Vers une prise en compte des corrélations spatiales au sein des erreurs d'observation pour des séquences d'images

Vincent Chabot, Maëlle Nodet, Arthur Vidard

▶ **To cite this version:**

Vincent Chabot, Maëlle Nodet, Arthur Vidard. Vers une prise en compte des corrélations spatiales au sein des erreurs d'observation pour des séquences d'images. Congrès National d'Assimilation de données, Dec 2014, Toulouse, France. hal-01096901

HAL Id: hal-01096901
https://inria.hal.science/hal-01096901

Submitted on 5 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Prise en compte des corrélations spatiale au sein des erreurs d'observations. Application à l'assimilation de données images.

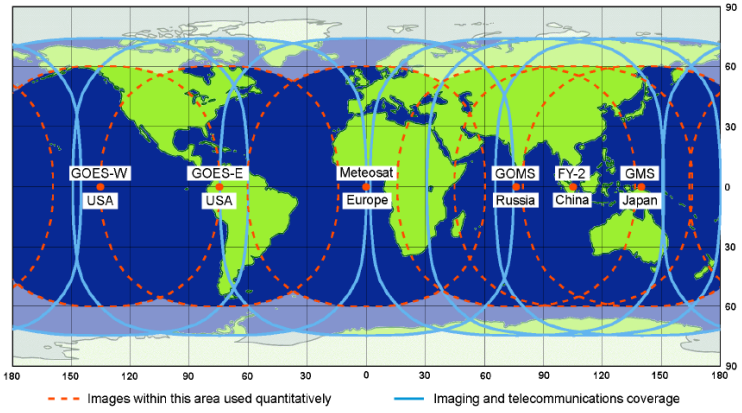
Vincent Chabot, Maëlle Nodet, Arthur Vidard

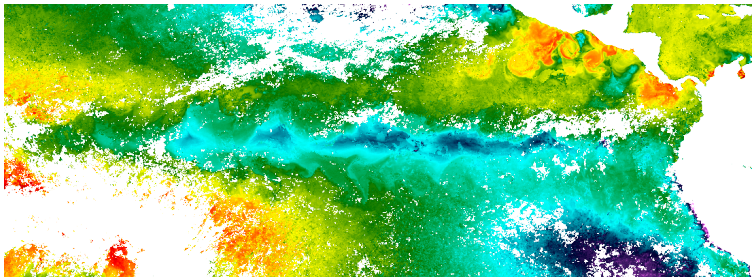
Laboratoire Jean Kuntzman
INRIA Grenoble - Rhône-Alpes
Equipe-Projet Moïse

3 Décembre 2014

Images satellites : entre atouts et difficultés

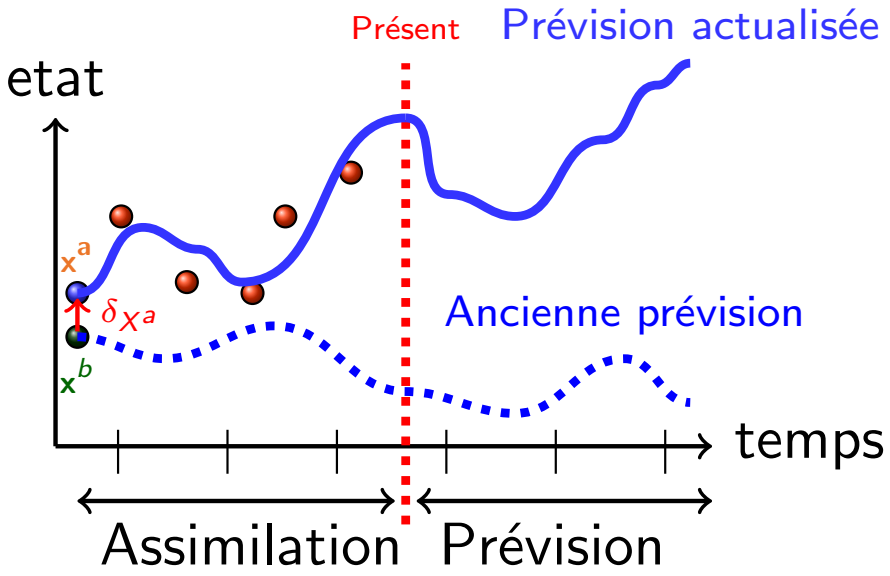
- Couverture quasi globale,
- Observations denses en espace et en temps ;
- Information sur de nombreuses variables du système ;
- . . . ;





- **Les erreurs d'observations sont corrélées en espace** ;
- Vue bidimensionnelle de phénomènes tri-dimentionels ;
- Problème d'occultations ;
- Le niveau de luminosité peut varier au sein de la séquence ;
- . . . ;

Combiner différentes sources d'observations via l'assimilation variationnelle de données



Sources d'informations :

- Un modèle $\mathcal{M}$ d'évolution
  - Vent,
  - Température,
  - Pression,
  - ...
- Des observations
- Connaissances a priori :
  - Une ébauche,
  - Erreur d'ébauche,
  - Erreur d'observation,

But :

Chercher un **état analysé** $\mathbf{x}^a$ "*assez peu éloigné*" de l'ébauche x^b de telle sorte que la trajectoire issue du modèle soit "*assez proche*" des nouvelles observations.

Formulation mathématique du problème d'assimilation variationnelle de données

Formulation du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{x}^a \text{ tel que} \\ \mathbf{x}^a = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}}\, J(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Fonction coût :

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left\|\mathbf{x} - x^b\right\|^2_{\mathbf{B}} + \frac{1}{2}\sum_i \left\|\mathcal{H}(\mathcal{M}_{t_0 \to t_i}(\mathbf{x})) - y_i^o\right\|^2_{\mathbf{R}}$$

écart à l'ébauche — écart aux observations

avec **B** et **R** les matrices de covariance d'erreur d'ébauche et d'observation.

$$\|x\|^2_{\mathbf{K}} = x^T \mathbf{K}^{-1} x$$

Présentation du plan

1. Formulations du terme d'écart aux observations
2. Prise en compte des corrélations
3. Problème de convergence
4. Conclusion et perspectives

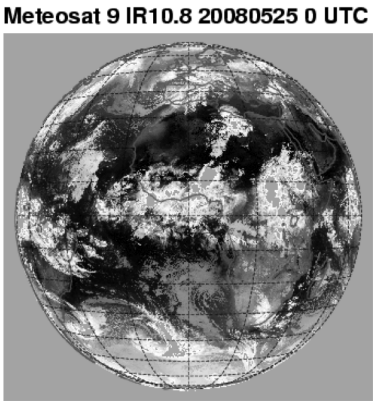
Ingrédients pour l'assimilation d'image

Ecart aux observations

$$J^o(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_i \left\| \mathcal{H}(\mathcal{M}_{t_0 \to t_i}(\mathbf{x})) - y_i^o \right\|^2_{\mathbf{R}}$$

- Un opérateur d'observation : $\mathcal{H}$;
- Une mesure de la distance : $\|.\|^2$;
- Une description des erreurs d'observation : $\mathbf{R}$;

Observation (y^o)



$\updownarrow J^o(\mathbf{x})$?

Vecteur d'état

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ T \\ \rho \\ \dots \end{bmatrix}$$

Ingrédients pour l'assimilation d'image

Ecart aux observations

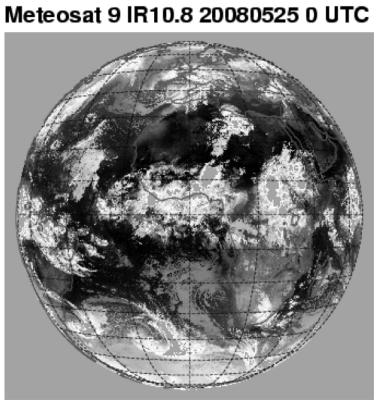
$$J^o(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_i \left\| \mathcal{H}(\mathcal{M}_{t_0 \to t_i}(\mathbf{x})) - y_i^o \right\|^2_{\mathbf{R}}$$

- Un opérateur d'observation : $\mathcal{H}$;
- Une mesure de la distance : $\|.\|^2$;
- Une description des erreurs d'observation : $\mathbf{R}$;

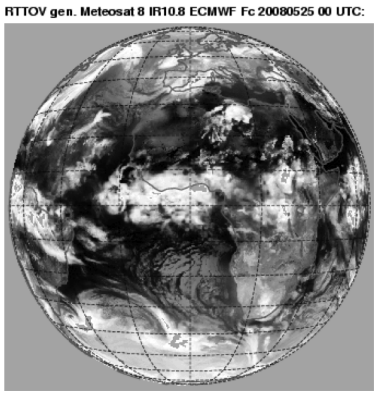
Une solution :

Création d'une image "synthétique" à partir des sorties du modèle ;

Observation (y^o)



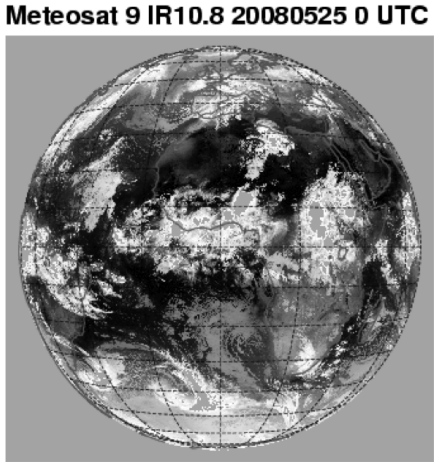
Equivalent modèle (y^{synth})



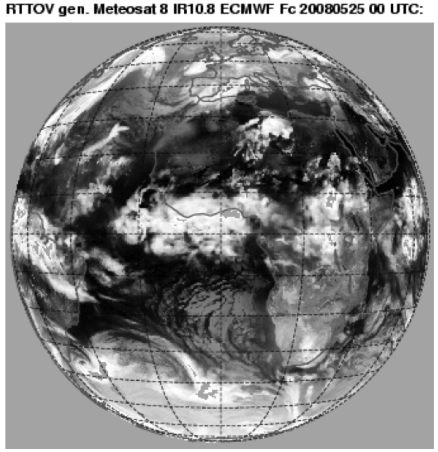
Erreurs d'observations (matrice R)

- **Différentes sources d'erreurs :**
  - Erreur de mesure ;
  - Erreur de pré-traitement ;
  - Erreur de représentativité ;
  - ...
- **Difficile à estimer**
- **Difficile à utiliser (matrice de grande taille) :**
  - Problème de stockage ;
  - Problème de coût de calcul du produit matrice vecteur ;
  - Problème d'inversion ;

Observation



Equivalent modèle



Gestion des erreurs d'observations

Nécessité d'approcher la matrice **R** par une matrice **aisément inversible**.

Méthodes principalement utilisées

- Faire en sorte que les observations ne soient que peu (ou pas) corrélées afin d'utiliser une matrice diagonale dans l'espace des pixels $\Rightarrow$ **sous-echantillonage des données.**
- Sur-estimer volontairement la variance (dans l'espace des pixels) afin de réduire le poids des observations corrélées en espaces.

Conséquence

Une part importante de l'information disponible est sous-utilisée.

Gestion des erreurs d'observations

Nécessité d'approcher la matrice **R** par une matrice **aisément inversible**.

Différents pistes (concernant les corrélations spatiales)

- Utilisation d'une décomposition en valeur propre tronquée **[Fisher 2005]** ;
- Utilisation d'opérateur de diffusion **[Weaver 2014]** ;
- Utilisation de matrices de markov **[Stewart et al. 2013]**. L'inverse de ces matrices à une structure tridiagonale (en $1D$) ;
- **Utiliser une matrice diagonale, mais après un changement d'espace ; [chabot et al. 2014]**

En quoi un changement d'espace peut-il nous aider ?

Observation	Propriété du bruit	Espace de travail
$y^o = y^t + \epsilon^o$	$\epsilon^o \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$	Pixels,
$\mathbf{A}y^o = \mathbf{A}y^t + \mathbf{A}\epsilon^o$	$\mathbf{A}\epsilon^o \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{ARA}^T)$	$\mathbf{A}$.

Idée :

Choisir $\mathbf{A}$ de telle sorte que la matrice $\mathbf{ARA}^T$ soit bien représentée par $\mathrm{diag}(\mathbf{ARA}^T)$.

En quoi un changement d'espace peut-il nous aider ?

Observation	Propriété du bruit	Espace de travail
$y^o = y^t + \epsilon^o$	$\epsilon^o \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$	Pixels,
$\mathbf{A}y^o = \mathbf{A}y^t + \mathbf{A}\epsilon^o$	$\mathbf{A}\epsilon^o \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{ARA}^T)$	$\mathbf{A}$.

Idée :

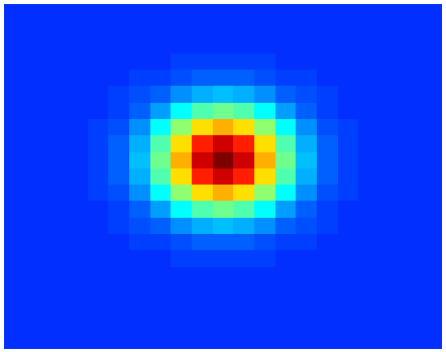
Choisir $\mathbf{A}$ de telle sorte que la matrice $\mathbf{ARA}^T$ soit bien représentée par $\mathrm{diag}(\mathbf{ARA}^T)$.

Idée ancienne utilisée (entre autre) en assimilation de données (pour $\mathbf{B}$) :

- Spectral : **[Courtier et al. 1998]** ;
- Ondelettes : **[Fisher 2003, Deckmyn et al. 2005,...]** ;

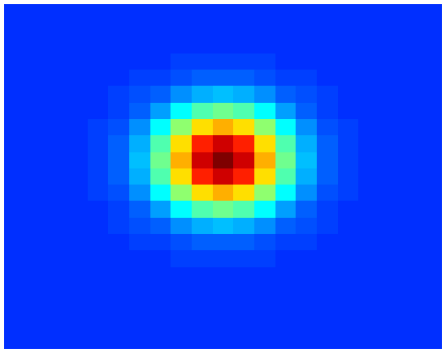
Connaissance apportée par une approximation diagonale. Cas d'un bruit isotrope homogène.

Vérité

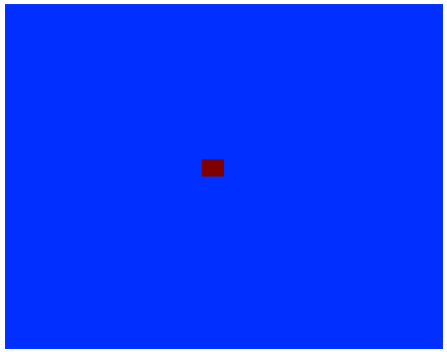


Connaissance apportée par une approximation diagonale. Cas d'un bruit isotrope homogène.

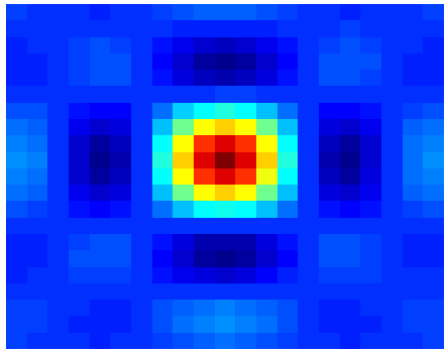
Vérité



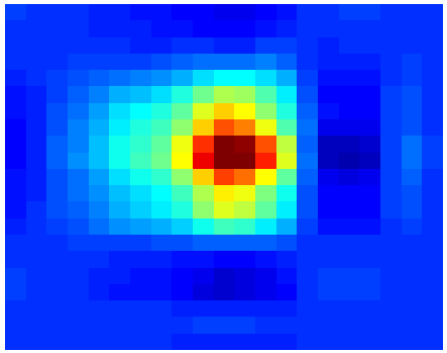
Pixel



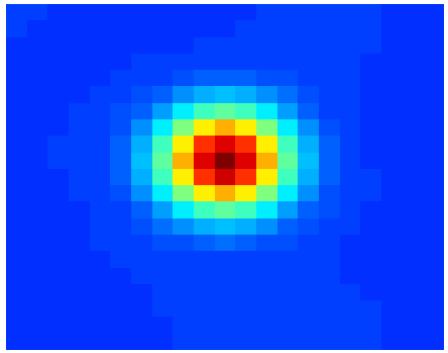
Curvelettes



Ondelettes



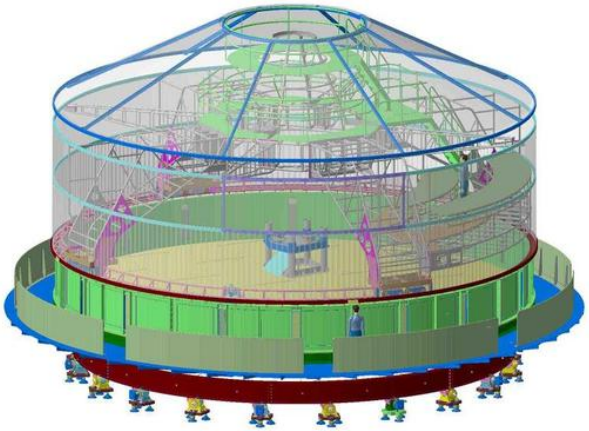
Fourier

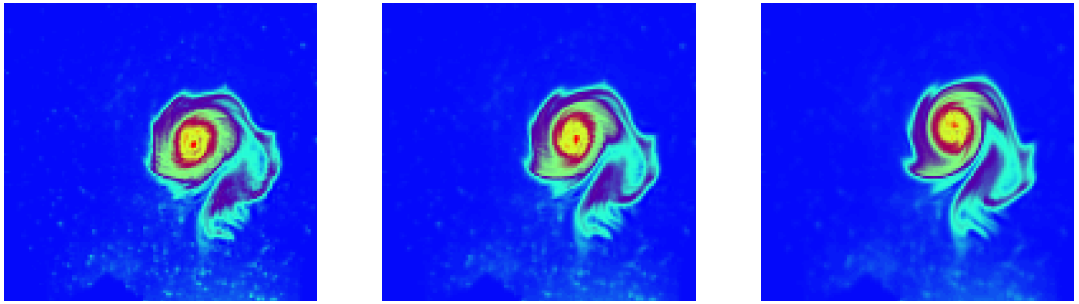


Rappel du plan

1. Formulations du terme d'écart aux observations
2. **Prise en compte des corrélations**
3. Problème de convergence
4. Conclusion et perspectives

Assimilation d'une séquence d'images de traceur passif





[J.-B. Flór and I. Eames, 2002]

modèle shallow-water $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{h})$

$$(\mathcal{M}) \begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u}\partial_x \mathbf{u} + \mathbf{v}\partial_y \mathbf{u} - f\mathbf{v} + g\partial_x \mathbf{h} + \mathcal{D}(\mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{u}\partial_x \mathbf{v} + \mathbf{v}\partial_y \mathbf{v} + f\mathbf{u} + g\partial_y \mathbf{h} + \mathcal{D}(\mathbf{v}) = 0 \\ \partial_t \mathbf{h} + \partial_x(\mathbf{hu}) + \partial_y(\mathbf{hv}) = 0 \end{cases}$$

Terme d'écart aux observations

Écart aux observations (après transformée A)

$$J^o(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{K} \| \mathbf{A}\left(\mathcal{H}[\mathbf{x}(t_i)]\right) - \mathbf{A}\left(y^o(t_i)\right) \|^2_{\mathbf{R_A}}$$

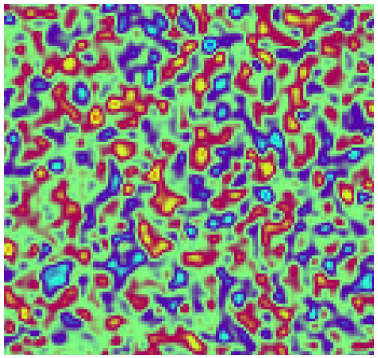
Équivalent modèle : $\mathcal{H}[\mathbf{x}(t_i)] = \mathbf{q}(t_i)$

Crée par advection diffusion d'un traceur passif $\mathbf{q}$

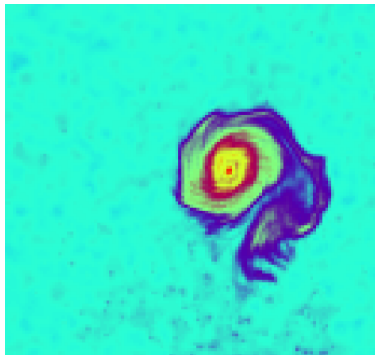
$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{u}\partial_x \mathbf{q} + \mathbf{v}\partial_y \mathbf{q} - \nu_T \Delta \mathbf{q} = 0 \\ \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{y^o}(t_0) \quad : \quad \text{image initiale} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad : \quad \text{verifiant } (\mathcal{M}) \end{cases}$$

Impact de la spécification des statistiques d'erreur

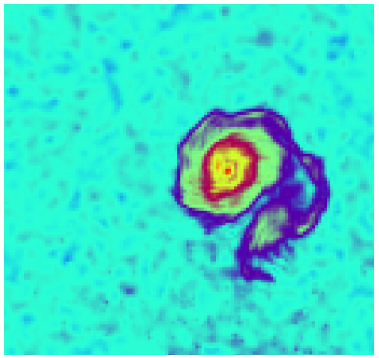
Bruit



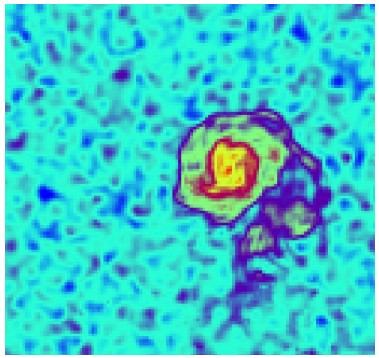
SNR : 26.8 dB



SNR : 20.8 dB

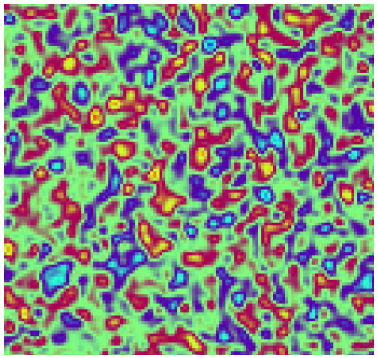


SNR : 14.8 dB

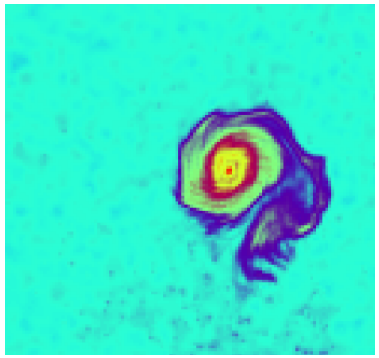


Impact de la spécification des statistiques d'erreur

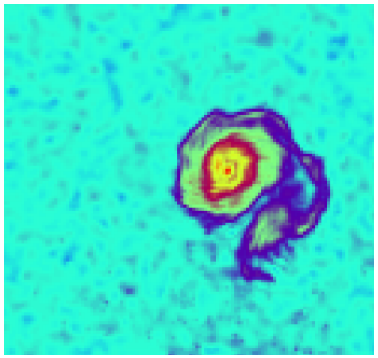
Bruit



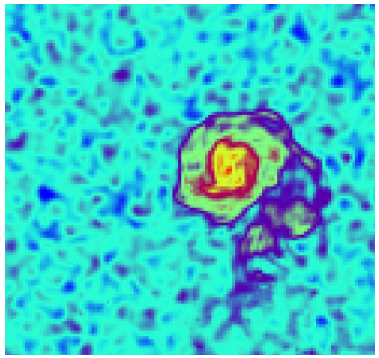
SNR : 26.8 dB



SNR : 20.8 dB



SNR : 14.8 dB



		Pixel	Grad	Wavelets	Curvelets	Fourier
Bruit fort	14.8 dB	37%	20%	9%	8%	7%
	20.8 dB	22%	13%	8%	8%	7%
Bruit faible	26.8 dB	16%	11%	7%	8%	7%

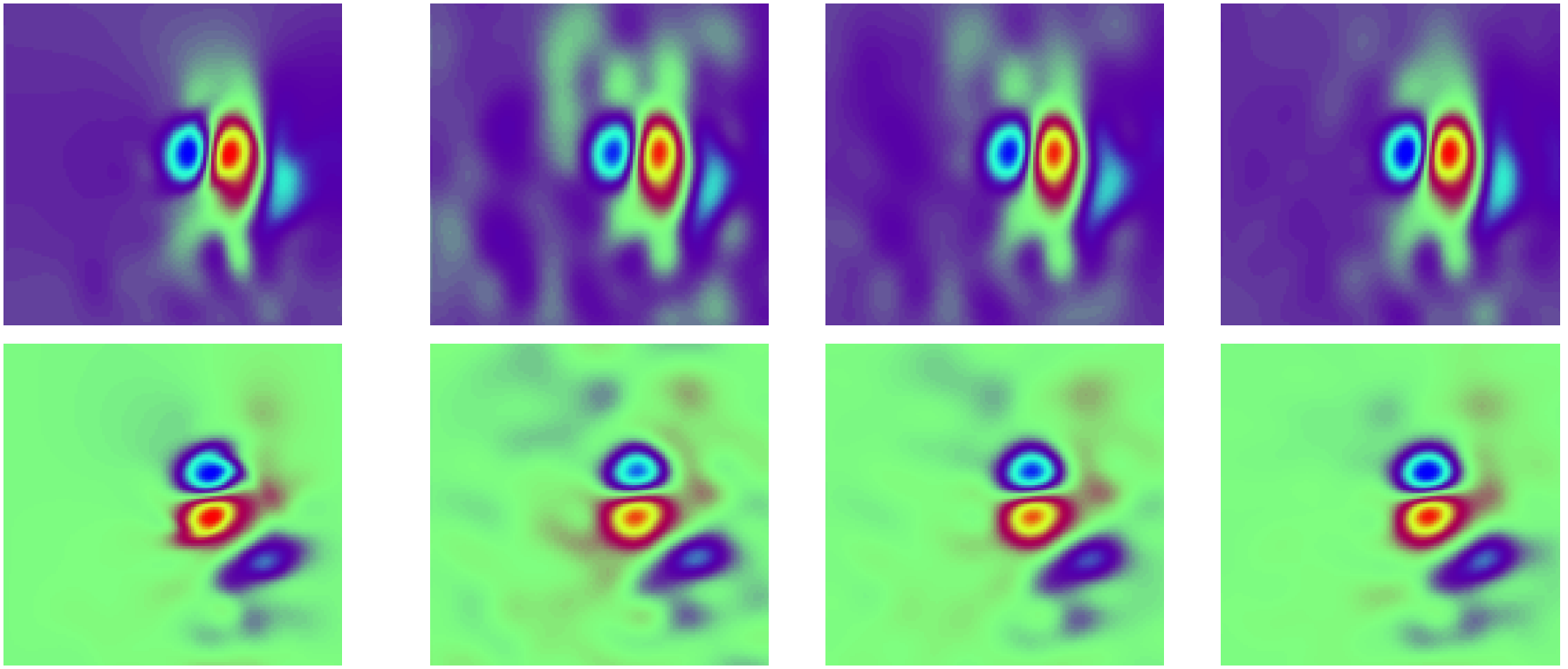
Table: Moyenne sur 10 expériences de l'erreur résiduelle (en pourcent).

Toutes les matrices de covariances utilisées sont diagonales.

Résultats

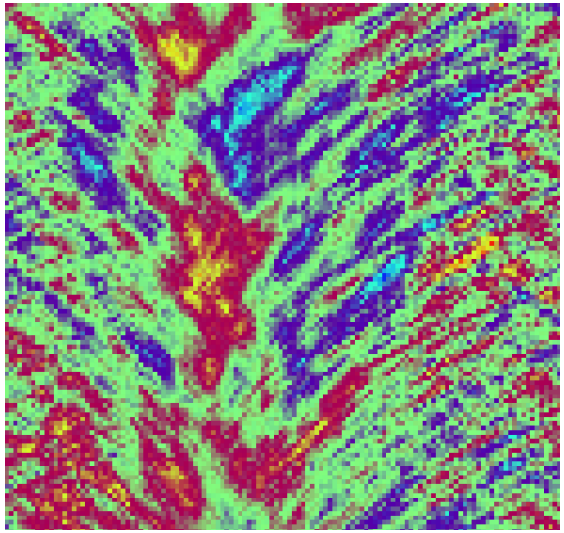
v

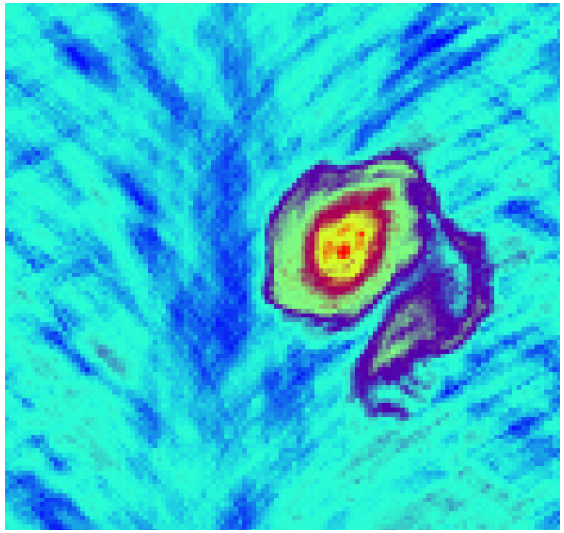
u



Vérité | Pixel | Gradient | Ondelettes

Bruit non homogène présentant une forte anisotropie





		Pixel	Grad	Wavelets	Curvelets	Fourier
Bruit fort	12.5 dB	47%	22%	25%	14%	23%
	18.5 dB	36%	15%	14%	10%	14%
Bruit faible	26.5 dB	16%	10%	9%	8%	8%

Table: Moyenne sur 10 expériences de l'erreur résiduelle (en pourcent).

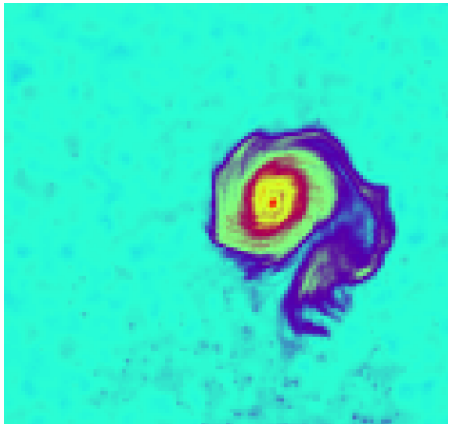
Rappel du plan

1. Formulations du terme d'écart aux observations
2. Prise en compte des corrélations
3. **Problème de convergence**
4. Conclusion et perspectives

Expérience :

Assimilation d'une **seule** image plus ou moins éloignée du début de la fenêtre d'assimilation.

Observation

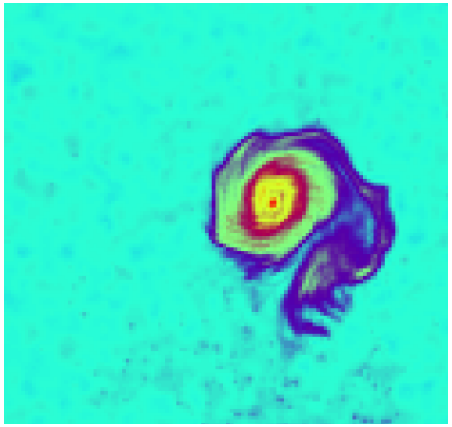


bruit homogène isotrope

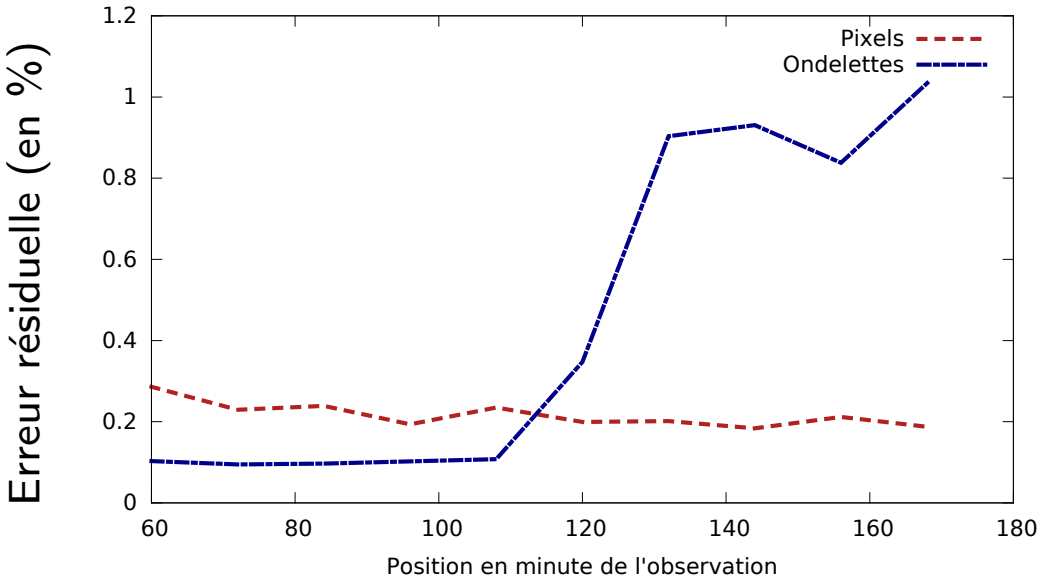
Expérience :

Assimilation d'une **seule** image plus ou moins éloignée du début de la fenêtre d'assimilation.

Observation



bruit homogène isotrope



Problème de convergence dans l'espace des ondelettes dû à un trop grand écart en début de processus entre l'observation et l'image synthétique.

Décalage observation–équivalent modèle

Lorsque la variance des coefficients de **petite échelle** est faible, en début de minimisation ces coefficients de détails observés peuvent très éloignés de leur équivalent modèle.

Pour les petites échelles :

$$\left(d^{o}_{j,\mathbf{k}} - d^{synth}_{j,\mathbf{k}}\right)^2 \gg \sigma^2_{j,\mathbf{k}}$$

$d_{j,\mathbf{k}}$: coefficient d'ondelette à l'échelle j. $\mathbf{k}$ est un paramètre de localisation spatiale.

Décalage observation–équivalent modèle

Lorsque la variance des coefficients de **petite échelle** est faible, en début de minimisation ces coefficients de détails observés peuvent très éloignés de leur équivalent modèle.

Pour les petites échelles :

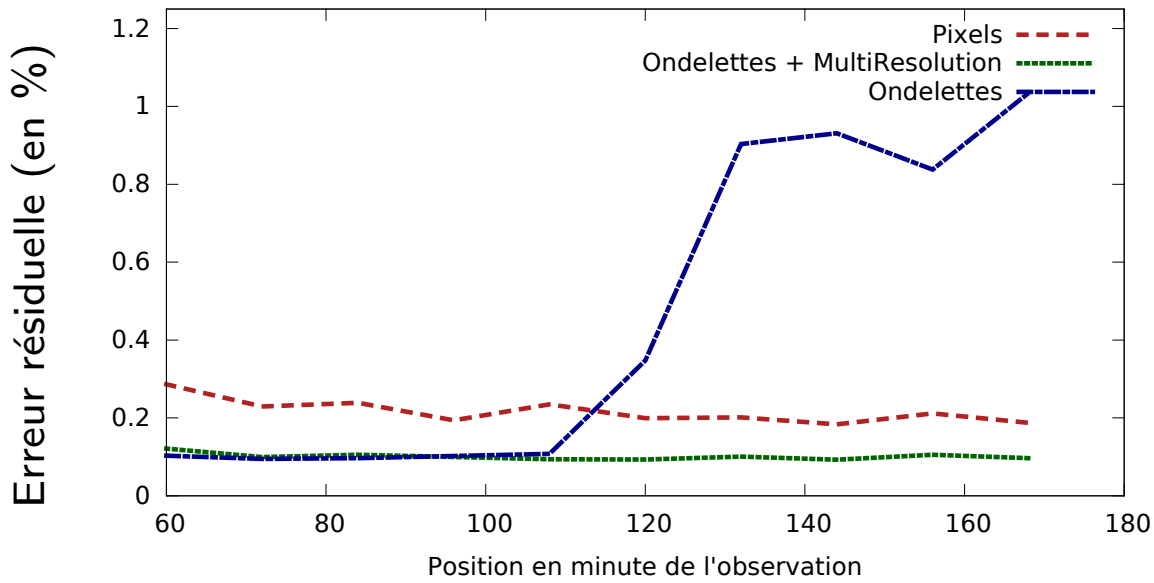
$$\left(d^{o}_{j,\mathbf{k}} - d^{synth}_{j,\mathbf{k}}\right)^2 \gg \sigma^2_{j,\mathbf{k}}$$

$d_{j,\mathbf{k}}$: coefficient d'ondelette à l'échelle j. $\mathbf{k}$ est un paramètre de localisation spatiale.

Le processus d'assimilation se déroule bien si l'écart entre les observations et l'équivalent modèle aux échelles grossières est principalement dû au bruit.

Intégration en deux temps

1. Utiliser seulement l'information contenue aux échelles grossières,
2. Une fois ces échelles "recalées", intégrer l'information présente aux échelles plus fines.



Intégration de l'information au fil de l'eau

Idée

Utiliser uniquement l'information "*semblant pertinente*" à un instant donné lors de la minimisation.

Coût moyen à une échelle j donnée :

$$J_j^o(X) = \frac{1}{n_j} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\left(d_{j,\mathbf{k}}^o - d_{j,\mathbf{k}}^{synth} \right)^2}{\sigma_{j,\mathbf{k}}^2}.$$

avec n_j est le nombre de coefficient à l'échelle j.

Intégration de l'information au fil de l'eau

Idée

Utiliser uniquement l'information "*semblant pertinente*" à un instant donné lors de la minimisation.

Coût moyen à une échelle j donnée :

$$J_j^o(X) = \frac{1}{n_j} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\left(d_{j,\mathbf{k}}^o - d_{j,\mathbf{k}}^{synth} \right)^2}{\sigma_{j,\mathbf{k}}^2}.$$

avec n_j est le nombre de coefficient à l'échelle j.

L'information à l'échelle j "*semble pertinente*" si :

$$J_s^o(X) < \tau_s$$

Formulation de la fonction coût

$$J^o(X) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} n_j J^o_{s,\tau_s}(X)$$

où

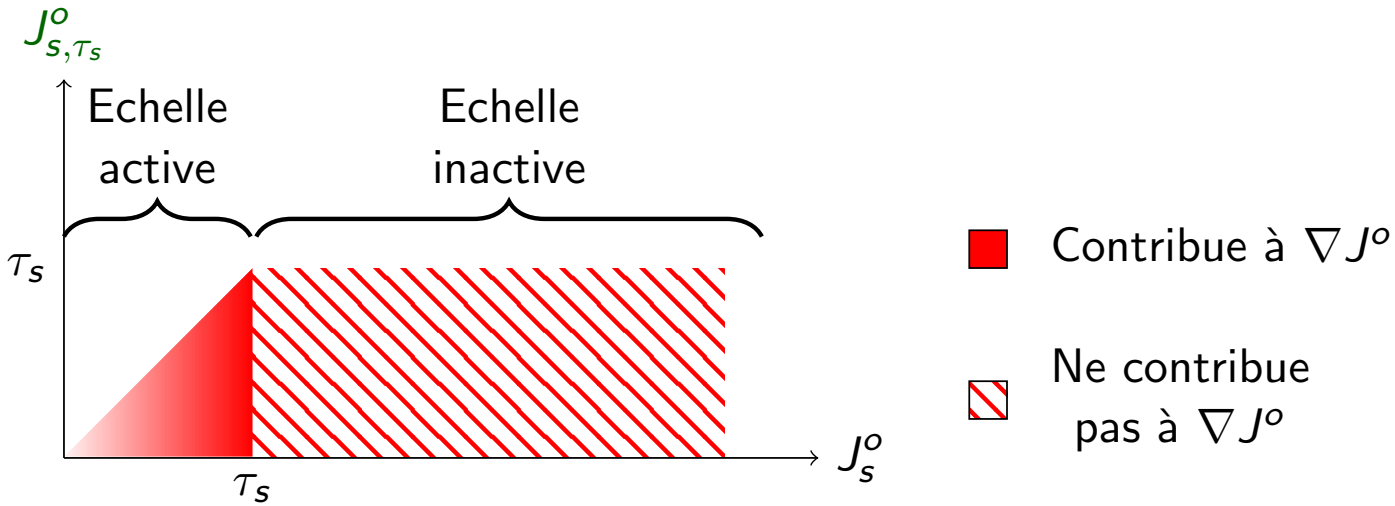
$$J^o_{s,\tau_s}(X) = \begin{cases} J^o_s(X) & \text{si } J^o_s(X) \leq \tau_s \\ \tau_s & \text{sinon} \end{cases}$$

Formulation de la fonction coût

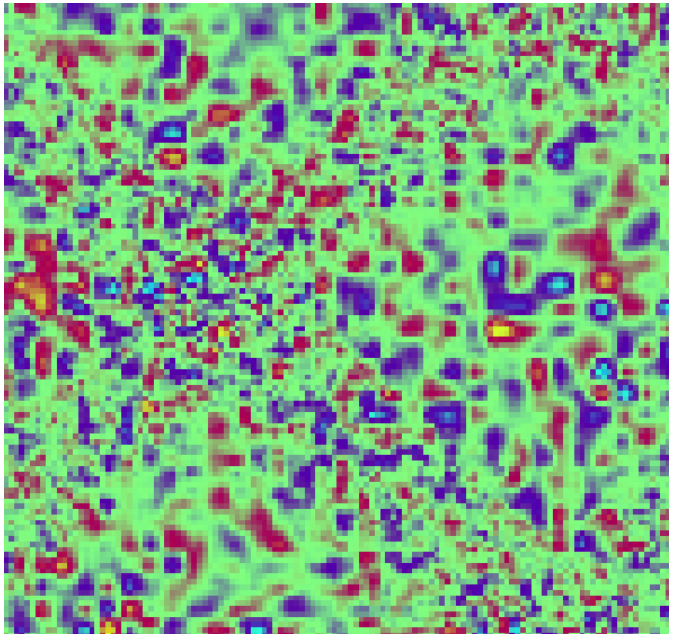
$$J^o(X) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} n_j J^o_{s,\tau_s}(X)$$

où

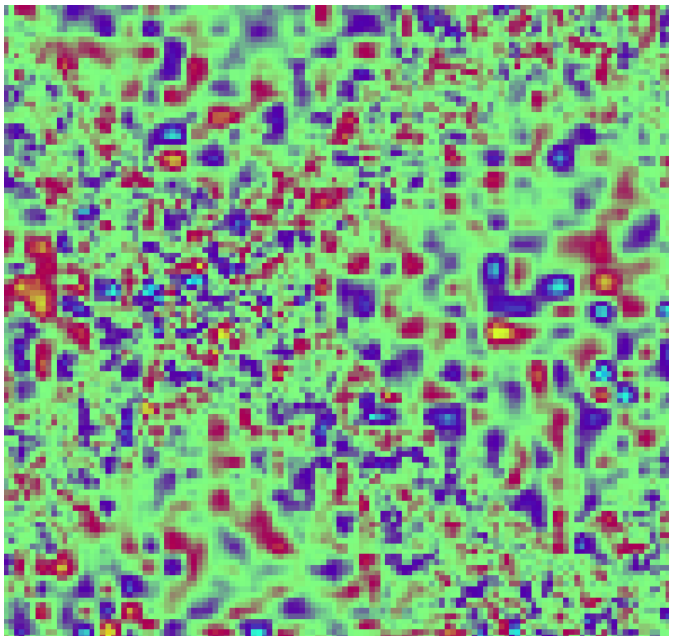
$$J^o_{s,\tau_s}(X) = \begin{cases} J^o_s(X) & \text{si } J^o_s(X) \leq \tau_s \\ \tau_s & \text{sinon} \end{cases}$$



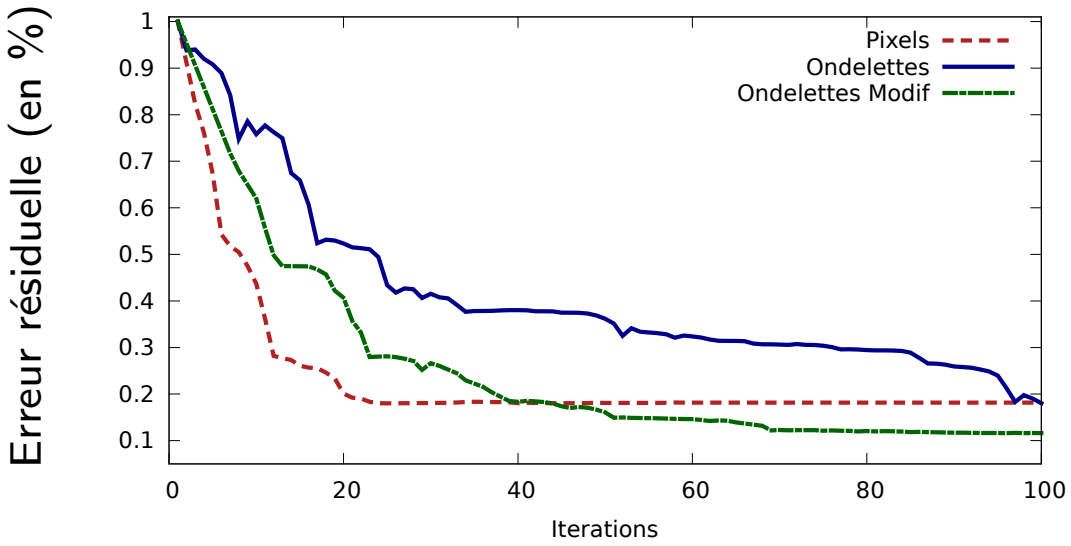
Bruit : Représenté de façon **optimale** dans la base d'ondelettes (par une matrice diagonale).



Bruit : Représenté de façon **optimale** dans la base d'ondelettes (par une matrice diagonale).

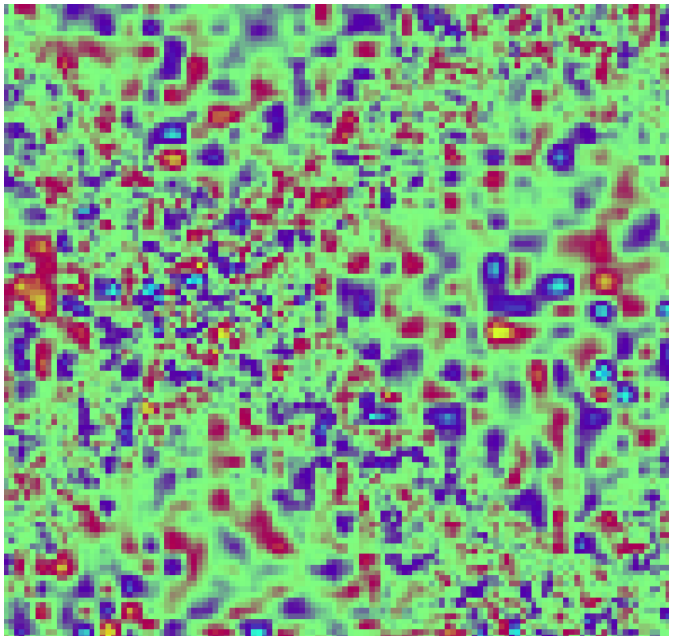


v–RMSE en fonction des itérations de minimisation

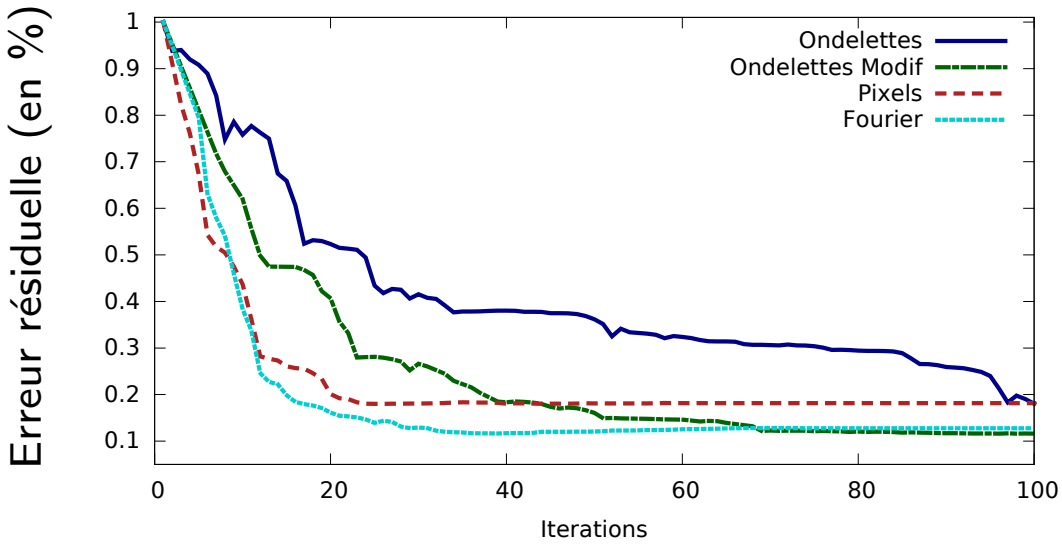


La vitesse de décroissance des RMSE **est améliorée** par le processus d'incorporation *au fil de l'eau*.

Bruit : Représenté de façon **optimale** dans la base d'ondelettes (par une matrice diagonale).



v–RMSE en fonction des itérations de minimisation



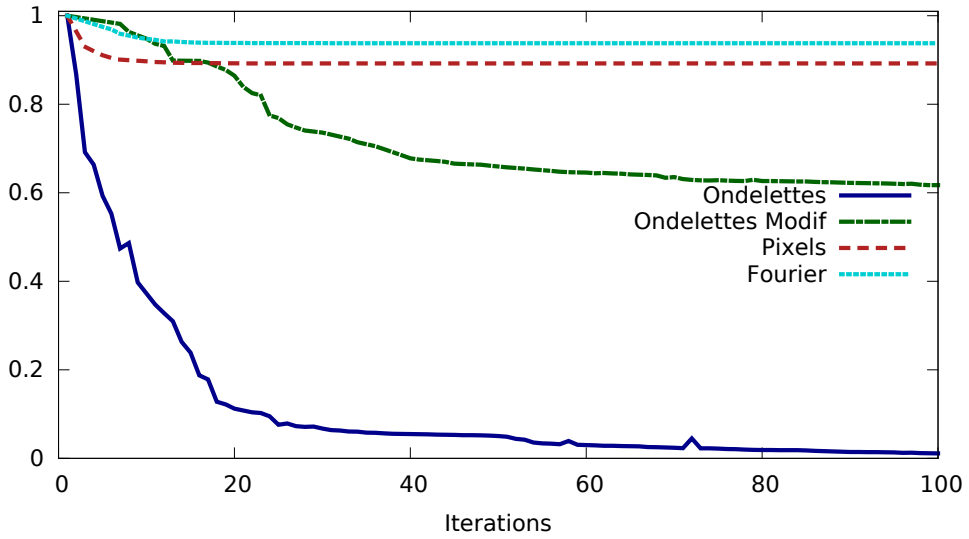
La vitesse de décroissance des RMSE **est améliorée** par le processus d'incorporation *au fil de l'eau* mais reste néanmoins **inférieure** à celle d'autres représentations ne prenant **pas correctement** en compte les corrélations d'erreur d'observation.

Conclusion

- Il est possible, en représentant le signal dans une **base différente** de celle des pixels, de **prendre en compte une partie des corrélations** et ce même en utilisant des **matrices diagonales** ;
- Cette prise en compte a (généralement) un effet positif sur l'analyse ;
- Mais peut aussi entraîner des problèmes de convergence ;
- Il est possible d'utiliser l'aspect multi-échelle de certaines transformées afin d'essayer d'incorporer l'information contenue à différentes échelles "au bon moment" dans le système d'assimilation ;

Merci pour votre attention !

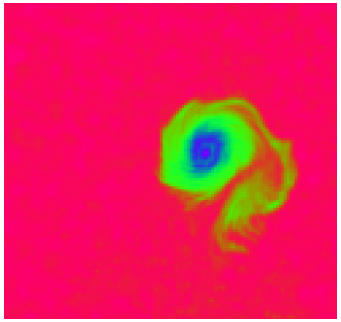
Fonction coût normalisée en fonction des itérations de minimisation



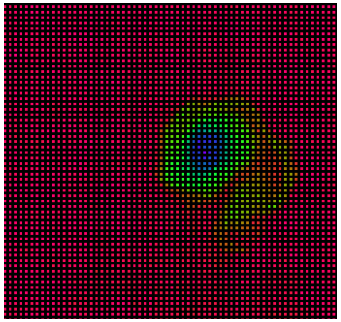
Impact d'un sous–échantillonnage

But : Mieux respecter l'hypothèse de décorrélation entre deux pixels observés.

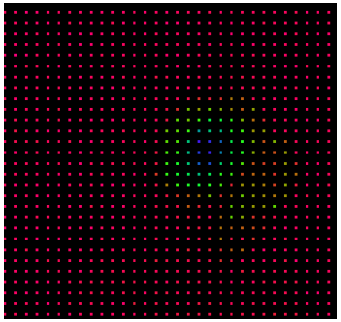
(128 x 128)



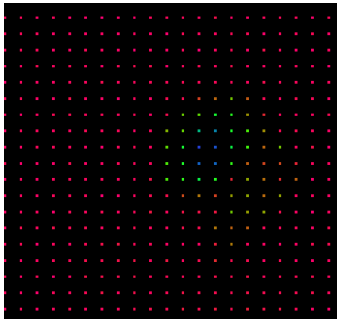
(64x64)

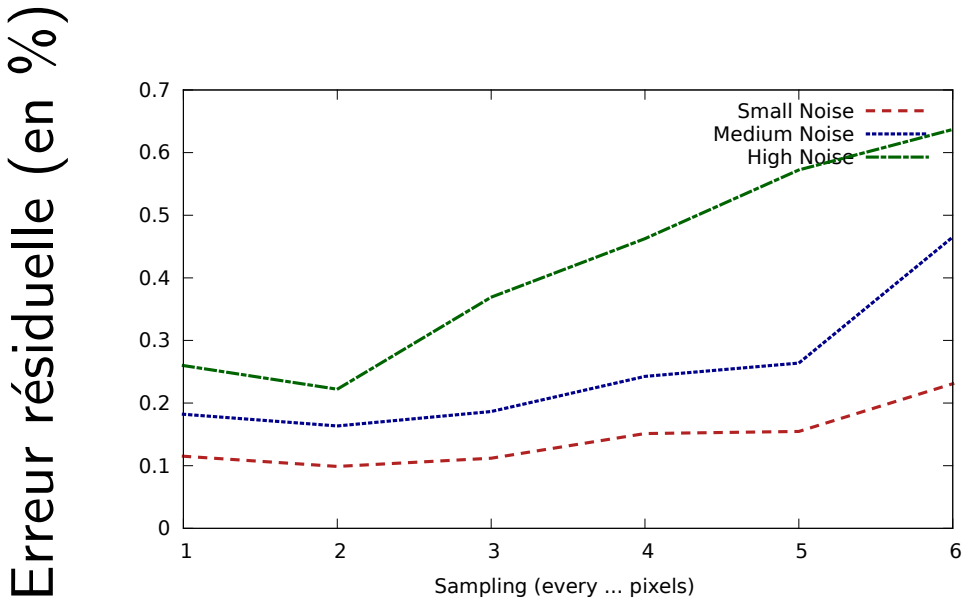


(32x32)



(21x21)





Problème : Trop faible résolution des observations par rapport au phénomène observé pour avoir une information pertinente sur le champ de vitesse.