3 >$. *Ce couple résulte de l'entrelacement de* $< \mathbf{1\,2\,3\,4} \ldots >$ *et de* $< 3\,1\,4\,2 \ldots >$. **4** *est le premier élément noir non pris dans la tranche noire et* 1 *le premier cyan non pris dans la séquence cyan lors de la constitution de la tranche bicolore. Ainsi la première tranche bicolore apparaissant après* $< \mathbf{1\,2\,3}\,3 >$ *contiendra le couple* $(\mathbf{4}, 1)$[13].

4.4 Périodicité et compatibilité

Définissons P par $P(x_1, \ldots, x_p)$ vraie ssi $< x_1\, x_2\, \ldots\, x_p >$ est une permutation des éléments de l'ensemble E.

Exemple 10 *Prenons* $E = \{a, b, c\}$ *et considérons une séquence fortement P-compatible d'au moins trois éléments. Par exemple* $< b\,a\,c\,x\,y\,z\, \ldots >$. $< b\,a\,c >$ *est une permutation des éléments de E.*

Comme la propriété P doit être satisfaite aussi pour $< a\,c\,x >$ *(cf. la P-compatibilité),* $< a\,c\,x >$ *doit être une permutation de* $\{a, b, c\}$. *Il faut donc que $x = b$. La séquence commence donc par* $< b\,a\,c\,b\,y \ldots >$. *On déduit de même (cf. la fenêtre* $< c\,b\,y >$*) que $y = a$ et $z = c$. Un petit raisonnement par induction sur la taille de* $< b\,a\,c\,x\,y\,z \ldots >$ *montre que c'est obligatoirement une séquence périodique de période* $< b\,a\,c >$. *L'amputation de fenêtres de trois éléments n'affecte pas la P-compatibilité ce qui en fait une séquence fortement P-compatible où le théorème 2 s'applique. C'est ce cas qui est utilisé par les magiciens dans la quasi-totalité des tours exploitant le théorème 2.*

Le résultat se généralise facilement.

Propriété 4 *Si E est un ensemble fini non vide, et* $S =< s_1\, s_2\, \ldots s_p \ldots >$ $(1 \leq p \leq n)$ *une séquence (d'au moins n éléments de E) P-compatible pour*

[13] et commençant par l'un des deux.

la propriété P définie par $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ vraie ssi $< x_1\, x_2\, \ldots\, x_p >$ est une permutation de E, alors

1. *S est périodique de période $< s_1\, s_2\, \ldots\, s_p >$;*

2. *S est fortement P-compatible.*

Exemple 11 *Considérons la séquence de* 13 *cartes à jouer suivante*
$< \mathbf{R}\,\mathbf{R}N\mathbf{R}\,\mathbf{R}N\mathbf{R}\,\mathbf{R}N\mathbf{R}\,\mathbf{R}N\mathbf{R} >$ *Les couleurs ont manifestement une période de* 3, $(\mathbf{R}, \mathbf{R}, N)$ *à une rotation près. La propriété P pourrait être $P(x, y, z)$ vraie ssi $\{x, y, z\}$ contient deux rouges et une noire. En vertu de la proposition 4, le théorème 2 s'applique, ce qui permet de conclure que chaque G-permutation de la séquence se découpe en tranches de longueur* 3 *contenant chacune deux rouges et une noire, comme par exemple $< N\,\mathbf{R}\,\mathbf{R} \mid \mathbf{R}\,N\,\mathbf{R} \mid N\,\mathbf{R}\,\mathbf{R} \mid \mathbf{R}\,\mathbf{R}\,N \mid \mathbf{R} >$. Prenons maintenant par exemple les* 7, 8 *et* 9 *d'un jeu de cartes et disposons-les comme suit :* $< 789789789789 >$. *$P(x, y, z)$ signifie ici que* $\{x, y, z\} = \{7, 8, 9\}$. *La G-permutation* $< 8\,9\,7 \mid 9\,7\,8 \mid 8\,9\,7 \mid 7\,8\,9 >$ *est bien composée de tranches qui satisfont P.*

Il existe une grande quantité de tours de magie exploitant ce cas particulier. Je recommande vivement l'ouvrage « Le principe de Gilbreah » [11].

5 Le « Quasi Gilbreath Principle »

Cette propriété est décrite p. 264–267 dans [8]. L'exposé n'est pas très clair et la preuve absente. Nous allons essayer d'expliquer son mécanisme. Elle concerne les séquences qui, découpées en tranches de p éléments ($p \geq 2$) à partir du début, sont telles que chaque tranche de p éléments est une permutation quelconque de E (où E dénote un ensemble fini). Notons en passant que toute G-permutation d'une séquence périodique dont la période a pour longueur p produit une séquence ayant cette propriété, cf. 4.4. Nous allons étudier ce qui se passe si on insère un élément dans une telle séquence et si on redécoupe cette séquence en tranches consécutives de p éléments.

Remarque 9 *Si la séquence S_2 provient d'une G-permutation d'une séquence périodique S_1, l'élément inséré peut l'être dans S_2[14], ou dans S_1[15], ce qui revient exactement au même. En général, la séquence obtenue n'est plus la concaténation de tranches composées d'éléments distincts car le théorème 2 n'est plus applicable.*

Exemple 12 *Nous nous plaçons toujours dans le cadre d'un exemple mais la généralisation des propriétés énoncées sera triviale. Posons $p = 3$, (ce qui signifie que nous travaillons sur des fenêtres de trois éléments) et $E = \{a, b, c\}$. Intéressons-nous d'abord à une séquence de trois éléments distincts de E, soit*

[14] après l'entrelacement.
[15] avant l'entrelacement.

$< b\ a\ c >$. *L'insertion en position n de a dans cette séquence va décaler d'une position vers la droite tous les éléments de la tranche initiale à partir de cette position et repousser le dernier élément de la tranche hors de cette tranche.*

On aura donc

- *pour $n = 1$: $< a\ b\ a >< c \ldots$;*
- *pour $n = 2$: $< b\ a\ a >< c \ldots$;*
- *pour $n = 3$: $< b\ a\ a >< c \ldots$*

Ici, c'est **c** *qui sera inséré dans la tranche suivante.*

L'insertion de **a** *induit un doublon dans la tranche, celui de* **a**. *Ceci résulte du fait que le* **a** *de la tranche initiale n'a pas été expulsé car n'étant pas le dernier de cette tranche.*

Si en revanche, on insère **c** *dans la tranche, on obtient $< c\ b\ a >< c \ldots$ ou bien $< b\ c\ a >< c \ldots$ ou bien $< b\ a\ c >< c \ldots$ La tranche initiale contient toujours trois éléments distincts deux à deux et* **c** *est inséré dans la tranche suivante, comme si* **c** *s'était décalé vers la droite, modifiant tout au plus l'ordre des éléments de la tranche où il a été inséré.*

Remarque 10 *Si on insère un élément e de E (de cardinal p fini) dans une tranche S de longueur p qui est une permutation de E, le redécoupage en tranches de p éléments implique que*

- *soit e sera répété une fois dans la tranche altérée ;*
- *soit e sera inséré dans la tranche suivante où le processus sera réitéré pour achever le redécoupage de la séquence en tranches de p éléments.*

Il n'y a donc que deux possibilités, à savoir :

- *soit on ne rencontre pas de doublon lors du redécoupage ;*
- *soit le premier doublon rencontré est celui de cet élément e.*

Retenons donc qu'il n'existe pas de tranche contenant plus de deux occurrences d'un même élément de E.

Exemple 13 $S =< a\ b\ c\ b\ c\ a\ b\ c\ a\ a\ c\ b\ c\ b\ a\ c\ a\ b\ b\ a\ c >$ *qui découpée en tranches de longueur trois donne: $< a\ b\ c >< b\ c\ a >< b\ c\ a >< a\ c\ b >< c\ b\ a >< c\ a\ b >< b\ a\ c >$. Insérons* **c** *dans la première tranche par exemple en deuxième position : $< a\ c\ b >< c >$; le* **c** *expulsé va repousser les éléments de la seconde tranche et expulser le dernier* **a** *d'où l'apparition du doublon (c, c) : $< a\ c\ b >< c\ b\ c >< a >$. Maintenant, c'est un* **a** *qui doit être inséré dans la tranche suivante. Donc si un doublon devait apparaître, ce serait nécessairement (a, a). Poursuivons: $< a\ c\ b >< c\ b\ c >< a\ b\ c >< a >$... le* **a** *se propage, $< a\ c\ b >< c\ b\ c >< a\ b\ c >< a\ a\ c >< b >$ et crée le doublon (a, a)... Maintenant on sait que si un nouveau doublon apparait, ce sera nécessairement (b, b) puisque c'est* **b** *qui va être inséré. $< a\ c\ b >< c\ b\ c >< a\ b\ c >< a\ a\ c >< b\ c\ b >< a >$...*

Et comme c'est **a** *qui est chassé, le prochain doublon éventuel sera* (a, a) *:* $< a\,c\,b >< c\,b\,c >< a\,b\,c >< a\,a\,c >< b\,c\,b > < a\,c\,a >< b >$*... Confirmation avec* (b, b) *comme nouveau candidat.* $< a\,c\,b >< c\,b\,c >< a\,b\,c >< a\,a\,c >< b\,c\,b > < a\,c\,a >< b\,b\,a >< c >$*. C'est fini.*

Cette propriété intrigante a inspiré un tour[16] intitulé simplement « ESP[17] + Math » et décrit dans [13] et [14] p. 48–49. Notons que l'on peut aussi redémontrer « Gilbreath » dans le cas particulier des séquences périodiques à partir de cette simple analyse.

Exemple 14 *ESP+Math. Effet : le magicien mélange le jeu et en extrait au moyen d'une coupe un paquet de cartes. Ce paquet est coupé à son tour en deux parties qu'un spectateur est prié de mélanger (entrelacement obligatoire). Le magicien tourne son dos et demande au spectateur de prélever les trois premières cartes du paquet et de les examiner. Si ces cartes ont des familles*[18] *différentes deux à deux, elles sont reposées faces en bas sur le reste du jeu, sinon le paquet de trois cartes est scellé dans une enveloppe qui sera numérotée* 1*. La procédure est répétée pour les trois cartes suivantes qui seront soit écartées face en bas sur la table soit introduites dans une enveloppe numérotée* 2*, etc. Quand les paquets sont épuisés, le magicien prend la première enveloppe et prédit qu'elle contient exactement*[19] *deux cartes de la même famille. Il prédit même la famille (doublement représentée). La prédiction est vérifiée par l'ouverture de l'enveloppe. Le magicien poursuit en prédisant maintenant la famille répétée dans la seconde, etc.*

Les magiciens étant très pointilleux (parfois à l'excès) sur le « débinage[20] », je me contenterai d'affirmer ici que trouver l'explication constitue un bon exercice d'application des propriétés que nous avons décrites et en particulier de la remarque 10.

6 Conclusion

Nous espérons ne pas mettre fin aux recherches concernant ces propriétés étonnantes et fécondes pour les magiciens de tout bord. Il reste beaucoup à faire sur les G-permutations. Le « Quasi Gilbreath Principle » ouvre aussi des perspectives. Il montre comment une altération du principe de Gilbreath fait disparaître certaines propriétés mais en fait apparaître de nouvelles. Les cas des séquences multi-périodes est aussi à approfondir: $< \underline{1}\,2\,3\,\mathbf{4}\,\mathbf{5}\,\underline{\mathbf{1}}\,2\,\mathbf{3}\,4\,5\,\underline{1}\,2\,3\,\mathbf{4}\,\mathbf{5}\,\underline{\mathbf{1}}\,2\,\mathbf{3}\,4\,5 >$ en est un exemple simple, il y a une période sur les éléments (de longueur 5) et

[16] Ce tour se pratique avec des cartes à jouer normales.

[17] ESP est un sigle signifiant « Extra sensory perception ». Ce tour ne fait pas référence aux cartes de Zener inventées par le scientifique J.B. Rhine qui les utilisa lors d'expériences parapsychologiques.

[18] La famille d'une carte est un élément de l'ensemble {pique, cœur, trèfle, carreau}.

[19] Plus fort que le "at least two cards of the same suit" de la description originale.

[20] Le débinage est la révélation des secrets à un public profane.

une concernant les 1 (alternance noir cyan), et aussi les 2... Le très grand magicien Max Maven a utilisé une séquence doublement périodique (une période de longueur 13 et une de longueur 2) dans un tour extrêmement subtil intitulé « The Mockingbird » [16], tour qui s'apparente beaucoup à un tour présenté dans [7]. Je renvoie aussi à [4] où une séquence multi-période est exploitée dans un tour original.

Je profite de cette conclusion pour remercier Messieurs Lachal et Schott avec qui j'ai entretenu une correspondance (électronique) extrêmement fructueuse ainsi que les relecteurs qui ont fait un travail considérable. Je dois enfin remercier Monsieur Snave, membre du forum Virtual Magie [17] sans qui je n'aurais pas pu écrire cet article.

7 Annexe

J'ai choisi délibérément d'utiliser le langage Prolog pour illustrer les notions de G-permutations. En effet, contrairement à la grande famille des langages impératifs, les langages déclaratifs et fonctionnels se distinguent par leurs accointances avec les mathématiques, plus précisément la logique pour Prolog et le lambda-calcul pour Lisp ou Scheme par exemple. Le livre [18] est une bonne introduction à ces deux langages, en outre le livre [19] est en accès libre sur internet et constitue un passeport inestimable pour ceux qui veulent aller plus loin en Scheme. Bien sûr, il existe des environnements gratuits téléchargeables sur internet pour s'initier à ces langages. Pour ceux qui ont la chance extraordinaire de connaître le langage Prolog (créé par Alain Colmerauer et Philippe Roussel vers 1972), et le plaisir de le pratiquer, voici les clauses de Horn qui permettent de définir rigoureusement et de produire les G-permutations représentées ici par des listes. Je renvoie les lecteurs de cet article à [15] pour découvrir les vertus de ce langage **qui n'a rien à voir avec les autres langages évolués**. Prolog est en fait un prouveur de théorèmes spécialisé dans le traitement de clauses de Horn. C'est avec le langage Lisp, l'un des deux langages « pionniers » utilisés en Intelligence Artificielle. Le programme est constitué par une énumération de formules particulières de la logique des prédicats du premier ordre où les variables sont implicitement universellement quantifiées.

Les séquences sont représentées par des listes d'éléments séparés par des virgules, ainsi la séquence $< a\ b\ c\ d >$ sera représentée par $[a, b, c, d]$ et $<>$ par $[\,]$. Enfin, si $[X|Y]$ représente une séquence non-vide S, alors X dénote le premier élément de la séquence S et Y dénote la liste S amputée de ce premier élément. Ainsi si la liste $[a, b, c, d, e]$ est représentée par $[a \mid U]$, U dénotera la liste $[b, c, d, e]$.

Le programme s'articule autour du symbole de prédicat *gperm* d'arité 2 et du symbole *decomp* d'arité 3 :

gperm : u dénotant une séquence donnée, la formule $\exists Y$ tel que $gperm(u, Y)$ sera satisfaite ssi il existe une séquence v qui est une G-permutation de u.

La première clause traite le cas de la séquence vide, elle stipule que par définition, la séquence vide est une G-permutation d'elle-même ; les deux autres règlent le cas des séquences non-vides :

la seconde déclare que si P est une G-permutation de R, alors la concaténation de P et de $[X]$ est une G-permutation de la concaténation de $[X]$ et de R ;

la troisième déclare que si S est une G-permutation de la concaténation de $[X]$ et de P, alors la concaténation U de S et de $[Q]$, est une G-permutation de la concaténation de $[X]$ et de la concaténation R de P et de $[Q]$.

decomp : le symbole de prédicat *decomp* d'arité 3 concerne une séquence non vide, son dernier élément et la séquence privée de ce dernier élément.

$decomp(X, Y, Z)$ sera satisfaite si Y est la liste X amputée de son dernier élément Z.

La première clause traite le cas d'une séquence de longueur 1 ; le seconde celle des séquences plus longues.

Le programme ci-dessous permet donc non seulement d'engendrer toutes les G-permutations d'une séquence donnée, mais il permet aussi de tester si une permutation Y est une G-permutation de X comme le montre la session enregistrée plus bas. Dans un langage procédural, il faudrait rédiger une procédure de construction et une procédure de test. En Prolog, la procédure de construction fait les deux!

7.1 Le programme complet en Prolog

```
decomp([X], [], X).
decomp([X/Y], [X/Z], V) :- decomp(Y, Z, V).

gperm([], []).
gperm([X/R], U) :- gperm(R, P), decomp(U, P, X).
gperm([X/R], U) :- decomp(R, P, Q), gperm([X/P], S),
decomp(U, S, Q).
```

7.2 Un exemple de session

```
1 ?- gperm([a, b, c, d, e], X).
   X = [e, d, c, b, a] ;
   X = [d, e, c, b, a] ;
   X = [d, c, e, b, a] ;
   X = [c, d, e, b, a] ;
   X = [d, c, b, e, a] ;
   X = [c, d, b, e, a] ;
   X = [c, b, d, e, a] ;
   X = [b, c, d, e, a] ;
   X = [d, c, b, a, e] ;
   X = [c, d, b, a, e] ;
   X = [c, b, d, a, e] ;
   X = [b, c, d, a, e] ;
   X = [c, b, a, d, e] ;
```

X = [b, c, a, d, e] ;
X = [b, a, c, d, e] ;
X = [a, b, c, d, e] ;
false.
2 ?- gperm([a, b, c, d, e], [b, d, c, e, a]).
false.
3 ?- gperm([a, b, c, d, e], [b, a, c, d, e]).
true.
...

References

[1] Michel Cayrol. Le principe de Gilbreath, variantes et magie des cartes. *Quadrature*, 96:21–41,45, 2015.

[2] Norman Gilbreath. Magnetic Colors. *The Linking Ring*, 38(5).

[3] Norman Gilbreath. Second Gilbreath principle. *The Linking Ring*, 46(6):69–88, 1966.

[4] Aimé Lachal et Pierre Schott. Cartomagie : principes de Gilbreath (I). Dénombrement de mélanges américains. *Quadrature*, 85:24–35, 2012.

[5] Aimé Lachal et Pierre Schott. Cartomagie : principes de Gilbreath (II). Quelques applications. *Quadrature*, 86:21–37, 2012.

[6] Aimé Lachal et Pierre Schott. Cartomagie : principes de Gilbreath (III). Diverses démonstrations. *Quadrature*, 87:30–37, 2013.

[7] Simon Willemin. Principe de Gilbreath et mélange américain. *Quadrature*, 84:31–36, 2012.

[8] Arthur Mac-Tier. *Card Concepts. An Anthologie of Numerical & Sequential Principles within Card Magic.* Lewis Davenport Limited, 2000.

[9] Persi Diaconis and Ron Graham. *Magical Mathematics; the Mathematical Ideas that Animates Great Magic Tricks.* Princeton University Press, 2011.

[10] Colm Mulcahi. *Mathematical Card Magic.* CRC Press, 2013.

[11] Richard Vollmer. *Le principe de Gilbreath.* Magix-Editions du spectacle-Stasbourg, 1991.

[12] Daniel Péris. *La Péristance, généralisation du deuxiéme principe de Gilbreath.* La boutique de l'illusion, 2006.

[13] Karl Fulves. *The Pallbearers Review*, volume 1–12. L&L Publishing, 1993.

[14] Karl Fulves. *More Self-Working Card Trick.* Dover Publications, 1976.

[15] Leon Sterling et Ekud Shapiro. *L'Art de Prolog*. Masson, 1990.

[16] Max Maven. *Max Maven's Videomind*, volume DVD V1. L&L Publishing, 1997.

[17] William Snave. www.virtualmagie.com/forum/. membre du forum Virtualmagie.

[18] Jean-Marc Alliot et Thomas Schiex. *Intelligence Artificielle & Informatique Théorique*. Cépaduès Éditions, 1994.

[19] Harold Abelson and Gerald Jay Sussman with Julie Sussmann. *Structure and Interpretation of Computer Programs*. MIT Press, 1996.