Note sur le paradoxe des deux portefeuilles (Wallet paradox)

Léo Gerville-Réache

Note sur le paradoxe des deux portefeuilles (Wallet paradox)

Léo Gerville-Réache - IMB -UMR 5251 - Université de Bordeaux

Introduction

Le paradoxe des deux portefeuilles (ou des deux cravates) est un vieux paradoxe. On trouve celui-ci dès 1943 chez Maurice Kraitchik. Il sera popularisé, aux USA, par Martin Gardner en 1982 et en France par Jean-Paul Delahaye en 2005.

Gardner le présente ainsi : "*Le professeur Smith déjeune avec deux étudiants en math.*

- ***Professeur Smith****: Laissez-moi vous montrer un nouveau jeu. Posez vos portefeuilles sur la table. Nous allons compter quelle somme a chacun. Celui qui a la plus petite somme gagne tout l'argent de l'autre portefeuille.*
- ***Joe****: Hmm. Si j'ai plus que Jill, elle gagnera juste ce que j'ai. Mais si elle a plus que moi, je gagnerai plus que ce que j'ai. Aussi, je gagnerai plus que ce que je peux perdre. Le jeu est en ma faveur.*
- ***Jill****: Si j'ai plus que Joe, il gagnera juste ce que j'ai. Mais s'il a plus que moi, je gagnerai plus que ce que j'ai. Le jeu est en ma faveur.*

Comment un jeu peut-il être favorable aux deux joueurs? Il ne peut pas. Ce paradoxe existe-il parce que chaque joueur affirme à tort que ses chances de gagner ou perdre sont égales? "

Cette note a pour but de faire le point sur les positions des quelques auteurs (curieusement relativement peu par rapport au paradoxe des deux enveloppes) qui ont publié une analyse du paradoxe des deux portefeuilles et de proposer une analyse originale basée sur le principe de quantification de l'intérêt.

Quelques analyses...

En 1943, Kraitchik propose une rapide analyse basée sur l'hypothèse que les portefeuilles contiennent une somme aléatoire de loi uniforme entre 0 et 100. Traçant les courbes des distributions des sommes des deux joueurs et observant une symétrie par rapport à la diagonale, il conclut qu'il n'y a aucun avantage à jouer.

En 1982, Gardner ne retient pas l'explication de Kraitchik qui, selon lui, n'explique pas ce qui est faux dans le raisonnement des joueurs. Pour autant, il s'avoue incapable d'expliquer lui-même ce qui serait faux.

En 1997, Merryfield, Viet et Watson propose une analyse fondée sur la question du concept de "fair game". Pour les auteurs, le concept de "jeu équilibré" doit être mis en relation avec la question de la répétition du jeu (et pas avec un unique jeu (one shot game)). Cette approche doit nous faire penser au dilemme du prisonnier pour lequel, il est bien connu qu'entre un jeu unique et un jeu itéré, les stratégies de jeu changent profondément. Aussi, en associant le concept de "fair game" à celui d'un jeu nécessairement répété, les auteurs distinguent les deux cas, mais ne répondent qu'au cas d'un jeu répété. Il est important de noter que pour étudier le jeu répété, il est nécessaire de mettre une loi de probabilité sur les montants des portefeuilles et que cela rapproche l'analyse de celle de Kraitchik.

En 2001, Carroll, Jones et Rykken explorent la question de la stratégie de jeu de l'un des joueurs en fonction de la loi de probabilité des montants de l'autre joueur (recherche d'un équilibre de Nash).

Les auteurs cherchent à voir s'il est possible dans un jeu répété, de construire une stratégie de jeu optimale. Aussi, il n'est pas question de tentative de résolution du paradoxe mais simplement d'une digression autour du paradoxe. Néanmoins, on doit noter que toute l'analyse repose ici également sur la répétition du jeu et l'interprétation statistique de l'espérance mathématique (une espérance nous informe sur ce qui se passerait "en moyenne"). Cette interprétation de l'espérance nécessite de probabiliser les montants possibles dans les portefeuilles. On retrouve donc l'approche de Merryfield, Viet et Watson.

Enfin, en 2014, Ross propose un "essai" de quatre pages sur ce paradoxe. Son but affiché (après avoir convenu que ni Kraitchik , ni Merryfield et al., ni Carroll et al., n'avaient répondu à la question de Gardner) est d'expliquer ce qui est faux dans le raisonnement des joueurs. Pour cela, il traite en réalité du paradoxe des deux enveloppes dont il considère que, bien qu'il y ait des différences, l'erreur de raisonnement est de même nature. Il s'agirait du problème de la loi de probabilité sous-jacente dans les deux problèmes. Cette loi devrait être une loi uniforme sur un ensemble infini de valeurs possibles et chacun sait qu'une telle loi n'existe pas. Il y est également question d'une loi de probabilité d'espérance infinie (donc non définie) pour laquelle, conditionnellement au montant de l'enveloppe en main ou encore conditionnellement au montant de votre portefeuille, l'autre (enveloppe ou portefeuille) a une espérance infinie ; d'où le non sens de l'intérêt à changer (ou à jouer).

Il est important de noter que le paradoxe des deux portefeuilles est fréquemment cité dans les articles traitant du paradoxe des deux enveloppes. D'une manière générale, c'est pour faire le parallèle entre les deux et pour conclure que, comme dans le paradoxe des deux portefeuilles, où il n'y a aucun intérêt à jouer, dans le paradoxe des deux enveloppes, il n'y a aucun intérêt à changer. Les articles sur les deux enveloppes ne proposent généralement pas d'analyse du paradoxe des deux portefeuilles qu'ils considèrent comme résolu.

Pour finir, on peut revenir sur la position de Delahaye en 2005 qui présente le paradoxe avec deux cravates. Pour l'auteur, c'est l'application du principe d'indifférence, conduisant à dire que l'on a une chance sur deux de gagner et de perdre qui est à l'origine de l'erreur de raisonnement des joueurs. *"Dans le cas des cravates, trop peu d'informations sont disponibles pour qu'on puisse raisonner en termes probabilistes"*. C'est donc l'utilisation d'un raisonnement probabiliste inadapté (voir impossible) qui génère le paradoxe.

Quelques remarques...

Il y a fort à parier que Gardner ne serait convaincu par aucun des arguments précédents. Le paradoxe des portefeuilles se résout-il en probabilisant les montants dans les portefeuilles? Certes non. En tentant de probabiliser l'ensemble des possibles montants des portefeuilles, on tombe sur des distributions soit impossibles soit d'espérance infinie. Cela ne résout en rien le paradoxe, cela montre simplement que probabiliser l'ensemble des possibles montants des portefeuilles est sans issue.

Il n'est pas nécessaire de probabiliser les montants pour probabiliser le fait que l'un des portefeuilles ait un montants supérieur à l'autre. Il semble raisonnable, ne sachant rien de l'autre joueur, que chaque joueur se donne (via le principe d'indifférence) une chance sur deux de gagner et de perdre. Les montants étant fixés, il est clair que l'un a, en réalité, une probabilité de 1 de gagner et l'autre de 0. Mais qui, "moi ou l'autre"? C'est cette incertitude qui est traduite par la probabilité 1/2. Aussi, l'argument de Delahaye, qui refuse cette probabilité de 1/2 n'est pas convainquant. Ce n'est pas l'attribution d'une probabilité de 1/2 qui pose un problème dans le paradoxe des deux portefeuilles.

Aussi, en l'état des analyses proposées dans la (courte) littérature spécifique au sujet, aucun argument ne répond à la question de Gardner. Il semble qu'il faille chercher ailleurs, chercher également sans préjuger. Cela signifie qu'il faut envisager l'idée que les deux joueurs aient des raisonnements fondés et cohérents, et que la solution du paradoxe est ailleurs.

Nous allons explorer l'idée que le raisonnement de chaque joueur : "JE me donne un chance sur deux de perdre le montant contenu dans mon portefeuille et une chance sur deux de gagner plus que ce montant" soit cohérant, en l'état de connaissance du jeu (on suppose que les deux portefeuilles contiennent des montants différents). La question se déplace alors sur l'implication de ce raisonnement sur le fait que le jeu soit "favorable" pour chaque joueur. Afin de voir la possible implication de l'un à l'autre, il convient dans un premier temps de définir ce qu'est un jeu "favorable"; ce que signifie "avoir intérêt à jouer". Pour Merryfield, Viet et Watson (1997), on a intérêt à jouer si lorsque l'on répète le jeu, en moyenne on est gagnant. Nous avons vu que cette approche nécessite de probabiliser les montants des portefeuilles et que cela ne mène pas bien loin.

Nous ne pouvons pas faire appel ici à la répétition du jeu. Aussi, nous devons raisonner sur un jeu unique et donc définir "l'intérêt à jouer" pour un jeu sans répétition. Si l'on se rappelle du dilemme du prisonnier (dont les solutions itérées et non-itérées diffèrent diamétralement), l'analyse d'un jeu unique ne doit pas choquer. Dans les deux portefeuilles, ce n'est pas parce que l'on ne peut raisonner sur la répétition du jeu que l'on ne peut pas raisonner sur un jeu unique.

Aussi, nous devons étudier le jeu des portefeuilles, sans appel à la répétition du jeu. Les probabilités mises en œuvre n'auront qu'une interprétation épistémique et ne feront en aucun cas référence à une fréquence quelconque. Si une espérance, par exemple positive, devait être calculée, en aucun cas elle ne signifierait que "en moyenne" on gagne. Il faut donc faire extrêmement attention aux interprétations des calculs qui pourraient être mis en œuvre.

On va supposer que chaque joueur connait le montant contenu dans son portefeuille. Il y a deux raison à cela. Primo, il est difficile d'accepter de jouer sans savoir ce que l'on risque de perdre. Deusio, afin de prendre une décision, en théorie des jeux, il est nécessaire de calculer diverses utilités, que l'on soit neutre au risque ou pas.

Aussi, soit x_A et x_B les montants des portefeuilles des joueurs A et B. On suppose donc que A connait x_A mais pas x_B et inversement... En jouant, A considère qu'il peut gagner X_B (comme x_B est inconnu de A, on note ce montant X_B) avec probabilité 1/2 et perdre x_A avec probabilité 1/2. Son espérance de gain (espérance épistémique) qui vaut $E_A=1/2(X_B-x_A)$, est strictement positive à cause de la règle du jeu. Le joueur B aboutit également à $E_B=1/2(X_A-x_B)>0$. Ce qui est clair c'est que soit x_A-x_B est strictement supérieur à 0 soit c'est x_B-x_A. En revanche il n'est pas incompatible que, chacun de son côté, A et B estiment leur espérance comme strictement positive. On pourrait donc avoir simultanément deux espérances épistémiques strictement positives ($E_A>0$ et $E_B>0$).

Quel est le problème? Les deux joueurs savent que le jeu est à somme nulle mais ne connaissent pas les gains possibles. Ce jeu, à information incomplète, crée des espérances simultanément strictement positives. Pour autant, que doit déduire chaque joueur du fait qu'il se donne une espérance de gain positive? Doit-il déduire qu'il a "intérêt à jouer"? Plus précisément, doit-il en déduire qu'il a "un intérêt à jouer"?

Quantifier son intérêt...

La décision de jouer doit être argumentée par l'intérêt qu'il y aurait à le faire. Mais quel est "l'intérêt à jouer" du joueur A? Pour connaitre son intérêt il conviendrait de le mesurer, de le quantifier! En effet, la question qu'il doit se poser est : " de combien est mon intérêt?". Or, en l'état de connaissance du jeu, il ne connait pas son intérêt. Il sait seulement que cet intérêt est strictement positif. Aussi si on lui demandait ne serait-ce qu'un euro pour jouer, il refuserait. Il refuserait parce qu'il n'est pas en mesure d'être certain que $E_A-1>0$.

Si aucun des deux joueurs n'a intérêt à jouer c'est parce que cet intérêt n'est pas quantifié, il est seulement borné par 0, cela n'est pas suffisant pour faire de ce jeu, un jeu "favorable". Pour qu'un jeu ait un intérêt, il faut que le joueur soit prêt à payer un somme définie S pour jouer. Dans le jeu des deux portefeuilles, aucune somme S n'est définissable. Aussi aucun des deux joueurs ne peut identifier, quantifier, un intérêt à jouer.

A ce niveau de l'analyse, il est possible que le paradoxe des deux portefeuilles soit en passe d'être résolu...

Pour autant, un autre paradoxe surgit instantanément! Ajoutons simplement à l'énoncé que, le professeur Smith regarde en secret le contenu des deux portefeuilles et annonce que l'un contient 10 euros de plus que l'autre (par exemple $x_A=20$ et $x_B=30$). Les joueurs ont maintenant un intérêt quantifiable à jouer! En effet, chaque joueur serait donc prêt à payer jusqu'à 5 euros pour jouer. L'intérêt à jouer que chaque joueur estime est maintenant de 5 euros.

Aha! C'est impossible! Le simple fait de préciser l'écart de montants entre les deux portefeuilles serait suffisant pour recréer le paradoxe. Oui! Mais c'est un autre paradoxe (une variante du paradoxe original). Rappelons-nous que le paradoxe des deux enveloppes n'existe que parce que l'on nous dit que l'une des enveloppes contient le double de l'autre...

Conclusion

La question de la mesure de l'intérêt semble être pertinente dans l'analyse du jeu des deux portefeuilles. Au travers de ce paradoxe, deux questions bien délicates sont soulevées.

- La référence à la répétition de l'expérience est un point important qu'il convient de toujours analyser comme une variante d'un jeu unique. En effet, de nombreux problèmes imposent cette distinction : nous avons évoqué le dilemme du prisonnier mais l'on pourrait parler du paradoxe de St-Petersburg, du paradoxe de la Belle au bois dormant ou encore du paradoxe des deux enveloppes.
- La quantification de l'intérêt peut sembler superflue, pourtant la notion de préférence stricte nécessite cette quantification. En effet, comment prouver que l'on a une préférence stricte de A sur B si l'on n'est pas en mesure de définir une somme S que l'on serait prêt à payer pour avoir A plutôt que B. Ken Binmore (1999), dans son exemple de la "Pompe à monnaie", utilise le fait que si A est strictement préféré à B, alors il existe une somme S telle que l'utilité de A est strictement supérieure à l'utilité de B augmentée de S, (U(A)>U(B)+S).

Dans le paradoxe des deux portefeuilles, la règle du jeu ne permet pas de quantifier un intérêt à jouer. En revanche, en annonçant simplement l'écart entre les montants, cet intérêt se précise et devient un argument pour jouer. Dans ce nouveau paradoxe, où chacun est prêt à payer pour jouer, il n'est pas établit que payer pour jouer soit irrationnel! Serait-il possible que chacun trouve un intérêt à jouer alors que le couple de joueurs n'a rien à gagner? Mais, souvenons-nous du dilemme du prisonnier où, chacun a intérêt à dénoncer l'autre alors que le couple a intérêt à coopérer...

Bibliographie

[1] Binmore, Kenneth (1999). *Jeux et théorie des jeux*, Bruxelles : De Boeck Université.

[2] Carroll MT., Jones MA. and Rykken EK. (2001). *The Wallet Paradox Revisited*, Mathematics Magazine Vol. 74, No. 5, pp. 378-383.

[3] Delahaye, J.P. (2005). *Les deux cravates*. Les nouvelles d'Archimède n°38, pp 16-17.

[4] Gardner M. (1982). *Aha! Gotcha: Paradoxes to Puzzle and Delight*, W.H. Freeman and Company, New York, p 106.

[5] Kraitchik M.(1943). *Mathematical Recreations*, George Allen & Unwin, London pp 133-134.

[6] Merryfield KG., Viet N. and Watson S.(1997). *The Wallet Paradox*, The American Mathematical Monthly Vol. 104, No. 7, pp. 647-649.

[7] Ross D.S. (2014). *The Logic of the Wallet Paradox*, 4p. http://people.rit.edu/~dsrsma/Wallets.pdf.