



**HAL**  
open science

# LES SECTIONS DE DIRAC ET L'ESPACE-TEMPS EINSTEIN

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. LES SECTIONS DE DIRAC ET L'ESPACE-TEMPS EINSTEIN. [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2015. hal-01163505

**HAL Id: hal-01163505**

**<https://hal.science/hal-01163505>**

Submitted on 13 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# LES SECTIONS DE DIRAC ET L'ESPACE-TEMPS EINSTEIN

JEAN LOUIS JONOT

ABSTRACT. "Peut-on donner une représentation géométrique de l'univers  $\Omega$  pour laquelle les équations relativistes d'Einstein et de Dirac soient unifiées?" C'est une question très difficile. On se pose une question plus accessible: "Peut-on décrire les lois relativistes et les lois quantiques avec un unique opérateur?".

Dans cet article, on propose de modéliser l'univers avec un opérateur défini par une section de Dirac hermitienne  $\gamma$ . Le tenseur de Poisson  $\gamma^{\mu\nu}$  défini par cette section permet de construire un  $(2,0)$ -tenseur métrique  $\gamma_{\mu\nu}$  en dehors des "singularités de l'univers"  $\Omega$ . La métrique définie par le tenseur de Poisson est relativiste, c'est-à-dire, si  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita de  $\gamma_{\mu\nu}$  et  $R_{\mu\nu}$ ,  $R$  sont respectivement le tenseur de Ricci de  $\nabla$  et la courbure scalaire alors

$$R_{\mu\nu} - \mathcal{K}T_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2}R + \Lambda\right)\gamma_{\mu\nu}$$

où  $\mathcal{K}$  est la constante d'Einstein,  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion et  $\Lambda$  est la constante cosmologique. A l'aide de ces opérateurs, on décrit l'équation relativiste de Dirac comme une équation d'état de rang 1 sur les champs complexes,

$$\gamma \otimes \tilde{\nabla}(Z) = -i\lambda Z,$$

et on généralise l'équation de Schrödinger aux champs complexes, cette équation est une équation d'évolution de rang 2, le long d'un champ chronologique  $T$ ,

$$\gamma_2 \otimes R^{\tilde{\nabla}}(Z) = -i\lambda \mathcal{L}_T Z.$$

Les champs en cordes permettent de définir la notion de masse d'une particule et l'équation d'évolution de l'onde associée à la corde est décrite par l'équation de Schrödinger classique

$$i\hbar\partial_T\psi = -\frac{\hbar}{2\mathcal{M}_\zeta}\Delta\psi + \mathcal{V}\psi,$$

$\mathcal{M}_\zeta$  représente la masse de la corde  $\zeta$  associée au champ en corde,  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami défini localement par le tenseur de Poisson  $\gamma^{\mu\nu}$ .

L'ensemble des singularités de l'univers sont les parties de  $\Omega$  où la métrique n'existe plus, on modélise cet ensemble comme une réunion finie disjointes de sous-variétés de dimension 0, 1, 2 ou 3. En ces singularités, certaines dimensions d'espace et le temps peuvent disparaître suivant la géométrie de la singularité.

## 1. EQUATION DE DIRAC ET SECTION DE DIRAC

Dans ce qui suit  $\xi_\Omega = (T\Omega, \pi, \Omega, \mathbb{R}^4)$  est le fibré tangent de  $\Omega$ . Le complexifié du fibré tangent est

$$\xi_\Omega \otimes \mathbb{C} = (T\Omega \otimes \mathbb{C}, \pi, \Omega, \mathbb{C}^4)$$

dont la base est l'univers  $\Omega$  qui est une  $C^\infty$ -variété de dimension quatre [4]. On note  $\Lambda^n\Omega = \wedge^n T^*\Omega$ , le fibré des  $n$ -formes différentielles sur  $\Omega$ . L'espace des  $(p, q)$ -tenseurs,  $p$  fois covariant et  $q$  fois contravariant, est noté

$$T^{p,q}\Omega = (\otimes^p T^*\Omega) \otimes (\otimes^q T\Omega).$$

Les sections de  $\xi_\Omega$  sont les champs réels et les sections de  $\xi_\Omega \otimes \mathbb{C}$  sont les champs complexes. Tout champ complexe  $Z$  s'écrit de façon unique

$$Z = X + iY,$$

$X$  est la partie réelle du champ et  $Y$  sa partie imaginaire, on pose

$$X = \operatorname{Re}(Z) \text{ et } Y = \operatorname{Im}(Z),$$

le champ conjugué est noté

$$\bar{Z} = X - iY.$$

Une section  $\gamma$  du fibré  $\operatorname{End}(\Lambda^1 \Omega \otimes T\Omega \otimes \mathbb{C}, T\Omega \otimes \mathbb{C})$  est une section de Dirac locale du fibré  $\xi_\Omega \otimes \mathbb{C}$ . Les endomorphismes de Dirac sont définis par,

$$\gamma^d(Z) = \gamma(d \otimes Z), d \in \Lambda^1 \Omega \text{ et } Z \in \Gamma(\xi_\Omega \otimes \mathbb{C}).$$

L'endomorphisme conjugué de  $\gamma^d$  est  $\bar{\gamma}^d$ , il est défini par

$$\bar{\gamma}^d(Z) = \overline{\gamma^d(\bar{Z})}.$$

Pour une carte  $U$  de trivialisations de  $\xi_\Omega$ , on note  $\{\partial_\nu\}$ , le local frame associé à cette carte alors  $\{\partial_\nu\}$  est le local frame sur  $U$  de  $\xi_\Omega \otimes \mathbb{C}$ . Tout champ complexe  $Z$  s'écrit

$$Z = Z^\nu \partial_\nu, Z^\nu \in C^\infty(U, \mathbb{C}).$$

On note  $\{d^\mu\}$  le local frame dual de  $\{\partial_\nu\}$  et  $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$ . Si la matrice de  $\gamma^\mu$  dans le local frame  $\{\partial_\nu\}$  est hermitienne [17] pour tous les  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , on dit que  $\gamma$  est une section hermitienne pour la carte  $U$ . Cette notion est indépendante de la carte choisie. Sous cette hypothèse, le tenseur de Poisson

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{8} \operatorname{Trace}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = \frac{1}{4} \operatorname{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$$

est un tenseur symétrique réel [1], [2]. On définit la  $C^\infty$ -application déterminant

$$\det \gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \det \gamma(\omega) = \det(\gamma_\nu^\mu(\omega)), \gamma_\nu^\mu(\omega) = \gamma_{\mu\nu}(\omega), \omega \in U \quad (1.1)$$

cette définition est indépendante du choix de la carte  $U$ . Les singularités de l'univers  $\Omega$  sont définies par

$$\mathcal{S} = \{\omega \in \Omega : \det \gamma(\omega) = 0\},$$

si  $\Omega \setminus \mathcal{S}$  est connexe, le tenseur de Poisson définit une métrique locale sur  $U \subset \Omega \setminus \mathcal{S}$  par

$$g(\partial_\mu, \partial_\nu) = \gamma_{\mu\nu},$$

cette métrique permet de définir une connexion  $\nabla$  sur le fibré  $\xi_\Omega$  qui est la connexion de Lévi-Civita de  $g$ . On note  $R_{\mu\nu}$ , le tenseur de Ricci et  $R$  la courbure scalaire attaché à cette connexion. On fait l'hypothèse sur la section de Dirac  $\gamma$ , d'être relativiste, c'est-à-dire que la métrique  $g$  vérifie l'équation relativiste d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \mathcal{K}T_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2}R + \Lambda\right) \gamma_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

où  $\Lambda$  est la constante cosmologique et  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion.

L'équation relativiste de Dirac [6] est définie par

$$\gamma \otimes \tilde{\nabla}(Z) = -i\lambda Z, \quad (1.3)$$

$\lambda$  est une densité de masse dans l'univers  $\Omega$ ,  $\tilde{\nabla}$  est la connexion complexifiée de  $\nabla$

$$\tilde{\nabla}_T(Z) = \nabla_T(X) + i\nabla_T(Y), Z = X + iY,$$

$\gamma \otimes \tilde{\nabla}$  est l'opérateur de Dirac-Einstein de rang 1 défini par

$$\left[ \gamma \otimes \tilde{\nabla} \right] (\omega) (u) = \left[ \gamma (\omega) \circ \tilde{\nabla} (\omega) \right] (u), \forall u \in T_\omega \Omega \otimes \mathbb{C}.$$

Si on écrit cette équation dans le local frame  $\{\partial_\nu\}$  on a si

$$Z = X + iY = Z^\alpha \partial_\alpha = (X^\alpha + iY^\alpha) \partial_\alpha,$$

$$\tilde{\nabla} Z = \tilde{\nabla} (Z^\alpha \partial_\alpha) = dZ^\alpha \otimes \partial_\alpha + Z^\alpha \nabla e_\alpha = (dX^\alpha + idY^\alpha) \otimes \partial_\alpha + Z^\alpha \Gamma_{\alpha j}^\beta d^j \otimes \partial_\beta,$$

Sur  $U$  la connexion peut s'écrire

$$\tilde{\nabla} \partial_\alpha = \nabla \partial_\alpha = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes \partial_\beta,$$

avec des  $C^\infty$  fonctions  $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$  définies sur  $U$  à valeurs réelles,  $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$  sont les symboles de Christoffel associés à la connexion  $\nabla$  et

$$dZ^\alpha = \partial_\nu Z^\alpha d^\nu = \partial_\nu X^\alpha d^\nu + i\partial_\nu Y^\alpha d^\nu,$$

$$\tilde{\nabla} Z = \partial_\nu Z^\alpha d^\nu \otimes \partial_\alpha + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes \partial_\beta = (\partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \otimes \partial_\beta.$$

La section de Dirac  $\gamma$  de  $\xi_\Omega \otimes \mathbb{C}$  a pour représentation

$$\gamma (d^\nu \otimes \partial_\beta) = \gamma_\beta^{\nu\sigma} e_\sigma, \gamma_\beta^{\nu\sigma} \in C^\infty (U, \mathbb{C}),$$

$\gamma^\nu$  a pour représentation matricielle  $(\gamma^\nu)_\beta^\alpha = \gamma_\beta^{\nu\alpha}$  et

$$\gamma \otimes \tilde{\nabla} (Z) = \gamma ((\partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \otimes \partial_\beta) = (\partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \gamma (d^\nu \otimes \partial_\beta)$$

$$\gamma \otimes \tilde{\nabla} (Z) = \gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \partial_\sigma$$

L'équation 1.3 s'écrit localement,

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) = -i\lambda Z^\sigma \text{ pour tout } \sigma, 0 \leq \sigma \leq 3,$$

les matrices de Dirac  $\gamma^\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq 3$ , sont des matrices carrées d'ordre 4 dont les coefficients sont des applications  $C^\infty$  sur  $U$ , à valeurs complexes [6], [15]. On note

$$(D_\nu Z)^\beta = \partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta,$$

$D_\nu$  est la section locale de  $\text{End} (\xi_\Omega \otimes \mathbb{C})$  définie par,

$$D_\nu = L_\nu + \Gamma_\nu,$$

où  $\Gamma_\nu$  est la section locale de  $\text{End} (\xi_\Omega \otimes \mathbb{C})$  dont la matrice, dans le local frame  $\{\partial_\nu\}$ , est  $(\Gamma_\nu)_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$  et  $L_\nu$  est l'endomorphisme de Lie le long du champ  $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  défini par,  $L_\nu Z = (\partial_\nu Z^\alpha) \partial_\alpha$ ,  $\partial_\nu Z^\alpha = \partial_\nu X^\alpha + i\partial_\nu Y^\alpha$

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (D_\nu Z)^\beta = -i\lambda Z^\sigma,$$

l'équation précédente s'écrit

$$\gamma^\nu \circ D_\nu (Z) = -i\lambda Z.$$

**Theorem 1.** *L'opérateur  $\gamma \otimes \tilde{\nabla}$  est*

$$\gamma \otimes \tilde{\nabla} = \gamma^\nu D_\nu.$$

**Axiom 1.** *La densité de masse est proportionnelle à la valeur absolue de la courbure scalaire*

$$\lambda = \kappa |R|.$$

## 2. LES CHAMPS EN CORDE

Le champ complexe

$$Z = X + iY$$

est un champ en corde si

$$\dim(\text{Vect}\{X, Y\}) = 2$$

et

$$[X, Y] \in \text{Vect}\{X, Y\}.$$

Ces hypothèses permettent de définir un feuilletage de l'univers  $\Omega$ , de dimension 2. Chaque feuille représente une trajectoire possible d'une corde, dite surface d'univers, la corde est une feuille  $\varsigma$  du feuilletage de  $S$ , définie par  $Y$ . Sous les hypothèses précédentes, il existe deux fonctions réelles  $\alpha$  et  $\beta$ , de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$  telles que

$$[X, Y] = \alpha X + \beta Y.$$

La fonction d'onde associée à un champ en corde est une fonction définie sur  $\Omega$  à valeurs complexes,

$$\psi = \alpha + i\beta,$$

sur  $\Omega \setminus \mathcal{S}$ , la métrique  $\gamma_{\mu\nu}$  induit une forme volume  $\eta$ , l'onde normalisée associée à  $Z$  est

$$\varphi = \frac{\psi}{\|\psi\|}$$

où

$$\|\psi\|^2 = \int_{\Omega} \bar{\psi}\psi\eta < \infty.$$

**Remark 1.**  $\|\psi\| = 0$  si et seulement si  $\psi = 0$ . La probabilité d'avoir la particule associée au champ  $Z$ , dans une partie borélienne  $V \subset \Omega$  est

$$\int_V \bar{\varphi}\varphi\eta.$$

$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$  où  $\mathcal{L}_X$  est la dérivée de Lie étendue aux champs réels.

Soit  $S$  une surface d'univers et  $\text{in} : S \rightarrow \Omega$ , l'inclusion de  $S$  dans  $\Omega$ .

$$T_\omega \text{in} : T_\omega S \rightarrow T_\omega \Omega$$

est un isomorphisme de  $T_\omega S$  sur  $\text{Vect}\{X(\omega), Y(\omega)\}$ . On définit les deux 1-formes  $\xi$  et  $\zeta$  sur  $S$  par  $\xi(\omega)(u) = \alpha$  et  $\zeta(\omega)(u) = \beta$  pour

$$T_\omega \text{in}(u) = \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega) \in T_\omega \text{in}(T_\omega S).$$

Ces deux 1-formes définissent la 2-forme  $\sigma = \xi \wedge \zeta$  sur  $S$ . On prend pour orientation de  $S$ , l'orientation définie par  $\sigma$ .

**Definition 1.** La tension de la feuille  $S$  est

$$\mathcal{T}(S) = \int_S \sigma, \tag{2.1}$$

La tension est une quantité positive par le choix de l'orientation de  $S$ . La corde ne peut pas occuper toutes les surfaces d'univers, l'hypothèse que l'on fait est que les trajectoires possibles  $S$  sont celles qui rendent minimale  $\mathcal{T}(S)$ . Il peut y avoir une infinité de surface d'univers pour lesquelles  $\mathcal{T}(S)$  est minimale. La trajectoire d'une corde définie par un champ en corde est une surface d'univers pour ce champ.

**Definition 2.** *Un temps relatif sur  $S$  est une  $C^\infty$ -application  $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}$  pour laquelle  $\tau|_\varsigma$  est constante pour toutes les cordes de  $S$ .*

La condition nécessaire et suffisante pour que  $\tau$  soit un temps relatif est que pour tout  $\omega \in S$ ,

$$d_\omega \tau (Y(\omega)) = 0,$$

ces égalités sont équivalentes à l'existence d'une  $C^\infty$ -application  $\chi$  de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$d\tau = \chi\xi.$$

Le temps relatif est orienté positivement si  $\chi > 0$  sur  $S \setminus \{\chi = 0\}$ . Si  $\tau$  est orienté négativement,  $-\tau$  est orienté positivement. Si  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont deux temps relatifs sur  $S$  alors  $\tau_2 - \tau_1$  est un temps relatif sur  $S$ . Un temps relatif  $\tau$  est un temps propre si  $\chi = 1$ . Si  $S \setminus \{\chi = 0\}$  n'est pas connexe, un temps relatif peut être positif sur une composante connexe et négatif sur l'autre. Dans la suite un temps relatif est tel que  $\{\chi = 0\}$  est vide ou une sous-variété de dimension 0. Pour ce qui suit, on peut consulter [3], [5], [7], [11], [12] et [18].

**Theorem 2.** *Il y a équivalence entre la 1-forme différentielle  $\xi$  est exacte et  $S$  est muni d'un temps propre, tous les temps propres  $\tau$  de  $S$  sont les primitives de  $\xi$ . Si  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont deux temps propres sur  $S$  alors  $\tau_2 - \tau_1$  est constante sur  $S$ .*

*Proof.* La fonction  $\chi$  est définie par  $\chi(\omega) = d_\omega \tau (Y(\omega))$ . Si  $\chi = 1$ ,  $d\tau = \xi$ .  $\square$

**Definition 3.** *Le champ en corde  $Z$  est exacte sur la surface d'univers  $S$  si la 1-forme  $\xi$  est exacte.*

Si la fonction  $\lambda$  représente la densité de masse dans l'univers définie précédemment, la masse de la corde  $\gamma$  est donnée par

$$\mathcal{M}_\varsigma = \int_\varsigma \lambda \mu = \int_\varsigma \lambda \iota_X \sigma, \quad (2.2)$$

avec  $\mu = \iota_Y \sigma$  qui est une forme volume sur  $\varsigma$ . Et sa tension est définie par

$$\mathcal{T}_\varsigma = \int_\varsigma \mu = \int_\varsigma \iota_X \sigma. \quad (2.3)$$

**Remark 2.**  $\xi = -\iota_Y \sigma$ .

L'énergie est proportionnelle à la masse de la corde avec un coefficient de proportionnalité positif, noté  $c^2$ ,

$$E_\varsigma = \mathcal{M}_\varsigma c^2.$$

Dans ce qui suit  $Z$  est un champ en corde **exacte** sur  $S$ . Si on impose que l'énergie de chaque corde est invariante sur  $S$  et vaut  $E_S$ , alors l'énergie d'une particule au temps  $t$  pour le temps propre  $\tau$  est

$$E_t = k(t) E_S$$

où  $k(t)$  est le nombre de cordes composant cette particule. Si on passe d'un temps  $t$  à  $t + \Delta t$ , la variation d'énergie est

$$\Delta E = (k(t + \Delta t) - k(t)) E_S = \Delta k(t) E_S.$$

Si on change de temps propre on a

$$\Delta E = \Delta k(t + t_0) E_S,$$

où la constante  $t_0$  est la différence entre le nouveau et l'ancien temps propre. On a quantifié l'énergie en imposant une énergie constante sur chaque corde située sur la surface d'univers. Si on utilise la formule de Planck

$$E_S = h\nu$$

où  $\nu$  est la fréquence d'oscillation de la corde, alors les cordes ont même fréquence d'oscillation sur  $S$ . Les équations d'Einstein et Plank,  $E_\zeta = \mathcal{M}_\zeta c^2$  et  $E_\zeta = h\nu_\zeta$ , permettent d'écrire

$$\mathcal{E}_\zeta = \mathcal{M}_\zeta T_\zeta = \frac{h}{c^2} \quad (2.4)$$

qui est invariant, où  $h$  est la constante de Planck et  $T_\zeta = \frac{1}{\nu_\zeta}$  est la période d'oscillation de la corde  $\zeta$ .

On se fixe une métrique riemannienne  $g$  canonique, sur  $S$  par

$$g(X, X) = g(Y, Y) = 1 \text{ et } g(X, Y) = 0.$$

Avec cette métrique pour un temps propre,  $X = \text{grad } \tau$ . L'excitation globale de la surface d'univers  $S$  est une section  $\mathcal{E}$  de  $S$  à valeurs dans  $\text{Isom}_+(TS)$  qui à chaque événement  $\omega \in S$  associe une isométrie de  $(T_\omega S, g(\omega))$  conservant l'orientation. La restriction de cette section à une corde  $\zeta$  est l'excitation de cette corde sur  $S$ . On pose  $\mathcal{A}_\omega$  la matrice de  $\mathcal{E}(\omega)$  dans la base  $\{X(\omega), Y(\omega)\}$ , il existe une  $C^\infty$ -application  $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$\mathcal{A}_\omega = \begin{pmatrix} \cos \theta(\omega) & -\sin \theta(\omega) \\ \sin \theta(\omega) & \cos \theta(\omega) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Si  $\zeta$  est diffeomorphe à  $\mathbb{S}^1$  ou  $I = [0, 1]$ , on prend un paramétrage par longueur d'arc  $\varrho : [0, l] \rightarrow \zeta$ , l'application  $\theta \circ \varrho : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  est prolongeable par périodicité sur  $\mathbb{R}$ , la période  $T_\zeta$  de cette fonction est la période d'excitation de la corde  $\zeta$ . La longueur de la corde  $l$  peut s'identifier à la tension  $\mathcal{T}_\zeta$  de la corde et

$$\mathcal{T}_\zeta = kT_\zeta, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

**Proposition 1.** *La tension de la corde  $\zeta$  est un multiple entier de la période  $T_\zeta$ .*

**Remark 3.** *La fréquence d'excitation de  $\zeta$  est  $\nu_\zeta = \frac{1}{T_\zeta}$ .*

Pour comprendre la notion de fréquence d'excitation d'une corde  $\zeta$ , on se place dans un voisinage de cette corde dans lequel il existe un temps propre  $\tau$ . On choisit l'unique temps propre pour lequel  $\zeta = \tau^{-1}(t_0)$  et on pose  $\zeta_0 = \zeta$ . Ensuite, on fait varier le temps propre de  $t_0$  à  $t_1$ . Si on pense  $\zeta_0$  comme une corde ouverte ou fermée qui évolue, sur la surface  $S$ , de  $\zeta_0 = \tau^{-1}(t_0)$  à  $\zeta_1 = \tau^{-1}(t_1)$  et on se fixe un événement  $\omega_{t_0}$  sur  $\zeta_0$ , cet événement décrit une trajectoire de  $\omega_{t_0}$  à  $\omega_{t_1} \in \zeta_1$ . On pose  $\omega_t \in \zeta_t = \tau^{-1}(t)$  un paramétrage de cette courbe. Le transport parallèle le long de cette courbe permet de définir une isométrie de  $h_{\omega_t, \omega_{t_0}} : T_{\omega_{t_0}} S \rightarrow T_{\omega_t} S$  pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ , qui préserve l'orientation. On a

$$h_{\omega_{t_1}, \omega_{t_0}} = h_{\omega_{t_1}, \omega_t} \circ h_{\omega_t, \omega_{t_0}}.$$

L'événement marqué  $\omega$  sur  $\zeta_0 = \tau^{-1}(t_0)$  suit la trajectoire  $\omega_t$  pour laquelle

$$\mathcal{E}(\omega_{t_1}) = h_{\omega_{t_1}, \omega_{t_0}} \circ \mathcal{E}(\omega_0) \circ h_{\omega_{t_1}, \omega_{t_0}}^{-1}, \quad \forall t_0, t_1.$$

Si on se place sur la corde, il y a une excitation donnée en chaque événement  $\omega$  par  $\mathcal{E}(\omega)$  et les déplacements suivant un temps propre, de chaque événement de la corde, vérifient 2.4. On en déduit la relation de quantification d'une corde,

$$\mathcal{M}_\zeta \mathcal{T}_\zeta = k \frac{\hbar}{c^2}, k \in \mathbb{N}^*. \quad (2.6)$$

On peut fixer l'excitation sur la surface d'univers  $S$ , en prenant pour fonction  $\theta$  dans l'équation 2.5, la fonction qui vérifie  $\psi = \sqrt{a^2 + b^2} \exp(i\theta)$  où  $\psi$  est l'onde associée au champ en corde  $Z$  et est défini par  $\psi(\omega) = \alpha(\omega) + i\beta(\omega)$  avec

$$[X, Y] = \alpha X + \beta Y.$$

Si la surface d'univers est muni d'un temps relatif  $\tau$  qui n'est plus propre, on prend un temps relatif  $\tau$  qui vérifie  $d\tau = \chi\xi$ , pour lequel  $\{\chi = 0\}$  est discret et positif sur  $S \setminus \{\chi = 0\}$ . Les points où  $\chi = 0$  correspondent aux points de séparation des cordes ou au regroupement de deux cordes. Sur  $S \setminus \{\chi = 0\}$ , si on transforme le champ  $Z$  en

$$Z_\chi = \chi X + iY$$

et si on se restreint à la surface  $S_\chi = S \setminus \{Z_\chi = 0\}$ , alors  $\tau$  est un temps propre pour  $Z_\chi$  qui est un champ défini sur  $S$ . Les 1-formes différentielles  $\xi, \zeta$  se transforment en  $\chi\xi$  et  $\zeta$ , donc  $\mathcal{M}_\zeta$  et  $\mathcal{T}_\zeta$  sont invariants et la tension de la surface  $S_\chi$  est

$$\mathcal{T}(S_\chi) = \int_{S_\chi} \chi \sigma,$$

la fonction d'onde  $\psi_\chi$  associée au champ  $Z_\chi$  est  $\psi_\chi = \chi\psi = \chi\sqrt{a^2 + b^2} \exp(i\theta)$ , ainsi  $\theta_\chi = \theta$  sur  $S$ . On obtient encore une formule de quantification identique à celle donnée en 2.6.

Dans le cas le plus général, on découpe la surface  $S \setminus \{Z_\chi = 0\}$ , en surfaces ouvertes connexes et on répète le procédé sur chaque composante connexe obtenue. Les événements de  $\{Z_\chi = 0\}$  sont les points où se collent et se décollent les cordes entre elles qui évoluent dans la surface d'univers  $S$ .

### 3. LES CHAMPS CHRONOLOGIQUES SUR LES SECTIONS DE DIRAC-LORENTZ

Une section de Dirac est une section de Dirac-Lorentz si le tenseur de Poisson définit une métrique en dehors des singularités  $\mathcal{S}$  de  $\Omega$ . On note encore  $\Omega$ , l'univers sans singularité  $\Omega \setminus \mathcal{S}$ . Dans tout ce qui suit la métrique induite par le tenseur de Poisson est notée  $g$ . On suppose que  $\Omega$  est une variété Lorentzienne pour la métrique  $g$ , connexe, orientée en temps, c'est-à-dire, qu'il existe au moins un champ  $T : \Omega \rightarrow T\Omega$  de genre temps

$$\forall \omega \in \Omega, g(\omega)(T(\omega), T(\omega)) < 0.$$

Pour l'espace-temps de Minkowski  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ ,

$$\eta = ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

et le champ  $T = \frac{\partial}{\partial t}$  donne l'orientation du temps. Soit  $T_\omega = \mathbb{R}T(\omega)$ , le sous-espace vectoriel de dimension 1, engendré par le vecteur  $T(\omega) \in T_\omega(\Omega)$ . Ce sous-espace est non isotrope pour la forme bilinéaire  $g(\omega)$  sur  $T_\omega(\Omega)$  et scinde  $T_\omega(\Omega)$  en une somme orthogonale unique

$$T_\omega(\Omega) = T_\omega \oplus E_\omega,$$



où  $E_\omega = T_\omega^\perp$ . Les restrictions  $g(\omega)|_{E_\omega}$  et  $-g(\omega)|_{T_\omega}$  sont définies positives. Tout champ  $X : \Omega \rightarrow T(\Omega)$  se décompose en  $X = X_E - tT$ , où  $t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une  $C^\infty$ -application,  $X_E$  est un champ espace, c'est-à-dire,  $X_E(\omega) \in E_\omega$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . En particulier,

$$|X_E(\omega)|_g^2 = g(\omega)(X_E(\omega), X_E(\omega)) > 0$$

si  $X_E(\omega) \neq o_{T_\omega(\Omega)}$ .

**Definition 4.** Un champ  $X$  est orienté vers le  $T$ -futur si  $X = X_E - tT$ , avec  $t > 0$  et vers le  $T$ -passé si  $t < 0$ .

Un champ  $T$  est stable en  $\omega \in \Omega$  si il existe une carte  $U$  en  $\omega$  telle que si

$$T = T^\nu \partial_\nu$$

pour le local frame associé à la carte  $U$  on ait

$$\partial_k(T^j g_{ij}) = \partial_i(T^j g_{kj}), \forall i, \forall k$$

où

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j).$$

$T$  est stable sur l'ouvert  $W \subset \Omega$  si  $T$  est stable en chaque point  $\omega \in \Omega$  [10].

La partie espace de l'espace tangent est  $T^E\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times E_\omega$  et la partie chronologique est  $T^T\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times T_\omega$ .

**Lemma 1.** Les triplets

$$\begin{array}{ccc} T^E\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times E_\omega & & T^T\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times T_\omega \\ \downarrow \pi_E & \text{et} & \downarrow \pi_T \\ \Omega & & \Omega \end{array}$$

sont des fibrés. Le fibré chronologique est trivial et  $T\Omega$  est la somme de Whitney de ces deux fibrés,

$$T\Omega = T^E\Omega \oplus T^T\Omega.$$

$$T^E\Omega$$

*Proof.* Il suffit de montrer que  $\downarrow \pi$  est un fibré. Soit  $U$  un ouvert connexe de  $\Omega$

sur lequel  $TU$  est trivialisable. Il existe des champs de vecteurs  $A, B, C$  et  $D$  définis sur  $U$ , linéairement indépendants. On peut scinder chaque champ en sa partie espace et sa partie chronologique

$$A = A_E + aT, B = B_E + bT, C = C_E + cT \text{ et } D = D_E + dT$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $U$ . On cherche les champs orthogonaux à  $T$  pour la forme bilinéaire  $g$  qui sont linéairement indépendants. On pose

$$\Gamma = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D,$$

la condition  $g(\Gamma, T) = 0$  est équivalente à

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0.$$

Si

$$X = -bA + aB - dC + cD, Y = cA - dB - aC + bD, Z = -dA - cB + bC + aD$$

alors pour tout  $\omega \in U$ ,  $\text{Vect}\{X(\omega), Y(\omega), Z(\omega)\} = E_\omega = \mathbb{R}T(\omega)^\perp$  car

$$\det \begin{pmatrix} -b & c & -d & a \\ a & -d & -c & b \\ -d & -a & b & c \\ c & b & a & d \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 0 \iff a = b = c = d = 0.$$

L'homomorphisme  $\psi$

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(U) = \cup_{\omega \in U} E_\omega & \xrightarrow{\psi} & U \times \mathbb{R}^3 \\ \downarrow \pi_E & & \downarrow \text{Pr}_1 \\ U & \xrightarrow{\text{Id}_U} & U \end{array},$$

avec

$$\psi(\omega, v) = (\omega, x, y, z)$$

et

$$v = xX(\omega) + yY(\omega) + zZ(\omega)$$

est l'isomorphisme de trivialité locale.  $\square$

Remarquons que sur le fibré espace

$$\begin{array}{ccc} T^E\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times E_\omega & & \\ \downarrow \pi & & \\ \Omega & & \end{array},$$

on a sur chaque fibre  $E_\omega$  une forme bilinéaire définie positive, notée  $\tilde{g}$ , définie par  $\tilde{g}(X, Y) = g(X, Y)$  et la métrique de Lorentz  $g$ , permet de définir une métrique riemannienne locale  $\hat{g}$  de la façon suivante, si  $|X|^2 = |X_E|^2 - t^2$  alors  $\|X\|^2 = |X_E|^2 + t^2$  avec,

$$|X|^2 = g(X, X) \text{ et } \|X\|^2 = \hat{g}(X, X).$$

**Theorem 3.** *Si le champ chronologique  $T$  est stable sur  $\Omega$ , le système de Pfaff*

$$\omega \rightarrow \tau(\omega) = E_\omega$$

*est complètement intégrable, pour chaque  $\omega \in \Omega$ , la composante connexe de l'intégrale associée à ce système est une variété connexe dite feuille d'espace en  $\omega$  et notée  $\mathcal{E}_\omega$ .*

*Proof.* Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ , une carte de  $\Omega$ , on a:

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{d\varphi} & T\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

et si

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = x^\nu e_\nu$$

est le système canonique de coordonnées, le champ standard

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$$

est défini par

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(x) = (x, e_\nu)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^4$ , où  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ . Localement dans la carte  $(U, \varphi)$ , on définit le local frame

$$\partial_\nu : U \subset \Omega \rightarrow TU,$$

$$\partial_\nu(u) = (d_u \varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\varphi(u)) = (d_u \varphi)^{-1} ((\varphi(u), e_\nu)),$$

c'est-à-dire,

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{d\varphi} & T\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \\ \uparrow \partial_\nu & & \uparrow \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^4 \end{array},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \circ \varphi = d\varphi \circ \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Localement si  $X \in \Gamma^\infty(T\Omega)$  alors en coordonnées locales

$$X = X^i \partial_i \in T_u \Omega,$$

où  $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une  $C^\infty$ -application. Si  $Y = Y^i \partial_i$  alors  $[X, Y] = \chi^i \partial_i$  avec,

$$\chi^i = X^j (\partial_j Y^i) - Y^j (\partial_j X^i).$$

On note  $T = T^i \partial_i$ , le champ chronologique, il faut vérifier que si  $g(X, T) = 0$  et  $g(Y, T) = 0$  sur  $U$ , alors

$$g([X, Y], T) = 0$$

sur  $U$ .

On a  $g(X, T) = X^i T^j g_{ij} = 0$ , de même  $Y^i T^j g_{ij} = 0$  avec,  $g(\partial_i, \partial_j) = g_{ij}$ . On calcule

$$\begin{aligned} g([X, Y], T) &= \chi^i T^j g_{ij} = (X^k (\partial_k Y^j) - Y^k (\partial_k X^j)) T^j g_{ij} \\ &= X^k T^j g_{ij} (\partial_k Y^j) - Y^k T^j g_{ij} (\partial_k X^j), \end{aligned}$$

les conditions  $X^i T^j g_{ij} = 0$  et  $Y^i T^j g_{ij} = 0$  impliquent

$$\partial_k (X^i T^j g_{ij}) = 0 \text{ et } \partial_k (Y^i T^j g_{ij}) = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} g([X, Y], T) &= -X^k Y^i \partial_k (T^j g_{ij}) + Y^k X^i \partial_k (T^j g_{ij}) \\ &= X^k Y^i (-\partial_k (T^j g_{ij}) + \partial_i (T^j g_{kj})) = 0, \end{aligned}$$

puisque le champ  $T$  est stable. Donc,  $\tau$  est complètement intégrable, si  $\mathcal{E}_\omega$  est la composante connexe de l'intégrale de  $\tau$  contenant  $\omega$ ,  $\mathcal{E}_\omega$  est une sous-variété de dimension 3 de  $\Omega$  et  $\cup_{\omega \in \Omega} \mathcal{E}_\omega = \Omega$  [9],[10],[13] et [14].  $\square$

Si on admet l'existence d'un champ chronologique stable sur l'espace-temps  $\Omega$  alors deux feuilletages cohabitent, le premier est de codimension 1, c'est le feuilletage espace  $\mathcal{E}$  et l'autre est de codimension 3, c'est le feuilletage chronologique  $\mathcal{T}$ . Pour le feuilletage chronologique, il existe une famille maximale de submersions  $(U_i, \alpha_i)$ ,  $i \in I$  où les  $U_i$  sont des ouverts de  $\Omega$  et les  $\alpha_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  sont des submersions pour lesquelles,  $\cup_{i \in I} U_i = \Omega$  et si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , il existe un difféomorphisme  $\alpha_{ij}$  de  $\mathbb{R}^3$ , vérifiant  $\alpha_i = \alpha_{ij} \circ \alpha_j$ .

Les  $(U_i, \alpha_i)$  sont les cartes distinguées de  $\mathcal{T}$ , les  $\alpha_{ij}$  sont les changement de cartes et pour  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$  alors

$$\alpha_{ij} \circ \alpha_{jk} \circ \alpha_{ki} = \text{Id}.$$

On peut définir le fibré associé à l'aide des applications de transition

$$\omega \in U_i \cap U_j \subset \Omega \rightarrow D\alpha_{ij}(\omega) \in \text{Gl}(\mathbb{R}^3).$$

On a  $D\alpha_{ii}(\omega) = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ ,

$$D\alpha_{ji}(\omega) = (D\alpha_{ij})^{-1}(\omega)$$

et

$$D\alpha_{ik}(\omega) = D\alpha_{ij}(\omega) \circ D\alpha_{jk}(\omega).$$

Le fibré obtenu est noté

$$\begin{array}{c} \mathcal{T}\Omega \\ \downarrow \pi_{\mathcal{T}} \\ \Omega \end{array},$$

est un fibré vectoriel de fibre  $\mathbb{R}^3$  et dont les feuilles sont  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{S}^1$ . On opère de façon identique avec le feuilletage espace  $\mathcal{E}$ . Les cartes distinguées sont  $(V_j, \beta_j)$ ,  $j \in J$  avec les  $\beta_j : V_j \rightarrow \mathbb{R}$  sont des submersions pour lesquelles,  $\cup_{i \in J} V_j = \Omega$ , si  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ , il existe un difféomorphisme

$$\beta_{ij} : \beta_j(V_i \cap V_j) \subset \mathbb{R} \rightarrow \beta_i(V_i \cap V_j),$$

vérifiant  $\beta_i = \beta_{ij} \circ \beta_j$ , avec la relation des cocycles:  $\beta_{ij} \circ \beta_{jk} \circ \beta_{ki} = \text{Id}$ .

Les applications de transition pour ce fibré vectoriel sont

$$\omega \in V_i \cap V_j \subset \Omega \rightarrow D\beta_{ij}(\omega) \in \mathbb{R}^{*+} \subset \text{Gl}(\mathbb{R}),$$

on le note

$$\begin{array}{c} \mathcal{E}\Omega \\ \downarrow \pi_{\mathcal{E}} \\ \Omega \end{array}.$$

Les feuilles sont des sous-variétés de dimension 3 et la fibre du fibré est  $\mathbb{R}$ . C'est une autre présentation du fibré espace et du fibré chronologique [16].

**Proposition 2.** *Si  $T$  est stable les deux représentations des fibrés espaces et chronologiques sont équivalentes, c'est-à-dire,*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}\Omega & T^T\Omega & \mathcal{E}\Omega & T^E\Omega \\ \downarrow \pi_{\mathcal{T}} & = & \downarrow \pi & \text{et} & \downarrow \pi_{\mathcal{E}} & = & \downarrow \pi \\ \Omega & & \Omega & & \Omega & & \Omega \end{array}.$$

La notion de changement local de coordonnées entre deux espace-temps définis par les champs chronologiques  $T$  et  $S$  est la donnée d'une section  $\theta$ , définie sur un ouvert connexe  $U \subseteq \Omega$  du fibré

$$\text{Hom}(T\Omega) = \Lambda^1(\Omega) \otimes T\Omega$$

telle que

$$\theta \otimes T = S \text{ et } g(\theta \otimes X, \theta \otimes Y) = g(X, Y)$$

sur  $U \subseteq \Omega$  pour tout champ  $X, Y$  de  $\Omega$ . On rappelle que pour un champ  $X$  de  $\Omega$  défini sur  $U$ ,

$$\theta \otimes X(\omega) = \theta(\omega)(X(\omega))$$

et l'application  $\omega \rightarrow \theta(\omega) : T_\omega\Omega \rightarrow T_\omega\Omega$  vérifiant  $\theta(\omega)$  est une  $g(\omega)$ -isométrie, on dit que  $\theta$  conserve la métrique de Lorentz.

**Theorem 4.** *Pour tous les champs chronologiques  $T$  et  $S$ , il existe un changement local de coordonnées.*

*Proof.* On prend un ouvert  $U$  sur lequel  $T\Omega$  est trivialisable, on se donne quatre champs  $A, B, C$  et  $D$  linéairement indépendants. On peut construire 3 champs  $X^1, Y^1$  et  $Z^1$  tels que

$$\text{Vect}(X^1, Y^1, Z^1) = (\mathbb{R}T)^\perp,$$

par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmit, on peut construire 3 champs  $X_1, Y_1, Z_1$  formant une base orthonormale de  $(\mathbb{R}T)^\perp$  pour la métrique riemannienne  $g_R$  qui est la restriction de  $g$  à  $(\mathbb{R}T)^\perp$ . On note  $\theta_1$ , l'application qui envoie  $X_1$  sur  $A$ ,  $Y_1$  sur  $B$ ,  $Z_1$  sur  $C$  et  $T$  sur  $D$ . De façon identique, on construit  $\theta_2$  l'application qui envoie  $X_2$  sur  $A$ ,  $Y_2$  sur  $B$ ,  $Z_2$  sur  $C$  et  $S$  sur  $D$ , alors l'application  $\theta = \theta_2^{-1} \circ \theta_1$  répond à la question car les procédés de construction sont  $C^\infty$ .  $\square$

#### 4. UNE GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER AUX CHAMPS COMPLEXES

On définit l'équation généralisée de Schrödinger comme une équation d'évolution de Dirac-Einstein de rang 2, l'évolution est décrite le long d'un champ chronologique  $T$ . L'univers  $\Omega$  est muni d'une section de Dirac-Lorentz. L'équation s'écrit

$$\gamma_2 \otimes R^{\tilde{\nabla}}(Z) = -i\lambda \mathcal{L}_T(Z), \quad (4.1)$$

où  $\gamma_2$  est l'extension de la section de Dirac au rang 2,  $R^{\tilde{\nabla}}$  est le tenseur de courbure  $R^{\tilde{\nabla}}$  complexifié de la connexion de Levi-Civita,  $\mathcal{L}_T$  est la dérivée de Lie étendue aux champs complexes et  $\lambda$  est la densité de masse dans l'univers.

**Remark 4.** *On a*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T(Z) &= [T, Z] \\ \tilde{\nabla}_1 &= d_1^{\tilde{\nabla}} \circ d_0^{\tilde{\nabla}} = R^{\tilde{\nabla}} \end{aligned}$$

et

$$\gamma_2((d^1 \wedge d^2) \otimes Z) = [\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}](Z) = \gamma^{d^1} \gamma^{d^2}(Z) - \gamma^{d^2} \gamma^{d^1}(Z).$$

Sur un ouvert de trivialisations  $U$  de  $\xi_\Omega \otimes \mathbb{C}$ , on a pour  $Z = Z^\alpha \partial_\alpha$ ,

$$\begin{aligned} R^{\tilde{\nabla}}(Z) &= d_1^{\tilde{\nabla}}(\tilde{\nabla}Z) = d_1^{\tilde{\nabla}}((\partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \otimes \partial_\beta) \\ &= d((\partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu) \otimes \partial_\beta - ((\partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu) \wedge \nabla \partial_\beta \\ &= (d(\partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \wedge d^\nu) \otimes \partial_\beta - ((\partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \wedge \Gamma_{\beta\sigma}^\tau d^\sigma) \otimes \partial_\tau \\ &= (d(\partial_\nu Z^j + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^j) \wedge d^\nu) \otimes \partial_j - ((\partial_\nu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \wedge \Gamma_{\beta\sigma}^j d^\sigma) \otimes \partial_j \\ &= \left( \partial_\mu (\partial_\nu Z^j + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^j) - (\partial_\mu Z^\beta + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\beta) \Gamma_{\beta\nu}^j \right) (d^\mu \wedge d^\nu) \otimes \partial_j \\ &= \left( \partial_\mu \partial_\nu Z^j + \left( \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right) Z^\alpha \right) (d^\mu \wedge d^\nu) \otimes \partial_j. \end{aligned}$$

La section de Dirac-Lorentz  $\gamma$  a pour représentation locale

$$\gamma(d^\nu \otimes \partial_\beta) = \gamma_{\beta}^{\nu\sigma} \partial_\sigma,$$

et si  $\gamma^\nu = \gamma^{d^\nu}$ , on pose  $(\gamma^\nu)_\beta^\alpha = \gamma_\beta^{\nu\alpha}$ , alors

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla (Z) = \left( \partial_\mu \partial_\nu Z^j + \left( \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right) Z^\alpha \right) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (\partial_j),$$

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (\partial_j) &= \gamma^\mu (\gamma_j^{\nu\sigma} \partial_\sigma) - \gamma^\nu (\gamma_j^{\mu\sigma} \partial_\sigma) \\ &= (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \partial_k \end{aligned}$$

et

$$\gamma_2 \otimes R^{\tilde{\nabla}} (Z^\alpha \partial_\alpha) = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \left( \partial_\mu \partial_\nu Z^j + \left( \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right) Z^\alpha \right) \partial_k.$$

Si on pose  $\Delta_j^k$  l'opérateur

$$\Delta_j^k = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \partial_\mu \partial_\nu,$$

et

$$\Upsilon_\alpha^k = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \left( \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right)$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma_2 \otimes R^{\tilde{\nabla}} (Z^\alpha \partial_\alpha) &= (\Delta_j^k Z^j + \Upsilon_\alpha^k Z^\alpha) \partial_k \\ &= (\Delta_\tau^k Z^\tau + \Upsilon_\tau^k Z^\tau) \partial_k \\ &= ((\Delta_\tau^k + \Upsilon_\tau^k) Z^\tau) \partial_k. \end{aligned}$$

Pour un champ chronologique  $T = T^\rho \partial_\rho$ , l'équation de Schrödinger s'écrit localement

$$(\Delta_\tau^k + \Upsilon_\tau^k) Z^\tau = -i\lambda (T^\rho \partial_\rho Z^k + T^\rho Z^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^k). \quad (4.2)$$

car

$$\begin{aligned} \nabla_T Z^\alpha \partial_\alpha &= T^\rho \nabla_{\partial_\rho} (Z^\alpha \partial_\alpha) \\ &= T^\rho (\partial_\rho Z^\alpha e_\alpha + Z^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\beta e_\beta) \\ &= (T^\rho \partial_\rho Z^k + T^\rho Z^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^k) e_k, \end{aligned}$$

**Theorem 5.** *L'opérateur  $H_2 = \gamma_2 \otimes R^{\tilde{\nabla}}$  a pour représentation locale*

$$H_2 (Z^\alpha \partial_\alpha) = ((\Delta_\tau^k + \Upsilon_\tau^k) Z^\tau) \partial_k \quad (4.3)$$

avec

$$\Delta_j^k = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \partial_\mu \partial_\nu, \quad (4.4)$$

et

$$\Upsilon_\alpha^k = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \left( \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right). \quad (4.5)$$

**Remark 5.** *Si la connexion est plate, l'équation d'évolution se ramène à l'équation triviale, ce système d'équations est*

$$T^\rho \partial_\rho Z^\tau = 0, \quad \forall \tau.$$

*L'opérateur  $\Delta_j^k$  correspond au Laplacien généralisé et  $\Upsilon_\alpha^k$  est l'opérateur décrivant l'énergie potentielle.*

On donne une généralisation de l'équation de Schrödinger aux ondes  $\psi$  définies par un champ en corde  $Z$

$$i\hbar\partial_T\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mathcal{M}_\zeta}\Delta\psi + \mathcal{V}\psi, \quad (4.6)$$

où  $\mathcal{V}$  est une fonction scalaire représentant l'énergie potentielle,  $\mathcal{M}_\zeta$  est la masse de la corde  $\zeta$  définie par le champ complexe  $Z$  en 2.2,  $\hbar$  est la constante de Planck,  $\partial_T$  est la dérivée de Lie le long du champ chronologique  $T$  et  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta\psi = \text{div}(\text{grad}\psi)$$

dans le local frame attaché à la carte, l'opérateur  $\Delta$  s'écrit

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{|\det(\gamma)|}}\partial_\nu\left(\sqrt{|\det(\gamma)|}\gamma^{\mu\nu}\partial_\nu\right),$$

où  $\gamma^{\mu\nu}$  est le tenseur de Poisson attaché à la section de Dirac et  $\det(\gamma)$  est l'application déterminant de  $\gamma$  définie en 1.1 qui est non nulle en dehors des singularités  $\mathcal{S}$  de l'univers.

**Remark 6.** *Le tenseur de Poisson*

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\text{Trace}(\gamma^\mu\gamma^\nu)$$

est un tenseur réel par choix des endomorphismes de Dirac, l'opérateur de Laplace-Beltrami est à coefficients formés de  $C^\infty$ -applications définies sur la carte à valeurs réelles.

L'opérateur de Laplace-Beltrami est défini localement, à partir du tenseur de Poisson.

## 5. LES CHAMPS RÉELS

Dans ce qui suit, les champs réels considérés sont des champs  $X$  tels que

$$Z = X + iT$$

est un champ en corde pour la chronologie  $T$ . L'équation de Dirac 1.3 s'écrit

$$\begin{cases} \gamma \otimes \nabla(X) = \lambda T \\ \gamma \otimes \nabla(T) = -\lambda X \end{cases}$$

et

$$(\gamma \otimes \nabla)^2(X) = -\lambda^2 X \quad \text{et} \quad (\gamma \otimes \nabla)^2(T) = -\lambda^2 T.$$

L'équation de Schrödinger 4.1

$$\begin{cases} \gamma_2 \otimes R^\nabla(X) = o \\ \gamma_2 \otimes R^\nabla(T) = -\lambda\mathcal{L}_T(X) = \lambda(\alpha X + \beta T) \end{cases},$$

et  $\psi = \alpha + i\beta$  vérifie

$$i\hbar\partial_T\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mathcal{M}_\zeta}\Delta\psi + \mathcal{V}\psi. \quad (5.1)$$

Pour les champs complexes vérifiant 1.3 et 4.1, si on dérive l'équation relativiste de Dirac le long d'un champ chronologique  $T$  on a

$$\mathcal{L}_T \circ (\gamma \otimes \tilde{\nabla})(Z) = -i(\partial_T\lambda)Z + \gamma_2 \otimes R^{\tilde{\nabla}}(Z),$$

$\lambda$  est la fonction de densité de masse dans l'univers  $\Omega$ . Pour un champ réel  $X$  tel que  $Z = X + iT$  est un champ en corde on a

$$\mathcal{L}_T \circ (\gamma \otimes \nabla) (X) = -i (\partial_T \lambda) X.$$

**Proposition 3.** *Les champs réels  $X$  pour lesquels*

$$Z = X + iT$$

*est un champ en corde et  $Z$  est solution des équations 1.3 et 4.1, vérifient les équations*

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla (X) = o \quad (5.2)$$

et

$$\mathcal{L}_T \circ (\gamma \otimes \nabla) (X) = -i (\partial_T \lambda) X. \quad (5.3)$$

Dans le local frame  $\{\partial_\nu\}$  avec  $\partial_T = \partial_0$ , l'équation 5.2 s'écrit

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_\tau^k \partial_{\mu\nu} X^\tau + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_j^k \left( \partial_\mu \Gamma_{\tau\nu}^j - \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right) X^\tau = 0, \forall k = 0, 1, 2, 3$$

et l'équation 5.3

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} \partial_{0\nu} X^\beta + ((\partial_0 \gamma_\eta^{\nu\sigma}) \partial_\nu + \gamma_\beta^{\nu\sigma} \Gamma_{\eta\nu}^\beta \partial_0) X^\eta + X^\alpha (\Gamma_{\alpha\nu}^\beta \partial_0 \gamma_\beta^{\nu\sigma} + \gamma_\beta^{\nu\sigma} \partial_0 \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) + i X^\sigma \partial_0 \lambda = 0, \forall \sigma = 0, 1, 2, 3.$$

## 6. LES SINGULARITÉS DE L'UNIVERS

Chaque composante connexe de l'ensemble des singularités  $\mathcal{S}$  de  $\Omega$  est une sous-variété fermée de Dimension 0, 1, 2 et 3. Le cas de la dimension 3 correspond à une composante connexe du bord  $\partial\Omega$ . On se restreint, donc, à des sous-variétés fermées connexes de dimension inférieure ou égale à deux. Pour ces dimensions,  $\Omega \setminus \mathcal{S}$  est connexe. On suppose que la section de Dirac-Lorentz permet de définir un champ chronologique stable sur  $\Omega \setminus \mathcal{S}$ , cette variété à deux feuilletages transversaux, notés  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{E}$  avec  $\text{codim } \mathcal{T} = 3$  et  $\text{codim } \mathcal{E} = 1$ . Il y a deux types de feuilles pour ces feuilletages, les feuilles  $F$  pour lesquelles  $\text{Adh}_\Omega F = F$  et les feuilles pour lesquelles  $\text{Adh}_\Omega F \neq F$ . Dans l'hypothèse où les singularités sont formées par un nombre fini d'événements de l'univers  $\Omega$ ,

$$\mathcal{S} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$$

alors  $\text{Adh}_\Omega F = F \cup \{\omega_j, j \in J\} = F_J$  où  $J$  est un sous-ensemble de  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Les points  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  sont les points de contact des feuilles aux singularités de l'univers  $\Omega$ . On note pour tout  $J \in \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, k\})$ ,  $\Omega_J = \cup_{\text{Adh}_\Omega F = F_J} F$ . La famille

$$\{\Omega_J : J \in \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, k\})\}$$

forment une partition de l'univers  $\Omega$ . Si le système de Pfaff  $\tau : \omega \rightarrow \tau(\omega) = E_\omega$ , est prolongeable aux singularités, c'est-à-dire, si  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_j} \tau(\omega) = E_j$  alors toute feuille  $F_\mathcal{E}$  telle que  $\text{Adh}_\Omega F_\mathcal{E} = F_\mathcal{E} \cup \{\omega_j, j \in J\} = F_{\mathcal{E}, J}$ , est une sous-variété et  $T_{\omega_j} F_{\mathcal{E}, J} = E_j$ . On a pincé les feuilles-espace aux singularités. On définit ainsi, un feuilletage pincé en un nombre fini de points.

De façon identique, pour les feuilles chronologiques, si le système de Pfaff  $\varsigma : \omega \rightarrow T_\omega$  est prolongeable aux singularités, c'est-à-dire,  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_j} \varsigma(\omega) = T_j$  alors toute feuille  $F_\mathcal{T}$  telle que  $\text{Adh}_\Omega F_\mathcal{T} = F_\mathcal{T} \cup \{\omega_j, j \in J\} = F_{\mathcal{T}, J}$  est une sous-variété homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$  ou à  $[0, 1]$  avec,  $T_{\omega_j} F_{\mathcal{T}, J} = T_j$ . Les lacets simples  $F_{\mathcal{T}, J}$  se coupent tangentiellement aux points  $\omega_j$  pour  $j \in J$ . Pour l'étude des feuilletages



et les structures géométriques singulières, on peut consulter [7], [8], [9], [13], [14] et [16].

**Remark 7.**  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_j} \varsigma(\omega) = T_j$  signifie qu'il existe des sections locales  $X_i^j$  dans une carte de  $\omega_j$  telles que  $\text{Vect} \left\{ X_i^j(\omega) \right\} = \varsigma(\omega)$  avec  $T_j = \text{Vect} \left\{ X_i^j(\omega_j) \right\}$ .

Si  $\varpi \in \text{Adh}_\Omega F_{\mathcal{E}}$ , un chemin  $\gamma$  de  $\Omega$ , tel que  $\gamma(0) = \varpi$  pour un point singulier  $\varpi \in \mathcal{S}$  et  $\gamma(t) \in F_{\mathcal{E}}$  pour  $t \neq 0$ , est un  $F_{\mathcal{E}}$ -chemin. On note  $T_\varpi F_{\mathcal{E}}$ , l'ensemble des vecteurs  $\gamma'(0)$ , lorsque  $\gamma$  parcourt l'ensemble des  $F_{\mathcal{E}}$ -chemins. En général,  $T_\varpi F_{\mathcal{E}}$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $T_\varpi \Omega$ . C'est un cône de sommet l'origine  $o_\varpi$  de  $T_\varpi \Omega$ . Ce n'est pas un cône de lumière en général car il n'y a pas de prolongement de la métrique de Lorentz aux singularités. Dans le cas où  $\mathcal{S}$  est formé de sous-variétés de dimension 0, 1 et 2 en nombre fini, on dit que le feuilletage est stable à l'infini si pour  $\varpi \in V$ , où  $V$  est une composante connexe de  $\mathcal{S}$ , on a  $T_\varpi F_{\mathcal{E}} = T_\varpi V$ . Si  $V = \{\varpi\}$ , il n'y a plus d'espace en ce point, si  $V = \mathbb{S}^1$  alors l'espace est à une dimension au plus sur les lacets singuliers. Si  $V = \mathbb{T}_g$ , une surface de genre  $g \geq 0$ , l'espace est de dimension au plus 2. A l'extérieur des singularités, les feuilles espace sont de dimension 3.

Pour le feuilletage temps, si  $V = \{\varpi\}$  il n'y a plus de temps en ce point, si  $V = \mathbb{S}^1$  ou  $\mathbb{T}_g$  alors le temps est à une dimension au plus. On peut imaginer une structure singulière ayant des sous-variétés de dimension  $n = 3$  ou  $n = 4$ . Si  $n = 3$ , on se restreint à la partie connexe de  $\Omega$ , privée des sous-variétés de dimension 3 à l'infini, où vit le champ chronologique de notre univers. Notre univers est l'intérieur d'une variété compacte à bord, dont le bord est une variété singulière. Si  $n = 4$ , notre univers est le bord singulier, d'un univers de dimension  $\geq 5$ . On a une construction en "gigogne" d'une succession d'univers de dimensions supérieures. Lorsque l'on impose que les dimensions de  $\mathcal{S}$  sont de dimensions inférieures ou égales à 2, cette construction en "gigogne" reste vraie sans que l'on soit dans l'obligation d'augmenter la dimension 4 des univers que l'on recolle par somme connexe sur les différentes structures singulières.

Pour mieux comprendre le phénomène de pincement, on suppose que l'univers  $\Omega$  est modelé par  $\mathbb{S}^4$ . On note  $p_\infty$ , la projection stéréographique de  $\mathbb{S}^4 \setminus \{\infty\}$  sur  $\mathbb{R}^4$ . Soit  $\rho$ , une  $C^\infty$ -application

$$\rho : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{+*},$$

tel que

$$\lim_{\hat{\eta}(t, X) \rightarrow +\infty} \rho(t, X) = 0, \text{ où } X = (x, y, z)$$

on prend pour métrique de Lorentz sur  $\mathbb{R}^4$ , la métrique

$$\xi = \rho \eta$$

où  $\eta$  est la métrique de Minkowski de  $\mathbb{R}^4$ . Le champ

$$T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \partial_0$$

est un champ chronologiquement stable, non normalisé

$$\xi(T, T) = -\rho < 0$$

$$\partial_k (T^j \varsigma_{ij}) = \partial_k (\eta_{i0}) = 0 = \partial_i (\eta_{k0}) = \partial_i (T^j \varsigma_{kj}),$$

la feuille espace au point  $(t_0, X_0)$  est l'hyperplan  $E_{(t_0, X_0)} = \{(t, X) : t = t_0\}$  de  $\mathbb{R}^4$ . La projection stéréographique permet de définir une métrique de Lorentz sur  $\mathbb{S}^4 \setminus \{\infty\}$ , et les feuilles espace pour cette métrique sont topologiquement des sphères  $\mathbb{S}^3$  passant par le pôle auxquels on a retiré ce pôle. Le système de Pfaff

$$\tau : \omega \rightarrow \tau(\omega) = E_\omega,$$

est prolongeable au point singulier  $\infty$ , car

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \tau(\omega) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} T_{p_\infty^{-1}(t, o)} (p_\infty^{-1} E_{(t, o)}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (Tp_\infty)^{-1} (\mathbb{R}T(t, o)^\perp) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (Tp_\infty)^{-1} (\mathbb{R}e_0)^\perp = (T_\infty \Gamma)^\perp, \quad e_0 = (1, o) \end{aligned}$$

où  $\Gamma$  est le grand cercle de  $\mathbb{S}^4$  passant par le pôle et défini par  $\Gamma = \text{Adh}_{\mathbb{S}^4} p_\infty^{-1}(\mathbb{R}\partial_0)$ . On a donc, pincé les feuilles espace en  $\infty$ .

## 7. CONCLUSION

Dans l'introduction, on s'est posé la question: "Peut-on unifier les équations relativistes de Dirac et d'Einstein?". La réponse à cette question n'est pas encore résolue. On s'est posé, ensuite, la question de savoir si on ne pouvait pas trouver un opérateur permettant de décrire ces deux équations. On peut répondre positivement à cette question en partant d'une section de Dirac sur le complexifié du fibré tangent qui soit hermitienne. Cette section permet de définir localement, le tenseur de Poisson

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$$

ce tenseur est un tenseur symétrique réel, la métrique associée  $(\gamma_{\mu\nu})$  sur les parties de l'univers où le tenseur de Poisson est inversible permet d'introduire la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  associée à cette métrique. On veut que cette métrique soit relativiste, c'est-à-dire, vérifie l'équation

$$R_{\mu\nu} - \mathcal{K}T_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2}R + \Lambda\right) \gamma_{\mu\nu}.$$

En complexifiant la connexion  $\nabla$ , notée  $\tilde{\nabla}$ , on obtient l'équation relativiste de Dirac

$$\gamma \otimes \tilde{\nabla}(Z) = -i\lambda Z,$$

et pour l'équation généralisée de Schrödinger aux champs complexes le long d'un champ chronologique  $T$ ,

$$\gamma_2 \otimes R^{\tilde{\nabla}}(Z) = -i\lambda \mathcal{L}_T(Z).$$

Dans l'équation de Schrödinger sur les ondes associées aux champs en cordes, l'équation s'écrit

$$i\hbar \partial_T \psi = -\frac{\hbar^2}{2\mathcal{M}_\zeta} \Delta \psi + \mathcal{V} \psi,$$

où l'opérateur de Laplace-Beltrami est défini par la section de Dirac  $\gamma$ ,

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{|\det(\gamma)|}} \partial_\nu \left( \sqrt{|\det(\gamma)|} \gamma^{\mu\nu} \partial_\nu \right),$$

et  $\mathcal{M}_\zeta$  est la masse de la corde  $\zeta$  associée au champ en corde. On peut décrire les équations classiques de la physique à l'aide d'un seul opérateur qui est une section de Dirac hermitienne et relativiste. L'hypothèse faite sur la densité de masse  $\lambda$

qui serait proportionnelle à la valeur absolue de la courbure scalaire définie par la connexion  $\nabla$  est une hypothèse qui permet de choisir la fonction propre  $-i\lambda$  de l'opérateur

$$\gamma \otimes \tilde{\nabla}.$$

L'hypothèse proposant la géométrisation des parties connexes comme des sous-variétés de dimension 0, 1 et 2 permet de mieux comprendre la physique de ces singularités. Dans ces zones les dimensions espace et la dimension temps peuvent disparaître par pincement ou effondrement. Cette hypothèse mérite d'être approfondie...

#### REFERENCES

- [1] Arminjon M., Reifler F., "Representations of the Dirac wave function in a curved spacetime", Proc. Fifth International Workshop DICE2010 : current issues in quantum mechanics and beyond, Journal of Physics: Conference Series 306 (2011), 012061.
- [2] Arminjon M., Reifler F., Classical-quantum correspondence and wave packet solutions of the Dirac equation in a curved spacetime", 13th International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, (Varna, Bulgarie, 3-8 juin 2011). Journal of Geometry and Symmetry in Physics 24, 77-88 (2011).
- [3] Audin M., Damian M., Théorie de Morse et homologie de Floer, CNRS Editions, 2010
- [4] Dloussky G., "Variétés riemanniennes, variétés hermitiennes" (2008)
- [5] Ehresmann C., Sur les variétés plongées dans une variété différentiable, C. R. Acad. Sci. Paris 226 (1948), 1879-1880.
- [6] Esteban M.J., Séré E., "Les équations de Dirac-Fock". Séminaire E.D.P(1997-1998), Exposé n°5, U.M.R 7640 C.N.R.S.
- [7] Godbillon C., "Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique" Hermann Paris 1985
- [8] Gromov M. L. , "Stable mappings of foliations into manifolds", Izv. Akad. Nauk SSSR 33 (1969), 707-734.
- [9] Haefliger A., "Feuilletages sur les variétés ouvertes", Topology 9 (1970), 183-194.
- [10] Jonot J.L."Dirac-Weyl-Fock equation along a chronological field" hal.archives-ouvertes.fr/hal-01063612 (2014)
- [11] Kobayashi S. and Nomizu K. "Foundations of Differential Geometry", vol. 1 & 2, Wiley-Interscience, 1996.
- [12] Milnor J., "Morse Theory" Annals of Mathematics Studies Princeton University Press.
- [13] Reeb G. , "Variétés feuilletées, feuilles voisines", C. R. Acad. Sci. Paris 224 (1947), 1613-1614.
- [14] Reeb G., "Stabilité des feuilles compactes à groupe de Poincaré fini", C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 47-48.
- [15] Reed M. and Simon B. "Methods of Modern Mathematical Physics Vol.I: Functional Analysis", Academy Press, New York, (1975)
- [16] Thurston W., "The geometry and topology of three-manifolds", Princeton lecture notes (1978-1981).
- [17] Wigner E. P., "Gruppentheorie" (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, Germany, 1931), pp. 251-254; Group Theory (Academic Press Inc., New York, 1959), pp. 233-236
- [18] Voisin C."Géométrie différentielle" www.math.polytechnique.fr/~voisin/Articlesweb/poly2013chap123.