Refaire le Timée . Introduction a la philosophie mathématique d'Albert Lautman

Jean Petitot

Refaire le Timée.
Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman

Jean Petitot
CREA, École Polytechnique &
CAMS, École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris

Résumé

Ce texte de février 1987 est paru en version abrégée dans la *Revue d'Histoire des Sciences* (XL, 1, 79-115). Il développe les éléments de philosophie lautmanienne exposés dans [29] et [31].

Table des matières

1 Introduction

Bien que fort peu étudié et étonnamment méconnu – sans doute eu égard à sa tragique fin prématurée et à l'éclipse de la philosophie des sciences dans l'après-guerre –, Albert Lautman a pourtant déjà été étiqueté : platonicien [1], il représenterait, malgré son exceptionnelle culture mathématique et ses étroits liens amicaux avec Jean Cavaillès, Claude Chevalley et Jacques Herbrand, comme la rémanence obsolète d'un idéalisme archaïque (brunschvicgien) et, à ce titre, ne serait pas "véritablement" moderne. Mario Castellana l'a souligné à plusieurs reprises dans l'excellent compte-rendu de *l'Essai sur l'unité des mathématiques* [2] qu'il a publié dans *Il Protagora* [3] et où, après avoir résumé le texte de Lautman, il conclut en connaisseur avisé de l'épistémologie française qu'alors que la philosophie mathématique de Cavaillès est libre

1. Voire même "néo-platonicien" selon J. Ullmo.
2. Cette réédition en 1977 par Maurice Loi des écrits de Lautman [25] sera notre ouvrage de référence. Les pages que nous indiquons dans le texte se rapportent à cette édition.
3. Castellana [6]. Il s'agit de l'un des (trop) rares textes sur Lautman. Il constitue une bonne introduction à sa philosophie.

> “de toute influence philosophico-spéculative brunschvicgienne, cette influence est encore présente chez Lautman”

et que c’est ce platonisme

> “qui a été la cause du succès limité qu’a eu auprès des spécialistes la pensée de Lautman à la différence de celle de Cavaillès.”

Alors que Cavaillès (suivi en cela par Bachelard) aurait affranchi la réflexion sur les mathématiques et les sciences de toute législation philosophique que prétendrait lui imposer une théorie de la connaissance, Lautman aurait au contraire développé – en interprétant le structuralisme axiomatique hilbertien en termes d’une dialectique platonicienne et hégélienne du concept – une authentique philosophie mathématique et, ce faisant, n’aurait pas assez tenu compte du mouvement d’autonomisation des sciences.

Ce diagnostic reflète bien ce que ses quelques rares lecteurs ont retenu de Lautman. Mais une lecture plus approfondie conduit à le réviser, et cela pour au moins deux raisons.

(i) Il ne faut pas oublier que dans son chef-d’oeuvre posthume *Sur la logique et la théorie de la science*[4], Cavaillès a dépassé ses réflexions sur l’axiomatique et la théorie des ensembles dans une reprise critique du motif constitutif de la logique transcendantale (Kant, Husserl) et que ses dernières lignes manifestent clairement un assentiment envers les thèses de Lautman :

> “Ce n’est pas une philosophie de la conscience mais une philosophie du concept qui peut donner une doctrine de la science. La nécessité génératrice n’est pas celle d’une activité, mais d’une dialectique.” [5]

(ii) Comme nous le verrons, Lautman était profondément averti de l’autonomisation des mathématiques consécutive à leur internalisation de la problématique des fondements. Il s’est même précisément efforcé de repenser, à partir de cette donnée épistémologique, la question des rapports entre mathématiques et réalité. Car si les mathématiques sont en vérité autonomes, comment peuvent-elles s’impliquer dans l’expérience et s’appliquer à la réalité autrement que par une sorte d’obscure harmonie préétablie, ou par une sorte d’adaptation évolutive tout aussi obscure ? Si l’on ne se satisfait pas d’une conception simplement nominaliste et pragmatique des mathématiques (de type empirisme logique), alors il faut bien penser leur *réalité* d’une façon telle qu’elle puisse, bien qu’autonome, être mise constitutivement en rapport avec la réalité objective.

Pour le dire d’emblée, Albert Lautman représente selon nous, sans emphase, l’un des philosophes les plus inspirés du XXème siècle. Ses thèses sont d’une réelle importance et si on leur avait consacré ne serait-ce qu’une faible partie des réflexions que

4. Cavaillès [9].
5. Ibid., p.78.

l'on a consacrées à un autre philosophe, auquel il est comparable quant à la stature et opposé quant aux idées, nommément Wittgenstein, il serait sans doute devenu l'une des figures les plus glorieuses de notre modernité. Ces quelques remarques sur son œuvre voudraient aider à la réparation de cette injustice.

2 Un philosophe mathématicien

2.1 Une philosophie intrinsèque des mathématiques

Avec Lautman, nous sommes en présence d'un philosophe des mathématiques qui parle effectivement de mathématiques et effectivement de philosophie, ce qui est, il faut le dire, exceptionnel sinon unique. Pour lui, la philosophie des mathématiques ne se réduit ni à un commentaire épistémologique second sur des problématiques logiques fondationnelles, ni à des recherches historiques ou *a fortiori* psycho-sociologiques, ni à des réflexions sur des courants un peu marginaux comme l'intuitionnisme à la Brouwer[6]. Jean Dieudonné y insiste à juste titre dans son avant-propos à *l'Essai sur l'unité des mathématiques* :

> "Les philosophes contemporains qui s'intéressent à la mathématique s'occupent le plus souvent de ses origines, de ses relations avec la logique ou des 'problèmes des fondements'. (...) Bien peu sont ceux qui cherchent à se faire une idée des grandes tendances des mathématiques de leur temps, et de ce qui guide plus ou moins consciemment les mathématiciens actuels dans leurs travaux. Albert Lautman, au contraire, semble avoir toujours été fasciné par ces questions. (...) Il avait acquis sur les mathématiques des années 1920-1930 des vues bien plus étendues et précises que n'en avaient la plupart des mathématiciens de sa génération, souvent étroitement spécialisés. (...) [Il] avait pressenti cet extraordinaire développement de la mathématique, auquel le destin ne lui a pas permis d'assister ; il l'eût rempli d'enthousiasme."[7].

Le point est d'importance. Comme le dénonce Dieudonné dans un article polémique, la philosophie mathématique contemporaine est une philosophie de tendance logiciste et/ou intuitionniste qui, s'intéressant préférentiellement aux langages, aux constructions symbolico-catégoriales et à leurs grammaires, plutôt qu'aux objets "réels"[8] et à leurs structures, possède le curieux privilège de méconnaître l'essentiel de l'activité créatrice des mathématiciens. Rappelons sa boutade épinglant la "sottise" de Russell voulant faire des mathématiques une partie de la logique :

> "une telle affirmation est aussi absurde que celle qui consisterait à dire que les uvres de Shakespeare ou de Goethe font partie de la gram-

6. Nous parlons de la philosophie temporelle du sujet chez Brouwer et non pas de l'intuitionnisme purement logique, par exemple de la théorie des topoï.

7. Dieudonné [16], pp. 15 et 19.

8. Réels au sens d'un réalisme métaphysique d'idéalités.

maire !" [9]

Or, le moins que l'on puisse exiger et attendre d'une authentique réflexion gnoséologique sur les mathématiques est certes de développer, pour reprendre une expression de Catherine Chevalley, "une philosophie des sciences *intrinsèque* aux théories", une philosophie qui se fonde sur le génie, la richesse et la nouveauté de découvertes fondamentales qui sont aux sciences l'équivalent de ce que les œuvres d'un Goethe ou d'un Shakespeare sont à la littérature.

> "C'est ce qu'avait compris Lautman, et il avait pris à bras le corps la mathématique de son temps pour en faire un objet d'étude philosophique. Malheureusement, j'ai l'impression qu'il n'a guère été suivi." [10]

Mais, mathématicien, Lautman est aussi réellement philosophe. Contrairement à la quasi-totalité des scientifiques (et également, hélas, à la plupart des philosophes contemporains), il n'ignore ou ne dédaigne ni le platonisme, ni la métaphysique, ni le transcendantal. Il ne cherche pas, comme tant d'autres, à disqualifier la pensée pure de l'être, mais, au contraire, à en réaliser un nouveau moment dialectique à travers l'histoire des mathématiques pures. Comme il le confiait dans une lettre inédite du 18 juillet 1938 à Henri Gouhier (spécialiste à l'époque de Descartes, Malebranche et Comte) [11], son "effort" aura consisté à

> "appuyer la métaphysique non pas sur le 'pathétique' mais sur la mathématique."

Avant de commenter la portée et la signification de son oeuvre, rappelons-en brièvement les thèmes mathématiques et métaphysiques récurrents.

2.2 Principaux thèmes mathématiques

Faisons un bref catalogue des thèmes particulièrement chers à Albert Lautman. Il sera en partie artificiel puisque, étant donnée l'unité des mathématiques, ces divers thèmes s'intriquent de façon parfois inextricable. Il n'est là qu'à titre de rappel indicatif.

2.2.1 Fonctions analytiques

La complémentarité entre la conception locale de Weierstrass (éléments analytiques et prolongement analytique) et la conception globale de Riemann. Le théorème d'uniformisation globale des surfaces de Riemann compactes (i.e. des courbes algébriques projectives) et la théorie du revêtement universel. La théorie des intégrales abéliennes et le théorème de Riemann-Roch et, en particulier, le lien entre la structure topologique et la dimension du $\mathbb{C}$-vectoriel des intégrales abéliennes de première espèce (équivalence des deux définitions du genre). Les théorèmes de Montel. La théorie des singularités des équations différentielles. La fonction modulaire et les fonctions automorphes. La métrique de Poincaré des surfaces de Riemann de genre $g > 1$.

9. Dieudonné [17], p. 178.
10. Ibid., p. 186.
11. Je remercie Juan-David Nasio de m'avoir communiqué ce document.

2.2.2 Géométrie et théorie des groupes

La complémentarité entre la conception globale à la Klein (géométries euclidiennes et non-euclidiennes, groupes d'invariance et espaces homogènes, métriques invariantes, relativité restreinte en physique) et la conception locale à la Riemann-Cartan-Weyl (variétés riemanniennes, géodésiques, connexions affines, relativité générale). Le lien entre les propriétés différentielles locales et les propriétés topologiques globales des variétés, la topologie algébrique (travaux de Hopf en particulier). La théorie des représentations des groupes de Lie compacts (théorèmes de Weyl et Cartan).

2.2.3 Equations différentielles et dynamique qualitative

Les théorèmes d'existence et d'unicité pour les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles. L'algèbre non-commutative et les systèmes de Pfaff (travaux de Cartan sur les formes différentielles). Les travaux de Poincaré et Birkhoff en dynamique qualitative.

2.2.4 Analyse fonctionnelle

La topologie des espaces fonctionnels, les propriétés de complétude, les théorèmes d'approximation et les sous-ensembles denses. La théorie de Fourier. La théorie des espaces de Hilbert et l'analyse spectrale des opérateurs intégro-différentiels. Les applications à la mécanique quantique. Les théorèmes de Montel et de Carathéodory en théorie des fonctions analytiques (cf. plus haut).

2.2.5 Topologie algébrique

La théorie de l'homologie : groupe fondamental et revêtement universel, homologie et cohomologie, théorèmes de dualité de Poincaré et d'Alexander. Les travaux de Seifert, Alexandroff, Hopf, Antoine. Les théorèmes de point fixe (Hopf, Lefschetz).

2.2.6 Algèbre

La théorie de Galois. Les représentations linéaires des groupes abstraits. L'algèbre linéaire.

2.2.7 Théorie des nombres

Les extensions algébriques et la théorie du corps de classes ; loi de réciprocité quadratique (Hilbert, Furtwängler, Takagi, Artin, Hasse, Herbrand, Chevalley, Weil). La théorie analytique des nombres : répartition des nombres premiers et fonction zêta des corps de nombres, travaux de Hecke sur les fonctions thêta.

2.2.8 Logique et métamathématique

La théorie logique des modèles, la complémentarité syntaxe/sémantique, le théorème de complétude et le théorème de Gödel. La théorie de la démonstration. L'ε-calculus de Hilbert et la méthode des champs de Herbrand (programme hilbertien de métalogique finitiste et élimination des quantificateurs). La critique du logicisme.

2.3 Principaux thèmes métaphysiques

Disons maintenant un mot des traditions métaphysiques que Lautman a mobilisé pour ses analyses mathématiques. Ce rappel sera également très concis. Il n'a pour fonction que de rendre moins spéculatives nos considérations ultérieures. Nous reprenons en partie les titres de Lautman.

2.3.1 Le local et le global

Le thème mathématique fondamental de la complémentarité entre une étude locale des structures et une étude globale les caractérisant indépendamment de leurs éléments est relié par Lautman au thème métaphysique traditionnel et particulièrement délicat du tout et des parties ou, plus précisément, de l'assemblage méréologique des parties dans une unité fonctionnelle. Il concerne

> "la solidarité presque organique qui pousse les parties à s'organiser en un tout et le tout à se réfléchir en elles" (p. 28) [12]

et il conduit à chercher

> "une liaison entre la structure du tout et les propriétés des parties par quoi se manifeste dans les parties l'influence organisatrice du tout auquel elles appartiennent." (p. 39)

On peut faire remonter ce thème (au moins) à la troisième Critique kantienne (Critique de la faculté de juger téléologique et problème de la finalité interne des êtres organisés) et le suivre à travers le vitalisme biologique jusqu'à la phénoménologie (troisième recherche logique de Husserl), la théorie de la Gestalt et, surtout, le structuralisme. [13] Lautman insiste quant à lui sur ce dernier et tout particulièrement sur l'opposition méthodologique entre "réductionnisme atomiste" et "holisme structural" (p. 31). Le concept d'organisation et de structure – qui, notons-le au passage, a connu ces dernières années dans les sciences biologiques et humaines, un approfondissement décisif – renvoie au problème central de la *synthèse* du local et du global, c'est-à-dire, en mathématiques, à celui des procédures de *prolongement* (comme le prolongement analytique) et de *recollement* (comme le recollement des cartes locales d'une variété différentiable). Fondamental mais "obscur" dans les sciences empiriques dans la mesure où

> "la biologie comme la sociologie manquent souvent des outils logiques nécessaires pour constituer une théorie de la solidarité du tout et de ses parties" (p. 40),

il possède le privilège de devenir "intelligible" en mathématiques pures. Nous rencontrons-là un magnifique exemple de la façon dont, pour Lautman, l'intelligibilité des Idées propre aux mathématiques peut posséder une portée clarificatrice, en quelque sorte herméneutique, voire même, nous le verrons, constitutive, pour la conceptualité des disciplines empiriques.

12. Nous indiquerons dans le texte les pages citées de Lautman [25].
13. Pour des références, cf. par exemple [31] et [32].

2.3.2 Propriétés intrinsèques et propriétés induites

Ce thème est issu chez Lautman de considérations philosophiques sur des résultats de topologie algébrique (cf. par exemple le théorème de dualité d'Alexander) montrant comment

> "les propriétés géométriques de relation [entre un sous-espace et un espace ambiant] se laissent dans une très large mesure exprimer en propriétés algébriques intrinsèques." (p. 58)

De façon générale, il concerne la possibilité

> "de ramener les relations qu'un être mathématique soutient avec le milieu ambiant, en propriétés d'inhérence caractéristiques de cet être" (p. 48),

et donc, la façon dont

> "les propriétés de relation traduisent la solidarité d'un être et de l'univers au sein duquel il est plongé." (p. 48)

Philosophiquement, Lautman le rattache au débat entre Leibniz et Kant et au problème de l'esthétique transcendantale. La monadologie leibnizienne offre un exemple paradigmatique de traduction de propriétés relationnelles en propriétés intrinsèques. Elle réduit les rapports inter-monadiques à des propriétés internes "enveloppées dans l'essence de la monade individuelle" (p.49), la "sympathie universelle" (l'interaction) de toutes les substances étant inscrite dans le devenir interne de chaque monade isolée. L'esthétique transcendantale kantienne provient au contraire du constat qu'il existe dans l'espace sensible des différences *non conceptuelles* (incongruence des figures symétriques), que l'espace intuitif n'est donc pas un espace purement intelligible (critique de Leibniz) et que l'on ne peut caractériser conceptuellement (i.e. discursivement au sens de l'opposition kantienne discursif/intuitif) que les propriétés intrinsèques (et non pas les propriétés relationnelles). Relativement à cette controverse, l'intérêt *philosophique* de la topologie algébrique est de lui redonner "toute son actualité" (p. 49) tout en permettant d'en repenser profondément les termes. Là encore, nous voyons comment la réalisation mathématique spécifique d'une Idée problématique conduit à actualiser un problème critique de théorie de la connaissance.

2.3.3 "La montée vers l'absolu"

Principalement associé à la théorie du revêtement universel en topologie algébrique et à la classification des surfaces de Riemann (théorème d'uniformisation globale), à la théorie de Galois et à 1a théorie du corps de classes, ce thème concerne la possibilité

> "d'éliminer les imperfections de certains êtres mathématiques par passage de ce qu'ils sont primitivement à un idéal de simplicité absolue dont l'existence est impliquée dans l'enchevêtrement même de leur structure." (p. 77)

Il fait donc partie des procédés de passage de l'Essence (structure) à l'Existence :

> "comment la structure d'un être imparfait peut parfois préformer l'existence d'un être parfait en lequel toute imperfection a disparu." (p. 28)

Lautman le fait remonter philosophiquement aux métaphysiques platonicienne et cartésienne du "passage de l'idée d'imperfection à 1'idée de perfection" (p. 66).

2.3.4 Essence et Existence

Métaphysiquement fondamental s'il en est, ce thème occupe une place de choix dans l'œuvre de Lautman. Dans la tradition scholastique, l'existence équivalait à la non-contradiction. Une conception analogue (définitivement abandonnée en philosophie depuis Kant) s'est retrouvée en logique mathématique dans la conception formaliste de la théorie des modèles (théorème de complétude, etc.) :

> "fidèle en cela à ses origines leibniziennes, le formalisme considérait toujours que le passage de l'essence à l'existence devait consister uniquement dans la démonstration de la "compossibilité" des essences, de la non-contradiction des axiomes qui les définissent." (p. 89)

Toutefois ce n'est pas tant elle qui intéresse Lautman que les multiples théories mathématiques

> "où l'on voit la structure d'un être s'interpréter en termes d'existence pour d'autres êtres" (p. 29),

c'est-à-dire où l'on voit

> "une structure préformer l'existence d'êtres abstraits sur le domaine que cette structure définit." (p. 97)

Nous venons d'en rencontrer quelques exemples dans la section précédente. Mais les exemples favoris de Lautman sont ceux où, comme avec la définition du genre topologique d'une surface de Riemann comme nombre des intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes, ou comme avec le nombre de classes d'idéaux d'un corps de nombres, ou encore comme avec le nombre de représentations irréductibles d'un groupe, la genèse de nouvelles entités à partir de la structure d'un domaine donné repose "sur le double sens de ce nombre, structural et créateur" (p. 104) et où la structure possède un double rôle, interprétable qu'elle est

> "à la fois comme une décomposition du domaine et comme une répartition de nouveaux êtres sur ce domaine." (p. 106) [14]

Cette problématique de la "genèse des genres de l'être les uns à partir des autres" (p. 96) est fondamentale pour Lautman car elle exemplifie et explicite à

14. Par exemple la "structure" de la surface de Riemann d'une courbe algébrique est donnée par les "coupures" (cycles formant une base de son homologie) permettant de la rendre simplement connexe : c'est la "décomposition". Ces "coupures" sont associées par paires aux intégrales abéliennes de première espèce : c'est la "répartition".

l'intérieur de théories mathématiques spécifiques et effectives sa conception générale des mathématiques comme genèse de théories concrètes (Existence) à partir d'Idées problématiques (Essence). Elle est inséparable de cette autre opposition métaphysique qu'est l'opposition forme/matière,

> "l'essence d'une forme se réalisant au sein d'une matière qu'elle créerait, l'essence d'une matière faisant naître les formes que sa structure dessine." (p. 95)

Il faut y voir une doctrine dynamique générale du concret et de l'abstrait centrée sur le concept de genèse. D'abord

> "les êtres abstraits qui naissent de la structure d'un domaine plus concret, peuvent à leur tour servir de domaine de base pour la genèse d'autres êtres" (p. 96)

(relativité de l'opposition concret/abstrait). Ensuite l'abstrait n'est pas dégagé du concret dont il provient. Il le constitue en retour. Le concret et l'abstrait désignent respectivement

> "les structures de base et les êtres dont l'existence est déterminée par ces structures." (p. 105)

Il y a "engagement du concret dans la genèse de l'abstrait" (p. 105). Ce point est essentiel à l'interprétation lautmanienne – antilogiciste – du formalisme. Pour Lautman (comme plus tard pour Gonseth), les structures abstraites ne sont pas purement formelles. Elles sont

> "profondément engagées dans la genèse de leurs réalisations." (p. 105)

2.3.5 Les mixtes

Les espaces de Hilbert intermédiaires entre espaces géométriques (euclidiens) standards et espaces fonctionnels ou, en théorie logique des modèles, les champs métamathématiques de Herbrand

> "intermédiaires entre les signes des formules [syntaxe] et les champs mathématiques de leurs valeurs effectives [sémantique]" (p. 108),

fournissent des exemples de

> "mixtes intermédiaires entre des genres d'être différents et dont la considération est souvent nécessaire pour opérer le passage d'un genre de l'être à un autre genre de l'être." (p. 29)

Souvent les schémas de genèse exigent de tels mixtes ontologiquement médiateurs. Lautman fait remonter philosophiquement cette problématique à celle, "d'une importance considérable" (p. 106), du schème kantien comme mixte concept/intuition.

2.3.6 Du caractère exceptionnel de l'existence

Un problème métaphysique comme celui du passage de l'essence à l'existence peut admettre plusieurs réalisations mathématiques donnant lieu à autant de "schémas de genèse" différents. Par exemple, à côté "des schémas de genèse par décomposition" indiqués dans la section 2.3.4, il y en a d'autres "bien distincts" comme "les schémas de genèse par sélection" (p. 123)

> "procédés par lesquels un être peut être distingué au sein d'une infinité d'autres." (p. 29)

Lautman donne deux exemples de telles procédures de choix sélectionnant une entité dans un ensemble en vertu de "ses propriétés exceptionnelles" (p. 122). D'abord l'ε-calculus de Hilbert, variante du calcul des prédicats dans laquelle l'introduction d'éléments idéaux permet d'éliminer en partie les quantificateurs.[15] Ensuite évidemment, les principes variationnels de type principe de moindre action (Fermat, Maupertuis, Hamilton, de Broglie). Philosophiquement (cf. Leibniz), il s'agit d'introduire "une apparence de finalité" (p. 123) comme "alternative aux déterminations par les causes efficientes" (p. 122).

2.3.7 Structure et décomposition

Il existe selon Lautman, deux types de décompositions des êtres mathématiques. D'abord les décompositions *intrinsèques* qui

> "mettent en lumière les propriétés particulières d'un être au sein de l'ensemble auquel il appartient, et le caractérisent par la spécificité de sa structure propre." (p. 161)

Tel est le cas de la décomposition arithmétique d'un entier d'un corps de nombres en produit de facteurs premiers.

Ensuite, les décompositions *extrinsèques*, relatives à la totalité d'un ensemble d'éléments et qui

> "se font selon un plan commun à tous [les êtres considérés] et traduit ainsi non pas seulement leurs propriétés particulières mais également leur appartenance à un même ensemble dont la structure globale se réfléchit en celle de ses éléments." (p. 161)

Tel est le cas des décompositions des vecteurs suivant une base dans un espace vectoriel. Ce dernier exemple est particulièrement intéressant dans le cas des espaces fonctionnels et en particulier dans le cas où la base est canoniquement associée à un opérateur intégro-différentiel (analyse spectrale des opérateurs dans les espaces de Hilbert).

Un autre exemple développé par Lautman est fourni pas le théorème de Riemann-Roch établissant une *équivalence* entre deux types de décompositions[16] :

15. Sur ce point, cf. par exemple [28].

16. Si S est une surface de Riemann de genre g, on peut décomposer de deux façons une fonction méromorphe f dont les pôles $a_1, \ldots, a_n$ sont donnés. Soit comme combinaison linéaire d'intégrales

> “les mêmes êtres sont étudiables des deux façons et c'est cette rencontre des méthodes qui fait l'unité profonde des mathématiques.” (p. 172)

2.3.8 Topologie et métrique

Dans sa seconde thèse, à propos de l'opposition local/global en géométrie (Riemann/Klein et Cartan, cf. section 2.3.1) et de l'usage par Poincaré de la géométrie hyperbolique en théorie des fonctions analytiques, Lautman remarque que les métriques invariantes définies sur un espace par l'action d'un groupe peuvent être très différentes de métriques riemanniennes car elles “se réfèrent aux propriétés d'ensemble de l'espace” (p. 173). Au lieu d'être constitué par recollement de morceaux (conception locale et “analytique”), l'espace “préexiste” alors à la métrique. Comme continuum topologique il *précède* la possibilité d'y déterminer des grandeurs numériques (conception globa1e et “synthétique”). On voit ainsi le thème local/global recouper le thème analytique/synthétique et, ce faisant, selon Lautman, devenir solidaire d'une réinterprétation de l'opposition kantienne entre Entendement (calcul algébrique) et Intuition (géométrie). La synthèse entre l'algèbre et la géométrie dans l'analyse moderne opère sur cette problématique métaphysique et, ce faisant, acquiert une signification proprement philosophique.

> “La différence [classique] de plans entre une analyse purement intellectuelle et une géométrie synthétique, plus sensible, s'est de nos jours presque complètement évanouie, parce que la topologie et la théorie des groupes ont permis la mise au point de méthodes synthétiques en géométrie, qui sont tout aussi intellectuelles que les méthodes d'analyse.” (p. 175)

2.3.9 Le Continu, le Discontinu et le Discret

Sujet d'une tradition philosophique particulièrement riche, ce thème est centré chez Lautman sur la clarification des rapports entre arithmétique, algèbre et analyse :

> “c'est un problème fondamental pour la philosophie mathématique que d'établir une théorie des rapports du continu et du discontinu, de l'arithmétique et de l'analyse.” (p. 187)

Lieu privilégié de la manifestation de l'unité des mathématiques, il est traité préférentiellement à propos de la théorie analytique des nombres, domaine où

> “l'unité de l'algèbre et de l'analyse s'opère par le rôle des conceptions structurales et finitistes de l'algèbre dans la genèse du continu.” (p. 189)

Il fournit un exemple remarquable de la façon dont une Idée problématique – conçue comme problème du sens à donner à une liaison entre notions opposées – peut se réaliser de façons très différentes, historiquement imprévisibles, dans des théories mathématiques effectives. En théorie analytique des nombres

---

abéliennes de deuxième espèce Y_i, Y_i admettant pour seul pôle a_i (décomposition intrinsèque), soit comme combinaison linéaire dans l'espace vectoriel, de dimension $n-g$ d'aprés Riemann-Roch, des fonctions méromorphes de mêmes pôles (décomposition externe).

> "le problème des rapports du continu et du discontinu se présente sous un aspect nouveau : il ne s'agit plus de savoir si l'existence d'une théorie analytique des nombres est compatible ou non avec la priorité logique des axiomes du discontinu par rapport aux axiomes du continu, main bien d'étudier, au sein de la théorie analytique des nombres elle-même, le mécanisme des liaisons qui s'y affirment entre le continu et le discontinu." (p. 188) [17]

3 Éléments de philosophie lautmanienne

3.1 Positionnement des idées directrices

L'idée centrale d'Albert Lautman est qu'une *intuition intellectuelle* est à l'uvre dans les mathématiques, et que, dans le développement *historique* de leurs théories, celles-ci réalisent une authentique "dialectique du concept" (en un sens "platonicien", mais également quasi hégélien) développant leur *unité,* dévoilant leur réel et déterminant leur valeur philosophique. C'est en vertu de cette dialectique "abstraite et supérieure" (p. 204*)* que, pour Lautman,

> "le rapprochement de la métaphysique et des mathématiques n'est pas contingent mais nécessaire." [18].

À la suite de Dedekind, Cantor et Hilbert, Lautman accorde donc une portée constitutive à la liberté créative en mathématiques. Ainsi que le note Maurice Loi, l'une des caractéristiques des mathématiques modernes est que

> "les entités mathématiques sont introduites par de véritables définitions créatrices qui ne sont plus la description d'une donnée empirique." [19]
> "En libérant ainsi les mathématiques de la tâche de décrire un domaine intuitif et donné, on fit une véritable révolution, dont les conséquences scientifiques et philosophiques ne sont pas toujours appréciées à leur juste valeur." [20]

Car, ajoute Maurice Loi,

> "une telle conception de la science mathématique (...) pose en termes nouveaux le problème de ses rapports avec le réel, de l'objectivité et de la subjectivité. Les empiristes modernes opposent volontiers la science au subjectivisme et au volontarisme. Or l'objectivité n'est jamais une donnée mais une quête dont les pointes extrêmes sont l'axiomatique et la mathématique formelle." [21]

17. Nous ne parlons pas ici des algèbres non-commutatives d'opérateurs. Il s'agit en effet d'un thème qui n'acquiert chez Lautman de signification philosophique qu'à travers la physique quantique.
18. Loi [26], p. 9.
19. Ibid.
20. Ibid.
21. Ibid.

Lautman a prophétiquement compris que la conception *structurale* (hilbertienne) des mathématiques, loin de conduire à un nominalisme et à un relativisme conventionnalistes, conduisait au contraire à une nouvelle forme – sophistiquée (en fait transcendantale) – de réalisme. Mais en mettant ainsi l'accent sur l'autonomie, l'unité, la valeur philosophique, le "réel"≫ idéal, le rapport à la réalité empirique, et la portée objective des mathématiques, il s'est écarté des tendances dominantes de l'épistémologie de son temps.

3.1.1 Dialectique et schématisme généralisé

Dialectique, sa conception s'écarte apparemment de l'interprétation traditionnelle du kantisme et, sur bien des points, de Kant lui-même. D'une part, elle admet, avec Descartes et Husserl, une intuition intellectuelle et eidétique. D'autre part, elle repousse une conception anhistorique et non mathématique de l'a priori. Ainsi que le note Maurice Loi

> "Kant sépare et oppose complètement les mathématiques, non seulement à la métaphysique, mais à la philosophie tout entière, et notamment à la logique. Ce contre quoi s'était déjà élevé avec vigueur Louis Couturat au début de ce siècle, y voyant une mutilation de l'esprit, une méconnaissance de la science et de la culture." [22]

Mais nous verrons que la situation est plus complexe, que la dialectique lautmanienne peut en fait, s'interpréter comme un approfondissement du *schématisme transcendantal* en termes mathématiques – i.e. de ce que Kant appelait lui-même *construction* de concept – et que, par cette opération, la dialectique se convertit en une *historicisation* d'a priori eidético-constitutifs et une *pluralisation* de l'Analytique transcendantale (cf. la section 5.2).

3.1.2 Platonisme et conventionnalisme

Idéaliste ("platonicienne"), elle s'oppose également à l'empirisme phénoméniste réduisant les mathématiques à n'être qu'une simple substruction formelle, sans portée objective, organisant systématiquement et économiquement des données empiriques théoriquement neutres.

> "Un empirisme facile tend parfois, actuellement, à s'installer dans la philosophie de la physique, d'après lequel une dissociation profonde devrait être établie entre la constatation des faits expérimentaux et la théorie mathématique qui les relie les uns aux autres. Toute la critique des sciences contemporaines montre la faiblesse philosophique d'une pareille attitude et l'impossibilité de considérer un résultat expérimental en dehors de l'armature mathématique où il prend son sens." (p. 145)

Formaliste et structurale au sens hilbertien, la conception lautmanienne s'oppose en particulier aux interprétations nominalistes, relativistes et sceptiques du conventionnalisme. Ce point est particulièrement délicat. Sur le plan de l'histoire des idées,

22. Ibid., p. 12.

il est vrai que Lautman est, avec Cavaillès, l'un des introducteurs militants de l'axiomatique allemande dans un contexte français dominé par les "intuitionnismes" et les "instrumentalismes" de Poincaré, Borel, Baire et Lebesgue. Tout en demeurant fidèle à certains aspects de l'idéalisme de son maître Brunschvicg, il a thématisé philosophiquement ce qui est devenu l'esprit bourbakiste. Mais, sur le plan philosophique, la question du conventionnalisme dépasse de très loin ces différences de tendances et ces conflits "d'écoles". D'autant plus que, étranger malgré ce qu'on a pu en dire à tout scepticisme et à tout relativisme, le conventionnalisme de Poincaré traite des rapports entre les mathématiques et les *a priori* eidético-constitutifs de l'ontologie régionale physique et peut donc être interprété en termes kantiens.

Il suffit pour cela de repartir du concept d'Esthétique transcendantale. On sait qu'il fait l'objet d'une double "exposition", l'exposition métaphysique exposant l'espace et le temps comme formes de l'intuition sensible et l'exposition transcendantale les exposant dans leur rapport aux mathématiques. C'est à travers cette dernière que les formes de l'intuition, auxquelles les phénomènes sont évidemment *a priori* conformes, en deviennent des *méthodes de détermination mathématique.* Pour bien marquer la différence, Kant introduit le concept *d'intuition formelle,* c'est-à-dire d'intuition pure déterminée comme objet. L'espace de la géométrie est plus qu'un continuum phénoménologique, plus qu'une forme de l'intuition. Comme intuition formelle conceptuellement déterminée, c'est également une forme *de l'entendement.* Mais Kant croyait qu'il n'existait qu'une seule détermination géométrique de l'espace phénoménologique (unicité de la géométrie euclidienne imposée par le principe d'inertie de la mécanique). Le développement des géométries non-euclidiennes lui a donné tort et a conduit nombre de philosophes ultérieurs à justifier à partir de là la liquidation du synthétique *a priori* dans les sciences. Le conventionnalisme propose une alternative à cette trop radicale conclusion anti-théorique. [23] Car le problème est en fait celui de la sous-détermination entre forme de l'intuition et intuition formelle. Pour devenir géométrique, *l'a priori* de l'espace sensible (l'espace représentatif) doit être *idéalisé.* Or, bien qu'empiriquement contraint, ce processus d'idéalisation est empiriquement(et expérimentalement) indécidable. Il relève d'une faculté formelle et *a priori* d'abstraction intellectuelle qui est autonome relativement à l'expérience sensible. Étant donnée la sous-détermination et de l'autre côté l'autonomie, il faut donc bien disposer d'un critère de choix pour effectuer la détermination, par exemple celui, pragmatique, de la "commodité" chez Poincaré. Si donc l'espace intuitif comme continuum phénoménologique (comme forme "amorphe" disait Poincaré) préexiste bien à l'expérience comme ce que les physiciens appellent aujourd'hui une "background structure" et est une condition de possibilité de son organisation, il n'en va pas de même de l'espace géométrique. Sa géométrie est conventionnelle, ni empirique ni nécessaire *a priori.* Mais cela ne l'empêche pas d'être empiriquement conditionnée et théoriquement *constitutive,* objectivement déterminante pour la physique.

23. Pour une brève présentation du conventionnalisme, cf. par exemple Février [21].

Rationaliste, la conception lautmanienne s'oppose également au logicisme du Cercle de Vienne qui représente pour elle une "démission que la philosophie des sciences ne doit pas accepter" (p. 285). En rétablissant le face-à-face dogmatique *(*i.e. précritique)

> "entre la connaissance rationnelle et l'expérience intuitive, entre l'*Erkennen* et l'*Erleben,* [le logicisme] supprime les liaisons entre la pensée et le réel." (*ibid.*)

Son nominalisme anti-théorique lui interdit toute élucidation philosophique de l'intelligibilité mathématique de l'univers. Dans tous ses écrits, Lautman est revenu de façon récurrente sur la limite philosophique et la méconnaissance du réel mathématique propres à l'empirisme et au positivisme logiques qui

> "séparent comme à la hache les mathématiques et la réalité." (p. 145)

Dès l'introduction de sa thèse, il affirme par exemple :

> "Pour Wittgenstein et Carnap, les mathématiques ne sont plus qu'une langue indifférente au contenu qu'elle exprime. Seules les propositions empiriques se réfèreraient à une réalité objective, et les mathématiques ne seraient qu'un système de transformations formelles permettant de relier les unes aux autres les données de la physique. Si l'on essaie de comprendre les raisons de cet évanouissement progressif de la réalité mathématique, on peut être conduit à conclure qu'il résulte de l'emploi de la méthode déductive. À vouloir construire toutes les notions mathématiques à partir d'un petit nombre de notions et de propositions logiques primitives, on perd de vue le caractère qualitatif et intégral des théories constituées." (pp. 23-24)

Et en ouverture de sa communication *Mathématique et Réalité* au fameux Congrès International de Philosophie Scientifique de 1935, il précise ainsi sa critique :

> "Les logiciens de l'Ecole de Vienne prétendent que l'étude formelle du langage scientifique doit être le seul objet de la philosophie des sciences. C'est là une thèse difficile à admettre pour ceux des philosophes qui considèrent comme leur tâche essentielle d'établir une théorie cohérente des rapports de la logique et du réel. Il y a un réel physique et le miracle à expliquer, c'est qu'il soit besoin des théories mathématiques les plus développées pour l'interpréter. Il y a de même un réel mathématique et c'est un pareil objet d'admiration de voir des domaines résister à l'exploration jusqu'à ce qu'on les aborde avec des méthodes nouvelles. (...) Une philosophie des sciences qui ne porterait pas tout entière sur l'étude de cette solidarité entre domaines de réalité et méthodes d'investigation serait singulièrement dépourvue d'intérêt. (...) Les logisticiens de l'Ecole de Vienne affirment toujours leur plein accord avec l'école d'Hilbert. Rien n'est pourtant plus discutable. Dans l'école logistique, à la suite de

> Russell, on s'efforce de trouver les constituants atomiques de toutes les propositions mathématiques. (...) La notion de nombre y joue un rôle capital et ce rôle est encore augmenté par l'arithmétisation de la logique à la suite des travaux de Gödel et de Carnap. (...) L'axiomatisation d'Hilbert et de ses élèves, loin de vouloir ramener l'ensemble des mathématiques à n'être qu'une promotion de l'arithmétique, tend au contraire à dégager pour chaque domaine étudié un système d'axiomes tel que de la réunion des conditions impliquées par les axiomes surgissent à la fois un domaine et des opérations valables dans ce domaine. (...) La considération d'une mathématique purement formelle doit donc laisser la place au dualisme d'une structure topologique et de propriétés fonctionnelles en relation avec cette structure. (...) L'objet étudié n'est pas l'ensemble des propositions dérivées des axiomes, mais des êtres organisés, structurés, complets, ayant comme une anatomie et une physiologie propres. (...) Le point de vue qui l'emporte ici, c'est celui de la synthèse des conditions nécessaires et non celui de l'analyse des notions premières." (pp. 281-283)

3.2 Le structuralisme et le réel

Conception structurale des mathématiques, la conception de Lautman se réclame donc de l'axiomatique hilbertienne, axiomatique non constructiviste qui

> "substitue à la méthode des définitions génétiques celle des définitions axiomatiques, et loin de vouloir reconstruire l'ensemble des mathématiques à partir de la logique, introduit au contraire, en passant de la logique à l'arithmétique et de l'arithmétique à l'analyse, de nouvelles variables et de nouveaux axiomes qui élargissent à chaque fois le domaine des conséquences." (p. 26)

Née

> "du sentiment que dans le développement des mathématiques s'affirme une réalité que la philosophie mathématique a pour fonction de reconnaître et de décrire" (p. 23),

reprenant à Brunschvicg

> "l'idée que l'objectivité des mathématiques [est] l' uvre de l'intelligence, dans son effort pour triompher des résistances que lui oppose la matière sur laquelle elle travaille" (p. 25),

et posant que

> "entre la psychologie du mathématicien et la déduction logique, il doit y avoir place *pour une caractérisation intrinsèque du réel*" (p. 26, nous soulignons),

elle est même, plus précisément, à la fois axiomatique-structurale et dynamique. Cette synthèse d'un réel qui

> “participe à la fois du mouvement de l’intelligence et de la rigueur logique, sans se confondre ni avec l’un ni avec l’autre” (p. 26)

est le but visé par Lautman. Elle ne va évidemment pas de soi car

> “la conception structurale et la conception dynamique des mathématiques semblent de prime abord s’opposer : l’une tend en effet à considérer une théorie mathématique comme un tout achevé, indépendant du temps, l’autre au contraire ne la sépare pas des étapes temporelles de son élaboration ; pour la première, les théories sont comme des êtres qualitativement distincts les uns des autres, tandis que la seconde voit en chacune une puissance infinie d’expansion hors de ses limites et de liaison avec les autres, par quoi s’affirme l’unité de l’intelligence.” (p. 27)

C’est en tant que structurales, dans le mouvement autonome et historique d’élaboration de leurs théories, que les mathématiques réalisent des Idées dialectiques et, à travers elles, paraissent

> “raconter, mêlée aux constructions auxquelles s’intéresse le mathématicien, une autre histoire plus cachée, et faite pour le philosophe.” (p. 28)
> “Des résultats partiels, des rapprochements arrêtés à mi-chemin, des essais qui ressemblent encore à des tâtonnements s’organisent sous l’unité d’un même thème, et laissent apercevoir dans leur mouvement une liaison qui se dessine entre certaines idées abstraites, que nous proposons d’appeler dialectiques.” (*ibid.*)
> “Nous n’entendons pas par Idées des modèles dont les êtres mathématiques ne seraient que des copies, mais, au véritable sens platonicien du terme, des schémas de structure selon lesquels s’organisent les théories effectives.” (p. 204)

Ces schémas de structure établissent, comme dans toute dialectique, des liaisons spécifiques entre notions contraires : local/global, intrinsèque/extrinsèque, essence/existence, continu/discontinu, fini/ infini, algèbre/analyse, etc. Ils constituent avec les faits, les êtres et les théories mathématiques, une couche *sui generis* du réel mathématique.

> “On peut définir la nature de la réalité mathématique de quatre points de vue différents : le réel, ce sont tantôt les faits mathématiques, tantôt les êtres mathématiques, tantôt les théories et tantôt les Idées qui dominent ces théories. Loin de s’opposer, ces quatre conceptions s’intègrent naturellement les unes dans les autres : les faits consistent dans la découverte d’êtres nouveaux, ces êtres s’organisent en théories et le mouvement de ces théories incarne le schéma des liaisons de certaines Idées.” (p. 135)

Cela dit, le point clef de l’idéalisme lautmanien est que, si une Dialectique du Concept domine bien les mathématiques (et, par là même, les rend intrinsèquement solidaires de l’histoire de la culture), elle n’existe pourtant que mathématiquement réalisée et historicisée,autrement dit, que "la compréhension des Idées de cette Dialectique se prolonge nécessairement en genèse de théories mathématiques effectives." (p. 203)

Lautman insiste beaucoup sur ce point qui seul peut faire échapper sa conception à un idéalisme subjectif naïf.

"Cherchant à déterminer la nature de la réalité mathématique, nous avons montré (...) que l'on pouvait interpréter les théories mathématiques comme une matière de choix destinée à donner un corps à une dialectique idéale. Cette dialectique semble constituée principalement par des couples de contraires et les Idées de cette dialectique se présentent dans chaque cas comme le problème des liaisons à établir entre notions opposées. *La détermination de ces liaisons ne se fait qu'au sein des domaines où la dialectique s'incarne.*" (p. 253, nous soulignons)

On pourrait dire que, en quelque sorte, la dialectique du concept et les mathématiques qui lui donnent corps entretiennent selon Lautman un rapport "d'exclusion interne". En vertu de "l'union intime" et de "l'indépendance complète" les corrélant (et cela sans paradoxe),

"les théories mathématiques se développent par leur force propre, dans une étroite solidarité réciproque et sans référence aucune aux Idées que leur mouvement rapproche." (p. 134)

3.3 Compréhension et genèse

Comme l'a souligné Gilles Deleuze [24], cela conduit naturellement à une philosophie des *problèmes.* Les Idées dialectiques sont purement problématiques (non déterminantes d'objet) et donc, comme telles, essentiellement incomplètes (décomplétées de ce qui les mène à l'existence). Elles

"ne constituent qu'une problématique relative à des situations éventuelles de l'existant"

et manifestent donc "une insuffisance essentielle" (p. 211). C'est pourquoi

"les schémas logiques (les Idées travaillant les théories) *ne sont pas antérieurs à leur réalisation au sein d'une théorie* ; ilmanque en effet, à ce que nous appelons (...) l'intuition extra-mathématique de l'urgence d'un problème logique, une matière à dominer pour que l'idée de relations possibles donne naissance au schéma de relations véritables." (p. 142, nous soulignons)

C'est pourquoi aussi, chez Lautman, la philosophie mathématique

24. Cf. Deleuze [13], pp. 209-212. Avec Ferdinand Gonseth et plus récemment Jean Largeault, Gilles Deleuze est l'un des (trop) rares philosophes à avoir mesuré l'importance de Lautman.

> "ne consiste pas tant à retrouver un problème logique de la métaphysique classique au sein d'une théorie mathématique, qu'à appréhender globalement la structure de cette théorie pour dégager le problème logique qui *se trouve* à *la fois défini et résolu par l'existence même de cette théorie*." (p. 142-143, nous soulignons)

La conséquence fondamentale en est que la constitution de nouveaux schémas logiques et le dévoilement des Idées dépendent du progrès des mathématiques elles-mêmes. La relation entre les Idées problématiques incomplètes et leurs réalisations spécifiques est identifiée par Lautman à un passage de l'essence à l'existence. Tirant les conséquences extrêmes de l'idéalité des entités mathématiques et de la nature de la pensée comme pensée de l'être, Lautman fait de la *compréhension* des Idées, la source de la *genèse* des théories réelles. En "s'incarnant" dans les théories effectives, les Idées s'y réalisent comme fondement, et donc – dialectiquement – comme raison d'existence.

> "La pensée s'engage nécessairement dans l'élaboration d'une théorie mathématique dès qu'elle veut résoudre (...) un problème susceptible d'être posé de façon purement dialectique, mais il n'est pas nécessaire que les exemples soient pris à tel ou tel domaine, et en ce sens, les diverses théories en lesquelles une même Idée s'incarne, trouvent pareillement en elle la raison de leur structure et la cause de leur existence, leur principe et leur origine." (p. 226)

Il est essentiel de noter que, pour cette question, Lautman se réfère explicitement à Heidegger. Le passage de l'essence à l'existence,

> "le prolongement d'une analyse de l'essence en genèse des notions relatives à l'existant" (p. 206)

et donc la transformation de la compréhension d'un sens en genèse d'objets, reprend la "différence ontologique" heideggerienne entre être et étant. Lautman y insiste beaucoup, en particulier dans les *Nouvelles Recherches.*

> "Comme dans la philosophie de Heidegger, on peut voir dans la philosophie des mathématiques, telle que nous la concevons, l'activité rationnelle de fondement se transformer en genèse des notions relatives au réel." (p. 226)

On rejoint ainsi la réinterprétation transcendantale de l'ontologie comme constitution d'objectivités. Pour Lautman, et cela pose de sérieux problèmes d'interprétation (nous y reviendrons), la dialectique des Idées est objectivement constituante. Autrement dit, elle assume chez lui la fonction d'une Analytique catégoriale *historicisée.* On peut mettre en parallèle les corrélations Idées-théories et ontologique-ontique parce que

> “la constitution de l’être de l’existant, sur le plan ontologique, est inséparable de la détermination, sur le plan ontique, de l’existence en fait d’un domaine où prennent vie et matière les objets d’une connaissance scientifique.” (p. 206)

Ainsi transcendantalement comprise, la transformation de la compréhension en genèse permet d’articuler entre elles la transcendance des Idées et l’immanence des schémas de structure associés.

> “Il existe (...) un lien intime entre la transcendance des Idées et l’immanence de la structure logique de la solution d’un problème dialectique au sein des mathématiques ; ce lien, c’est la notion de genèse qui nous le donne.” (p. 212)

Plus précisément, la genèse est ici un rapport au fondement et à l’origine (comme dans toute dialectique) :

> “L’ordre impliqué par la notion de genèse n’est pas (...) l’ordre de la reconstruction logique des mathématiques, au sens où des axiomes initiaux d’une théorie découlent toutes les propositions de la théorie, car la dialectique ne fait pas partie des mathématiques, et ses notions sont sans rapport avec les notions primitives d’une théorie. (...) L’antériorité de la Dialectique (est) celle du ‘souci’, ou de la ‘question’ par rapport à la réponse. Il s’agit là d’une antériorité ‘ontologique’ pour reprendre l’expression de Heidegger, exactement comparable à celle de ‘l’intention’ par rapport au ‘dessein’.” (p. 210)

On peut se demander si, pour Lautman, il n’y a pas ici croisement entre une dialectique historique et une phénoménologie de la corrélation. Tout se passe comme si, dans leur “urgence”, les problèmes formulés par les Idées admettaient pour corrélats les théories dans lesquelles ils se concrétisent et s’historialisent. Les Idées reflètent une prise de conscience :

> “Le philosophe n’a ni à dégager des lois, ni à prévoir une évolution future ; son rôle consiste uniquement à prendre conscience du drame logique qui se joue au sein des théories. Le seul élément *a priori* que nous concevions est donné dans l’expérience de cette urgence des problèmes, antérieure à la découverte de leurs solutions.” (p. 142)

C’est ce contenu en quelque sorte “intentionnel”des Idées qui les rend à la fois transcendantes et immanentes au champ mathématique.

> “En tant que problèmes posés, relatifs aux liaisons que sont susceptibles de soutenir entre elles certaines notions dialectiques, les Idées de cette Dialectique sont certainement *transcendantes* (au sens habituel) par rapport aux mathématiques. Par contre, comme tout effort pour apporter une réponse au problème de ces liaisons est, par la nature même des choses, constitution de théories mathématiques effectives, il est justifié

d'interpréter la structure d'ensemble de ces théories en termes *d'immanence* pour le schéma logique de la solution cherchée." (p. 212)

3.4 Métamathématique, différence ontologique, imitation et expression

En tant que corrélation entre le "mouvement propre" des théories mathématiques et "les liaisons d'idées qui s'incarnent dans ce mouvement", en tant que réalité génétique définie de façon transcendantale "comme la venue des notions relatives au concret au sein d'une analyse de l'idée" (p. 205), la "réalité inhérente" aux mathématiques (p. 140) se trouve pensée par Lautman à partir de traditions philosophiques majeures qu'il fait interférer de façon originale.

(i) La tradition platonicienne de la participation du "sensible" (ici les idéalités mathématiques) à 1'"intelligible" (ici les Idées). Lautman la suit jusqu'à la métaphysique leibnizienne.

(ii) La tradition kantienne de la constitution. La situation est ici assez complexe dans la mesure où le rapport entre "sensible" et "intelligible" y devient celui entre Esthétique transcendantale et Analytique et où les mathématiques y jouent un rôle constitutif et non pas dialectique. Or, chez Lautman, comme nous venons de le voir, à travers l'histoire effective des mathématiques, une dialectique du concept devient transcendantalement constituante, ce qui est évidemment une hérésie relativement à Kant. Un tel geste théorique entraîne de graves difficultés d'évaluation. Car, bien que platonicienne, la dialectique lautmanienne n'est évidemment pas sans rapport avec la dialectique transcendantale (il suffit de penser au lien de l'opposition thématique continu/discret avec la seconde antinomie). La rendre constituante c'est donc en quelque sorte *historiciser l'a priori* et, plus précisément, dans la mesure où les mathématiques exercent une fonction schématisante relativement aux catégories des diverses ontologies régionales, historiciser le schématisme.

(iii) D'où un rapport fort ambigu de Lautman à Hegel. On retrouve chez Lautman la conception spéculative hégélienne de la contradiction comme vie du concept et dynamique de la raison. Mais alors que Hegel affirme la contradiction dans le seul concept indépendamment de tout rapport à l'objectivité formelle kantienne et, donc, à une mathématique et à une physique, Lautman défend au contraire l'opération du spéculatif dans le réel physico-mathématique lui-même.

(iv) Enfin, nous l'avons vu, il existe également une composante assez strictement phénoménologique dans la conception lautmanienne du réel mathématique. Comme Cavaillès, Lautman en est revenu à la conception critico-phénoménologique de l'objectivité, c'est-à-dire à la question de la logique transcendantale. Mais il critique dans la phénoménologie une philosophie de la conscience régressant réflexivement vers une *subjectivité* constituante.

Pour tenter de clarifier ces divers points, donnons quelques précisions sur trois motifs particulièrement délicats.

3.4.1 Le passage de la métamathématique à la métaphysique

La référence au structuralisme axiomatique de Hilbert est fondatrice chez Lautman. Mais par un geste authentiquement spéculatif, Lautman va considérablement élargir le champ et la portée de la métamathématique.

La métamathématique examine les théories mathématiques du point de vue de concepts comme ceux de non-contradiction ou de complétude, qui sont non définis – "ceci est capital" (p. 206) – dans les formalismes auxquels ils s'appliquent. Or de tels concepts sont plus nombreux qu'il ne peut paraître. Il existe

> "d'autres notions logiques, susceptibles également d'être éventuellement reliées l'une à l'autre au sein d'une théorie mathématique et qui sont telles que, contrairement aux cas précédents (de non-contradiction et de complétude), les solutions mathématiques des problèmes qu'elles posent puissent comporter une infinité de degrés." (p. 28)

Les Idées dialectiques repensent donc la métamathématique en termes métaphysiques et, ce faisant, élargissent la régulation métaphysique à la mathématique.

3.4.2 La question du platonisme

Dans la conclusion de sa thèse principale, à propos de l'ouvrage de Pierre Boutroux : *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'Antiquité et dans les Temps Modernes,* Lautman aborde la question du platonisme, c'est-à-dire de la réalité des idéalités mathématiques. Pour Boutroux, comme pour Brunschvicg et la grande majorité des mathématiciens, il existe un réel mathématique objectif. Ce n'est pas parce que ce réel n'est pas celui de "la perception extérieure" ou du "sens intime" (p. 24) que les mathématiques ne sont pour autant qu'un langage symbolique vide de sens. Il existe des "faits" mathématiques (l'irrationalité de $\sqrt{2}$, la transcendance de e et de π, le fait que l'intégrale abélienne $\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$ n'est pas élémentairement intégrable si $P(x)$ est un polynôme de degré ≥ 3, la vérité ou la fausseté de la conjecture de Riemann) qui apparaissent comme "indépendants de la construction scientifique" (p. 136) et comme dotés d'une transcendance objective analogue à celle des faits physiques. C'est pourquoi, selon Boutroux,

> "nous sommes forcés d'attribuer une objectivité véritable aux *notions* mathématiques." (p. 136)

L'aporie du platonisme provient alors du conflit réalisme/nominalisme dans la conception de l'objectivité.

(i) Si l'on conçoit l'objectivité comme une extériorité purement transcendante, on adoptera, avec Boutroux, une position réaliste rendant les faits mathématiques intuitionnables indépendamment de tout langage permettant de les formuler :

> "Le fait mathématique est indépendant du vêtement logique ou algébrique sous lequel nous cherchons à le représenter." (p. 139)

(ii) Si l'on conçoit au contraire l'objectivité comme une pure construction, on adoptera, avec les logicistes, une position nominaliste faisant du réel mathématique un pur être de langage.

Mais le réel mathématique est évidemment plus subtil que ne le laisse penser une antinomie aussi naïve.

(i) D'abord l'objectivité – qui n'est pas douteuse – des idéalités mathématiques ne peut pas être séparée des langages formels qui les expriment car il existe

> "une dépendance essentielle entre les propriétés d'un être mathématique et l'axiomatique du domaine auquel il appartient." (p. 139)

(ii) Ensuite, comme nous l'avons vu plus haut, les faits mathématiques s'organisent en concepts, puis en théories et

> "le mouvement de ces théories incarne le schéma des liaisons de certaines Idées." (p. 135)

À ce titre, le réel mathématique dépend non seulement de la base factuelle des faits mathématiques mais également "de l'intuition globale d'un être suprasensible" (p. 136). Il faut ajouter à cela un aspect plus technique du platonisme qui s'émancipe de la contrainte de devoir maîtriser finitairement les entités mathématiques infinies :

> "Dans le débat ouvert entre formalistes et intuitionnistes, depuis la découverte du transfini, les mathématiciens ont pris l'habitude de désigner sommairement sous le nom de platonisme toute philosophie pour laquelle l'existence d'un être mathématique est tenue pour assurée, alors même que cet être ne pourrait être construit en un nombre fini d'étapes." (p. 143)

Mais malgré les délicats problèmes constructivistes associés, il ne s'agit là encore que d'une "connaissance superficielle du platonisme" (*ibid.*).

En ce qui nous concerne, la réponse la plus adéquate à l'aporie du platonisme nous paraît être le principe husserlien de corrélation noèse-noème permettant de fonder la transcendance des objets dans l'immanence des actes. Selon ce principe, des règles de synthèses noétiques d'actes (que ce soit des règles syntaxiques normant des usages symboliques comme en théorie des langages formels ou des règles eidéticoconstitutives comme en phénoménologie transcendantale) peuvent admettre pour corrélats noématiques des idéalités objectives qui "résistent" et manifestent tous les caractères de réalité que manifestent les objets transcendants. En dehors d'une pensée de la corrélation, soit on fait des noèmes des composantes réelles (non intentionnelles) des actes et l'on aboutit alors à un idéalisme subjectiviste, soit on les hypostasie en objets transcendants subsistants et l'on aboutit alors à un réalisme ontologique.

Dans *Les Idéalités mathématiques*, Jean-Toussaint Desanti a bien montré sur quelques exemples (construction du continu et théorie cantorienne des ensembles de points de $\mathbb{R}$) comment développer une analyse des objets mathématiques comme objets intentionnels. A la suite de Husserl, de Cavaillès et de Bachelard, il a montré comment on extrait par abstraction hors des champs d'objets des "schèmes normatifs" communs et des "noyaux opératoires" correspondant à autant de concepts structuraux axiomatisables, et comment on transforme par thématisation des propriétés en de nouveaux objets. Les objets sont des corrélats d'actes et, par réflexion, les actes sont instaurateurs de positions d'objets. Les objets ainsi construits ne sont pas intuitionnables en tant que tels. Ils n'ont pas "d'essence transparente". Ce sont des objets rationnels légalisés, axiomatiquement dominés mais non donnés intuitivement (critique des intuitions donatrices husserliennes). [25] Desanti insiste sur ce point crucial en distinguant comme espèces d'actes des actes de "position de noyaux explicites" et des actes de "position d'horizon". Dans les actes de position de noyaux explicites, il y a

> "saisie du noyau dans une conscience d'évidence apodictique et directe, offrant le caractère réflexif immanent de sa propre évidence."

Il y a bien intuition mais celle-ci y est une *modalité d'acte* admettant pour corrélat objectal un "noyau explicite", un objet noématique et non pas un objet subsistant se donnant intuitivement en personne. L'objet y est un objet intentionnel seulement partiellement remplissable intuitivement, un objet dont la "transparence" est produite "dans la modalité de l'acte de position". L'évidence n'est donc pas ici "un mode d'appréhension spécifique", mais une position, c'est-à-dire le produit d'un procès de menée à l'évidence. Quand un acte de position (définitions, axiomes, etc.) "délimite le posé une fois pour toutes",

> "la conscience d'évidence qui vit réflexivement au c ur de l'acte n'est ici qu'un caractère phénoménologique immanent spécifique du mode d'installation, à ce moment de la constitution de l'objet, de la conscience au sein de son objet." [26]

Ainsi, par réflexion sur l'immanence des actes, les idéalités mathématiques apparaissent comme des objets intentionnels, c'est-à-dire comme des pôles noématiques, des pôles d'unité idéale, des pôles normatifs pour des enchaînements réglés d'actes. La réalité de leur existence "se constitue dans l'unité de trois moments" [27] : le moment de 1'objet hypothétique associé à des opérations et des procédures d'un certain type, le moment de l'objet comme pôle noématique d'unité et le moment de l'objet mathématique légalisé et axiomatisé. C'est le deuxième moment qui est essentiel dans la mesure où il opère le passage du premier au troisième. Or, en tant qu'intentionnel, il est extra-logique et extra-mathématique.

25. Cf. Desanti [14], pp. 48-49.
26. Ibid., p. 97.
27. Ibid., p. 84.

On peut donc dire que, en mathématiques structurales, l'axiomatique formalise l'intentionnalité. Ainsi que l'affirme Desanti, l'intentionnalité y est "le mode d'être de la conscience d'objet au cœur de ses objets". Le noyau intentionnel de l'objet est un mouvement de "double médiation" lié à la "bipolarité" de l'objet dans *l'a priori* de la corrélation. Il n'est

> "ni pure position d'idéalité normative, (...) ni simple conscience d'être assignée à un devenir non dominable."
> "Il est position de la pure possibilité des enchaînements d'actes capables d'effectuer, dans un champ d'intuition non encore dominé, les vérifications exigées par la position de l'idéalité normative."

L'expression de "noyau intentionnel" désigne ici

> "ce moment où la conscience d'objet saisit un objet comme l'unité essentielle d'une norme et d'un inachèvement, (...) le moment synthétique où l'objet manifeste la relation circulaire de son idéalité et de son devenir, (...) l'unité indéchirable d'une norme et d'un devenir." [28]

Sur cette base, Desanti a élaboré une analyse intentionnelle non seulement des objets mais également des théories et de la "conscience d'axiome". Celle-ci est essentielle pour préciser les solidarités profondes existant entre la phénoménologie husserlienne et l'axiomatique hilbertienne et permet de notablement clarifier – et selon nous, même de résoudre en partie – l'aporie du platonisme.

On peut considérer *Les Idéalités mathématiques* comme un complément à l'œuvre de Lautman dans la mesure où c'est précisément sur la question du "mouvement propre" des théories que l'analyse phénoménologique intentionnelle rejoint chez Lautman la dialectique platonicienne en une "description phénoménologique du souci d'un mode de liaison entre deux idées" (p. 142). Dans leur double statut de corrélats intentionnels et d'horizons de devenir, les théories mathématiques ne se développent pas linéairement "comme une extension indéfiniment progressive et unifiante" (p. 140).

> "[Elles] font plutôt figure d'unités organiques, et se prêtent à ces considérations métamathématiques globales qu'annonce l'œuvre de Hilbert." (*ibid.*)

A travers les Idées associées, "la vérité mathématique (...) participe du caractère temporel de l'esprit" (*ibid.*), car

> "les Idées ne sont pas les essences immobiles et irréductibles d'un monde intelligible." (p. 143)

Leur dialectique est, soulignons-le encore une fois, historique.

28. Ibid., pp. 92-93.

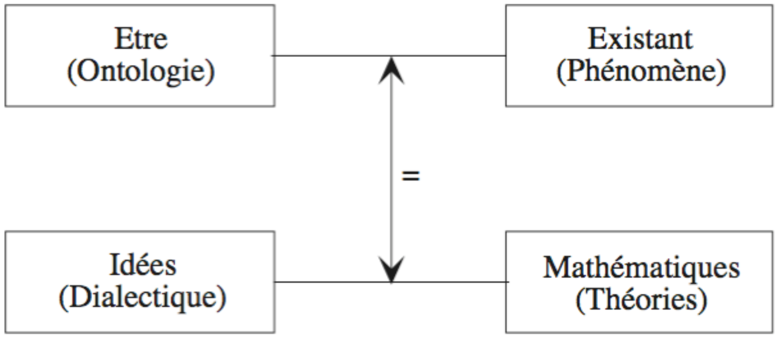

Figure 1 – L'analogie lautmanienne entre la "différence ontologique" être/étant et la relation entre les Idées dialectiques et les théories mathématiques.

3.4.3 La différence ontologique

En ce qui concerne le rapport entre compréhension et genèse (cf. la section 3.3) issu de la "domination" des mathématiques par une dialectique supérieure, Lautman se situe explicitement dans une perspective *transcendantale* :

> "cet engagement de l'abstrait dans la genèse du concret, c'est dans une interprétation "transcendantale" de la relation de domination qu'on peut le mieux en rendre compte" (p. 205).

Insistons pour la suite de notre propos sur le parallèle établi par Lautman : les Idées dialectiques sont aux théories mathématiques ce que l'être et le sens de l'être sont à l'étant et à l'existence de l'étant (différence ontologique) (cf. figure 1).

Le fait que "la compréhension adéquate" des Idées et de leurs "liaisons internes" soit "créatrice de systèmes de notions plus concrètes où s'affirment ces liaisons" répond à l'affirmation heideggerienne que

> "la production de notions relatives à l'existence concrète naît d'un effort de compréhension de concepts plus abstraits."

Autrement dit, "la venue des notions relatives au concret au sein d'une analyse de l'Idée" répond au fait que la vérité de l'être est "ontologique" et que l'existant qui se manifeste ne se révèle que conformément à la compréhension de la structure de son être. Par ce biais de la réinterprétation heideggerienne du platonisme et de la logique transcendantale, on retrouve l'historicité dans la mesure où, pour Heidegger, l'être s'identifie à l'"historialité" de son sens [29] :

29. Chez Heidegger, le terme "historialité" est réservé à la dynamique historique de l'être en tant que distincte de l'historicité de l'étant.

> "l'analyse conceptuelle aboutit nécessairement à projeter, comme au-devant du concept, les notions concrètes en lesquelles il se réalise ou s'historialise." (p. 206)

Il y aurait beaucoup à dire ici sur l'usage que fait Lautman de Heidegger sur le fond d'une remarquable absence de référence à Hegel.

(i) Certes, de même que Heidegger conçoit les systèmes métaphysiques comme autant de réponses à la question du sens de l'être, réponses orientées toutefois vers l'étant et non vers la compréhension de l'être qui y demeure impensé (jeu de voilement-dévoilement de l'*aléthéia*), de même Lautman conçoit les théories mathématiques comme autant de réponses à des Idées, réponses orientées toutefois vers les objets et les faits mathématiques et non vers la compréhension des Idées qui y demeurent impensées. Mais, ainsi que nous l'a fait remarquer Barbara Cassin, la différence ontologique ne peut être homologuée chez Heidegger à l'opposition entre Essence et Existence. Car celle-ci (comme l'opposition entre transcendance et immanence) est métaphysique. Or la différence ontologique heideggerienne entre être et étant n'est homologable à aucune opposition métaphysique. On ne peut donc utiliser aucune de celles-ci pour parler ni d'elle ni des rapports qu'elle entretient avec l'histoire des systèmes de réponses qu'elle engendre.

(ii) Il y a là un problème de métalangage qui a conduit, on le sait, Heidegger à rompre avec le style métaphysique. Il n'y a pas de métalangage apte à parler adéquatement de la différence ontologique.

(iii) Mais il faut remarquer que ce problème n'est pas pertinent pour Lautman. En effet dans la mesure où il traite de théories mathématiques et non de systèmes métaphysiques, les langages métaphysiques peuvent constituer pour lui, et constituent effectivement, nous l'avons vu, un métalangage adéquat.

(iv) Enfin, la référence heideggerienne accentue encore l'ambiguïté des rapports de Lautman à Platon, Hegel et Husserl dans la mesure où Heidegger entretient lui-même un rapport ambigu avec ces moments décisifs de la pensée. Il faudrait en particulier approfondir ici les analogies entre la dialectique hégélienne et l'historialité heideggerienne.

3.4.4 Imitation et expression

Si, dans sa conception des rapports entre réel mathématique et réalité empirique, Lautman se réclame plutôt des traditions kantienne et husserlienne, il semble toutefois que sa philosophie mathématique comporte, en plus de sa composante platonicienne-hegelienne, une composante leibnizienne. À plusieurs reprises en effet, il précise sa théorie de la genèse en utilisant les concepts d'imitation et d'expression. A propos des dialectiques fini/infini et continu/discontinu, il dit, en discutant l'exemple des espaces de Hilbert (qui généralisent aux espaces fonctionnels de dimension infinie la structure des espaces euclidiens de dimension finie) que :

> "la structure interne de l'infini *imite* celle du fini." (p. 197)

L'imitation est donc un rapport entre structure et structure et quand il y a imitation

> "l'analyse de certaines Idées dialectiques se prolonge en genèse d'une réalité distincte des Idées : les théories où ces Idées se réalisent." (p. 227)

De même, en discutant la façon dont la structure d'un groupe discontinu d'automorphismes du disque se trouve corrélée à la fonction automorphe associée, ou la façon dont la structure topologique d'une surface de Riemann se trouve corrélée aux intégrales abéliennes associées, il dit que

> "la structure d'un domaine fini et discontinu enveloppe l'existence d'un autre domaine continu ou infini qui se trouve ainsi exprimer l'existence de ce domaine fini auquel il est 'adapté'." (p. 197)

L'enveloppement-expression est un rapport entre structure et existence qui constitue également un principe de genèse.

> "Il est alors conforme à la théorie générale des genèses de définir également le passage de la structure du domaine à l'existence des représentations comme une genèse, puisque ce passage de l'essence à l'existence a bien lieu de la structure d'un être à l'affirmation d'existence d'autres êtres que celui dont la structure était primitivement en jeu." (pp. 227-228)

3.5 Le débat Lautman/Cavaillès du 4 février 1939

Ces quelques éléments de philosophie lautmanienne prennent un singulier relief lorsqu'on les observe à l'œuvre dans le débat d'une rare intensité qui a réuni Lautman et Cavaillès à la Société française de Philosophie. Étaient présents, entre autres, Henri Cartan, Paul Lévy, Maurice Fréchet, Charles Ehresmann et Jean Hyppolite. C'était le 4 février 1939.[30]

Cavaillès commence par rappeler la façon dont la métamathématique hilbertienne a internalisé le problème épistémologique des fondements en le transformant en un problème purement mathématique. Il soutient alors quatre thèses.[31]

(i) Il existe une solidarité – une *unité* – des mathématiques qui empêche de régresser jusqu'à un commencement qui serait absolu (critique à la fois du logicisme et d'une phénoménologie de l'origine développée dans le cadre d'une philosophie de la conscience).

(ii) Les mathématiques se développent suivant un devenir singulier, autonome et originairement imprévisible, donc authentiquement dialectique.

(iii) La résolution d'un problème est l'analogue d'une expérience s'effectuant, comme un programme, par la sanction d'actes réglés. L'activité mathématique est une activité expérimentale, autrement dit un système d'actes légalisés par des règles et soumis à des conditions qui en sont indépendantes.

30. Six ans jour pour jour avant l'ouverture de la Conférence de Yalta, fin d'une guerre qui verra les deux protaganistes mourir en martyrs de la Résistance.

31. L'on y reconnaîtra celles rappelées plus haut à la section sur le platonisme.

(iv) L'existence des objets est, en mathématiques, corrélative de l'actualisation d'une méthode. Elle est non catégorique [32] et procède de la réalité même de l'acte de connaissance. Comme corrélats d'actes, les objets projettent dans la représentation les étapes d'un développement dialectique. Leur évidence est conditionnée par la méthode elle-même.

À ces thèses qu'il partage en grande partie, Lautman répond en mettant l'accent sur la question du sens.La manifestation d'un existant en acte "ne prend tout son sens" que comme réponse à un problème préalable concernant la possibilité de cet existant et c'est pourquoi l'établissement de relations mathématiques effectives apparaît comme rationnellement postérieur au problème de la possibilité de telles liaisons en général. Lautman résume alors la façon dont la Dialectique idéale "offrant le spectacle" de la genèse du Réel à partir de l'Idée organise l'histoire concrète des mathématiques sous "l'unité de thèmes". C'est bien sûr sur la question du sens – autrement dit, de la participation à l'intelligible – que se fait jour son désaccord avec Cavaillès. Pour Cavaillès, il n'existe pas de caractères généraux constitutifs de la réalité mathématique. [33] Pour Lautman au contraire :

> "L'objectivité des êtres mathématiques ne révèle son sens véritable que dans une théorie de la participation des Mathématiques à une réalité plus haute et plus cachée, qui constitue (...) un véritable monde des Idées."

Les mathématiques sont des "mixtes" où s'opère dialectiquement un passage de l'essence à l'existence. Lautman le répète :

> "On passe insensiblement de la compréhension d'un problème dialectique à la genèse d'un univers de notions mathématiques et c'est à la reconnaissance de ce moment où l'Idée donne naissance au réel, que doit, à mon sens, viser la Philosophie mathématique."

Ici, la Dialectique se convertit naturellement en programme de recherche, programme ambitieux que Lautman formule avec une sobriété et une simplicité remarquables en l'inscrivant dans la tradition platonicienne, critique et phénoménologique de l'idéalisme.

> "On voit ainsi quelle doit être la tâche de la Philosophie mathématique et même de la Philosophie des Sciences en général. (...) Il y a à édifier la théorie des Idées, et ceci exige trois sortes de recherches.
> "1. Celles qui ressortissent à ce que Husserl appelle l'eidétique descriptive, c'est-à-dire ici, la description de ces structures idéales, incarnées dans les Mathématiques et dont la richesse est inépuisable.

32. Cavaillès tire ici des conséquences philosophiques des résultats de non catégoricité en théorie logique des modèles (paradoxe de Skolem, divergence syntaxe/sémantique, existence de modèles non standard). Pour une introduction élémentaire à ces questions, on pourra consulter [28].

33. Nous avons vu dans notre *Introduction* que, dans *Sur la togique et la théorie de la science*, Cavaillès s'était toutefois ouvert à cette problématique lautmanienne.

> "2. La seconde des tâches assignables à la Philosophie mathématique [est] d'établir une hiérarchie des Idées et une théorie de la genèse des Idées les unes à partir des autres, comme l'avait envisagé Platon.
> "3. Il reste enfin, et c'est la troisième des tâches annoncées, à refaire le *Timée,* c'est-à-dire à montrer, au sein des Idées elles-mêmes, les raisons de leurs applications à l'univers sensible."

Lors du débat, les opinions ont été largement défavorables à Lautman, les mathématiciens s'avouant gênés par la "spéculation philosophique" et ses "subtilités" incompréhensibles, et les philosophes reprochant une certaine imprécision dans l'usage du terme de "dialectique" [34]. Il y avait clairement consensus pour admettre que la philosophie devait, dans sa confrontation avec les mathématiques, se soumettre ou se démettre. Hyppolite qui était censé représenter la philosophie, alla même jusqu'à affirmer :

> "Quant à la thèse de M. Lautman, on pourrait craindre en l'adoptant, de voir les notions mathématiques s'évaporer, d'une certaine façon, dans de purs problèmes théoriques qui les dépassent."

Dans leurs réponses (en particulier à Fréchet qui avait soutenu des thèses réalistes "naïves"), Cavaillès et Lautman se situent tous deux dans une perspective transcendantale. D'abord Cavaillès :

> "Je cherche, au moyen des Mathématiques, à savoir ce que cela veut dire que connaître, penser ; c'est au fond, très modestement repris, le problème que se posait Kant. La connaissance mathématique est centrale pour savoir ce qu'est la connaissance."

Lautman ensuite :

> "La genèse dont j'ai parlé est transcendantale et non empirique, pour reprendre le vocabulaire de Kant."

Dire (comme l'avait affirmé Fréchet) que c'est le réel (physique) qui engendre l'Idée (mathématique) et non l'inverse, c'est penser l'Idée par abstraction et, donc, la confondre avec un concept empirique. Or, comme "conception des problèmes de structure", les Idées sont des concepts transcendantaux autonomes "par rapport à l'élaboration contingente des solutions mathématiques particulières". [35]

34. Effectivement, comme nous l'a également fait remarquer Barbara Cassin, la "dialectique" que Platon a développée dans *La République* concernait la contemplation des Idées et, à ce titre, ne possédait pas ce caractère controversial et antinomique qu'elle possède dans la tradition métaphysique d'Aristote à Kant. Autant Lautman est authentiquement platonicien dans sa conception de la participation du sensible à l'intelligible, autant il semble devenir subrepticement kantien et/ou hégélien dans sa conception de la Dialectique comme Antithétique transcendantale.

35. Quant à nous, la critique que nous ferons à Lautman est de ne pas bien distinguer les concepts transcendantaux en catégories déterminantes et en Idées rationnelles. Dans la justification : "M. Hyppolite me dit que poser un probléme, c'est ne rien concevoir ; je lui réponds, après Heidegger, que c'est déjà délimiter le champ de l'existant", on voit s'amalgamer une Analytique catégoriale ("délimiter le champ de l'existant") avec une Antithétique.

Enfin, dans une réponse finale à Cavaillès, Lautman revient encore une fois sur la question du sens, sur le "spectacle admirable" d'une réalité idéale transcendant les mathématiques et, surtout, indépendante de l'activité de l'esprit (opposition entre une Dialectique du concept et une philosophie de la conscience) :

> "Le point précis de notre désaccord porte, non pas sur la nature de l'expérience mathématique [36] mais sur son sens et sa portée."
> "Je crois qu'il faut trouver dans l'expérience autre chose et plus que l'expérience. (...) Il faut saisir, au-delà des circonstances temporelles de la découverte, la réalité idéale qui est seule capable de donner son sens et sa valeur à l'expérience mathématique."

Au-delà de son émouvante signification spirituelle, ce débat historique montre que le nœud de la Dialectique consiste à faire équivaloir la problématique de la constitution des réalités objectives avec une herméneutique du devenir historique autonome des mathématiques. Ce point ne peut être éclairci qu'à travers une évaluation de la philosophie lautmanienne qui pourrait pallier son tragique arrêt prématuré.

4 Dialectique métamathématique et analyse thématique

Comment évaluer la conception lautmanienne, tant sur le plan de la philosophie mathématique que sur celui de la philosophie transcendantale (rapport entre métaphysique, réalité et mathématiques dans le cadre d'une doctrine de la constitution des objectivités) ?

Une des premières remarques que l'on pourrait faire serait de noter que Lautman a développé une analyse compréhensive – *herméneutique* en un sens original – des mathématiques, que l'on pourrait qualifier de *thématique* au sens de Holton.

À partir de l'étude historique de nombreux cas concrets, Gerald Holton a redécouvert empiriquement et inductivement l'existence de prémisses et de présupposés dialectiques sous-jacents aux représentations et aux pratiques scientifiques et agissant inconsciemment dans la genèse de l'œuvre des savants. Il a qualifié de *themata* ces formations de sens en général occultées et a élaboré une version psycho-historique et socio-culturelle de la Dialectique transcendantale. Comme systèmes de conflits entre notions opposées – comme Idées problématiques – les themata développent une *antithétique* de la raison objective. Ils sont non-réfutables et manifestent une certaine stabilité même si, évidemment, l'évolution des sciences conduit à de considérables variations de leur détermination.

Selon Holton, l'analyse thématique des conflits (voire des antinomies) rationnels discret/continu, simplicité/complexité, analyse/synthèse, mécanisme/finalisme, déterminisme/indéterminisme, holisme/réductionnisme, constance/évolution/transition brusque, etc., relève d'une investigation de l'imagination scientifique et peut permettre de rendre compte, de par leur nature dialectique, des conflits d'écoles. Son orientation est donc psychologique (imagination), sociologique (controverse) et historique (étude empirique de cas), bref anthropo-sémiotique plutôt qu'épistémologique

36. Tous les deux sont des structuralistes hilbertiens.

et gnoséologique. Comme l'a noté Angèle Kremer Marietti [37], son point de vue est celui d'une "anthropologie de la science reposant sur une épistémologie essentiellement génétique". Il vise l'activité du savant comme

> "une élaboration de symbolisation, sur la base d'un réel appréhendé selon certaines formes acceptables dans l'état d'une société et d'une histoire."

En ce sens, il est assez proche d'une analyse herméneutico-communicationnelle (par exemple habermassienne) des croyances réprimées par la formation de consensus.

On pourrait alors dire que, dans un contexte où triomphait le dogmatisme positiviste, Lautman a jeté les bases d'une *analyse thématique des mathématiques pures.* Cela est déjà en soi d'une grande importance :

(i) pour l'histoire des idées ;

(ii) pour l'étude de l'imagination mathématique dans ses rapports aux diverses formations symboliques socio-culturelles (dépassement de l'opposition traditionnelle entre les points de vue respectivement internaliste et externaliste) ;

(iii) pour le dégagement des solidarités que la créativité mathématique entretient avec le mouvement de la pensée.

Mais cela demeure très largement insuffisant. En effet, contrairement à celui de Holton, le projet de Lautman n'est pas anthropologique et historiciste mais métaphysique et rationaliste. Il n'est pas orienté vers l'activité du sujet épistémique mais vers la réalité de l'objet théorique. Il possède, nous l'avons vu, une portée constituante et doit être évalué en termes transcendantaux. Mais parler en termes de Logique transcendantale (d'une logique de l'objectivité de l'objet de connaissance) d'une Dialectique du concept immanente au développement des théories objectives, c'est admettre un fond *aporétique* du réel. C'est admettre ce que René Thom, précisément à propos de l'analyse thématique de Holton, a appelé des "apories fondatrices" constitutives du réel.

Dans son article "Thèmes de Holton et apories fondatrices" [38], René Thom a indiqué comment les *themata* pouvaient être reconstruits en combinant les dyades unité/diversité et étendue/qualité à l'action du temps dans le divers empirique. C'est principalement la tension irréductible entre les principes métaphysiques antagonistes d'unification et de diversification qui se trouve à l'origine d'apories irréductibles (comme le discret et le continu, l'espace et la matière, etc.) dont certaines théories spécifiques et effectives peuvent être considérées comme autant de solutions partielles, toujours locales et toujours provisoires. Nous retrouvons bien là, implicitement, le concept lautmanien d'Idées dialectiques problématiques.

Mais la difficulté principale demeure, celle du croisement *entre objectivité et sens,* c'est-à-dire entre une pensée transcendantale de la constitution d'objets et une pensée herméneutique du devenir historique des théories. C'est ce dernier point que nous voudrions maintenant préciser.

37. Article "Holton" du *Dictionnaire des Philosophes* [15].
38. Thom [38].

5 Mathématiques et réalité : le schématisme transcendantal comme symbolisation

Ces points techniques sont très délicats et mériteraient d'être développés en plus grand détail . Le lecteur intéressé par des précisions pourra se référer aux articles [30], [32], [33], [34] ,[35].

5.1 La question centrale

Nous considérons en fait qu'Albert Lautman a esquissé l'une des rares conceptions philosophiques – peut-être même la seule – des rapports entre les mathématiques et la réalité qui soit compatible avec les deux caractéristiques suivantes de notre modernité :

(i) Côté mathématiques, leur autonomisation et leur unification, c'est-à-dire non seulement leur arrachement au monde sensible des données antéprédicatives (dont on a considéré pendant longtemps qu'elles dérivaient par idéalisations et abstractions successives) mais également leur émancipation de l'expérience empirique (cf. section 3.2).

(ii) Côté réalité, la possibilité de généraliser à diverses ontologies régionales, conformément au programme de la phénoménologie constitutive, la doctrine critique de la constitution des objectivités.

La question centrale est, rappelons-le, la suivante (cf. sections 3.3 et 3.4) : comment, dans leur être et leur devenir autonomes, les mathématiques peuvent-elles continuer à s'impliquer de façon déterminante dans des champs d'objectivité transcendantalement constitués ? Dans la conception transcendantale de l'objectivité, une métaphysique vient s'articuler sur une physique à travers trois instances :

(i) une Esthétique permettant de séparer réel empirique et réalité en soi et, donc, une Analytique et une Dialectique ;

(ii) un Schématisme permettant de convertir une Analytique des concepts en une Analytique des principes ;

(iii) une mathématique affine à l'Esthétique et venant en déterminer les formes de l'intuition en intuitions formelles.

Comment une telle conception peut-elle être reprise, développée, diversifiée, voire rectifiée si, d'une part, les mathématiques s'autonomisent et si, d'autre part, pour pouvoir généraliser le geste kantien, on se voit contraint comme Husserl à subordonner les diverses ontologies régionales à une ontologie formelle, c'est-à-dire l'Esthétique à une Analytique purement logique et donc, ainsi qu'y a insisté Cavaillès, "irrémédiablement insuffisante" ? La difficulté est telle que, en fait, on a préféré éliminer la question plutôt que lui chercher une réponse. Sur ce point, il y a eu consensus entre l'empirisme logique et les divers scepticismes post-positivistes.

Pourtant un premier élément de réponse se trouve chez Lautman, dans l'une des assertions concluant sa thèse principale :

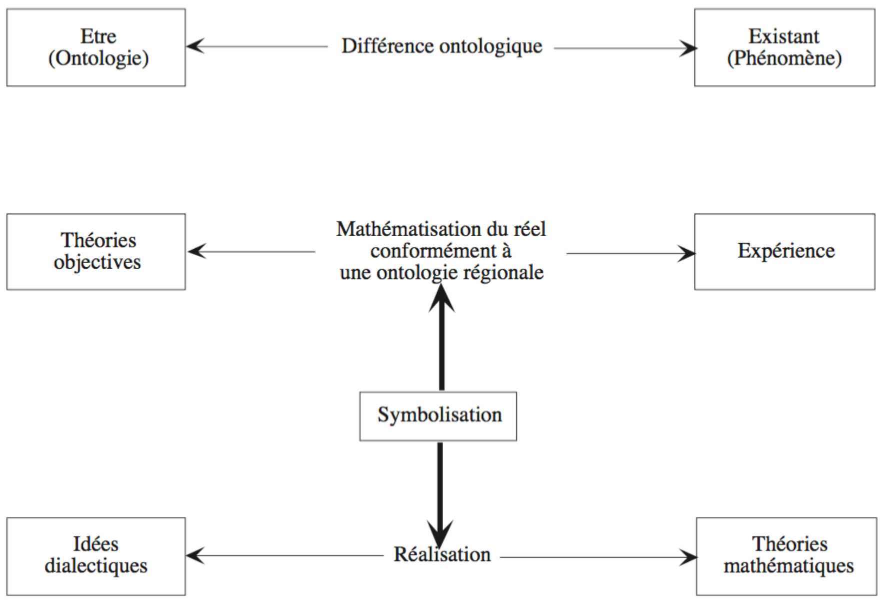

FIGURE 2 – Selon Lautman, le processus de liaison de la théorie et de l'expérience symbolise la liaison des Idées et des théories mathématiques et établit un parallèle avec la différence ontologique.

> "Le processus de liaison de la théorie et de l'expérience *symbolise* la liaison des Idées et des théories mathématiques." (p. 146, nous soulignons)

5.2 Symbolisation et constitution : vers une herméneutique de l'objectivité

Selon nous, l'aphorisme de Lautman représente l'une des pensées les plus fulgurantes de la philosophie des sciences modernes. Il établit un parallèle, une proportion, une analogie, à propos de la différence ontologique. Ce que nous en avons déjà exposé en 3.3 et 3.4 prend ici tout son sens (cf. figure 2).

Remarquons alors que pour Lautman, comme pour tout rationaliste, les concepts scientifiques ne sont authentiquement théoriques que s'ils sont dotés d'une signification mathématique. En sciences, user de concepts théoriques pour parler de certains types d'objets, de propriétés ou de situations, c'est avoir fait choix d'un univers du discours mathématique : parler de phénomènes simultanés, c'est par exemple parler le langage de la relativité restreinte ; parler de grandeurs co-mesurables, c'est parler le langage des opérateurs commutant ; parler d'invariance d'une grandeur, c'est parler le langage de la théorie des groupes, etc. En conséquence, dans l'analogie transcendantale proposée par Lautman, les mathématiques interviennent en position de *terme moyen* et relient la Dialectique à l'expérience phénoménale.

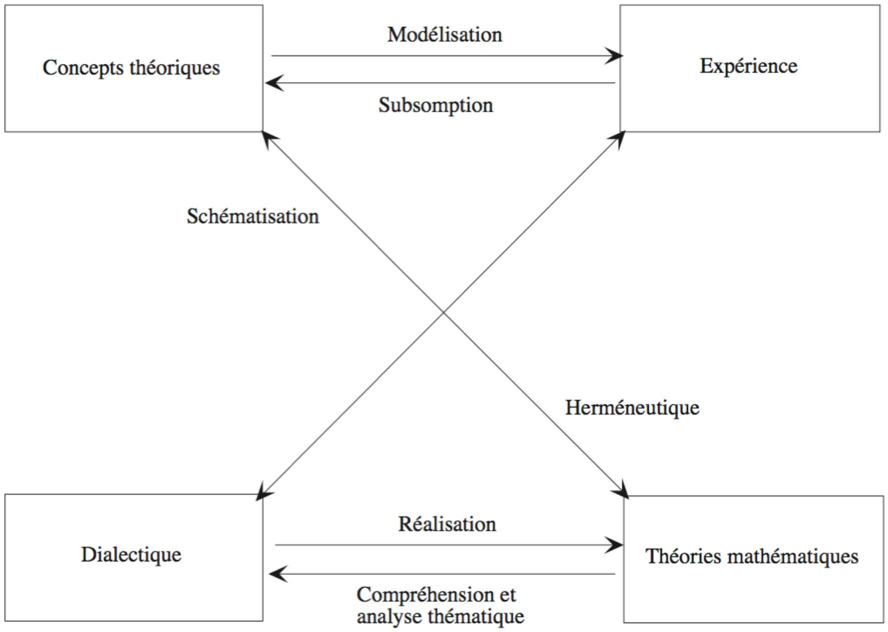

FIGURE 3 – La “symbolisation” lautmanienne comme schématisme transcendantal.

Précisons. Le rapport entre théories mathématiques et théories objectives s'effectue par la conversion du sémantisme des concepts fondamentaux en constructions mathématiques explicites. Nous avons montré ailleurs pourquoi et comment une telle conversion pouvait s'interpréter comme une schématisation (au sens kantien de construction d'un concept dans une intuition pure mathématiquement déterminée). La schématisation des concepts est la clef des théorisations authentiques. Toute science conceptuelle-descriptive doit en effet, à un certain moment, pouvoir redéployer en une *diversité construite de modèles* le mouvement de subsomption de la diversité empirique (donnée) sous l'unité des concepts. Pour ce faire, le sémantisme des concepts fondamentaux doit pouvoir devenir la source de modèles. Il y faut une *générativité,* donc une mathématisation. Ce qu'assure la schématisation. Avec elle, les modèles des phénomènes d'une certaine région deviennent “conformes aux choses mêmes”, c'est-à-dire conformes à une essence objective catégorialement déterminée (cf. figure 3).

À travers l'analogie transcendantale qu'est la “symbolisation”, la Dialectique se convertit donc en une *herméneutique,* non seulement des mathématiques, mais, plus profondément encore, de *l'objectivité.* C'est ainsi que Lautman résout le problème central de l'unité du sens et de l'être dans une doctrine transcendantale où l'être s'identifie à la constitution de l'objectivité. Par leur double fonction qui est :

(i) de transformer le contenu sémantique des concepts théoriques en source de modèles pour les phénomènes (schématisation),

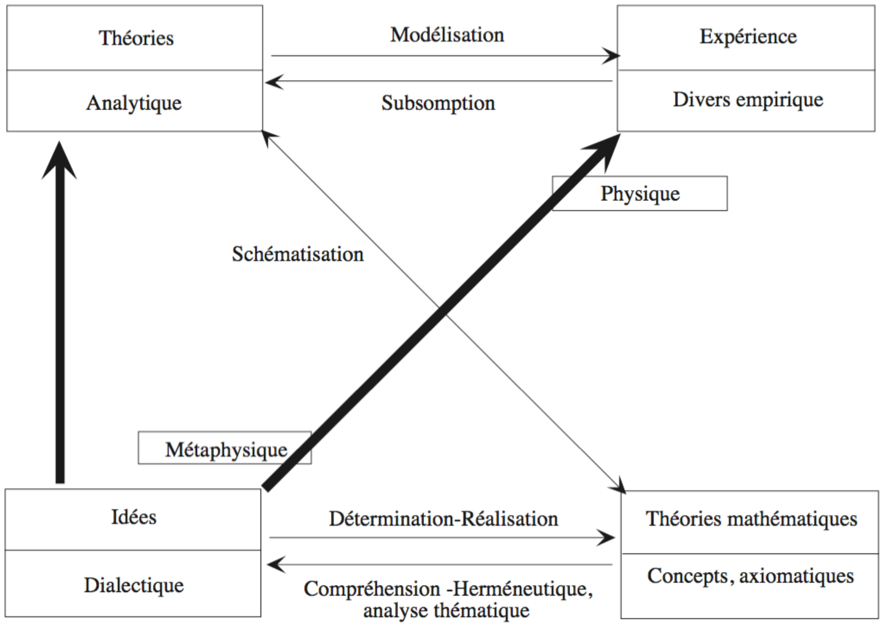

FIGURE 4 – Les mathématiques transforment une Dialectique en une *dynamique historique* d'Analytiques transcendantales.

(ii) de réaliser une dialectique du concept,

(i) et (ii) étant reliés par une symbolisation, les mathématiques engendrent – dans leur devenir théorique autonome – *des* Esthétiques et *des* Schématismes pour une indéfinité ouverte d'ontologies régionales. Elles transforment progressivement une Dialectique idéale en une histoire concrète et plurielle d'Analytiques transcendantales. Dans leur rapport à la réalité, elles historicisent l'opération kantienne en une Critique généralisée qui représente une version dynamique de la phénoménologie constitutive (cf. figure 4).

En réduisant les mathématiques à n'être que la syntaxe des langages dans lesquels s'expriment des énoncés vérifiables expérimentalement, en assimilant la compréhension et l'intelligibilité à une "croyance mystique", en liquidant le synthétique *a priori,* l'empirisme logique et le néo-positivisme rabattent ce schéma sur un simple dualisme syntaxe/sémantique semblable à celui que l'on rencontre en théorie logique des modèles (cf. figure 5).

5.3 Deux exemples

Pour préciser l'analogie transcendantale, reprenons quelques éléments des superbes pages de Lautman consacrées à la *Symétrie et dissymétrie en mathématiques*

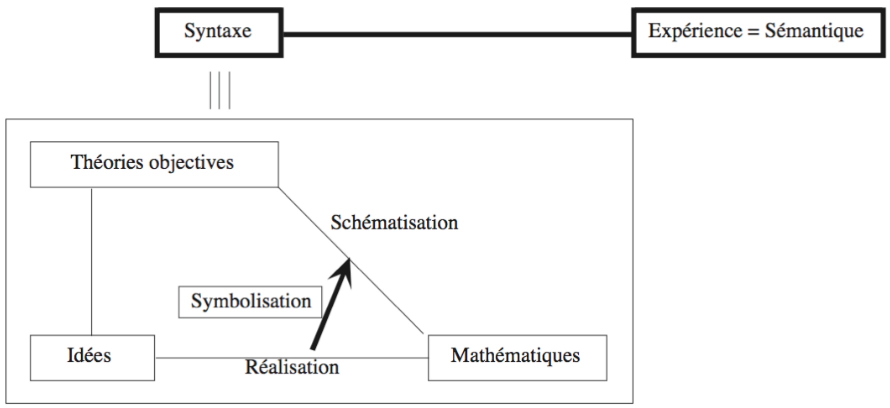

FIGURE 5 – L'empirisme logique rabat la relation entre la dialectique mathématique lautmanienne et l'expérience empirique sur un simple dualisme syntaxe/sémantique.

et en physique ainsi qu'au *Problème du temps*. On y voit Lautman parler de déduction a priori en termes de symbolisation mathématique d'Idées et inscrire ainsi, à propos des mécaniques hamiltonienne et quantique, sa position platonicienne entre Leibniz et Kant.

5.3.1 Symétrie et dissymétrie

Après avoir rappelé le constat kantien (anti-leibnizien) ayant conduit à l'Esthétique transcendantale (à savoir que l'incongruence des figures symétriques est intuitive, non conceptuelle) et après avoir rappelé l'importance des énantiomorphies en cristallographie, en biologie (Pasteur) et en physique de la matière (Curie), Lautman se propose de montrer dans le détail comment c'est bien le déploiement mathématique de concepts fondamentaux comme celui de symétrie qui gouverne la physique théorique. Il exemplifie donc la façon dont le réel mathématique métaphysiquement défini, rejoint, pour s'y impliquer normativement et constitutivement, la réalité physique. Avec ce rôle déterminant donné au concept nous sommes vraiment très loin des thèses empiristes et positivistes selon lesquelles les mathématiques ne sont qu'une substruction formelle sans portée ontologique et réduite à n'être (comme chez Carnap) que la syntaxe logique de données expérimentales. La référence de base est encore le Timée :

> "Les matériaux dont est formé l'Univers ne sont pas tant les atomes et les molécules de la théorie physique que ces grands couples de contraires idéaux comme le Même et l'Autre, le Symétrique et le Dissymétrique, associés entre eux selon les lois d'un harmonieux mélange." (p. 241)

En analysant des exemples précis comme l'action des symétries de l'espace-temps sur les spineurs de Dirac en relativité restreinte, la symétrie/antisymétrie des fonctions d'ondes en mécanique quantique (statistiques de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac) ou l'usage de la théorie abstraite de la dualité en logique quantique par Birkhoff et von Neumann, Lautman insiste à plusieurs reprises sur le fait que

> "la distinction de la gauche et de la droite dans le monde sensible peut *symboliser la non-commutativité* de certaines opérations abstraites de l'algèbre" (p. 244, nous soulignons)

et qu'une telle symbolisation est, sur le plan des principes et des conditions de possibilité, beaucoup plus déterminante qu'une relation précise entre la description de faits objectifs et certaines structures mathématiques ad hoc. Si une physique mathématique est possible, si par exemple une géométrie différentielle peut devenir (comme en relativité générale) une cosmologie ou si une théorie des opérateurs peut devenir (comme en mécanique quantique) une théorie des observables physiques, c'est parce que sur le plan des concepts purs il y a "analogie" entre mathématiques et physique, leur accord étant "la preuve de l'intelligibilité de l'univers" (p. 284) et de la "pénétration du réel par 1'intelligence" (*ibid.*).

À partir du moment où l'on pose une participation des théories à un monde intelligible transcendant, la participation commune de deux théories à une même Idée manifeste *ipso facto,* à travers l'unité de celle-ci, une solidarité et un accord essentiels entre celles-là, qu'il s'agisse de deux théories mathématiques ou d'une théorie mathématique et d'une théorie physique :

> "Une commune participation à une même structure dialectique mettrait ainsi en évidence une analogie entre la structure du monde sensible et celles des mathématiques et permettrait de mieux comprendre comment ces deux réalités sont accordées l'une à l'autre." (p. 241)

D'où l'affirmation fondamentale que le thème symétrie/dissymétrie exemplifie

> "la manifestation sensible d'une structure dialectique qui est aussi bien génératrice de réalités mathématiques abstraites que de conditions d'existence pour l'univers des phénomènes" (p. 254),

ce lien entre spatialité et Idées étant

> "peut-être le sens le plus actuel que puisse prendre de nos jours la notion de l'étendue intelligible." (*ibid.*)

Nous partageons pleinement ces thèses, à ceci près que, pour nous, l'analogie est une schématisation plutôt qu'une symbolisation, ce point engageant toute la conception lautmanienne du transcendantal et, donc, de l'objectivité. Comme nous l'avons indiqué plus haut (section 5.2), le schématisme des catégories d'une ontologie régionale reste la clef de la compréhension des rapports entre Mathématiques et Réalité. Cavaillès l'avait admirablement compris, ainsi que Gonseth après lui. [39] Mais, dans une doctrine moderne de l'objectivité, il faut prolonger et rectifier Kant sur plusieurs points. [40]

39. Cf. [34].
40. Cf. [30] et [32].

(i) D'abord il faut inverser le rapport de dépendance entre exposition métaphysique et exposition transcendantale dans l'Esthétique transcendantale et faire des intuitions formelles des déterminations mathématiques *évolutives* des formes de l'intuition.

(ii) En conséquence, il faut, en ce qui concerne le schématisme, le faire dépendre non seulement, comme chez Kant, de l'exposition métaphysique, mais également de l'exposition transcendantale, de façon à en faire l'origine de l'organon mathématique dans les sciences (cf. à la section 3.1.22.1. nos remarques sur 1'interprétation kantienne du conventionnalisme de Poincaré).

(iii) Ce faisant, le schématisme devient, contrairement à ce qu'il est chez Kant, *construction* de concept.

(iv) Mais cela ne signifie évidemment pas pour autant que les catégories ontologiques soient en tant que telles des concepts mathématiquement constructibles. Cela signifie qu'elles peuvent être analogiquement homologuées à des concepts qui, eux, le sont.

(v) Ce schématisme constructif se prolonge des catégories et des principes métaphysiques associés aux concepts dérivés opérant sur les contenus empiriques.

Le concept de symétrie en fournit un exemple prototypique. Jouant un rôle central dans l'Esthétique transcendantale, il est un concept de nature catégoriale qui peut se trouver diversement schématisé. Dans chaque cas, sa construction repose sur son *interprétation* dans un certain univers mathématique. Or une telle interprétation n'est pas une symbolisation. Car dans la doctrine kantienne, la symbolisation représente une forme dégradée de schématisme convenant aux Idées (qu'elles soient rationnelles ou esthétiques), par principe non schématisables.

Or Lautman traite précisément le concept catégorial de symétrie comme une Idée, peut-être pas comme une Idée au sens kantien strict, mais à tout le moins comme un *concept de la réflexion.* Au lieu d'en faire une "maxime du jugement physique" (comme le principe de relativité ou le principe de moindre action), il en fait un concept à la fois constitutif et heuristique, comme si la différence kantienne entre jugement déterminant et jugement réfléchissant – et donc entre schématisme et symbolisation – n'était pas pour lui pertinente.

5.3.2 Le problème du temps

Il en va de même lorsque Lautman cherche à

> "décrire au sein des mathématiques une structure qui soit comme un premier dessin de la forme temporelle des phénomènes" (p. 254)

et à

> "distinguer du temps sensible une forme abstraite du temps dont la nécessité s'impose à l'univers intelligible des mathématiques pures comme au temps concret de la Mécanique et de la Physique." (*ibid.*)

Il s'agit cette fois de schématiser constructivement le temps lui-même, ce qui, étant donné que le schématisme non constructif kantien est précisément temporel, représente évidemment un enjeu décisif. Lautman a raison d'affirmer que la possibilité de faire coïncider une Esthétique transcendantale avec un symbolisme d'Idées est "capitale"

> "pour le problème des raisons de l'application des Mathématiques à l'univers physique." (p. 255)

Pour ce faire, il commence par rappeler trois données fondamentales des mécaniques hamiltonienne et quantique.

(i) Il existe deux aspects mécaniques du temps, l'un dynamique, l'autre géométrique. Le temps dynamique se manifeste comme paramètre d'évolution et le temps géométrique comme coordonnée d'espace-temps.

(ii) En mécanique hamiltonienne, ces deux aspects sont équivalents, le principe de moindre action de Hamilton [41] pouvant s'exprimer de façon purement géométrique. On sait en effet que, d'après le principe des travaux virtuels, il équivaut au fait que la trajectoire minimise la 1-forme fondamentale $pdq - Edt$ de 1'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ de coordonnées (q, t), 1-forme exprimant le travail du vecteur $(p, -E)$. [42]

(iii) En mécanique quantique au contraire, les aspects dynamique et géométrique du temps s'opposent. On sait en effet que le temps n'est pas une observable.C'est un paramètre d'évolution qui n'est pas représenté par un opérateur. [43] C'est même cette divergence qui est à l'origine de l'équation de Schrödinger $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$. [44]

Lautman va alors tenter ce qu'il appelle lui-même une "déduction a priori" (indépendante de l'expérience) de ces aspects physiques du temps à partir d'une analyse thématique de certaines théories particulières des mathématiques pures. Derrière l'équivalence et l'opposition dynamique/géométrique il va chercher la participation commune à une Idée. Le principe fondamental est que

> "lorsqu'il s'agit de deux notions distinctes, leur équivalence ou leur opposition apparaissent sur le même plan comme postérieures au fait de

41. A savoir que la trajectoire du système considéré extrémalise son intégrale d'action : $\delta \int Ldt = 0$, L étant le lagrangien.

42. q est la multicoordonnée $q = (q_1, \ldots, q_n)$ (variables de position généralisées), p est la multicoordonnée conjuguée $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $pdq = \sum_{i=1}^{i=n} p_i dq_i$ et E est l'énergie du système. Avec $p_i = \partial L/\partial q_i$ et $H = \sum_{i=1}^{i=n} p_i q_i - L$, les équations d'Euler-Lagrange exprimant le principe variationnel d'Hamilton prennent la forme canonique des équations de Hamilton : $dq_i/dt = \partial H/\partial p_i$, $dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i$. Pour une introduction moderne à ces problèmes classiques, cf. par exemple le limpide Arnold [2].

43. A ce propos Lautman cite de Broglie et Lichnérowicz. On peut penser qu'il aurait été passionné par le débat actuel sur le temps tel qu'il se trouve développé par exemple dans Prigogine [36].

44. h est la constante de Planck et H est l'opérateur hamiltonien $H(q, p, t) = H\left(q, -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}, t\right)$ dérivé de l'interprétation $p = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$.

leur simple dualité, conçue comme indifférente encore à l'affirmation de toute relation entre elles." (p. 261)

La déduction a priori va consister à rattacher par étapes "les données empiriques à une structure idéale". Selon Lautman, elle présente sur les points de vue plus classiques "un avantage considérable" dans la mesure où il ne s'agit plus d'une déduction arbitraire mais d'observer

"dans l'ordre de l'univers les étapes constituées de cette déduction." (p. 267)

Lautman part de la théorie des *caractéristiques* des équations aux dérivées partielles et rappelle que le problème de l'intégration d'une EDP $F(q,u,p) = 0$ s'y ramène à celle des équations différentielles ordinaires des courbes caractéristiques $(q(t), u(t))$ satisfaisant $\frac{dq}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p}$ et $\frac{du}{dt} = p\frac{\partial F}{\partial p}$. Pour que la courbe caractéristique soit sur une surface intégrale de $F = 0$ (i.e. une surface de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ de coordonnées (q,u) dont le plan tangent, en chacun de ses points (q,u), satisfait l'EDP $F = 0$) il faut de plus que l'on ait $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q}$, ce qui entraîne les équations de Hamilton.[45] D'où la déduction a priori.

"L'espace géométrique (q,u) contient ainsi comme à l'état de possibles, avec ses directions et ses courbes caractéristiques de l'équation $F = 0$ la forme de trajectoires et la loi dynamique de mouvements qu'y prendront des particules matérielles lorsqu'une interprétation physique, transmuant la fonction F en énergie et le paramètre t en variable temporelle projettera ainsi tout armé dans l'existence sensible un univers mathématique déjà muni de toute la richesse d'organisation nécessaire." (p. 269)

Or, dans cette déduction même, on peut passer de la conception dynamique du temps (paramètre d'évolution) à la conception géométrique (temps coordonnée). Considérons en effet une EDP $F(\tilde{q}, \tilde{p}) = 0$ où $\tilde{q} = (q_1, \ldots, q_{n+1})$ et $\tilde{p} = (p_1, \ldots, p_{n+1})$. Si l'on distingue une coordonnée, par exemple q_{n+1}, si l'on résout $F = 0$ en p_{n+1} de façon à obtenir une équation de la forme $p_{n+1} + H(q, q_{n+1}, t) = 0$ et si l'on prend q_{n+1} pour coordonnée temporelle t, on obtient les équations de Hamilton $\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$ et $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et, pour la fonction $u(q,t)$, l'équation $-\partial u/\partial t = H(q,t,p)$. En posant $E = -\partial u/\partial t$ et $p = \partial u/\partial q$, on obtient la mécanique classique. En posant $p = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$, on obtient l'équation de Schrödinger. On voit ainsi :

(i) comment on passe structuralement du temps coordonnée dans 1'EDP d'Hamilton-Jacobi au temps paramètre dans les EDO des caractéristiques,

"la distinction des deux temps étant donc rattachée à la distinction de l'équation aux dérivées partielles et des équations caractéristiques" (p. 272),

(ii) comment l'équivalence et la divergence des deux aspects du temps renvoient tous deux à une *dualité* plus profonde enracinée dans un formalisme commun.

45. Pour des précisions, cf. Arnold [2].

Et Lautman conclut en remarquant que, qui plus est, l'aspect *géométrique*du temps (son unidimensionnalité et son orientation) est une "exigence cosmogonique" (p. 278) car

> "la détermination du sens du temps dans l'univers est (...) solidaire de la structure d'ensemble de l'univers." (p. 277)

En effet, d'après un théorème d'Ehresmann, une variété quadridimensionnelle ne peut être localement minkowskienne que s'il existe un champ de directions sans singularités. Or d'après un théorème de Hopf, cela n'est possible que si sa caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle.

Ces réflexions de Lautman sur le temps fournissent un magnifique exemple de son idéalisme platonicien. Celui-ci consiste essentiellement en deux thèses :

(i) la physique réalise dans le monde phénoménal des structures mathématiques abstraites d'intelligibilité qui en sont autonomes, sans pour autant lui être préexistantes,

(ii) ces structures procèdent d'une dialectique idéale,

thèses parfaitement explicitées dans les affirmations suivantes :

> (ii') "La distinction mathématique du temps cosmogonique et du temps dynamique est l'expression d'une dualité inhérente à des théories aussi abstraites que la théorie des équations différentielles, et il est par conséquent très probable qu'elle correspond à une structure intime des choses qui a sa source dans la structure des Idées." (pp. 278-279)
> (i') "Quelle que soit l'origine dialectique de cette dualité des temps (...) la mécanique n'apporte, en ce qui concerne le problème du temps, aucun arrangement dont le schéma ne se laisse apercevoir dans les abstractions pures dont elle est l'application. Le temps physique sous toutes ses formes n'est que la réalisation sensible d'une structure qui se manifeste déjà dans le domaine intelligible des mathématiques." (p. 266)

5.3.3 Compléments

Certes, on pourra trouver que Lautman fait trop de place à l'a priori. Mais ce qui est empirique en mécanique hamiltonienne n'est que la forme exacte de l'hamiltonien. Toute la richesse sous-jacente de la géométrie symplectique et de la géométrie de contact y est en position d'a priori. [46] Conceptuellement et historiquement conquise par les mathématiques pures, elle constitue un cas prototypique de déploiement mathématique d'une Esthétique transcendantale.

On pourrait d'ailleurs donner d'autres exemples très variés et tout aussi frappants de la validité des thèses de Lautman. Bornons-nous à deux d'entre eux.

(i) Le fait que, en mécanique quantique, le point de vue de Bohr consiste à répéter le geste de Kant en le faisant porter non plus sur le monde sensible préphysique

46. Pour des précisions, cf. par exemple Abraham-Marsden [1] et Bennequin [5].

mais sur le monde de la physique macroscopique classique. Cette nouvelle scission entre phénomène (observable) et noumène (réalité physique en soi), fait apparaître une partie de la mécanique classique comme un "en soi" nouménal, expérimentalement inaccessible. Comme l'a excellemment montré Catherine Chevalley [47], la complémentarité de Bohr consiste alors à postuler qu'il existe un ordre de légalité autonome des observables, qui soit mathématiquement descriptible et déterminable. Sur ce point, le débat entre Bohr et Einstein répète celui entre Kant et le dogmatisme métaphysique précritique (en particulier celui de Leibniz).

(ii) Gilles Châtelet a montré comment les théories de jauge non-abéliennes (qui ramènent à l'a priori de la géométrie de l'espace-temps les interactions empiriques entre particules : connexions et équations de Yang-Mills) pouvaient être pensées métaphysiquement comme une refonte leibnizienne ("monadologique") de l'Esthétique transcendantale. [48]

6 Conclusion

Il y aurait évidemment beaucoup à ajouter sur l'importance que pourrait revêtir, pour notre actualité épistémologique, la pensée lautmanienne si l'on en évaluait judicieusement la portée. Indiquons brièvement pour conclure quelques possibilités.

Ainsi que des épistémologues aussi éminents que Gaston Bachelard ou Ludovico Geymonat l'ont souligné, il est nécessaire, pour penser correctement le mouvement des sciences objectives modernes, d'articuler le rationalisme critique à un historicisme scientifique. Cette "dialectique de la valeur historique et de la valeur objective" [49] peut toutefois concerner soit les dispositifs techno-expérimentaux des sciences, soit leurs *a priori* eidético-constitutifs. Dans le premier cas, l'historicité sera celle, matérialiste, des praxis techniciennes, dans le second cas elle sera celle, transcendantale, d'une dialectique idéale. Dans ses analyses des sciences contemporaines comme "rationalisme appliqué" et "matérialisme technique", Bachelard a opté pour la première voie. [50] Tout en insistant sur la fonction constituante des mathématiques dans les "ontogenèses" techno-rationnelles de la physique, tout en fondant l'histoire des sciences sur une "dialectique des obstacles épistémologiques et des actes épistémologiques" [51], il a subordonné celle-ci à l'évolution instrumentale des disciplines concernées. Le propre de Lautman est d'avoir réussi à penser une autre dimension, proche de "l'historialité" heideggerienne de l'être, de l'historicité de la reconstruction rationnelle du réel.

Une autre grande réussite de Lautman est d'avoir unifié le structuralisme axiomatique hilberto-bourbakiste avec un rationalisme réaliste proche sur bien des points

47. Chevalley [12]. Sur ces problèmes, cf. aussi évidemment d'Espagnat [20] et son analyse de l'opposition entre un réel en soi indépendant de toute observation et un réel empirique observable.
48. Cf. Chatelet [11].
49. Geymonat [22], p. 128.
50. Cf. par exemple Bachelard [4].
51. Bachelard [4], p. 36.

de celui d'un Weyl, d'un Planck, d'un Einstein ou d'un Heisenberg. Cela lui a permis de dépasser l'opposition entre ce que Husserl appelait dans une lettre à Hermann Weyl la "légalité structurale" de la nature et sa "légalité spécifiquement causale". [52]

Il faudrait beaucoup développer ce point dans la mesure où il est central dans l'œuvre de l'un des rares épistémologues à avoir été inspiré par Lautman, nommément Ferdinand Gonseth. On sait (cf. par exemple *Les Mathématiques et la Réalité*) que Gonseth a repris 1'idée fondamentale d'un devenir historique des concepts théoriques constitutifs. Cette historicité est dialectique et commande l'idée que l'on peut se faire des rapports entre mathématiques et réalité. Mais, de façon plus explicite que Lautman, Gonseth s'inscrit dans la tradition du criticisme kantien. L'histoire dont il s'agit est pour lui une histoire des a priori eidético-constitutifs de l'objectivité et, plus précisément, une histoire du schématisme transcendantal conçu comme construction mathématique. Sa notion clef est, rappelons-le, celle "d'abstraction mathématique schématisante" comme "forme de l'expérimentation" [53], notion à partir de laquelle il réinterprète de façon structurale et antilogiciste (en fait lautmanienne) la méthode axiomatique. Comme Lautman, cela le conduit à une défense et illustration de l'analogie. L'entendement s'accorde analogiquement à la réalité empirique à travers une "concordance schématique".

> "Notre entendement est engagé dans la discipline des analogies au moins autant que dans le schéma causal : l'analogie peut prendre place au rang des catégories préalables de l'entendement." [54]
> "Toute analogie authentique établit entre les deux termes qui y figurent un lien de fait, aussi valablement réel et physiquement efficace que la relation de cause à effet." [55]

Mais, relativement à Lautman, la question reste ouverte de savoir dans quelle mesure cette "symbolisation" doit être interprétée de façon kantienne comme un schématisme constructiviste généralisé ou plutôt de façon leibnizienne comme un rapport d'imitation ou d'expression au sens que nous avons indiqué à la section 3.4.4.

Quoi qu'il en soit, l'explication structurale et l'explication causale (par des entités non immédiatement données, invisibles) se rejoignent dans le concept de *Weltbild* (d'image du monde),

> "néologisme de Planck désignant le schéma de structure qui est à la base d'une théorie" [56]

et concept fondamental de la philosophie d'Einstein :

52. Lettre du 9 avril 1922. Cf. Tonietti [39].
53. Gonseth [23], p. 68.
54. Ibid., p.306.
55. Ibid., p.308.
56. Wehrlé [41], p. 13. Cet ouvrage peu connu, préfacé par Gonseth, est un bon complément à son oeuvre. Je remercie mon ami Guy Le Gaufey de me l'avoir signalé.

> "L'homme essaye de se faire au mieux une image du monde, simple et intelligible ; il essaye alors dans une certaine mesure de substituer ce cosmos personnel au monde de l'expérience, de façon à dépasser celui-ci. C'est ce que font chacun à leur façon, le peintre, le poète, le philosophe spéculatif et le savant de la nature. Chacun fait de ce cosmos et de cette construction le pivot de sa vie émotionnelle, afin de trouver ainsi la paix et la sécurité qu'il ne peut pas trouver dans le tourbillon étroit de l'expérience personnelle." [57]

Comme "abstrait du réel par schématisation", un *Weltbild* ne doit pas être confondu avec une "axiomatisation" directe des data empiriques. C'est, en effet, une structure cachée incluant

> "un contenu excédant sa base empirique et dont l'explicitation logique constitue la découverte, qui en contrepartie doit être soumise au contrôle de l'expérience." [58]

Comme schématisme mathématique que son interprétation dote d'une portée causale, c'est un "mixte" participant au projet général de toute science objective qui est de ramener l'irrationnel empirique matériel à une rationalité théorique formelle. Pour les positivistes, les empiristes 1ogiques et les conventionnalistes, il ne s'agit là que d'un artefact sans aucune portée ontologique :

> "Conventionnalisme de Poincaré, Nominalisme de Duhem, Néo-positivisme de Mach (...) ont en commun de dénier au *Weltbild* physique tout rapport ontologique avec le réel." [59]

Mais en fait, en réduisant la théorie à n'être qu'une systématisation intellectuellement économique des faits, ces points de vue anti-théoriques restent délibérément à la surface des choses et négligent cette vérité que, ainsi que l'affirmait Einstein,

> "la science est l'essai de faire correspondre la diversité chaotique de notre expérience sensible à un système de pensée logiquement uniforme." [60]

Or dans leur évolution historique, les *Weltbilder* réalisent une "dialectique". En tant que "conformité schématique au réel", un *Weltbild* est toujours partiel et approximatif. Il est toujours engagé dans le

> "processus dialectique permettant d'améliorer la schématisation du réel." [61]

Il constitue donc bien, tel que le conçoit Gonseth, l'approfondissement de la "symbolisation" sur laquelle Lautman fondait sa conception des rapports entre mathématiques et réalité.

---

57. Einstein [18]. Conférence de 1918 en 1'honneur de 1'anniversaire de Planck. Cité dans Stachel [37].
58. Ibid., p. 57.
59. Ibid., p. 30. Il s'agit de l'interprétation standard mais erronée du conventionnalisme (cf. section 3.1.2).
60. Cf. Stachel [37].
61. Ibid., p. 47.

*
***

Aussi énigmatique soit-elle, l'intelligibilité de l'univers est un fait. Ce dont il s'agit est d'en rendre compte. Selon nous, Lautman était fondamentalement dans le vrai quand il a adopté pour ce faire un point de vue anti-empiriste et a renoué avec la tradition critico-phénoménologique. Car il existe en vérité des structures transcendantales de l'objectivité qui anticipent a *priori* sur la structure des phénomènes empiriques (différence ontologique, compréhension et genèse). Toute la difficulté est de conquérir une conception *mathématique* de l'a *priori,* ce que ni Kant ni Husserl n'ont réussi à faire faute d'une philosophie mathématique appropriée. La mathématisation permet en effet à la fois de contraindre l'anticipation dans sa forme et de la diversifier dans ses conséquences. Elle permet donc de la tester.

En ce qui nous concerne, la critique que nous adresserions à Lautman ne serait donc certes pas d'être idéaliste. Bien au contraire. Elle serait de ne pas toujours maintenir la bonne distance kantienne entre schématisation et symbolisation, entre jugement déterminant et jugement réfléchissant, entre Catégories et Idées, entre Analytique et Dialectique, bref entre Connaissance et Pensée. Cette indécision relativement à l'irréversible conquête critique fait, répétons-le, que l'on arrive en général assez mal à saisir ce qui empêche la dialectique lautmanienne, qui se veut platonicienne, de devenir subrepticement une dialectique hégélienne restreinte aux mathématiques.

Une telle critique rejoint celle que Cavaillès adressait à l'intuitionnisme qui, selon lui,

> "*confond le moment dialectique de la position du concept et le moment transcendantal de sa schématisation.*" [62]

Mais elle n'invalide en rien la pertinence remarquable du programme de recherche lautmanien. Il est incompréhensible et injuste qu'un esprit aussi inspiré ait pu être aussi peu célébré. Car il y a en vérité du génie, génie intellectuel et génie spirituel, à se consacrer par vocation à l'étude patiente de

> "ce germe incréé qui contient en lui à la fois les éléments d'une déduction logique et d'une genèse ontologique du devenir sensible." (p. 255)

Oui, il reste à refaire le *Timée.*

Bibliographie

[1] Abraham, R., Marsden, J., 1978, *Foundations of Mechanics,* Benjamin Cumings (New York : Reading).

[2] Arnold, V. I., 1976, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique* (Moscou : Ed. Mir).

62. Cavaillès [8], p. 272.

[3] Arnold, V. I., 1980, *Chapitres supplémentaires sur la théorie des équations différentielles ordinaires* (Moscou : Ed. Mir).
[4] Bachelard, G., 1951, *L'Activité rationaliste de la physique contemporaine* (Paris : PUF).
[5] Bennequin, D., 1984, Caustique mystique, *Séminaire Bourbaki,* n° 634.
[6] Castellana, M., 1978, La philosophie mathématique chez Albert Lautman, *Il Protagora,* 115, 12-24.
[7] Cavaillès, J., 1938, *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème des fondements des mathématiques* (Paris : Hermann).
[8] Cavaillès, J., 1941, Transfini et Continu, in *Philosophie mathématique* (Paris : Hermann, 1962), 253-274.
[9] Cavaillès, J., 1947, *Sur la Logique et la théorie de la Science* (oeuvre posthume) (Paris : PUF).
[10] Cavaillès, J., Lautman, A., 1939, Discussion sur la pensée mathématique, *Société française de Philosophie,* séance du 4 février 1939, vol. 40 (1945).
[11] Chatelet, G., 1985, Le retour de la monade, *Fundamenta Scientiae,* 6, 327-345.
[12] Chevalley, C., 1985, Complémentarité et langage dans l'interprétation de Copenhague, *Revue d'Histoire des Sciences,* 38, 251-292.
[13] Deleuze, G., 1972, *Différence et Répétition* (Paris : PUF).
[14] Desanti, J. T., 1968, *Les Idéalités mathématiques* (Paris : Le Seuil).
[15] *Dictionnaire des Philosophes,* 1984, D. Huysmans (ed.) (Paris : PUF).
[16] Dieudonné, J., 1977, Introduction à Lautman [1977].
[17] Dieudonné, J., 1981, Bourbaki et la philosophie des mathématiques, *in* Orbetello [1981], 178-188.
[18] Einstein, A., 1954, *Ideas and Opinions* (New York : Crown).
[19] d'Espagnat, B., 1979, *A la recherche du réel* (Paris : Gauthier-Villars).
[20] d'Espagnat, B., 1985, *Une incertaine réalité* (Paris : Gauthier-Villars).
[21] Février, P., 1981, La philosophie mathématique de Poincaré, *in* Orbetello [1981], 151-172.
[22] Geymonat, L., 1985, *Lineamenti di filosofia della Scienza* (Milan : Mondadori).
[23] Gonseth, F., 1936, *Les mathématiques et la réalité* (Paris : Blanchard ; reéd.1974).
[24] Holton, G., 1982, *L'imagination scientifique* (Paris : PUF).
[25] Lautman, A., 1977, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits* (Paris : Union générale d'Editions) [réédition des ouvrages parus chez Hermann de 1937 à 1939 et, à titre posthume, en 1946].
[26] Loi, M., 1977, Préface à Lautman [1977].
[27] Orbetello, 1981, Un *siècle dans la philosophie des mathématiques,* Archives de l'Institut international des Sciences théoriques (Bruxelles : Office international de Librairie).
[28] Petitot, J., 1979, Infinitesimale, in *Enciclopedia Einaudi,* VII (Turin : Einaudi), 443-521.
[29] Petitot, J., 1982, Unità delle matematiche, in *Enciclopedian Einaudi, XV* (Tu-

rin : Einaudi), 1034-1085.
[30] Petitot, J., 1983, A propos de “Logos et Théorie des Catastrophes”, *Babylone,* 2/3 (Paris : Christian Bourgois), 221-260.
[31] Petitot, J., 1985, *Morphogenèse du Sens* (Paris : PUF**).**
[32] Petitot, J., 1986 (a)*, Physique du Sens* (Paris : Editions du CNRS, 1992).
[33] Petitot, J., 1986 (b)*,* Apories fondatrices et Dialectique mathématique*, Colloque Controverses scientifiques et philosophiques*, Université d'Evora. Documents du Centre d'Analyse et de Mathématiques sociales (Paris : Ecole des Hautes Etudes en Sciences sociales).
[34] Petitot, J., 1986 (c), Mathématique et Ontologie, in *La scienza tra filosofia e storia in Italia nel Novecento*, (F. Minazzi, L. Zanzi, eds.), (Rome : Edizione della Presidenza del Consiglio dei Ministri, 1987), 191-211,.
[35] Petitot, J., 1986 (d),Schématisme et Interprétation, in *Colloque sur l'Interprétation,* Collège international de Philosophie.
[36] Prigogine, I., 1980, *Physique, temps et devenir* (Paris : Masson).
[37] Stachel, J., 1986, Einstein and the Quantum : fifty years of Struggle, in *From Quarks to Quasars,* R. Colodoy (ed.) (University of Pittsburg), 349-385.
[38] Thom, R., 1982, Thèmes de Holton et apories fondatrices, in *Logos et Théorie des catastrophes*, Colloque de Cerisy, (Genève : Editions Patiño, 1988).
[39] Tonietti, T., 1984, Quattro lettere di Edmund Husserl ad Hermann Weyl, in *E. Husserl e la crisi delle scienze europee,* Université de Lecce.
[40] Ullmo, J., 1969, *La Pensée scientifique moderne* (Paris : Flammarion).
[41] Wehrlé, 1956, *L'Univers aléatoire* (Paris : Edition du Griffon-Vrin diffusion).