Comptage de représentations cuspidales congruentes

Vincent Sécherre

COMPTAGE DE REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES CONGRUENTES

par

Vincent Sécherre

Abstract. — Let F be a non-Archimedean locally compact field of residue characteristic p, G be an inner form of $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, $n \geqslant 1$, and ℓ be a prime number different from p. We give a numerical criterion for an integral ℓ-adic irreducible cuspidal representation $\widetilde{\rho}$ of G to have a supercuspidal irreducible reduction mod ℓ, by counting inertial classes of cuspidal representations that are congruent to the inertial class of $\widetilde{\rho}$, generalizing results by Vignéras and Dat.

In the case the reduction mod ℓ of $\widetilde{\rho}$ is not supercuspidal irreducible, we show that this counting argument allows us to compute its length and the size of the supercuspidal support of its irreducible components. We define an invariant $w(\widetilde{\rho}) \geqslant 1$ — the product of this length by this size — which is expected to behave nicely through the local Jacquet-Langlands correspondence.

Given an ℓ-modular irreducible cuspidal representation ρ of G and a positive integer a, we give a criterion for the existence of an integral ℓ-adic irreducible cuspidal representation $\widetilde{\rho}$ of G such that its reduction mod ℓ contains ρ and has length a. This allows us to obtain a formula for the cardinality of the set of reductions mod ℓ of inertial classes of ℓ-adic irreducible cuspidal representations $\widetilde{\rho}$ with given depth and invariant w.

These results are expected to be useful to prove that the local Jacquet-Langlands correspondence preserves congruences mod ℓ.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E50
Keywords and Phrases: Modular representations of p-adic reductive groups, Jacquet-Langlands correspondence, Cuspidal representations, ℓ-adic lifting, Congruences mod ℓ

1. Introduction et énoncé des principaux résultats

1.1.

Soit F un corps localement compact non archimédien, soit H le groupe linéaire général $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, $n \geqslant 1$, et soit A le groupe multiplicatif d'une F-algèbre à division centrale de degré réduit égal à n. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique résiduelle p de F. Dat a construit dans [**4**] un cas particulier de correspondance de Jacquet-Langlands locale modulo ℓ. C'est une bijection entre classes de représentations irréductibles ℓ-modulaires — c'est-à-dire à coefficients dans une clôture algébrique $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ d'un corps fini de caractéristique ℓ — de A et classes de certaines

Mon séjour à l'University of East Anglia en mai 2014, durant lequel une partie de ce travail a été effectuée, a été financé par l'EPSRC (grant EP/H00534X/1). Je remercie chaleureusement Shaun Stevens pour son invitation et pour les discussions que nous avons eues à propos de ce travail.

représentations irréductibles ℓ-modulaires de H, baptisées "super-Speh" (paragraphe 1.11). Elle est compatible, en un certain sens, à la correspondance de Jacquet-Langlands locale entre les classes de représentations irréductibles ℓ-adiques — c'est-à-dire à coefficients dans une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ du corps des nombres ℓ-adiques — de A et la série discrète ℓ-adique de H.

1.2.

Plutôt que d'étudier directement la série discrète ℓ-adique, qui se réduit mal modulo ℓ, Dat étudie son image par l'involution de Zelevinski, c'est-à-dire l'ensemble des classes de représentations de Speh ℓ-adiques de H. Une telle représentation est dite ℓ-super-Speh lorsqu'elle est entière, et lorsque sa réduction modulo ℓ est irréductible et super-Speh. La construction de la correspondance de Jacquet-Langlands locale modulo ℓ de [**4**] repose sur le fait crucial que la correspondance de Jacquet-Langlands locale ℓ-adique fait se correspondre bijectivement représentations ℓ-adiques entières de A dont la réduction modulo ℓ est irréductible, et représentations ℓ-super-Speh de H.

1.3.

Pour prouver ce fait, Dat utilise un critère numérique de ℓ-supercuspidalité établi par Vignéras pour construire une correspondance de Langlands locale modulo ℓ ([**13**]). La réduction modulo ℓ d'une représentation irréductible cuspidale ℓ-adique entière $\widetilde{\rho}$ de H est toujours irréductible et cuspidale, mais elle n'est pas toujours supercuspidale ; plus précisément, elle est supercuspidale si et seulement si le nombre de représentations cuspidales ℓ-adiques entières de H qui sont *strictement* congrues à $\widetilde{\rho}$ est "le plus grand possible" (voir [**13**, Proposition 2.3]). Il prouve aussi une variante de ce critère numérique pour A (voir [**4**, Proposition 2.3.2]).

1.4.

Soit maintenant D une F-algèbre à division centrale de degré réduit d, et posons $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, $m \geqslant 1$. Si l'on veut construire une correspondance de Jacquet-Langlands locale modulo ℓ générale, il est naturel de commencer par généraliser le critère numérique de ℓ-supercuspidalité de Vignéras et Dat. C'est ce que nous faisons, en le présentant sous une forme légèrement différente. Soit $\widetilde{\rho}$ une représentation irréductible cuspidale ℓ-adique entière de G. Il y a ([**10**, Théorème 3.15]) une représentation irréductible cuspidale ℓ-modulaire ρ de G et un unique entier $a = a(\widetilde{\rho}) \geqslant 1$ tels que la réduction modulo ℓ de $\widetilde{\rho}$ soit égale à :

$$\mathbf{r}_\ell(\widetilde{\rho}) = \rho + \rho\nu + \cdots + \rho\nu^{a-1} \tag{1.1}$$

dans le groupe de Grothendieck des représentations ℓ-modulaires de longueur finie de G, où ν désigne le caractère valeur absolue de la norme réduite. La représentation ρ n'est pas unique en général, mais sa classe inertielle $[\mathrm{G}, \rho]$ ne dépend que de la classe inertielle $[\mathrm{G}, \widetilde{\rho}]$ de $\widetilde{\rho}$. Quand G est déployé, l'entier $a(\widetilde{\rho})$ est toujours égal à 1, c'est-à-dire que la réduction modulo ℓ de $\widetilde{\rho}$ est toujours irréductible.

Définition 1.1. — On dit que $\widetilde{\rho}$ est *ℓ-supercuspidale* si $\mathbf{r}_\ell(\widetilde{\rho})$ est irréductible et supercuspidale.

1.5.

Etant donnée une représentation irréductible cuspidale $\widetilde{\rho}$ comme en 1.4, on note :

$$\mathbf{r}_\ell([\mathrm{G}, \widetilde{\rho}])$$

l'ensemble des réductions modulo ℓ des représentations entières inertiellement équivalentes à $\widetilde{\rho}$, et on appelle cet ensemble la *réduction modulo ℓ* de $[\mathrm{G}, \widetilde{\rho}]$. On note $n(\widetilde{\rho})$ le nombre de caractères

ℓ-adiques non ramifiés $\widetilde{\chi}$ de G tels que $\widetilde{\rho}\widetilde{\chi}$ est isomorphe à $\widetilde{\rho}$ et $c(\widetilde{\rho})$ la plus grande puissance de ℓ divisant $q^{n(\widetilde{\rho})} - 1$. Le résultat suivant généralise [**13**] et [**4**].

Théorème 1.2. — *Soit $\widetilde{\rho}$ une représentation irréductible cuspidale ℓ-adique entière de* G.

(1) *L'ensemble des classes inertielles de représentations irréductibles cuspidales ℓ-adiques entières de* G *congrues à $\widetilde{\rho}$ est fini, de cardinal noté $t(\widetilde{\rho})$.*

(2) *On a :*

$$t(\widetilde{\rho}) \leqslant c(\widetilde{\rho})$$

avec égalité si et seulement si $\widetilde{\rho}$ est ℓ-supercuspidale.

1.6.

Intéressons-nous maintenant au cas où $\widetilde{\rho}$ n'est pas ℓ-supercuspidale ; en étudiant plus finement la façon dont les entiers $t(\widetilde{\rho})$ et $c(\widetilde{\rho})$ diffèrent, il est raisonnable de penser qu'on pourra en déduire des informations sur la structure de $\widetilde{\rho}$. D'après la classification des représentations irréductibles cuspidales ℓ-modulaires de G en fonction des supercuspidales ([**9**, Théorème 6.14]), il existe un unique entier naturel :

$$k(\rho) \geqslant 1$$

tel que ρ apparaisse comme sous-quotient de l'induite parabolique d'une représentation irréductible supercuspidale du sous-groupe de Levi standard $\mathrm{GL}_r(\mathrm{D}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_r(\mathrm{D})$ avec $rk(\rho) = m$. En particulier, ρ est supercuspidale si et seulement si $k(\rho) = 1$. Posons :

$$w(\widetilde{\rho}) = k(\rho)a(\widetilde{\rho}). \tag{1.2}$$

Ainsi $\widetilde{\rho}$ est ℓ-supercuspidale si et seulement si $w(\widetilde{\rho}) = 1$. Le résultat suivant montre qu'on peut déterminer la valeur de $w(\widetilde{\rho})$ en comparant $t(\widetilde{\rho})$ et $c(\widetilde{\rho})$.

Théorème 1.3. — *Soit $\widetilde{\rho}$ une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière et non ℓ-supercuspidale de* G. *Alors :*

$$t(\widetilde{\rho})w(\widetilde{\rho}) = \begin{cases} c(\widetilde{\rho}) - 1 & \textit{si } t(\widetilde{\rho}) \textit{ est premier à } \ell, \\ c(\widetilde{\rho})(\ell - 1)\ell^{-1} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1.7.

Changeons maintenant de point de vue. Quand G est déployé, Vignéras a montré ([**12**]) qu'une représentation irréductible cuspidale ℓ-modulaire ρ de G se relève toujours en une représentation ℓ-adique de G, c'est-à-dire qu'il existe une représentation ℓ-adique entière de G dont la réduction modulo ℓ est isomorphe à ρ. Si maintenant G n'est pas déployé, toute représentation irréductible *supercuspidale* ℓ-modulaire de G se relève à $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ (voir [**10, 9**]) mais il existe des représentations cuspidales qui ne se relèvent pas. Etant donnée une représentation cuspidale non supercuspidale ℓ-modulaire ρ de G, il est naturel de demander à quelle condition elle admet un relèvement.

1.8.

Pour répondre à cette question, nous avons besoin de l'invariant :

$$s(\rho) \geqslant 1$$

introduit dans [**10**], dont la définition repose sur la construction des représentations irréductibles cuspidales de G par la théorie des types de Bushnell-Kutzko (voir la section 2 ci-dessous). C'est un diviseur de d ; en particulier il est toujours égal à 1 quand G est déployé. Cet invariant est relié à un autre invariant, le *degré paramétrique* $\delta(\rho)$ introduit dans [**2**], par l'identité $\delta(\rho)s(\rho) = md$.

Théorème 1.4. — *Soit ρ une représentation irréductible cuspidale non supercuspidale ℓ-modulaire de* G*. Pour que ρ se relève à $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, il faut et il suffit que les entiers $s(\rho)$ et $k(\rho)$ soient premiers entre eux et que la représentation tordue $\rho\nu$ soit isomorphe à ρ.*

Quand G est déployé, on a toujours $s(\rho) = 1$ et une représentation irréductible cuspidale non supercuspidale ρ est toujours isomorphe à sa tordue $\rho\nu$. La condition du théorème 1.4 est donc toujours vérifiée ; on retrouve ainsi le résultat de Vignéras du paragraphe 1.7.

1.9.

Plus généralement, une représentation irréductible cuspidale ℓ-modulaire ρ de G étant fixée, nous pouvons chercher les valeurs possibles de $w(\widetilde{\rho})$ lorsque $\widetilde{\rho}$ décrit les représentations irréductibles cuspidales ℓ-adiques entières de G dont la réduction modulo ℓ contient ρ. Le théorème 1.5 répond à cette question et complète ainsi le théorème 1.4. Notons v la valuation ℓ-adique sur $\mathbf{Z}$ (normalisée par $v(\ell) = 1$) et notons $\varepsilon(\rho)$ l'ordre de $q^{n(\rho)}$ dans $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$, c'est-à-dire le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $\rho\nu^k$ soit isomorphe à ρ.

Théorème 1.5. — *Soit ρ une représentation irréductible cuspidale ℓ-modulaire de* G *et soit un entier $a > 1$. Pour qu'il existe une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière $\widetilde{\rho}$ de* G *dont la réduction modulo ℓ contienne ρ et soit de longueur a, il faut et il suffit que :*

(1) *il existe un entier $u \in \{0, \ldots, v(s(\rho))\}$ tel que $a = \varepsilon(\rho)\ell^u$;*
(2) *les entiers $s(\rho)a^{-1}$ et $k(\rho)$ soient premiers entre eux.*

1.10.

Dans la dernière section, nous utilisons le théorème 1.5 pour obtenir une formule de comptage de classes inertielles de représentations cuspidales ℓ-modulaires, dans l'esprit de [**3**]. Contrairement à Bushnell et Henniart, qui obtiennent leur formule en s'appuyant sur la correspondance de Jacquet-Langlands locale et sur l'existence préalable d'une telle formule dans le cas du groupe multiplicatif d'une algèbre à division, nous établissons la nôtre par un calcul direct, en termes de F-endoclasses de caractères simples [**1**].

Fixons des entiers $n, w \geqslant 1$ tels que w divise n, et un nombre rationnel $j \geqslant 0$. Soient $m, d \geqslant 1$ des entiers tels que $md = n$ et soit D une F-algèbre à division centrale de degré réduit d. On note $\mathscr{A}_\ell(\mathrm{D}, j, w)$ l'ensemble des réductions mod ℓ de classes inertielles de représentations irréductibles cuspidales ℓ-adiques $\widetilde{\rho}$ telles que :

(1) il existe un entier $u \geqslant 1$ divisant m tel que $\widetilde{\rho}$ soit une représentation irréductible cuspidale ℓ-adique de $\mathrm{GL}_u(\mathrm{D})$;
(2) on a $w(\widetilde{\rho}) = w$ et le niveau normalisé de $\widetilde{\rho}$ est inférieur ou égal à j.

C'est un ensemble fini, de cardinal noté $\boldsymbol{a}_\ell(\mathrm{D}, j, w)$. Fixons par ailleurs une clôture algébrique $\overline{\mathfrak{k}}$ du corps résiduel $\mathfrak{k}_\mathrm{F}$ de F, et notons $\boldsymbol{y}^1_\ell(q, n, w)$ le nombre de $y \in \overline{\mathfrak{k}}^\times$ tels que :

(1) l'ordre de y est premier à ℓ ;
(2) le degré de y sur $\mathfrak{k}_\mathrm{F}$, noté $\deg(y)$, divise nw^{-1} ;
(3) l'ordre de $q^{\deg(y)}$ dans $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$ est égal au plus grand diviseur de w premier à ℓ.

On a la formule suivante ; pour la notion d'endo-classe, on renvoie au paragraphe 6.1 ci-dessous et à [**1**].

Théorème 1.6. — *On a :*

$$\boldsymbol{a}_\ell(\mathrm{D}, j, w) = \sum_{\boldsymbol{\Theta}} \boldsymbol{y}_\ell^1(q(\boldsymbol{\Theta}), n(\boldsymbol{\Theta}), w),$$

la somme portant sur les F*-endoclasses* $\boldsymbol{\Theta}$ *de niveau normalisé inférieur ou égal à* j *et de degré* $\deg(\boldsymbol{\Theta})$ *divisant* nw^{-1}*, et où :*

$$n(\boldsymbol{\Theta}) = \frac{n}{\deg(\boldsymbol{\Theta})}, \quad q(\boldsymbol{\Theta}) = q^{f(\boldsymbol{\Theta})},$$

l'entier $f(\boldsymbol{\Theta})$ *désignant le degré résiduel de* $\boldsymbol{\Theta}$*.*

Cette somme ne dépendant que de ℓ, n, w, j et q, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1.7. — *On a* $\boldsymbol{a}_\ell(\mathrm{D}, j, w) = \boldsymbol{a}_\ell(\mathrm{F}, j, w)$*.*

1.11.

Dans un travail ultérieur, nous montrerons comment le critère numérique affiné (théorème 1.3) et la formule de comptage (corollaire 1.7) jouent un rôle central pour prouver que la correspondance de Jacquet-Langlands locale ℓ-adique entre représentations irréductibles entières de A et série discrète entière de G préserve les congruences et l'invariant w, induisant une bijection entre classes de congruence modulo ℓ de représentations. Les résultats de Dat [**4**] correspondent au cas particulier où $\mathrm{G} = \mathrm{H} = \mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ et $w = 1$.

Notations et conventions

Dans tout cet article, on fixe un corps localement compact non archimédien F et une F-algèbre à division centrale D, de degré réduit noté d. On fixe un entier $m \geqslant 1$ et on pose $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$.

Si K désigne une algèbre à division sur une extension finie de F, on note $\mathfrak{k}_\mathrm{K}$ son corps résiduel et q_K le cardinal de $\mathfrak{k}_\mathrm{K}$. On note en particulier $q = q_\mathrm{F}$ le cardinal du corps résiduel de F.

On fixe un nombre premier ℓ ne divisant pas q. On note $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps des nombres ℓ-adiques et $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$ son anneau d'entiers. Son corps résiduel $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ est une clôture algébrique d'un corps fini de caractéristique ℓ.

Toutes les représentations considérées dans cette article sont lisses.

Deux représentations ℓ-adiques entières de longueur finie (de G ou d'un groupe profini) sont dites congruentes (modulo ℓ) si elles ont la même réduction modulo ℓ (voir [**12, 14**]).

2. Rappels sur les représentations cuspidales

Au paragraphe 2.1, R est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 ou ℓ. Ensuite, ce sera ou bien le corps $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, ou bien le corps $\overline{\mathbf{F}}_\ell$.

2.1.

Rappelons quelques faits tirés de [**10**] sur les R-représentations irréductibles cuspidales de G. D'abord, il y a une correspondance bijective naturelle :

$$[\mathrm{G}, \rho] \leftrightarrow [\mathrm{J}, \lambda] \tag{2.1}$$

entre classes inertielles de R-représentation irréductible cuspidale de G et classes de G-conjugaison d'objets appelés types simples maximaux de G ([**10**, §3]). Plus précisément, la classe d'inertie de ρ et la classe de conjugaison de (J, λ) se correspondent par (2.1) si et seulement si la restriction de ρ à J possède une sous-représentation isomorphe à λ.

Un type simple maximal de G est une paire (J, λ) formée d'un sous-groupe ouvert compact J de G et d'une R-représentation irréductible λ de J dont la construction est effectuée en [**10**, §2]. Résumons-en brièvement les principales étapes.

D'abord, on part d'une strate simple $[\Lambda, n, 0, \beta]$ dans la F-algèbre de matrices $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$ et d'un caractère simple $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ d'un sous-groupe ouvert compact $\mathrm{H}^1 = \mathrm{H}^1(\beta, \Lambda)$ de G. Il y a un sous-groupe ouvert compact $\mathrm{J}^1 = \mathrm{J}^1(\beta, \Lambda)$ de G contenant et normalisant H^1, et possédant une unique représentation irréductible η dont la restriction à H^1 contienne θ.

La représentation η se prolonge en une représentation irréductible κ d'un sous-groupe ouvert compact $\mathrm{J} = \mathrm{J}(\beta, \Lambda)$ de G contenant et normalisant J^1, de même ensemble d'entrelacement que η ; un tel prolongement κ s'appelle une *β-extension* de η.

On suppose que $\mathrm{J} \cap \mathrm{B}^\times$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{B}^\times$. On fixe un isomorphisme d'algèbres entre le centralisateur B de $\mathrm{E} = \mathrm{F}[\beta]$ dans $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$ et une E-algèbre $\mathrm{M}_{m'}(\mathrm{D}')$ pour un $m' \geqslant 1$ et une E-algèbre à division centrale D' convenables, identifiant $\mathrm{J} \cap \mathrm{B}^\times$ au sous-groupe compact maximal standard de $\mathrm{GL}_{m'}(\mathrm{D}')$.

Le groupe J est égal à $(\mathrm{J} \cap \mathrm{B}^\times)\mathrm{J}^1$, et on a des isomorphismes de groupes :

$$\mathrm{J}/\mathrm{J}^1 \simeq (\mathrm{J} \cap \mathrm{B}^\times)/(\mathrm{J}^1 \cap \mathrm{B}^\times) \simeq \mathrm{GL}_{m'}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}),$$

le second étant induit par l'isomorphisme de E-algèbres fixé précédemment. Notons $\mathcal{G}$ ce dernier groupe et fixons une représentation irréductible cuspidale σ de $\mathcal{G}$. Elle définit, par inflation, une représentation irréductible de J triviale sur J^1, encore notée σ. Alors la paire $(\mathrm{J}, \kappa \otimes \sigma)$ est un type simple maximal de G, et tous sont construits de cette façon.

Soit ρ une R-représentation irréductible cuspidale de G dont la classe inertielle $[\mathrm{G}, \rho]$ correspond à la classe de conjugaison d'un type simple maximal (J, λ). Le groupe de Galois de $\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}$ sur $\mathfrak{k}_{\mathrm{E}}$ agit sur les représentations de $\mathcal{G}$; on note :

$$s(\rho) = s(\sigma)$$

l'ordre du stabilisateur de σ dans ce groupe de Galois. Quand G est deployé, c'est-à-dire quand D est égale à F, ce groupe de Galois est trivial et on a toujours $s(\rho) = 1$.

Notons $n(\rho)$ le nombre de caractères non ramifiés χ de G tels que la représentation tordue $\rho\chi$ soit isomorphe à ρ, et $f(\rho)$ le quotient de md par l'indice de ramification de E sur F.

Ces trois entiers sont indépendants des choix effectués dans la construction de (J, λ) ; ils ne dépendent que de la classe inertielle de ρ. Lorsque R est de caractéristique 0, ils sont liés par la relation :

$$n(\rho)s(\rho) = f(\rho).$$

Lorsque R est de caractéristique ℓ en revanche, l'entier $s(\rho)$ divise $f(\rho)$, et $n(\rho)$ est le plus grand diviseur de $f(\rho)s(\rho)^{-1}$ premier à ℓ.

Lorsque R est de caractéristique ℓ, on a introduit au paragraphe 1.6 un entier $k(\rho)$: le nombre de termes dans le support supercuspidal de ρ. De façon analogue, il y a un unique entier naturel :

$$k(\sigma)$$

tel que σ apparaisse comme sous-quotient de l'induite parabolique d'une représentation irréductible supercuspidale du sous-groupe de Levi standard $\mathrm{GL}_r(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_r(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})$ avec $rk(\sigma) = m'$.

Lemme 2.1. — *On a $k(\rho) = k(\sigma)$.*

Démonstration. — Posons $k = k(\rho)$ et définissons un entier $r \geqslant 1$ par $kr = m$. Il y a une représentation irréductible supercuspidale ρ_0 et des R-caractères non ramifiés $\chi_1, \dots, \chi_k$ de $\mathrm{GL}_r(\mathrm{D})$ tels que ρ apparaisse comme un sous-quotient de l'induite parabolique de $\rho_0\chi_1 \otimes \dots \otimes \rho_0\chi_k$ à G ([**9**, Théorème 6.14]). Fixons un type simple maximal $(\mathrm{J}_0, \kappa_0 \otimes \sigma_0)$ contenu dans ρ_0. D'après, par exemple, la preuve de [**9**, Lemme 6.1], on peut choisir σ_0 de sorte que σ apparaisse comme un sous-quotient de l'induite parabolique de $\sigma_0 \otimes \dots \otimes \sigma_0$ à $\mathcal{G}$. D'après [**9**, Proposition 6.10], la représentation σ_0 est supercuspidale. Par unicité de $k(\sigma)$, on en déduit que $k(\sigma) = k$. □

Remarque 2.2. — On en déduit que $k(\rho)$ divise m', et pas seulement m.

2.2.

Fixons une extension $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}$ de degré m', et notons X l'ensemble des $x \in \mathfrak{k}^\times$ de degré m' sur $\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}$. D'après Green [**7**], il y a une application surjective :

$$x \mapsto \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}(x) \tag{2.2}$$

de X vers l'ensemble des classes de représentations irréductibles cuspidales ℓ-adiques de $\mathcal{G}$; les antécédents de $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}(x)$ sont les conjugués de x sous $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})$. Pour $x \in \mathfrak{k}^\times$, notons $[x]$ l'orbite de x sous $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_{\mathrm{E}})$ et :

$$\deg(x) = \mathrm{card}([x])$$

le degré de x sur $\mathfrak{k}_{\mathrm{E}}$. Notons d' le degré réduit de D′ sur E.

Lemme 2.3. — *Pour $x \in \mathrm{X}$, soit $\widetilde{\sigma}$ la représentation cuspidale lui correspondant par* (2.2)*. On a la relation :*

$$\deg(x) = \frac{m'd'}{s(\widetilde{\sigma})} \tag{2.3}$$

et $s(\widetilde{\sigma})$ est premier à m'.

Démonstration. — Notons ϕ l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^{q_{\mathrm{E}}}$. Pour $k \in \mathbf{Z}$, on a :

$$\widetilde{\sigma}^{\phi^k} \simeq \widetilde{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } l \in \mathbf{Z} \text{ tel que } x^{q_{\mathrm{E}}^k} = x^{q_{\mathrm{D}'}^l}.$$

Si l'on note $[\widetilde{\sigma}]$ l'orbite de $\widetilde{\sigma}$ sous $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}/\mathfrak{k}_{\mathrm{E}})$, on en déduit que :

$$\mathrm{card}([\widetilde{\sigma}]) = \frac{d'}{s(\widetilde{\sigma})} = (d', \deg(x)).$$

Par ailleurs, si n est l'ordre de x, alors l'ordre de q_{E} dans $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ est $\deg(x)$, tandis que l'ordre de $q_{\mathrm{D}'}$ dans $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ est m'. On en déduit le résultat voulu. □

Corollaire 2.4. — *L'entier $s(\widetilde{\sigma})$ est premier à m.*

Démonstration. — Notons g le degré de E sur F, de sorte que :

$$d' = \frac{d}{(d,g)}, \quad m = m' \cdot \frac{g}{(d,g)}.$$

L'entier $s(\widetilde{\sigma})$ divise d', et il est premier à m' d'après le lemme 2.3 ; le résultat s'ensuit. □

D'après Dipper et James [**5, 6, 8**], si $x \in \mathrm{X}$, la réduction modulo ℓ de $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}(x)$ est irréductible et cuspidale, et ne dépend que de la partie ℓ-régulière de x, c'est-à-dire de l'unique $y \in \mathfrak{k}^\times$ tel que l'ordre de xy^{-1} soit une puissance de ℓ. Ceci définit une application surjective :

$$y \mapsto \boldsymbol{\sigma}(y) \tag{2.4}$$

de l'ensemble Y des parties ℓ-régulières des éléments de X vers celui des (classes de) représentations irréductibles cuspidales ℓ-modulaires de $\mathcal{G}$; l'ensemble des antécédents de $\boldsymbol{\sigma}(y)$ est l'orbite de y sous le groupe de Galois de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}$.

Lemme 2.5. — *Pour $y \in \mathrm{Y}$, soit σ la représentation cuspidale lui correspondant par* (2.4). *On a la relation :*

$$\deg(y) = \frac{m'}{k(\sigma)} \cdot \frac{d'}{s(\sigma)} \tag{2.5}$$

et $s(\sigma)$ est premier à $m'k(\sigma)^{-1}$.

Démonstration. — Si l'on note m'' le cardinal de l'orbite de y sous $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})$, alors l'entier $k(\sigma)$ défini à la section 2 vérifie la relation $m' = k(\sigma) \cdot m''$. Comme dans le lemme précédent, on en déduit la relation (2.5) et que $s(\sigma)$ est premier à $m'' = m'k(\sigma)^{-1}$. □

Soit $x \in \mathrm{X}$, et soit $y \in \mathrm{Y}$ la partie ℓ-régulière de x. Soit $\widetilde{\sigma}$ la représentation cuspidale ℓ-adique correspondant à x et σ sa réduction modulo ℓ, qui correspond à y. On pose :

$$\begin{aligned} a(\widetilde{\sigma}) &= \frac{s(\sigma)}{s(\widetilde{\sigma})}, \\ w(\widetilde{\sigma}) &= \frac{\deg(x)}{\deg(y)} = k(\sigma)a(\widetilde{\sigma}). \end{aligned}$$

On a les propriétés suivantes.

Lemme 2.6. — *On a $(w(\widetilde{\sigma}), m') = k(\sigma)$ et $(w(\widetilde{\sigma}), s(\sigma)) = a(\widetilde{\sigma})$.*

Démonstration. — Comme $s(\widetilde{\sigma})$ est premier à m', il est aussi premier à $k(\sigma)$. Multipliant par $a(\widetilde{\rho})$, on en déduit que $(w(\widetilde{\sigma}), s(\sigma)) = a(\widetilde{\sigma})$. Ensuite, $m'k(\sigma)^{-1}$ étant premier à $s(\sigma)$, il est aussi premier à $a(\widetilde{\rho})$. Multipliant par $k(\sigma)$, on en déduit que $(w(\widetilde{\sigma}), m') = k(\sigma)$. □

Notons $\varepsilon(\sigma)$ l'ordre de :

$$q_{\mathrm{E}}^{\deg(y) \cdot k(\sigma)} \tag{2.6}$$

dans $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$.

Lemme 2.7. — *Si $x \neq y$, le plus grand diviseur de $a(\widetilde{\sigma})$ premier à ℓ est $\varepsilon(\sigma)$.*

Démonstration. — Dans $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ (où n désigne l'ordre de x), l'ordre de (2.6) est :

$$\frac{\deg(x)}{(\deg(y)k(\sigma), \deg(x))} = a(\widetilde{\sigma}).$$

Comme $x \neq y$, l'entier n est divisible par ℓ. En projetant sur $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$, on en déduit que le plus grand diviseur de $a(\widetilde{\sigma})$ premier à ℓ est $\varepsilon(\sigma)$. □

3. Comptage

3.1. Preuve du théorème 1.2

Soit $\widetilde{\rho}$ une représentation irréductible cuspidale ℓ-adique entière de G, et soit $\mathcal{O}(\widetilde{\rho})$ l'ensemble des classes inertielles $[\mathrm{G},\widetilde{\rho}']$ de représentations irréductibles cuspidales ℓ-adiques de G congrues à $[\mathrm{G},\widetilde{\rho}]$ modulo ℓ, c'est-à-dire telles que :

$$\mathbf{r}_\ell([\mathrm{G},\widetilde{\rho}']) = \mathbf{r}_\ell([\mathrm{G},\widetilde{\rho}]).$$

Fixons un type simple maximal $(\mathrm{J},\widetilde{\lambda})$ dans la classe de G-conjugaison correspondant à $[\mathrm{G},\widetilde{\rho}]$, et notons λ la réduction de $\widetilde{\lambda}$ modulo ℓ. Alors (J,λ) est un $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-type simple maximal correspondant à la classe inertielle de la représentation ρ apparaissant dans (1.1), et l'entier $a = a(\widetilde{\rho})$ est l'indice du G-normalisateur de $(\mathrm{J},\widetilde{\lambda})$ dans celui de (J,λ) (voir [**10**, §3]).

L'ensemble $\mathcal{O}(\widetilde{\rho})$ s'identifie donc à l'ensemble des classes de G-conjugaison de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-types simples maximaux $(\mathrm{J}',\widetilde{\lambda}')$ tels que, si l'on note λ' la réduction de $\widetilde{\lambda}'$ modulo ℓ, on ait :

(1) les $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-types simples maximaux (J',λ') et (J,λ) sont conjugués sous G ;
(2) on a $(\mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{J}',\lambda') : \mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{J}',\widetilde{\lambda}')) = (\mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{J},\lambda) : \mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{J},\widetilde{\lambda}))$;

où $\mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{J},\lambda)$ désigne le normalisateur de (J,λ) dans G. Quitte à conjuguer, on peut donc supposer que $\mathrm{J}' = \mathrm{J}$ et $\lambda' = \lambda$; l'ensemble $\mathcal{O}(\widetilde{\rho})$ s'identifie donc à l'ensemble $\mathcal{T}(\mathrm{J},\widetilde{\lambda})$ des classes de $\mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{J},\lambda)$-conjugaison de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-types simples maximaux $(\mathrm{J},\widetilde{\lambda}')$ de G tels que :

(1) les représentations $\widetilde{\lambda}'$ et $\widetilde{\lambda}$ sont congruentes modulo ℓ ;
(2) les paires $(\mathrm{J},\widetilde{\lambda}')$ et $(\mathrm{J},\widetilde{\lambda})$ ont le même normalisateur dans G.

Fixons une décomposition de $\widetilde{\lambda}$ sous la forme $\widetilde{\kappa}\otimes\widetilde{\sigma}$ et un isomorphisme de groupes de J/J^1 sur $\mathcal{G}$ (voir la section 2). Le foncteur :

$$\widetilde{\tau} \mapsto \widetilde{\kappa}\otimes\widetilde{\tau}$$

définit une bijection entre les représentations irréductibles cuspidales de $\mathcal{G}$ et les types simples maximaux de G définis sur J et contenant $\widetilde{\kappa}$. D'après [**11**, Theorem 7.2], sa réciproque induit une bijection de $\mathcal{T}(\mathrm{J},\widetilde{\lambda})$ sur l'ensemble $\mathcal{C}(\widetilde{\sigma})$ des orbites, sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}/\mathfrak{k}_\mathrm{E})$, de représentations irréductibles cuspidales $\widetilde{\sigma}'$ de $\mathcal{G}$ telles que :

(1) les représentations $\widetilde{\sigma}'$ et $\widetilde{\sigma}$ sont congruentes modulo ℓ ;
(2) les orbites de $\widetilde{\sigma}'$ et de $\widetilde{\sigma}$ sous $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'}/\mathfrak{k}_\mathrm{E})$ ont le même cardinal.

Si $x \in \mathrm{X}$ correspond à $\widetilde{\sigma}$, alors (2.2) induit une bijection entre $\mathcal{C}(\widetilde{\sigma})$ et l'ensemble $\mathcal{K}(x)$ des orbites des éléments $x' \in \mathrm{X}$, sous le groupe de Galois Γ de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{k}_\mathrm{E}$, tels que :

(1) x' et x ont la même partie ℓ-régulière ;
(2) les Γ-orbites de x' et de x ont le même cardinal, c'est-à-dire que $\deg(x') = \deg(x)$.

Remarquons que la condition 2 ci-dessus signifie que x, x' ont le même stabilisateur dans Γ. En prenant l'intersection avec $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})$, on voit que tout $x' \in \mathfrak{k}^\times$ vérifiant la condition 2 appartient automatiquement à X. On obtient finalement une bijection entre $\mathcal{O}(\widetilde{\rho})$ et $\mathcal{K}(x)$; on a donc prouvé le résultat suivant.

Proposition 3.1. — *L'ensemble $\mathcal{O}(\widetilde{\rho})$ est fini, et son cardinal $t(\widetilde{\rho})$ est le nombre de Γ-orbites des $x' \in \mathfrak{k}^\times$ tels que x, x' ont la même partie ℓ-régulière et le même degré sur $\mathfrak{k}_\mathrm{E}$.*

Écrivons x sous la forme yz où y est d'ordre premier à ℓ et z d'ordre une puissance de ℓ (donc y est la partie ℓ-régulière de x). L'application :

$$z' \mapsto yz' \tag{3.1}$$

est une bijection entre la composante ℓ-primaire P_ℓ de $\mathfrak{k}^\times$ et l'ensemble des $x' \in \mathfrak{k}^\times$ dont la partie ℓ-régulière est y. Étant donnés $z' \in \mathrm{P}_\ell$ et $k \in \mathbf{Z}$, remarquons que :

$$(yz')^{q_{\mathrm{E}}^k} = yz' \quad \Leftrightarrow \quad y^{q_{\mathrm{E}}^k} = y \text{ et } (z')^{q_{\mathrm{E}}^k} = z'. \tag{3.2}$$

Notons $\mathfrak{k}_1$ l'extension de $\mathfrak{k}_{\mathrm{E}}$ engendrée par y. Pour $z' \in \mathrm{P}_\ell$, notons $[\![z']\!]$ son orbite sous le groupe de Galois de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{k}_1$ et :

$$\deg_1(z') = \mathrm{card}([\![z']\!])$$

son degré sur $\mathfrak{k}_1$. D'après (3.2), les éléments yz, yz' ont le même degré sur $\mathfrak{k}_{\mathrm{E}}$ si et seulement si :

$$\deg_1(z) = \deg_1(z'). \tag{3.3}$$

Notons $\mathcal{P}(z)$ l'ensemble des $[\![z']\!]$ pour $z' \in \mathrm{P}_\ell$ vérifiant (3.3). On a prouvé le résultat suivant.

Lemme 3.2. — *L'application* (3.1) *induit une bijection de $\mathcal{P}(z)$ sur $\mathcal{K}(x)$.*

Il ne nous reste plus qu'à calculer $\deg_1(z)$ en fonction des invariants associés à $\widetilde{\rho}$. Comme on a $a(\widetilde{\rho}) = a(\widetilde{\sigma})$ et $k(\rho) = k(\sigma)$, et compte tenu de (2.3) et (2.5), on en déduit que :

$$\deg_1(z) = \frac{\deg(x)}{\deg(y)} = k(\rho)a(\widetilde{\rho}) \tag{3.4}$$

que l'on note $w(\widetilde{\rho}) = w(\widetilde{\sigma})$. On obtient donc le résultat suivant.

Lemme 3.3. — *L'entier $w(\widetilde{\rho})t(\widetilde{\rho})$ est le nombre de $z' \in \mathrm{P}_\ell$ de degré $w(\widetilde{\rho})$ sur $\mathfrak{k}_1$.*

Compte tenu de la relation $n(\widetilde{\rho})s(\widetilde{\rho}) = f(\widetilde{\rho})$ (voir la section 2), l'extension de $\mathfrak{k}_1$ de degré $w(\widetilde{\rho})$ est de cardinal :

$$q^{n(\widetilde{\rho})}.$$

On en déduit l'inégalité $t(\widetilde{\rho}) \leqslant c(\widetilde{\rho})$, et cette inégalité est une égalité si et seulement si $w(\widetilde{\rho}) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\widetilde{\rho}$ est ℓ-supercuspidale. Ceci met fin à la preuve du théorème 1.2.

3.2. Preuve du théorème 1.3

Poussons maintenant plus loin les calculs dans le cas où $\mathbf{r}_\ell(\widetilde{\rho})$ n'est pas irréductible et supercuspidale, c'est-à-dire que $w = w(\widetilde{\rho}) > 1$. Notons Q le cardinal de $\mathfrak{k}_1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, notons $f(n) = f_{\mathrm{Q}}(n)$ le nombre de $z' \in \mathrm{P}_\ell$ de degré n sur $\mathfrak{k}_1$. D'après le lemme 3.3, on a donc :

$$t(\widetilde{\rho}) = \frac{f(w)}{w}. \tag{3.5}$$

Notons v la valuation ℓ-adique sur $\mathbf{Z}$, et notons $\mathfrak{k}'$ l'extension de $\mathfrak{k}_1$ de degré w contenue dans $\mathfrak{k}$; en partitionnant $\mathfrak{k}'^\times$ selon le degré de ses élément sur $\mathfrak{k}_1$, on obtient l'égalité :

$$\ell^{v(\mathrm{Q}^w - 1)} = \sum_{n|w} f(n).$$

Par inversion de Möbius, on a :

$$f(w) = \sum_{n|w} \mu\left(\frac{w}{n}\right) \ell^{v(\mathrm{Q}^n - 1)}$$

où μ désigne la fonction de Möbius. Notons w_0 le plus grand diviseur de w premier à ℓ.

Lemme 3.4. — *L'ordre de* Q *dans* $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$ *est égal à* w_0.

Démonstration. — L'ordre de z est de la forme ℓ^r, $r \geqslant 0$. Comme $w > 1$, on déduit que $r \geqslant 1$. La condition $\deg_1(z) = w$ signifie que l'ordre de Q dans $(\mathbf{Z}/\ell^r\mathbf{Z})^\times$ est égal à w. En projetant sur $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$, on en déduit que l'ordre de Q dans $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$ est égal au plus grand diviseur de w premier à ℓ, c'est-à-dire w_0. ☐

On a donc :

$$f(w) = \sum_{t \leqslant v(w)} \sum_{n|w_0} \mu(\ell^{v(w)-t})\mu\left(\frac{w_0}{n}\right) \ell^{v(\mathrm{Q}^{n\ell^t}-1)}.$$

Si $v(w) = 0$, on a $w = w_0 > 1$ et cela donne simplement :

$$f(w_0) = \sum_{n|w_0} \mu\left(\frac{w_0}{n}\right) \ell^{v(\mathrm{Q}^n-1)}.$$

On trouve que :

$$f(w_0) = \ell^{v(\mathrm{Q}^{w_0}-1)} + \sum_{\substack{n|w_0\\ n\neq w_0}} \mu\left(\frac{w_0}{n}\right) = \ell^{v(\mathrm{Q}^{w_0}-1)} - 1.$$

Supposons maintenant que $v(w) \geqslant 1$. Cela donne :

$$f(w) = \sum_{n|w_0} \mu\left(\frac{w_0}{n}\right) \ell^{v(\mathrm{Q}^{n\ell^{v(w)}}-1)} - \sum_{n|w_0} \mu\left(\frac{w_0}{n}\right) \ell^{v(\mathrm{Q}^{n\ell^{v(w)-1}}-1)} = f_{\mathrm{Q}^{\ell^{v(w)}}}(w_0) - f_{\mathrm{Q}^{\ell^{v(w)-1}}}(w_0).$$

Comme Q a le même ordre que Q^{ℓ^k}, $k \geqslant 0$, dans $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$, à savoir w_0, on trouve que :

$$f(w) = \ell^{v(\mathrm{Q}^{u\ell^v}-1)} - \ell^{v(\mathrm{Q}^{u\ell^{v-1}}-1)} = \ell^{v(\mathrm{Q}^w-1)-1}(\ell-1).$$

On trouve ainsi le résultat annoncé, en remarquant que $c(\widetilde{\rho})$ est égal à $\ell^{v(\mathrm{Q}^w-1)}$.

3.3. Lien avec la formulation de Vignéras et Dat

Dans ce paragraphe, nous allons reformuler le théorème 1.2 sous une forme analogue à celles de Vignéras [**13**, Proposition 2.3] et Dat [**4**, Proposition 2.3.2].

Fixons une uniformisante ϖ de F et, pour toute représentation irréductible cuspidale ℓ-adique entière $\widetilde{\rho}$ de G, notons $\mathcal{O}(\widetilde{\rho}, \varpi)$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles cuspidales ℓ-adiques entières de G qui sont congrues à $\widetilde{\rho}$ et dont le caractère central prend la même valeur que celui de $\widetilde{\rho}$ en ϖ. Soit $\mathrm{C}(\widetilde{\rho})$ la plus grande puissance de ℓ divisant :

$$\frac{md}{n(\widetilde{\rho})} \cdot (q^{n(\widetilde{\rho})} - 1).$$

On a le résultat suivant.

Proposition 3.5. — *Soit* $\widetilde{\rho}$ *une* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$*-représentation irréductible cuspidale et entière de* G. *Alors l'ensemble* $\mathcal{O}(\widetilde{\rho}, \varpi)$ *est fini, de cardinal noté* $\mathrm{T}(\widetilde{\rho})$, *et on a :*

$$\mathrm{T}(\widetilde{\rho}) \leqslant \mathrm{C}(\widetilde{\rho})$$

avec égalité si et seulement si $\widetilde{\rho}$ *est* ℓ*-supercuspidale.*

Démonstration. — D'après le théorème 1.2, il suffit de prouver que $\mathrm{T}(\widetilde{\rho})$ est le produit de $t(\widetilde{\rho})$ par la plus grande puissance de ℓ divisant $mdn(\widetilde{\rho})^{-1}$. Commençons par remplacer la correspondance bijective (2.1) par la bijection :

$$\rho \leftrightarrow (\mathbf{J}, \Lambda)$$

entre classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de G et classes de conjugaison (sous G) de types simples maximaux étendus de G (voir [**10**, Théorème 3.11]).

Soit $(\mathrm{J}, \widetilde{\lambda})$ un type simple maximal contenu dans la $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale $\widetilde{\rho}$, et soit $\widetilde{\mathbf{J}}$ son normalisateur dans G. D'après [**10**, Proposition 3.1], il y a une unique représentation $\widetilde{\Lambda}$ de $\widetilde{\mathbf{J}}$ prolongeant $\widetilde{\lambda}$ dont l'induite à G est isomorphe à $\widetilde{\rho}$. Notons $\overline{\Lambda}$ la réduction modulo ℓ de $\widetilde{\Lambda}$, qui est un prolongement de λ à $\widetilde{\mathbf{J}}$.

Soit $\widetilde{\rho}'$ une représentation irréductible cuspidale ℓ-adique entière de G. Pour qu'elle soit congrue à $\widetilde{\rho}$, il faut et il suffit qu'elle contienne un type simple maximal étendu $(\widetilde{\mathbf{J}}', \widetilde{\Lambda}')$ tel que $\widetilde{\mathbf{J}}'$ soit égal à $\widetilde{\mathbf{J}}$ et dont la réduction modulo ℓ, notée $\overline{\Lambda}'$, soit égale à $\overline{\Lambda}$. L'entier $\mathrm{T}(\widetilde{\rho})$ est donc le nombre de classes de G-conjugaison de $(\widetilde{\mathbf{J}}', \widetilde{\Lambda}')$ tels que :

$$\widetilde{\mathbf{J}}' = \widetilde{\mathbf{J}}, \quad \overline{\Lambda}' = \overline{\Lambda} \quad \text{et} \quad \widetilde{\Lambda}'(\varpi) = \widetilde{\Lambda}(\varpi).$$

Fixons une uniformisante ϖ' de D' et posons :

$$\widetilde{\varpi} = (\varpi')^{d's(\widetilde{\rho})^{-1}}.$$

Le groupe $\widetilde{\mathbf{J}}$ est engendré par J et $\widetilde{\varpi}$. L'entier $\mathrm{T}(\widetilde{\rho})$ est égal au produit $t(\widetilde{\rho})t_1(\widetilde{\rho})$ où $t_1(\widetilde{\rho})$ est le nombre de représentations $\widetilde{\Lambda}'$ de $\widetilde{\mathbf{J}}$ prolongeant $\widetilde{\lambda}$ telles que :

$$\overline{\Lambda}'(\widetilde{\varpi}) = \overline{\Lambda}(\widetilde{\varpi}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\Lambda}'(\varpi) = \widetilde{\Lambda}(\varpi).$$

Le nombre de représentations irréductibles de $\widetilde{\mathbf{J}}$ prolongeant λ et prenant une valeur fixée en ϖ est égal à l'indice de $\mathrm{F}^\times\mathbf{J}$ dans $\widetilde{\mathbf{J}}$, c'est-à-dire à :

$$e(\mathrm{E} : \mathrm{F})s(\widetilde{\rho}) = \frac{md}{n(\widetilde{\rho})}, \tag{3.6}$$

où $e(\mathrm{E} : \mathrm{F})$ désigne l'indice de ramification de E sur F. Compte tenu de la condition supplémentaire sur $\overline{\Lambda}'(\widetilde{\varpi})$, on trouve que $t_1(\widetilde{\rho})$ est la plus grande puissance de ℓ divisant (3.6). □

4. Preuve du théorème 1.4

Soit ρ une représentation irréductible cuspidale ℓ-modulaire de G et soit $(\mathrm{J}, \kappa\otimes\sigma)$ un $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-type simple maximal dans la classe de G-conjugaison correspondant à $[\mathrm{G}, \rho]$. D'après [**10**], pour que ρ se relève à $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, il faut et suffit que σ, considérée comme une représentation irréductible cuspidale de $\mathcal{G}$, se relève en une représentation irréductible cuspidale ℓ-adique $\widetilde{\sigma}$ telle que $s(\widetilde{\sigma}) = s(\sigma)$.

Soit $y \in \mathrm{Y}$ correspondant à σ par (2.4). Pour qu'une telle représentation $\widetilde{\sigma}$ existe, il faut et il suffit donc, d'après (3.4), qu'il existe un $x \in \mathrm{X}$ dont la partie ℓ-régulière soit y et qui vérifie :

$$\deg(x) = k(\sigma) \cdot \deg(y).$$

Si ρ (donc σ) est supercuspidale, c'est-à-dire si l'on a $k(\sigma) = 1$, alors $x = y \in \mathrm{X}$ vérifie les conditions requises, et on retrouve bien le fait que toute représentation irréductible supercuspidale ℓ-modulaire se relève.

Supposons maintenant que ρ est cuspidale mais pas supercuspidale, c'est-à-dire que $k(\sigma) > 1$. Notons :

$$\varepsilon(\rho)$$

l'ordre de $q^{n(\rho)}$ dans $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$ (voir le paragraphe 2.1 pour la définition de l'entier $n(\rho)$). Soit ν le caractère non ramifié ℓ-modulaire de G obtenu en composant la norme réduite de G sur $\mathrm{F}^\times$, la valuation de $\mathrm{F}^\times$ dans $\mathbf{Z}$ (envoyant une uniformisante sur 1) et le morphisme envoyant 1 sur l'inverse de q modulo ℓ.

Lemme 4.1. — *Soit un entier $i \in \mathbf{Z}$. Pour que $\rho\nu^i = \rho$, il faut et il suffit que $\varepsilon(\rho)$ divise i.*

Démonstration. — D'après [**10**, §3.4], les représentations $\rho\nu^i$ et ρ sont isomorphes si et seulement si $\nu^{n(\rho)i} = 1$. L'ordre de ν étant égal à l'ordre de q dans $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$, noté e, ceci équivaut à dire que e divise $n(\rho)i$. Il ne reste plus qu'à remarquer que :

$$\varepsilon(\rho) = \frac{e}{(e, n(\rho))}$$

pour conclure. □

Corollaire 4.2. — *On a $\rho\nu \simeq \rho$ si et seulement si $\varepsilon(\rho) = 1$.*

Ainsi le théorème 1.4 peut être reformulé de la façon suivante.

Théorème 4.3. — *Soit ρ une représentation irréductible cuspidale non supercuspidale ℓ-modulaire de* G. *Pour que ρ se relève à $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, il faut et il suffit que les entiers $s(\rho)$ et $k(\rho)$ soient premiers entre eux et que $\varepsilon(\rho) = 1$.*

D'après le paragraphe 2.1, l'entier $n(\rho)$ est le plus grand diviseur de $f(\rho)s(\rho)^{-1}$ premier à ℓ. Par conséquent, $\varepsilon(\rho)$ est égal à l'entier $\varepsilon(\sigma)$ du paragraphe 2.2.

Lemme 4.4. — *Pour toute représentation irréductible cuspidale ℓ-adique $\widetilde{\sigma}$ relevant σ, le plus grand diviseur de $a(\widetilde{\sigma})$ premier à ℓ est $\varepsilon(\sigma)$.*

Démonstration. — Fixons un $x \in \mathrm{X}$ correspondant à $\widetilde{\sigma}$ et de partie régulière y. Comme ρ (donc σ) n'est pas supercuspidale, on a $x \neq y$. Le résultat suit alors du lemme 2.7. □

Posons $f(\sigma) = f(\rho)$ (voir le paragraphe 2.1).

Lemme 4.5. — *Soit $z \in \mathrm{P}_\ell$ d'ordre ℓ^r, $r \geqslant 0$. On a $yz \in \mathrm{X}$ si et seulement si l'ordre de :*

$$q^{f(\sigma)k(\sigma)^{-1}} \tag{4.1}$$

dans $(\mathbf{Z}/\ell^r\mathbf{Z})^\times$ est égal à $k(\sigma)$.

Comme $y \in \mathrm{Y}$, il y a un $z \in \mathrm{P}_\ell$ (non trivial puisque σ n'est pas supercuspidale) tel que $yz \in \mathrm{X}$. Il y a donc un $r \geqslant 1$ tel que l'ordre de (4.1) dans $(\mathbf{Z}/\ell^r\mathbf{Z})^\times$ est égal à $k(\sigma)$. En réduisant modulo ℓ, on en déduit que son ordre dans $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$ est le plus grand diviseur de $k(\sigma)$ premier à ℓ.

Lemme 4.6. — *Soit $z \in \mathrm{P}_\ell$ d'ordre ℓ^r, $r \geqslant 0$. On a $\deg(yz) = k(\sigma) \cdot \deg(y)$ si et seulement si l'ordre de :*

$$q^{f(\sigma)(k(\sigma)s(\sigma))^{-1}} \tag{4.2}$$

dans $(\mathbf{Z}/\ell^r\mathbf{Z})^\times$ est égal à $k(\sigma)$.

Supposons d'abord que ρ se relève à $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. D'après les lemmes 2.6 et 2.7, on trouve que $k(\rho)$ est premier à $s(\rho)$ et que $\varepsilon(\rho) = 1$.

Inversement, supposons que les conditions du théorème 1.4 sont vérifiées. Soit $z \in \mathrm{P}_\ell$ d'ordre ℓ^r, $r \geqslant 1$, tel que $yz \in \mathrm{X}$, et notons n l'ordre de (4.2) dans $(\mathbf{Z}/\ell^r\mathbf{Z})^\times$. D'après le lemme 4.5, on a :

$$\frac{n}{(n, s(\sigma))} = k(\sigma). \tag{4.3}$$

L'hypothèse $\varepsilon(\rho) = 1$ implique que :

$$\frac{n}{(n, k(\sigma))} = \ell^t, \quad t \geqslant 0. \tag{4.4}$$

Si ℓ divise $k(\sigma)$, alors $s(\sigma)$ est premier à ℓ, et (4.3) et (4.4) impliquent que $n = k(\sigma)$.

En revanche, si $k(\sigma)$ est premier à ℓ, écrivons $n = k(\sigma)n'$ avec $n' = (n, s(\sigma)) = \ell^t$. On peut remarquer que $t = v(n)$. Alors l'élément :

$$z^{\ell^{v(n)}} \in \mathrm{P}_\ell$$

qui est d'ordre $\ell^{r-v(n)}$, vérifie la condition du lemme 4.6 car l'ordre de (4.2) dans $(\mathbf{Z}/\ell^{r-v(n)}\mathbf{Z})^\times$ est égal à $n\ell^{-v(n)} = k(\sigma)$. Comme $k(\rho)$ est premier à $s(\rho)$, il vérifie aussi la condition du lemme 4.5. Ceci met fin à la preuve du théorème 1.4.

Remarque 4.7. — Posons $k = k(\sigma)$ et $s = s(\sigma)$, et notons τ l'unique représentation irréductible supercuspidale de $\mathrm{GL}_{m'k^{-1}}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})$ telle que σ soit un sous-quotient de l'induite parabolique de $\tau \otimes \cdots \otimes \tau$. Le plus grand diviseur de k premier à ℓ est $\varepsilon(\tau)(s, \varepsilon(\tau))^{-1}$ et $\varepsilon(\sigma)$ est égal à $(s, \varepsilon(\tau))$. La condition du théorème 1.4 s'écrit donc $\varepsilon(\rho) = 1$ et $\min(v(k), v(s)) = 0$.

5. Preuve du théorème 1.5

Soit ρ une représentation irréductible cuspidale ℓ-modulaire de G, et soit $a > 1$. On cherche à quelle condition ρ admet un a-relèvement, c'est-à-dire une représentation irréductible cuspidale ℓ-adique entière $\widetilde{\rho}$ de G dont la réduction modulo ℓ contienne ρ et soit de longueur a. Il faut et suffit pour cela que σ se relève en une représentation irréductible cuspidale ℓ-adique $\widetilde{\sigma}$ telle que $s(\sigma) = a \cdot s(\widetilde{\sigma})$. D'après les lemmes 2.6 et 2.7, on a des conditions nécessaires :

(1) $a = \varepsilon(\sigma)\ell^u$ avec $u \geqslant 0$.
(2) a divise $s(\sigma)$ et $s(\sigma)a^{-1}$ est premier à $k(\sigma)$.

Supposons donc qu'elles sont vérifiées.

Remarque 5.1. — En particulier, si σ n'est pas supercuspidale, les lemmes 2.6 et 2.7 montrent que $\varepsilon(\sigma)$ divise $s(\sigma)$.

Soit $y \in \mathrm{Y}$ correspondant à σ par (2.4). Pour qu'une telle représentation $\widetilde{\sigma}$ existe, il faut et il suffit donc, d'après (3.4), qu'il existe un $x \in \mathrm{X}$ dont la partie ℓ-régulière soit y et qui vérifie :

$$\deg(x) = ak(\sigma) \cdot \deg(y).$$

Comme $y \in \mathrm{Y}$, il y a un $z \in \mathrm{P}_\ell$ (non trivial car $a > 1$) tel que $yz \in \mathrm{X}$. Il y a donc un entier $r \geqslant 1$ tel que l'ordre de (4.1) dans $(\mathbf{Z}/\ell^r\mathbf{Z})^\times$ est égal à $k(\sigma)$. En réduisant modulo ℓ, on en déduit que son ordre dans $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$ est le plus grand diviseur de $k(\sigma)$ premier à ℓ.

Lemme 5.2. — *Soit $z \in \mathrm{P}_\ell$ d'ordre ℓ^r, $r \geqslant 0$. On a $\deg(yz) = ak(\sigma) \cdot \deg(y)$ si et seulement si l'ordre de :*

$$q^{f(\sigma)(k(\sigma)s(\sigma))^{-1}} \tag{5.1}$$

dans $(\mathbf{Z}/\ell^r\mathbf{Z})^\times$ est égal à $ak(\sigma)$.

Soit $z \in \mathrm{P}_\ell$ d'ordre ℓ^r, $r \geqslant 1$, tel que $yz \in \mathrm{X}$, et soit n l'ordre de (5.1) dans $(\mathbf{Z}/\ell^r\mathbf{Z})^\times$. D'après le lemme 4.5, on a :

$$\frac{n}{(n, s(\sigma))} = k(\sigma). \tag{5.2}$$

En particulier, on a :

$$v(n) = v(k) + \min(v(n), v(s(\sigma))). \tag{5.3}$$

Si l'on note n_0 le plus grand diviseur de n premier à ℓ, on a :

$$\frac{n_0}{(n_0, k(\sigma))} = \varepsilon(\sigma). \tag{5.4}$$

On déduit de l'hypothèse sur a que $(n_0, s(\sigma)) = \varepsilon(\sigma)$, puis que $n_0 = k_0(\sigma)\varepsilon(\sigma)$, où $k_0(\sigma)$ désigne le plus grand diviseur de $k(\sigma)$ premier à ℓ.

On cherche un $t \in \{1, \dots, v(q^{f(\sigma)} - 1)\}$ tel que l'ordre de (5.1) dans $(\mathbf{Z}/\ell^t\mathbf{Z})^\times$ soit égal à $ak(\sigma)$. D'après l'hypothèse sur a, cela impliquera automatiquement que l'ordre de (4.1) est $k(\sigma)$. Soit :

$$t_0 = v(\mathrm{Q}^{n_0} - 1).$$

On a donc :

$$v(q^{f(\sigma)} - 1) = t_0 + v(s(\sigma)) + v(k).$$

Posons $t = t_0 + u + v(k)$ (on a bien $t \leqslant v(q^{f(\sigma)} - 1)$ car $u \leqslant v(s(\sigma))$). Alors l'ordre de (5.1) dans $(\mathbf{Z}/\ell^t\mathbf{Z})^\times$ est égal à $n_0\ell^u = ak(\sigma)$.

Remarque 5.3. — Compte tenu de la remarque 4.7, la condition du théorème 1.5 se résume à $u \in \{0, \dots, v(s(\rho))\}$ et $\min(v(k(\rho)), v(s(\rho)) - u) = 0$.

6. Preuve du théorème 1.6

Dans toute cette section, on fixe des entiers $n, w \geqslant 1$ tels que w divise n.

6.1.

Dans ce paragraphe, nous rappelons brièvement quelques attributs des F-endoclasses de caractères simples dont nous aurons besoin. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [**1**].

Soit A une F-algèbre centrale simple de dimension finie, soit $[\Lambda, n_\Lambda, 0, \beta]$ une strate simple de A et soit $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ un caractère simple. Le couple $([\Lambda, n_\Lambda, 0, \beta], \theta)$ définit un ps-caractère dont l'endo-classe – qui est une classe d'équivalence de ps-caractères – est notée $\boldsymbol{\Theta}$. Les entiers :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\Theta}) &= f(\mathrm{F}[\beta] : \mathrm{F}), \\ \deg(\boldsymbol{\Theta}) &= [\mathrm{F}[\beta] : \mathrm{F}], \end{aligned}$$

c'est-à-dire le degré résiduel et le degré de $\mathrm{F}[\beta]$ sur F respectivement, ne dépendent pas du choix de β mais uniquement de $\boldsymbol{\Theta}$. Le nombre rationnel positif :

$$l(\boldsymbol{\Theta}) = -v_{\mathrm{F}}(\beta),$$

où v_{F} désigne la valuation sur $\mathrm{F}[\beta]$ normalisée en donnant la valeur 1 à une uniformisante de F, ne dépend pas non plus du choix de β mais uniquement de $\boldsymbol{\Theta}$.

Si ρ est une R-représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{A}^{\times}$ (ici R désigne $\overline{\mathbf{Q}}_{\ell}$ ou $\overline{\mathbf{F}}_{\ell}$), il existe un couple $([\Lambda, n_{\Lambda}, 0, \beta], \theta)$ comme ci-dessus tel que la restriction de ρ au pro-p-sous-groupe $\mathrm{H}^1(\beta, \Lambda)$ contienne θ. L'endoclasse $\boldsymbol{\Theta}$ définie par ce couple ne dépend que de la classe d'isomorphisme de la représentation ρ, et le nombre rationnel $l(\boldsymbol{\Theta}) \geqslant 0$ est le niveau normalisé (ou aussi profondeur) de ρ.

6.2.

Soit D une F-algèbre centrale simple de degré réduit d divisant n, et soit $\boldsymbol{\Theta}$ une F-endoclasse de degré g divisant nw^{-1}. On définit un entier $m \geqslant 1$ par la relation $md = n$ et on pose :

$$d' = \frac{d}{(d,g)}, \quad m' = \frac{m(d,g)}{g}.$$

Pour tout $u \geqslant 1$ divisant m, notons $\mathscr{A}(\mathrm{D}, \boldsymbol{\Theta}, w, u)$ l'ensemble des classes inertielles de représentations irréductibles cuspidales ℓ-adiques $\widetilde{\rho}$ de $\mathrm{GL}_u(\mathrm{D})$ telles que :

(1) $w(\widetilde{\rho}) = w$;

(2) l'endoclasse de $\widetilde{\rho}$ est égale à $\boldsymbol{\Theta}$.

Remarquons que, pour qu'il y ait une représentation irréductible cuspidale ℓ-adique $\widetilde{\rho}$ de $\mathrm{GL}_u(\mathrm{D})$ d'endoclasse $\boldsymbol{\Theta}$, il faut et il suffit que l'entier u soit de la forme :

$$u = \frac{g}{(d,g)} \cdot u' \tag{6.1}$$

où u' est un diviseur de m'. Posons maintenant :

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}, \boldsymbol{\Theta}, w) = \bigcup_{u|m} \mathscr{A}(\mathrm{D}, \boldsymbol{\Theta}, w, u) \tag{6.2}$$

et notons $\mathscr{A}_{\ell}(\mathrm{D}, \boldsymbol{\Theta}, w)$ l'ensemble des réductions mod ℓ des éléments de (6.2). L'endoclasse $\boldsymbol{\Theta}$ étant fixée, cet ensemble est fini, et son cardinal sera noté $\boldsymbol{a}_{\ell}(\mathrm{D}, \boldsymbol{\Theta}, w)$.

6.3.

Dans ce paragraphe, on suppose que $\boldsymbol{\Theta}$ est la F-endoclasse nulle $\mathbf{0}$, et on va calculer $\boldsymbol{a}_{\ell}(\mathrm{D}, \mathbf{0}, w)$. Étant donné un entier $u \geqslant 1$ divisant m, toute représentation irréductible cuspidale ℓ-modulaire σ de $\mathrm{GL}_u(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}})$ définit un type simple maximal de niveau 0 de $\mathrm{GL}_u(\mathrm{D})$ — donc une classe inertielle $\Omega(\sigma)$ de représentations cuspidales de niveau 0 de $\mathrm{GL}_u(\mathrm{D})$. L'application :

$$\sigma \mapsto \Omega(\sigma) \tag{6.3}$$

est surjective (toutes les classes inertielles de représentations cuspidales de niveau 0 de $\mathrm{GL}_u(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}})$ sont atteintes) et ses fibres sont les classes de conjugaison sous le groupe de Galois de $\mathfrak{k}_{\mathrm{D}}$ sur $\mathfrak{k}_{\mathrm{F}}$.

Lemme 6.1. — *Soit σ une représentation irréductible cuspidale ℓ-modulaire de $\mathrm{GL}_u(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}})$. Alors $\Omega(\sigma)$ appartient à $\mathscr{A}_{\ell}(\mathrm{D}, \mathbf{0}, w)$ si et seulement s'il existe une représentation irréductible cuspidale ℓ-adique $\widetilde{\sigma}$ de $\mathrm{GL}_u(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}})$ dont la réduction modulo ℓ soit σ et telle que $w(\widetilde{\sigma}) = w$.*

Notant $\mathsf{B}_{\ell}(q, m, d, w)$ l'image réciproque de $\mathscr{A}_{\ell}(\mathrm{D}, \mathbf{0}, w)$ par (6.3), qui est décrite par le lemme 6.1, on obtient ainsi :

$$\boldsymbol{a}_{\ell}(\mathrm{D}, \mathbf{0}, w) = \sum_{\sigma} \frac{s(\sigma)}{d}$$

où σ décrit l'ensemble $\mathsf{B}_\ell(q,m,d,w)$.

Fixons une clôture algébrique $\bar{\mathfrak{k}}$ de $\mathfrak{k}_{\mathrm{D}}$ et notons $\mathfrak{k}$ l'extension de $\mathfrak{k}_{\mathrm{F}}$ de degré nw^{-1} incluse dans $\bar{\mathfrak{k}}$. (Attention ! Cette extension $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{k}_{\mathrm{F}}$ ne coïncide avec l'extension ainsi notée dans la section 2 que si $w=1$.) Pour tout $y \in \mathfrak{k}^\times$, posons :

$$\begin{aligned}\deg(y) &= \text{degré de } y \text{ sur } \mathfrak{k}_{\mathrm{F}},\\ \epsilon(y) &= \text{ordre de } q^{\deg(y)} \text{ dans } (\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times.\end{aligned}$$

et notons $\mathsf{Y}_\ell(q,n,w)$ l'ensemble des $y \in \mathfrak{k}^\times$, d'ordre premier à ℓ, tels que $\epsilon(y)$ soit égal à w_0, le plus grand diviseur de w premier à ℓ. Nous allons définir une application surjective :

$$\mathsf{Y}_\ell(q,n,w) \to \mathsf{B}_\ell(q,m,d,w)$$

dépendant du choix de D.

Soit $y \in \mathsf{Y}_\ell(q,n,w)$. Notons :

$$r(y) = \frac{\deg(y)}{(\deg(y),d)}$$

le degré de y sur $\mathfrak{k}_{\mathrm{D}}$ et $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{D}}(y)$ la représentation irréductible supercuspidale ℓ-modulaire du groupe $\mathrm{GL}_{r(y)}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}})$ correspondant à y par (2.4). Posons $s(y) = s(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{D}}(y))$ et :

$$k(y) = \frac{w}{(w,s(y))}.$$

On a le lemme suivant.

Lemme 6.2. — *Il existe une unique représentation irréductible cuspidale :*

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{D}}(y)$$

dont le support supercuspidal soit égal à $k(y)\cdot\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{D}}(y)$.

Démonstration. — D'après [**12**, III.2.5], il suffit de prouver que le plus grand diviseur de k premier à ℓ, noté k_0, est égal à l'ordre de $q^{dr(y)}$ dans $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$. Comme on a $\epsilon(y) = w_0$ d'une part et $r(y)d = s(y)\deg(y)$ d'autre part, cet ordre est égal à :

$$\frac{w_0}{(w_0,s(y))} = k_0,$$

ce qui met fin à la démonstration. □

Lemme 6.3. — *Pour tout $y \in \mathsf{Y}_\ell(q,n,w)$, la représentation $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{D}}(y)$ appartient à $\mathsf{B}_\ell(q,m,d,w)$.*

Démonstration. — Il faut d'abord prouver que le degré de $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{D}}(y)$ divise m. D'abord, on a :

$$s(y) = \frac{d}{(\deg(y),d)}.$$

Par hypothèse sur y, il existe un entier $t \geqslant 1$ tel que $n = wt\cdot\deg(y)$. On en déduit que :

$$r(y) = \frac{m}{(m,wt)} \quad \text{et} \quad s(y) = \frac{wt}{(m,wt)} \quad \text{et} \quad k(y) = \frac{(m,wt)}{((m,wt),t)},$$

puis que l'entier $\deg(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{D}}(y)) = k(y)r(y)$ divise m. D 'après le début de la section 5, il ne reste qu'à vérifier que $a = (w,s(y))$ divise $s(y)$ et que $s(y)a^{-1} = s(y)(w,s(y))^{-1}$ est premier à $k(y)$, ce qui est immédiat. □

Ceci définit une application $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{D}} : y \mapsto \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{D}}(y)$ de $\mathsf{Y}_\ell(q,n,w)$ dans $\mathsf{B}_\ell(q,m,d,w)$.

Proposition 6.4. — *L'application* $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{D}}$ *est surjective, et ses fibres sont les classes de conjugaison sous l'automorphisme de Frobenius* $x \mapsto x^{q^d}$.

Démonstration. — Soit $\sigma \in \mathbf{B}_\ell(q,m,d,w)$. Il y a une unique représentation irréductible supercuspidale ℓ-modulaire $\boldsymbol{\tau}(\sigma)$ telle que le support supercuspidal de σ soit égal à $k(\sigma)\cdot\boldsymbol{\tau}(\sigma)$. Soit $y \in \bar{\mathfrak{k}}^\times$ un paramètre de James pour $\boldsymbol{\tau}(\sigma)$. Il est d'ordre premier à ℓ et vérifie $\boldsymbol{\epsilon}(y) = w_0$, mais il est *a priori* dans une extension de $\mathfrak{k}_{\mathrm{F}}$ de degré $nk(\sigma)^{-1}$. Toutefois, par hypothèse sur σ, l'entier $wk(\sigma)^{-1}$ divise $s(\tau)$. On en déduit que y est dans une extension de $\mathfrak{k}_{\mathrm{F}}$ de degré nw^{-1}, c'est-à-dire que $y \in \mathbf{Y}_\ell(q,n,w)$, ce qui prouve la surjectivité. Ensuite, on a :

$$\deg(\sigma) = \frac{\deg(y)}{(\deg(y),d)}\cdot\frac{w}{(w,s(y))} \quad \text{et} \quad k(\sigma) = (w,\deg(\sigma)) = \frac{w}{(w,s(y))}. \tag{6.4}$$

Il s'ensuit que l'application $\sigma \mapsto \boldsymbol{\tau}(\sigma)$ est injective. □

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_\ell(\mathrm{D},\mathbf{0},w) &= \sum_y \frac{s(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{D}}(y))}{d}\cdot\frac{1}{\deg(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{D}}(y))}\\ &= \sum_y \frac{1}{\deg(y)}\end{aligned}$$

(où y décrit $\mathbf{Y}_\ell(q,n,w)$), valeur que l'on note $\boldsymbol{y}^1_\ell(q,n,w)$.

6.4.

Supposons maintenant que $\boldsymbol{\Theta}$ est quelconque, de degré g divisant nw^{-1}. On pose :

$$q(\boldsymbol{\Theta}) = q^{f(\boldsymbol{\Theta})}, \quad n(\boldsymbol{\Theta}) = m'd' = \frac{n}{g},$$

où $f(\boldsymbol{\Theta})$ désigne le degré résiduel de l'endoclasse $\boldsymbol{\Theta}$. Fixons un entier u de la forme (6.1) et une réalisation $([\Lambda,n_\Lambda,0,\beta],\theta)$, où θ est un caractère simple (ℓ-modulaire) attaché à la strate simple $[\Lambda,n_\Lambda,0,\beta]$ de $\mathrm{M}_u(\mathrm{D})$. On suppose que l'intersection entre l'ordre héréditaire associé à Λ et le centralisateur de $\mathrm{F}[\beta]$ dans $\mathrm{M}_u(\mathrm{D})$ est maximal. Fixons aussi une β-extension κ de θ et posons $\mathrm{J} = \mathrm{J}(\beta,\Lambda)$. L'application $\sigma \mapsto \kappa\otimes\sigma$ induit une surjection :

$$\sigma \mapsto [\mathrm{J},\kappa\otimes\sigma] \leftrightarrow [\mathrm{GL}_u(\mathrm{D}),\rho] \tag{6.5}$$

entre classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales ℓ-modulaires du groupe $\mathrm{GL}_{u'}(\mathfrak{k}_{\mathrm{D}'})$ et classes inertielles de représentations irréductibles cuspidales ℓ-modulaires du groupe $\mathrm{GL}_u(\mathrm{D})$ d'endoclasse $\boldsymbol{\Theta}$. L'image d'une représentation σ par (6.5) appartient à $\mathscr{A}_\ell(\mathrm{D},\boldsymbol{\Theta},w)$ si et seulement si σ est dans $\mathbf{B}_\ell(q(\boldsymbol{\Theta}),m',d',w)$, et l'ensemble des antécédents d'une classe inertielle $[\mathrm{GL}_u(\mathrm{D}),\rho]$ par (6.5) est de cardinal $s(\rho)$. On obtient ainsi :

$$\boldsymbol{a}_\ell(\mathrm{D},\boldsymbol{\Theta},w) = \sum_\sigma \frac{s(\sigma)}{d'} = \boldsymbol{y}^1_\ell(q(\boldsymbol{\Theta}),n(\boldsymbol{\Theta}),w)$$

(où σ décrit l'ensemble $\mathbf{B}_\ell(q(\boldsymbol{\Theta}),m',d',w)$).

6.5.

Finalement, si l'on fixe un nombre rationnel $j \geqslant 0$, et si l'on pose :

$$\mathscr{A}_\ell(\mathrm{D}, j, w) = \bigcup_{l(\boldsymbol{\Theta}) \leqslant j} \mathscr{A}_\ell(\mathrm{D}, \boldsymbol{\Theta}, w),$$

alors on obtient l'égalité :

$$\boldsymbol{a}_\ell(\mathrm{D}, j, w) = \sum_{l(\boldsymbol{\Theta}) \leqslant j} \boldsymbol{a}_\ell(\mathrm{D}, \boldsymbol{\Theta}, w) = \sum_{l(\boldsymbol{\Theta}) \leqslant j} \boldsymbol{y}_\ell^1(q(\boldsymbol{\Theta}), n(\boldsymbol{\Theta}), w) = \boldsymbol{a}_\ell(\mathrm{F}, j, w),$$

ce qui met fin à la preuve du théorème 1.6 et du corollaire 1.7.

Références

[1] P. Broussous, V. Sécherre et S. Stevens, *Smooth representations of* $\mathrm{GL}(m, D)$*, V: endo-classes*, Documenta Math. **17** (2012), 23–77.

[2] C. Bushnell et G. Henniart, *The essentially tame Jacquet-Langlands correspondence for inner forms of* $\mathrm{GL}(n)$, Pure Appl. Math. Q. **7** (2011), n°3, 469–538.

[3] ———, *Counting the discrete series for* $\mathrm{GL}(n)$, Bull. Lond. Math. Soc. **39** (2007), n°1, 133–137.

[4] J.-F. Dat, *Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo* ℓ, Proc. London Math. Soc. **104** (2012), 690–727.

[5] R. Dipper, *On the decomposition numbers of the finite general linear groups. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), n°1, 123–133.

[6] R. Dipper et G. James, *Identification of the irreducible modular representations of* $\mathrm{GL}_n(q)$, J. Algebra **104** (1986), n°2, 266–288.

[7] J. A. Green, *The characters of the finite general linear groups*, J. Algebra **184** (1996), n°3, 839–851.

[8] G. James, *The irreducible representations of the finite general linear groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **52** (1986), n°2, 236–268.

[9] A. Mínguez et V. Sécherre, *Représentations lisses modulo* ℓ *de* $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, Duke Math. J. **163** (2014), 795–887.

[10] ———, *Types modulo* ℓ *pour les formes intérieures de* GL_n *sur un corps local non archimédien.* Avec un appendice par V. Sécherre et S. Stevens. A paraître dans Proc. Lond. Math. Soc. (2015).

[11] V. Sécherre et S. Stevens, *Smooth representations of* $\mathrm{GL}(m, D)$*, VI: semisimple types*, Int. Math. Res. Not. **13** (2012), 2994–3039.

[12] M.-F. Vignéras, *Représentations* l*-modulaires d'un groupe réductif* p*-adique avec* $l \neq p$, Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[13] ———, *Correspondance de Langlands semi-simple pour* $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ *modulo* $\ell \neq p$, Invent. Math **144** (2001), 177–223.

[14] ———, *On highest Whittaker models and integral structures*, Contributions to Automorphic forms, Geometry and Number theory: Shalikafest 2002, John Hopkins Univ. Press, 2004, 773–801.

Vincent Sécherre, Université de Versailles St-Quentin-en-Yvelines, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex, France • *E-mail :* `vincent.secherre@math.uvsq.fr`