

RELATIVITÉ GÉNÉRALE HYPERCOMPLÈXE

Laurent Besson, Yvan Rahbé

▶ **To cite this version:**

Laurent Besson, Yvan Rahbé. RELATIVITÉ GÉNÉRALE HYPERCOMPLÈXE. 2015. hal-01111250v5

HAL Id: hal-01111250
https://hal.science/hal-01111250v5

Preprint submitted on 24 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

RELATIVITÉ GÉNÉRALE HYPERCOMPLÈXE

LAURENT BESSON, YVAN RAHBÉ

Résumé. Ce document tapé initialement en 1998 a été le travail effectué sur une période de 1996 à 1998. Celui-ci a été commencé à être ré-écrit en janvier et février 2015 en raison de la perte des sources du document et dans le but de pouvoir le publier. Lors de sa ré-écriture le document à été corrigé et amélioré afin d'être le plus compréhensible possible. N'ayant jamais publié, je ne sais pas quels sont les standards attendus afin que le document soit conforme à ces attentes.

Le présent document (un éssai) tente une approche peut-être explorée par ailleurs, une approche simple qui est le remplacement des coordonnées du quadri-vecteur réels par des coordonnées de nombres quaternions (hypercomplèxes). De plus ce document ré-introduit l'idée de M Hermann Weyl, une métrique de jauge sur les longueur. Appelée plus communément «jauge d'échelle » : Voir http ://www.researchgate.net/profile/Laurent_Nottale/publication/24161 temps_fractal/links/00b4952a2e69c7f72d000000.pdf

http://www-cosmosaf.iap.fr/Weyl-Cartan_et_la_geometrie_infinitesimale_synthese_par_E_Scholz.pdf

Si le lien ne fonctionne pas :

http ://www-cosmosaf.iap.fr/Weyl-Cartan_et_la_geometrie_infinitesimale_synthese_par_E_Scholz.pdf

Table des matières

1. Introduction 2
2. Définition 2
2.1. Définition du quadri-vecteur 2
2.2. Définition des quaternions 2
2.3. Notation d'Einstein 2
3. Postulat 2
1er postulat 2
2eme postulat 2
4. Notations diverses (dérivées covariantes, anti-commutateur, etc.) 2
4.1. Dérivée covariante des coordonnées 2
4.2. Dérivée covariante des h_i 3
5. Tenseurs 3
5.1. Transport d'un quadri-vecteur et tenseur de courbure de Riemann 3

Date: 1998.

1. Introduction

La relativité générale est avec la physique quantique (le modèle standard des particules) une théorie profonde mais qui avec la physique quantique ne se marie pas. Dans cette théorie la force de la gravitation n'est que la manifestation de la courbure même de l'espace-temps en présence de matière (densité). L'espace-temps dit comment à la matière se comporter et elle-même à l'espace-temps comment se courber.

La physique quantique utilise encore les espace de Minskowski qui ne sont pas courbes et sont les espaces-temps de la relativité restreinte. Or à cet espace-temps plat, nous associons des espace de Hilbert de dimension (n) décrivant les interactions entre particules par leurs états $|\varphi>$. Or il apparait dans beaucoup de situations que le produits de deux états (A et B) ne soient pas équivalents à (B et A). C'est à dire $A.B \neq B.A$, en résumé non commutatifs.

Par ailleurs il est bon de rappeler que les matrices de Pauli (non commutatives) ont quelque chose de « proche » au nombre inventé par Hamilton (Quatrenions) : https://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternion#Repr.C3.A9s Que celles-ci sont utilisées en physique quantique.

L'idée la plus simple est de penser le quadri-vecteur comme identique à celui imaginé par Einstein mais avec des nombres (non réels) quaternions. Nous verrons ainsi que certaines propriétes non commutatives imposent des équations impliquant les indéterminsations de Heinsenberg de façon naturelle.

2. Définition

La relativité générale hypercomplexe se définie comme la RG mais avec des composantes des quadri-vecteurs hypercomplèxes.

2.1. **Définition du quadri-vecteur.** $\overrightarrow{V} = \sum_{\alpha=0}^{3} V^{\alpha}.\overrightarrow{e_{\alpha}}$ où $\alpha \in \{0,1,2,3\}$ et les composantes de V^{α} sont des nombres quaternions.

2.2. **Définition des quaternions.** $V^{\alpha} \epsilon \mathbb{H}$ ensemble des quaternions, noté $\mathbb{H}$ tel $V^{\alpha} = V^{\alpha i}.h_i$ $i \in \{0,1,2,3\}$ avec $h_1.h_2.h_3 = -1$, $h_i.h_i = -1$ pour $i \neq 0$

Ce qui donne pour un quadri-vecteur hypercomplèxe : $\overrightarrow{V} = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{i=0}^{3} V^{\alpha i}.h_i.\overrightarrow{e_{\alpha}}$ $i \in \{0,1,2,3\}$ $\alpha \in \{0,1,2,3\}$

2.3. **Notation d'Einstein.** Les notations d'Einstein lorsqu'elles sont sans ambiguïtés sont : $\overrightarrow{V} = V^{\alpha}.\overrightarrow{e_{\alpha}}$ où la somme est sous entendu sur les indices hauts ou bas.

3. Postulat

1er postulat. Le principe d'équivalence reste vrai.

2eme postulat. Les coordonnées de l'espace-temps sont hypercomplèxes (cf : Nombres Quaternions).

4. Notations diverses (dérivées covariantes, anti-commutateur, etc.)

4.1. **Dérivée covariante des coordonnées.** On note la dérivée covariante par coordonnée :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial (x^{\mu i}.h_i)} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu i}.h_i + x^{\mu i}.\partial h_i}$$

Posons

$$\partial h_i = H^{j}_{i\mu}.h_j.\partial x^{\mu}$$

d'où

$$\frac{\partial h_i}{\partial x^{\mu}} = H^{j}_{i\mu}.h_j$$

or

$$\partial x^{\mu} = \partial x^{\mu i}.h_i + x^{\mu i}.\partial h_i$$

donc

$$\frac{\partial h_i}{H^j_{i\mu}.h_j} = \partial x^{\mu i}.h_i + x^{\mu i}.\partial h_i$$

$$\partial x^{\mu i}.h_i = \frac{\partial h_i}{H^j_{i\mu}.h_j} - x^{\mu i}.\partial h_i = (\frac{1}{H^j_{i\mu}.h_j} - x^{\mu i}).\partial h_i$$

$$\partial x^{\mu i}.h_i.H^j_{i\mu}.h_j = (1 - H^j_{i\mu}.h_j.x^{\mu i}).\partial h_i$$

d'où

$\partial h_i = \frac{\partial x^{\mu i}.h_i.H^j_{i\mu}.h_j}{(1-H^j_{i\mu}.h_j.x^{\mu i})}$ avec $h_i.h_j = \delta^k_{ij}.h_k$ et en introduisant l'opérateur commutateur de la physique quantique :$[h_i, h_j] = h_i.h_j - h_j.h_i = h_i.h_j + h_i.h_j = 2.\delta^k_{ij}.h_k$

$$[h_i, h_j] = 2.\delta^k_{ij}.h_k \tag{4.1}$$

Alors

$$\partial h_i = \frac{\partial x^{\mu i}.H^j_{i\mu}.\delta^k_{ij}.h_k}{2.(1 - H^j_{i\mu}.h_j.x^{\mu i})} \tag{4.2}$$

4.2. **Dérivée covariante des h_i.**

$$\partial_\mu h_i = H^j_{\mu i}.h_j$$

5. Tenseurs

Nous devons re-définir un certain nombre de grandeurs telle que la courbure, en effet comme nous étendons la définition de quadri-vecteur, la courbure va s'étendre en faisant apparaître des termes supplémentaires. Ceux-ci, et on le constatera, pourront se coupler entre eux.

L'intéret est que nous retrouverons le tenseur courbure de Riemann $R^\alpha_{\mu\gamma\nu}$ et de Ricci $R_{\mu\nu}$, puis d'autre qui pouront être associés à d'autres champs physiques, qui de plus pourront se coupler entre eux et s'autocoupler.

Pour re-définir ces tenseurs nous devons reprendre les calculs de transport d'un quadri-vecteur, faisant apparaitre bien évidemment les symboles de Christoffel $\Gamma^\beta_{\mu\alpha}$ http://fr.wikipedia.org/wiki/Symboles_de_Christoffel, et donc le tenseur de courbure. Mais d'autres tenseurs tels que : $H^j_{\mu i}\ \Phi^i_{\mu j}$, dont $\Phi^i_{\mu j}$ est le tenseur de « courbure » métrique de Weyl http://classiques.uqac.ca/collection_sciences_nature/fabre_lucien/Nouvelle_figure_du_monde (qui fera apparaitre le champ $F_{\mu\nu}$électromagnétique). Et $H^j_{\mu i}$ qui introduira d'autres tenseurs... Dont la signification physique sera à discuter.

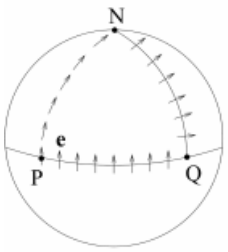


Figure 5.1. transport quadri-vecteur

5.1. **Transport d'un quadri-vecteur et tenseur de courbure de Riemann.** Soit $\overrightarrow{X}$ un quadri-vecteur $x^{\alpha i}.h_i.\overrightarrow{e_\alpha}$

On utilise la jauge d'échelle de Weyl

http://luth2.obspm.fr/~luthier/nottale/arLecce.pdf

ou

http://classiques.uqac.ca/collection_sciences_nature/fabre_lucien/Nouvelle_figure_du_monde/Nouvelle_figu

Les liens suivants vont vous être utiles !
https://dournac.org/sciences/tensor_calculus/node29.html#SECTION00614000000000000000
https://dournac.org/sciences/tensor_calculus/node30.html
https://dournac.org/sciences/tensor_calculus/node40.html

$$x^{\alpha i} = x^{\alpha}.\varphi^{i}$$

Soit la dérivée covariante

$$\nabla_{\mu} = \frac{d}{dx^{\mu}}$$

et

$$\nabla_{\nu} = \frac{d}{dx^{\nu}}$$

Nous allons faire le calcul suivant

$$(\nabla_{\mu}.\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}.\nabla_{\mu})\overrightarrow{X}$$

Qui est nul dans un espace euclidien sans métrique de Weyl.
Commençons par

$$\nabla_{\mu}\overrightarrow{X} = \partial_{\mu}(x^{\alpha}.\varphi^{i}.h_{i}.\overrightarrow{e_{\alpha}}) = \partial_{\mu}x^{\alpha}.\varphi^{i}.h_{i}.\overrightarrow{e_{\alpha}} + x^{\alpha}.\partial_{\mu}\varphi^{i}.h_{i}.\overrightarrow{e_{\alpha}} + x^{\alpha}.\varphi^{i}.\partial_{\mu}h_{i}.\overrightarrow{e_{\alpha}} + x^{\alpha}.\varphi^{i}.h_{i}.\partial_{\mu}\overrightarrow{e_{\alpha}})$$

Avec la définition des symboles de Christoffel

$$\partial_{\mu}\overrightarrow{e_{\alpha}} = \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_{\beta}} \tag{5.1}$$

Et avec

$$\partial_{\mu}h_{i} = H^{j}_{\mu i}.h_{j} \tag{5.2}$$

Puis

$$\partial_{\mu}\varphi^{i} = \Phi^{i}_{\mu j}.\varphi^{j} \tag{5.3}$$

$$\nabla_{\mu}\overrightarrow{X} = \partial_{\mu}x^{\alpha}.\varphi^{i}.h_{i}.\overrightarrow{e_{\alpha}} + x^{\alpha}.(\Phi^{i}_{\mu j}.\varphi^{j}.h_{i}.\overrightarrow{e_{\alpha}} + x^{\alpha}.\varphi^{i}.H^{j}_{\mu i}.h_{j}.\overrightarrow{e_{\alpha}} + x^{\alpha}.\varphi^{i}.h_{i}.\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_{\beta}})$$

On pose

$$\gamma_{\mu} = \Phi^{i}_{\mu j}.\varphi^{j}.h_{i} + \varphi^{i}.H^{j}_{\mu i}.h_{j} + \varphi^{i}.h_{i}.\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_{\beta}}.\overrightarrow{e^{\alpha}}$$

Or on peut invoquer les symboles de Kronecker avec :

$$\overrightarrow{e_{\beta}}.\overrightarrow{e^{\alpha}} = \delta^{\alpha}_{\beta}$$

On obtient une quantité indiquant comment ce comporte la connexion dans l'espace utilisé (Riemannien et hypercomplèxe) lors du parcours d'un quadri-vecteur...

$$\gamma_{\mu} = \Phi^{i}_{\mu j}.\varphi^{j}.h_{i} + \varphi^{i}.H^{j}_{\mu i}.h_{j} + \varphi^{i}.h_{i}.\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}.\delta^{\alpha}_{\beta} \tag{5.4}$$

Donc

$$\nabla_{\mu}\overrightarrow{X} = \partial_{\mu}x^{\alpha}.\varphi^{i}.h_{i}.\overrightarrow{e_{\alpha}} + x^{\alpha}.(\gamma_{\mu}).\overrightarrow{e_{\alpha}}$$

Commençons le calcul $\nabla_{\nu}.\nabla_{\mu}\overrightarrow{X}$.

$$\nabla_{\nu}.\nabla_{\mu}\overrightarrow{X} = \partial_{\nu}(\partial_{\mu}x^{\alpha}.\varphi^{i}.h_{i}.\overrightarrow{e_{\alpha}} + x^{\alpha}.(\gamma_{\mu}).\overrightarrow{e_{\alpha}})$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\nu}.\nabla_{\mu}\overrightarrow{X} = {} & \partial_{\nu}\partial_{\mu}x^{\alpha}.\varphi^{i}.h_{i}.\overrightarrow{e_{\alpha}} \\ & + \partial_{\mu}x^{\alpha}.\partial_{\nu}\varphi^{i}.h_{i}.\overrightarrow{e_{\alpha}} + \partial_{\mu}x^{\alpha}.\varphi^{i}.\partial_{\nu}h_{i}.\overrightarrow{e_{\alpha}} \\ & + \partial_{\mu}x^{\alpha}.\varphi^{i}.h_{i}.\partial_{\nu}\overrightarrow{e_{\alpha}} + \partial_{\nu}x^{\alpha}.(\gamma_{\mu}).\overrightarrow{e_{\alpha}} \\ & + x^{\alpha}.(\partial_{\nu}\gamma_{\mu}).\overrightarrow{e_{\alpha}} + x^{\alpha}.(\gamma_{\mu}).\partial_{\nu}\overrightarrow{e_{\alpha}})\end{aligned}$$

Nous allons former le calcul $\nabla_{\mu}.\nabla_{\nu}\overrightarrow{X}$.

$$\nabla_\mu.\nabla_\nu\overrightarrow{X} = \partial_\mu\partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha}$$
$$+ \partial_\nu x^\alpha.\partial_\mu\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.\partial_\mu h_i.\overrightarrow{e_\alpha}$$
$$+ \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\partial_\mu\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.(\gamma_\nu).\overrightarrow{e_\alpha}$$
$$+ x^\alpha.(\partial_\mu\gamma_\nu).\overrightarrow{e_\alpha} + x^\alpha.(\gamma_\nu).\partial_\mu\overrightarrow{e_\alpha})$$

Nous devons évaluer $\partial_\nu\gamma_\mu$ et $\partial_\mu\gamma_\nu$

$$\partial_\nu\gamma_\mu = \partial_\nu(\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta) \tag{5.5}$$

$$\partial_\nu\gamma_\mu = \partial_\nu\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i$$
$$+ \partial_\nu\varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j$$
$$+ \partial_\nu\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta$$
$$+ \Phi^i_{\mu j}.\partial_\nu\varphi^j.h_i$$
$$+ \varphi^i.\partial_\nu H^j_{\mu i}.h_j$$
$$+ \varphi^i.\partial_\nu h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta$$
$$+ \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.\partial_\nu h_i$$
$$+ \varphi^i.H^j_{\mu i}.\partial_\nu h_j$$
$$+ \varphi^i.h_i.\partial_\nu\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta$$
$$+ \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\partial_\nu\delta^\alpha_\beta$$

$$\partial_\mu\gamma_\nu = \partial_\mu(\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta) \tag{5.6}$$

$$\partial_\mu\gamma_\nu = \partial_\mu\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i$$
$$+ \partial_\mu\varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j$$
$$+ \partial_\mu\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta$$
$$+ \Phi^i_{\nu j}.\partial_\mu\varphi^j.h_i$$
$$+ \varphi^i.\partial_\mu H^j_{\nu i}.h_j$$
$$+ \varphi^i.\partial_\mu h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta$$
$$+ \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.\partial_\mu h_i$$
$$+ \varphi^i.H^j_{\nu i}.\partial_\mu h_j$$
$$+ \varphi^i.h_i.\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta$$
$$+ \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\partial_\mu\delta^\alpha_\beta$$

Formons la différence de transport d'un quadri-vecteur

$$\begin{aligned}\nabla_\nu.\nabla_\mu\overrightarrow{X} - \nabla_\mu.\nabla_\nu\overrightarrow{X} = {} & \partial_\nu\partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} \\ & + \partial_\mu x^\alpha.\partial_\nu\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.\partial_\nu h_i.\overrightarrow{e_\alpha} \\ & + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\partial_\nu\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\nu x^\alpha.(\gamma_\mu).\overrightarrow{e_\alpha} \\ & + x^\alpha.(\partial_\nu\gamma_\mu).\overrightarrow{e_\alpha} + x^\alpha.(\gamma_\mu).\partial_\nu\overrightarrow{e_\alpha}) \\ & - \partial_\mu\partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\nu x^\alpha.\partial_\mu\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} \\ & + \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.\partial_\mu h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\partial_\mu\overrightarrow{e_\alpha} \\ & + \partial_\mu x^\alpha.(\gamma_\nu).\overrightarrow{e_\alpha} + x^\alpha.(\partial_\mu\gamma_\nu).\overrightarrow{e_\alpha} \\ & + x^\alpha.(\gamma_\nu).\partial_\mu\overrightarrow{e_\alpha})\end{aligned}$$

Donc avec
$\partial_\mu\overrightarrow{e_\alpha} = \Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_\beta}$
$\partial_\mu h_i = H^j_{\mu i}.h_j$
$\partial_\mu\varphi^i = \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j$
$\gamma_\mu = \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta$
La différence de transport devient

$$\begin{aligned}\nabla_\nu.\nabla_\mu\overrightarrow{X} - \nabla_\mu.\nabla_\nu\overrightarrow{X} = {} & \partial_\nu\partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} \\ & + \partial_\mu x^\alpha.\partial_\nu\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} \\ & + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.\partial_\nu h_i.\overrightarrow{e_\alpha} \\ & + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\partial_\nu\overrightarrow{e_\alpha} \\ & + \partial_\nu x^\alpha.(\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta).\overrightarrow{e_\alpha} \\ & + x^\alpha.\partial_\nu(\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta).\overrightarrow{e_\alpha} \\ & + x^\alpha.(\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta).\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\overrightarrow{e_\beta} \\ & - \partial_\mu\partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} \\ & - \partial_\nu x^\alpha.H^j_{\mu i}.h_j.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} \\ & - \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} \\ & - \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_\beta} \\ & - \partial_\mu x^\alpha.(\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta).\overrightarrow{e_\alpha} \\ & - x^\alpha.\partial_\mu(\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta).\overrightarrow{e_\alpha} \\ & - x^\alpha.(\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta).\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_\beta}\end{aligned}$$

les expressions $\partial_\nu\gamma_\mu$ et $\partial_\mu\gamma_\nu$ deviennent

$$\partial_\nu(\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta) =$$
$$\begin{aligned}
&\partial_\nu\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \partial_\nu\varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \partial_\nu\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta \\
&+ \Phi^i_{\mu j}.\partial_\nu\varphi^j.h_i + \varphi^i.\partial_\nu H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.\partial_\nu h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta \\
&+ \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.\partial_\nu h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.\partial_\nu h_j + \varphi^i.h_i.\partial_\nu\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta \\
&+ \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\partial_\nu\delta^\alpha_\beta
\end{aligned}$$

$$\partial_\mu(\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta) =$$
$$\begin{aligned}
&\partial_\mu\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \partial_\mu\varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \partial_\mu\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta \\
&+ \Phi^i_{\nu j}.\partial_\mu\varphi^j.h_i + \varphi^i.\partial_\mu H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.\partial_\mu h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta \\
&+ \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.\partial_\mu h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.\partial_\mu h_j + \varphi^i.h_i.\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta \\
&+ \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\partial_\mu\delta^\alpha_\beta
\end{aligned}$$

Donc $\nabla_\nu.\nabla_\mu\overrightarrow{X} - \nabla_\mu.\nabla_\nu\overrightarrow{X}$ devient

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu.\nabla_\mu\overrightarrow{X} - \nabla_\mu.\nabla_\nu\overrightarrow{X} &= \partial_\nu\partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\partial_\nu\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.\partial_\nu h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\partial_\nu\overrightarrow{e_\alpha} \\
&+ x^\alpha.[\partial_\nu\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \partial_\nu\varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \partial_\nu\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\mu j}.\partial_\nu\varphi^j.h_i + \varphi^i.\partial_\nu H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.\partial_\nu h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta \\
&\quad + \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.\partial_\nu h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.\partial_\nu h_j + \varphi^i.h_i.\partial_\nu\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta].\overrightarrow{e_\alpha} \\
&\quad + x^\alpha.(\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta).\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\overrightarrow{e_\beta} \\
&\quad - \partial_\mu\partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.H^j_{\mu i}.h_j.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_\beta} \\
&\quad - \partial_\mu x^\alpha.(\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta).\overrightarrow{e_\alpha} \\
&- x^\alpha.[\partial_\mu\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \partial_\mu\varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \partial_\mu\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\nu j}.\partial_\mu\varphi^j.h_i + \varphi^i.\partial_\mu H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.\partial_\mu h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta \\
&\quad + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\partial_\nu\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.\partial_\mu h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.\partial_\mu h_j + \varphi^i.h_i.\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\partial_\mu\delta^\alpha_\beta].\overrightarrow{e_\alpha} \\
&\quad - x^\alpha.(\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta).\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_\beta}
\end{aligned}$$

Ce qui donne en réarangeant :

$$\nabla_\nu.\nabla_\mu\overrightarrow{X} - \nabla_\mu.\nabla_\nu\overrightarrow{X} =$$
$$+ x^\alpha.[\partial_\nu\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \partial_\nu\varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \partial_\nu\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\mu j}.\partial_\nu\varphi^j.h_i + \varphi^i.\partial_\nu H^j_{\mu i}.h_j$$
$$+ \varphi^i.\partial_\nu h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.\partial_\nu h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.\partial_\nu h_j + \varphi^i.h_i.\partial_\nu\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta].\overrightarrow{e_\alpha}$$

$$- x^\alpha.[\partial_\mu\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \partial_\mu\varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \partial_\mu\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\nu j}.\partial_\mu\varphi^j.h_i$$
$$+ \varphi^i.\partial_\mu H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.\partial_\mu h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\partial_\nu\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.\partial_\mu h_i$$
$$+ \varphi^i.H^j_{\nu i}.\partial_\mu h_j + \varphi^i.h_i.\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\partial_\mu\delta^\alpha_\beta].\overrightarrow{e_\alpha}$$

$$+ x^\alpha.(\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta).\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\overrightarrow{e_\beta}$$
$$- x^\alpha.(\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta).\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_\beta}$$

$$+ \partial_\nu\partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\partial_\nu\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.\partial_\nu h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\partial_\nu\overrightarrow{e_\alpha}$$
$$- \partial_\mu\partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\Phi^j_{\mu i}.\varphi^i.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_\beta}$$

avec $\partial_\mu\varphi^i = \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j$ et $\partial_\mu h_i = H^j_{\mu i}.h_j$ et $\delta^j_i.\delta^j_i = 1$ avec $\overrightarrow{e_\beta} = \delta^\alpha_\beta.\overrightarrow{e_\alpha}$ cela devient :

$$\nabla_\nu.\nabla_\mu\overrightarrow{X} - \nabla_\mu.\nabla_\nu\overrightarrow{X} =$$
$$+ x^\alpha.[\partial_\nu\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.H^j_{\mu i}.h_j + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\mu j}.\Phi^j_{\nu i}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.\partial_\nu H^j_{\mu i}.h_j$$
$$+ \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.H^j_{\mu i}.\partial_\nu h_j + \varphi^i.h_i.\partial_\nu\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta].\overrightarrow{e_\alpha}$$

$$- x^\alpha.[\partial_\mu\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.H^j_{\nu i}.h_j + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\nu j}.\Phi^j_{\nu i}.\varphi^i.h_i$$
$$+ \varphi^i.\partial_\mu H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\partial_\nu\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.H^j_{\mu i}.h_j$$
$$+ \varphi^i.H^j_{\nu i}.H^i_{\mu j}.h_i + \varphi^i.h_i.\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\partial_\mu\delta^\alpha_\beta].\overrightarrow{e_\alpha}$$

$$+ x^\alpha.(\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}).\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\overrightarrow{e_\alpha}$$
$$- x^\alpha.(\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}).\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_\alpha}$$

$$+ \partial_\nu\partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.\partial_\nu h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta.\overrightarrow{e_\alpha}$$
$$- \partial_\mu\partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\Phi^j_{\mu i}.\varphi^i.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta.\overrightarrow{e_\alpha}$$

$x^\alpha \in \mathbb{R}$ et est donc commutatif...

$$\nabla_\nu.\nabla_\mu\overrightarrow{X} - \nabla_\mu.\nabla_\nu\overrightarrow{X} =$$
$$+ [\partial_\nu\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.H^j_{\mu i}.h_j + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\mu j}.\Phi^j_{\nu i}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.\partial_\nu H^j_{\mu i}.h_j$$
$$+ \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.H^j_{\mu i}.\partial_\nu h_j + \varphi^i.h_i.\partial_\nu\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta].x^\alpha.\overrightarrow{e_\alpha}$$

$$- [\partial_\mu\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.H^j_{\nu i}.h_j + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\nu j}.\Phi^j_{\nu i}.\varphi^i.h_i$$
$$+ \varphi^i.\partial_\mu H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\partial_\nu\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.H^j_{\mu i}.h_j$$
$$+ \varphi^i.H^j_{\nu i}.H^i_{\mu j}.h_i + \varphi^i.h_i.\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\partial_\mu\delta^\alpha_\beta].x^\alpha.\overrightarrow{e_\alpha}$$

$$+ (\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}).\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.x^\alpha.\overrightarrow{e_\alpha}$$
$$- (\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}).\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.x^\alpha.\overrightarrow{e_\alpha}$$

$$+ \partial_\nu\partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.\partial_\nu h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta.\overrightarrow{e_\alpha}$$
$$- \partial_\mu\partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\Phi^j_{\mu i}.\varphi^i.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta.\overrightarrow{e_\alpha}$$

devient :

$$\nabla_\nu.\nabla_\mu\overrightarrow{X} - \nabla_\mu.\nabla_\nu\overrightarrow{X} =$$
$$+ [\partial_\nu\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.H^j_{\mu i}.h_j + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\mu j}.\Phi^j_{\nu i}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.\partial_\nu H^j_{\mu i}.h_j$$
$$+ \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.H^j_{\mu i}.\partial_\nu h_j + \varphi^i.h_i.\partial_\nu\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta].\overrightarrow{X}$$

$$- [\partial_\mu\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.H^j_{\nu i}.h_j + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\nu j}.\Phi^j_{\nu i}.\varphi^i.h_i + \varphi^i.\partial_\mu H^j_{\nu i}.h_j$$
$$+ \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.H^j_{\nu i}.H^i_{\mu j}.h_i + \varphi^i.h_i.\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta].\overrightarrow{X}$$

$$+ (\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}).\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\overrightarrow{X}$$
$$- (\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}).\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\overrightarrow{X}$$

$$+ \partial_\nu\partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.\partial_\nu h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta.\overrightarrow{e_\alpha}$$
$$- \partial_\mu\partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\Phi^j_{\mu i}.\varphi^i.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} - \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta.\overrightarrow{e_\alpha}$$

$$(5.7)\quad \nabla_\nu.\nabla_\mu\overrightarrow{X} - \nabla_\mu.\nabla_\nu\overrightarrow{X} =$$

$$[\partial_\nu\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.H^j_{\mu i}.h_j + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\mu j}.\Phi^j_{\nu i}.\varphi^j.h_i$$
$$+ \varphi^i.\partial_\nu H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.H^j_{\mu i}.H^i_{\nu j}.h_i + \varphi^i.h_i.\partial_\nu\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta].\overrightarrow{X}$$
$$- [\partial_\mu\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.H^j_{\nu i}.h_j + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\nu j}.\Phi^j_{\nu i}.\varphi^i.h_i$$
$$+ \varphi^i.\partial_\mu H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta + \Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.H^j_{\nu i}.H^i_{\mu j}.h_i + \varphi^i.h_i.\partial_\mu\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\delta^\alpha_\beta].\overrightarrow{X}$$

$$+ (\Phi^i_{\mu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}).\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.\overrightarrow{X} - (\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i + \varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j + \varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\nu\alpha}).\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\overrightarrow{X}$$

$$+ (\partial_\nu\partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\Phi^i_{\nu j}.\varphi^j.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.H^j_{\nu i}.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\mu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta.\overrightarrow{e_\alpha})$$
$$- (\partial_\mu\partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\nu x^\alpha.\Phi^j_{\mu i}.\varphi^i.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.H^j_{\mu i}.h_j.\overrightarrow{e_\alpha} + \partial_\nu x^\alpha.\varphi^i.h_i.\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\delta^\alpha_\beta.\overrightarrow{e_\alpha})$$

$$(5.8)\qquad \partial_\mu\overrightarrow{e_\alpha} = \Gamma^\beta_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_\beta} = \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}.\overrightarrow{e_\alpha}$$