L'œuvre mathématique et astronomique de Bhāskarācārya, le Siddhāntaśiromaṇi Chapitre 8: La règle de trois et autres règles de proportion

François Patte

L’œuvre mathématique et astronomique
de Bhāskarācārya

Le Siddhāntaśiromaṇi

L’arithmétique : Līlāvatī

Chapitre 8 : La règle de trois et autres règles de proportion

avec le commentaire Aṅkāmṛtasāgarī de Gaṅgādhara

édition, traduction et commentaires
par
François Patte

Huitième chapitre

La règle de trois et autres règles de proportion

La règle de trois

Maintenant, concernant la règle de trois, une strophe qui en est la formule opératoire :

प्रमाणमिच्छा च समानजाती
  आद्यन्तयोस्तत्फलमन्यजाति।
मध्ये तदिच्छाहतमादिहृत्स्याद्
  इच्छाफलं व्यस्तविधिर्विलोमे ॥ ७३॥

pramāṇam icchā ca samānajātī
ādyantayos tatphalam anyajāti |
madhye tad icchāhatam ādihṛt syād
icchāphalaṃ vyastavidhir vilome || 73 ||

Le critère et la [quantité] voulue sont deux [quantités] de même classe placées au début et à la fin ; le fruit de ce [critère], d'une autre nature, est au milieu ; ce dernier multiplié par la [quantité] voulue et divisé par le premier sera le fruit de la quantité voulue. Pour l'inverse, procédure inverse. || 73 ||

Trirāśika : ensemble de trois quantités[1] ; *trairāśika* : ce qui appartient au *trirāśika*, à savoir un calcul[2]. Parmi ces trois quantités, sont placées au début et à la fin les deux quantités qui sont **samānajātī** de même classe ; la première s'appelle la quantité-critère, l'autre, la quantité voulue. Entre ces deux, d'une autre classe, **tatphalam** est la quantité résultat : le fruit de ce critère (comp. *ṣaṣṭhītatpuruṣa*) ; ou bien **tatphalam** signifie résultat-critère (comp. *karmadhāraya*). Ce résultat multiplié par la [quantité] voulue et divisé par le critère [posé] au début est le résultat [associé] à la quantité voulue.

Vilome pour la règle de trois inverse, la règle d'inversion[3] dit : [le résultat] est multiplié par la première [quantité] et divisé par la [quantité] voulue.

Un problème à ce sujet ; exemple :

कुङ्कुमस्य सदलं पलद्वयं
निष्कसप्तमलवैस्त्रिभिर्यदि।
प्राप्यते सपदि मे वणिग्वर
ब्रूहि निष्कनवकेन तत्कियत् ॥ ७४॥

kuṅkumasya sadalaṃ paladvayaṃ
niṣkasaptamalavais tribhir yadi |
prāpyate sapadi me vaṇigvara
brūhi niṣkanavakena tatkiyat || 74 ||

Si deux pala *et demi de safran sont obtenus avec trois-septièmes d'un* niṣka*, dis-moi rapidement, ô le meilleur des commerçants, combien on aura avec neuf* niṣka *? || 74 ||*

---

1. Pāṇini 2.1.51-52 et 5.4.154. Ces deux règles permettent au commentateur de donner le sens, sous forme de glose, du composé *tri-rāśi-ka* ; *tri-rāśi* est un composé *dvigu* qui exprime le sens « collection de » et comme tel, l'emploi du suffixe *ka* est justifié. Voir P-S. F. GSP p.165

2. Pāṇini 4.3.120. Cette règle, citée ici implicitement en remplaçant par le mot même *(trirāśika)* le pronom qui se trouve chez Pāṇini, justifie le passage de *tri* à *trai* pour exprimer la possession. Dans cette règle, Pāṇini prescrit un suffixe *aṇ* dans le sens de *« tasyedam »* (litt. ceci de celui-ci) après un mot au génitif : *trirāśikasya+aṇ* ; il y a alors amuïssement de la désinence de génitif : *trirāśika+aṇ*. L'indice *ṇ* indique la *vṛddhi*, accroissement, de la première syllabe : *trairāśika+a* ; il y a alors amuïssement du a final du thème devant *a* : *trairāśik+a*.

3. Pour inverser une règle on « inverse » les opérations : une multiplication est remplacée par une division et vice versa.

Si avec trois-septièmes d'un *niṣka* on obtient deux *pala* et demi de safran, alors, ô le meilleur des commerçants ! combien de safran obtient-on avec neuf *niṣka* ? Dis-le immédiatement !

Dans ce cas les deux [quantités] de même classe sont les quantités [mesurées] en *niṣka*, par conséquent, du fait de sa qualité de prix-critère, trois-septièmes est la quantité-critère ; neuf est la quantité voulue. La quantité de safran, parce qu'elle est d'une autre classe et parce qu'elle est le fruit du critère, est la quantité [placée] au milieu.

On pose : $\begin{array}{|c|c|c|} 3 & 5 & 9 \\ 7 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$

La quantité du milieu est multipliée par la [quantité] voulue : $\begin{array}{|c|} 45 \\ 2 \\ \hline \end{array}$.

Elle est multipliée par la première [quantité] après avoir inversé dénominateur et numérateur : $\begin{array}{|c|} 315 \\ 6 \\ \hline \end{array}$.

Une fois divisé par le dénominateur, 52 *pala* de safran sont obtenus, il reste 3.

Parce qu'un *karṣa* est un quart de *pala*, [le reste] est multiplié par quatre et à nouveau divisé par le dénominateur ; on obtient 2 *karṣa*.

La règle de trois nous est présentée ici comme la recherche de la « quatrième proportionnelle » : les deux nombres donnés pour les prix sont dans le même rapport de proportion que les deux nombres mesurant les poids que l'on peut obtenir pour ces prix, seulement un des deux poids, le quatrième nombre, est inconnu et savoir que les deux rapports sont égaux permet de le calculer. On peut résumer le problème de la façon suivante :

Si	$3/7$ niṣka	*donne*	$2+1/2$ pala
alors	9 niṣka	*donneront*	x pala

Ou, en utilisant l'égalité des rapports :

$$\frac{3/7}{9} = \frac{2+1/2}{x}$$

De cette proportion, on déduit la valeur de x *:*

$$x = \frac{9 \times (2+1/2)}{3/7}$$

C'est exactement la formule que nous propose Bhāskara puisque $2+1/2 = 5/2$.

La transformation d'unité qui suit est tout à fait classique : $315/6 = 52 + 3/6$ *et, pour ne pas présenter le résultat sous forme fractionnaire, on passe à une unité de poids plus* *petite, le* karṣa*, qui vaut* $1/4$ *de* pala *; en multipliant le reste,* $3/6$*, par* 4 *on obtient* $12/6$ *de* karṣa*. Le poids de safran obtenu pour neuf* niṣka *est donc cinquante-deux* pala *et deux* karṣa*.*

On a, en sanskrit, des noms pour chacun des termes de la règle de trois : pramāṇa*, le « critère » ; si on suit l'exemple qui nous est donné, c'est le prix de référence pour lequel on obtient une quantité connue de safran ; cette quantité connue s'appelle* phala*, le « fruit ». La troisième quantité connue s'appelle* icchā*, le « désir » ; c'est, ici, la somme que l'on veut engager et pour laquelle on voudrait savoir quelle quantité du « fruit » on obtiendra.*

Un deuxième exemple :

प्रकृष्टकर्पूरपलत्रिषष्ट्या
चेल्लभ्यते निष्कचतुष्कयुक्तम्।
शतं तदा द्वादशभिः सपादैः
पलैः किमाचक्ष्व सखे विचिन्त्य ॥ ७५॥

prakṛṣṭakarpūrapalatriṣaṣṭyā
cel labhyate niṣkacatuṣkayuktam |
śataṃ tadā dvādaśabhiḥ sapādaiḥ
palaiḥ kim ācakṣva sakhe vicintya || 75 ||

Si, avec soixante-trois pala *de pur camphre, on obtient cent quatre* niṣka*, alors combien en obtient-on avec douze* pala *et un quart ? Ô mon ami, dis-le après avoir réfléchi ! || 75 ||*

Si avec soixante-trois *pala* **prakṛṣṭasya** du meilleur camphre, on obtient cent *niṣka* augmentés de quatre, alors quelle quantité de monnaie obtient-on avec douze *pala* et un quart ?

On pose : 63, 104, $\begin{array}{|c|} 49 \\ 4 \\ \hline \end{array}$.

La [quantité] médiane est d'une autre classe en raison de sa qualité de monnaie et ce qui est de la nature du camphre est [placé] au début et à la fin. Le critère est au début en raison de sa nature de cause ; la quantité voulue est à la fin, parce qu'elle est une chose désirée.

La [quantité] médiane, multipliée par la [quantité] voulue, produit $\begin{array}{|c|} 5\,096 \\ 4 \\ \hline \end{array}$; divisée par le critère — multipliée après inversion à cause de sa nature fractionnaire — : $\begin{array}{|c|} 5\,096 \\ 252 \\ \hline \end{array}$.

Une fois divisé, on obtient 20 *niṣka*, il reste $\begin{array}{|c|} 56 \\ 252 \\ \hline \end{array}$.

La drachme est la seizième partie du *niṣka*, une fois multiplié par seize, $\begin{array}{|c|} 896 \\ 252 \\ \hline \end{array}$, et la division faite, on obtient 3 drachmes, il reste $\begin{array}{|c|} 140 \\ 252 \\ \hline \end{array}$.

En vue d'obtenir des *paṇa*, qui sont la seizième partie de la drachme, on multiplie par seize, $\begin{array}{|c|} 2\,240 \\ 252 \\ \hline \end{array}$, 8 *paṇa* sont obtenus, il reste $\begin{array}{|c|} 224 \\ 252 \\ \hline \end{array}$.

Parce qu'un *paṇa* est composé de quatre *kākiṇī*, on multiplie par quatre : $\begin{array}{|c|} 896 \\ 252 \\ \hline \end{array}$; la division [effectuée], 3 *kākiṇī* sont obtenues, il reste $\begin{array}{|c|} 140 \\ 252 \\ \hline \end{array}$.

Parce qu'une *kākiṇī* est composée de vingt *varāṭaka*, on multiplie par vingt : $\begin{array}{|c|} 2\,800 \\ 252 \\ \hline \end{array}$; la division [effectuée], 11 *varāṭaka* sont obtenus, il reste $\begin{array}{|c|} 28 \\ 252 \\ \hline \end{array}$.

Si on simplifie par vingt-huit, on a une fraction de $\begin{array}{|c|} 1 \\ 9 \\ \hline \end{array}$ de *varāṭaka*.

Cet exemple est, en quelque sorte, le contraire du précédent : connaissant le prix de soixante-trois pala *de camphre, on demande quel sera le prix de douze* pala *et un quart. Le problème est résolu de la même manière, sans aucune difficulté, et la plus grande partie de l'exposé du commentateur consiste à convertir les unités monétaires en unités de plus en plus petites pour avoir un minimum de résultats fractionnaires. Il restera finalement* ⅑ *de la plus petite unité, le* varāṭaka.

Un troisième exemple :

द्रम्मद्वयेन साष्टांशा
शालितण्डुलखारिका।
लभ्या चेत्पणसप्तत्या
तत्किं सपदि कथ्यताम् ॥ ७६ ॥

drammadvayena sāṣṭāṃśā
śālitaṇḍulakhārikā |
labhyā cet paṇasaptatyā
tat kiṃ sapadi kathyatām || 76 ||

> *Si pour deux drachmes on obtient une* khārī *et un huitième de grains de riz, combien en [obtient-on] pour soixante-dix* paṇa *?*
> *Que cela soit dit rapidement !* || *76* ||

La construction littérale est facile à comprendre. Le critère et la quantité voulue sont transformés en *paṇa* pour opérer avec [des quantités] de même classe, parce qu'il a été dit : *« avec soixante-dix* paṇa *»*.

On pose :

32	9	70
1	8	1

.

Comme précédemment, sont obtenues 2 *khārī*, 7 *droṇa*, 1 *āḍhaka* et 2 *prastha*.

Cet exemple attire notre attention sur le fait qu'il y a lieu d'opérer avec des unités cohérentes : ici le critère (pramāṇa) *est exprimé en drachmes tandis que la « quantité voulue »* (icchā) *est exprimée en* paṇa*, unité monétaire plus petite ; les drachmes sont donc transformées en* paṇa *: une drachme égale seize* paṇa *d'où le rapport* $^{32}/_{1}$ *posé au début du tableau. Quant à* $^{9}/_{8}$*, le fruit, c'est une* khārī *plus* $^{1}/_{8}$ *de* khārī.
En appliquant la règle donnée, on obtient :

$$\frac{9\times 70}{8\times 32}=\frac{630}{256}=2+\frac{118}{256}$$

Le résultat est obtenu en khārī*, unité de mesure de grain, dont l'unité inférieure est le* droṇa*, seize fois plus petite ; en multipliant le reste fractionnaire par seize, on obtiendra le nombre de* droṇa *:*

$$\frac{16\times 118}{256}=7+\frac{96}{256}$$

En multipliant ce dernier reste par quatre, on obtiendra celui-ci en āḍhaka *:*

$$\frac{4\times 96}{256}=1+\frac{128}{256}$$

Puis, comme le prastha *est le quart de* āḍhaka*, en multipliant à nouveau par quatre le reste on obtient le résultat annoncé :*

$$\frac{4\times 128}{256}=2$$

2 khārī*, 7* droṇa*, 1* āḍhaka *et 2* prastha.

L'auteur dit les circonstances [d'utilisation] de la règle de trois inverse :

इच्छावृद्धौ फले ह्रासो
ह्रासे वृद्धिश्च जायते।
व्यस्तं त्रैराशिकं तत्र
ज्ञेयं गणितकोविदैः ॥ ७७॥

icchāvṛddhau phale hrāso
hrāse vṛddhiś ca jāyate |
vyastaṃ trairāśikaṃ tatra
jñeyaṃ gaṇitakovidaiḥ || 77 ||

Si un accroissement de la quantité voulue produit une diminution pour le fruit et si une diminution produit un accroissement, dans ce cas, les experts en calcul doivent connaître la règle de trois inverse || 77 ||

Lorsque, dans une règle de trois, une diminution pour le fruit est produite par un accroissement de la quantité voulue ou un accroissement du fruit par une diminution de la quantité voulue, **tatra** pour la vie courante, la règle de trois inverse doit être connue des experts en calcul.

L'auteur enseigne ces circonstances mêmes avec concision :

जीवानां वयसो मूल्ये
तौल्ये वर्णस्य हैमने।
भागहारे च राशीनां
व्यस्तं त्रैराशिकं भवेत् ॥ ७८॥

jīvānāṃ vayaso mūlye
taulye varṇasya haimane |
bhāgahāre ca rāśīnāṃ
vyastaṃ trairāśikaṃ bhavet || 78 ||

Quand le prix des êtres vivants est fondé sur l'âge ou quand, pour l'or, le poids dépend [du nombre] de carats et pour le fractionnement des tas [de grains], on utilisera la règle de trois inverse || 78 ||

Le prix des êtres vivants dont l'âge est avancé est diminué, pour ceux dont l'âge est plus petit il est augmenté. De même **haimane** pour la purification de l'or, quand il y a diminution du poids, il y a accroissement [du nombre] de carats [et] quand il y a accroissement du poids, il y a diminution [du nombre] de carats. Il y a une diminution du compte pour les tas de grains qui ont été mesurés avec une petite mesure, si on [les] mesure avec une mesure plus grande ou il y a un accroissement du compte pour ceux qui ont été mesurés avec une grande mesure, si on [les] mesure avec une plus petite mesure. Dans ces cas, et d'autres, on utilise la règle de trois inverse.

Des exemples à ce propos. D'abord, deux exemples du prix selon l'âge des êtres vivants :

प्राप्नोति चेत्षोडशवत्सरा स्त्री
    द्वात्रिंशतं विंशतिवत्सरा किम्।
द्विधूर्वहो निष्कचतुष्कमुक्षा
    प्राप्नोति धूःषट्कवहस्तदा किम् ॥ ७९ ॥

prāpnoti cet ṣoḍaśavatsarā strī
    dvātriṃśataṃ viṃśativatsarā kim |
dvidhūrvaho niṣkacatuṣkam ukṣā
    prāpnoti dhūḥṣaṭkavahas tadā kim || 79 ||

Si une femme de seize ans atteint [une somme] de trente-deux [niṣka]*, combien pour une de vingt ans ?*
Un bœuf de trait de deux ans, atteint [une somme] de quatre niṣka*, combien alors pour un animal de trait de six ans ? || 79 ||*

Si une femme de seize années atteint [une somme] de trente-deux *niṣka*, alors une de vingt ans, combien atteindra-t-elle ? Et si **ukṣā** un bœuf de trait de deux ans atteint [la somme] de quatre *niṣka*, alors combien un animal de trait de six ans atteindra-t-il ?

Pour le premier exemple, on pose : 16, 32, 20.
Avec la méthode du renversement, [la quantité] médiane est multipliée par le critère : 512. Une fois divisé par la quantité voulue 20, sont obtenus : 25 *niṣka* et une fraction de $\begin{array}{|c|}3\\5\\\hline\end{array}$ de *niṣka*, après simplification par quatre.

Deuxième exemple. On pose : 2, 4, 6.
Ici aussi, [la quantité] médiane est multipliée par le critère : 8. Une fois divisé par la quantité voulue 6, sont obtenus : 1 *niṣka* et une fraction de $\begin{array}{|c|}1\\3\\\hline\end{array}$ de *niṣka* après simplification par deux.

Ici, la femme ou le bœuf étant avancés en âge, leur prix est diminué ; les deux étant de moindre âge, leur prix est augmenté. C'est pourquoi il y a usage de la règle inverse.

La règle de trois « inverse » correspond au cas où les quantités varient de manière inversement proportionnelle : une augmentation de l'âge de l'animal correspond à une diminution du prix ou un affinage moindre de l'or entraîne la possibilité d'acheter un poids plus important de ce métal pour une somme moins importante. Si on reprend le tableau donné p. 3, on a :

Si	*2 ans*	*donnent*	¼ niṣka
alors	*6 ans*	*donneront*	$^1/x$ niṣka

Soit en utilisant l'égalité des rapports :

$$\frac{2}{6} = \frac{1/4}{1/x}$$

ou :

$$x = \frac{2 \times 4}{6} = \frac{8}{6} = 1 + \frac{1}{3}$$

Ce qui est bien la formule donnée par Bhāskara : le critère (2) est multiplié par le « fruit » (4) et divisé par la « quantité voulue » (6).

Un exemple concernant l'or :

दशवर्णं सुवर्णं चेद्
गद्याणकमवाप्यते।
निष्केण तिथिवर्णं तु
तदा वद कियन्मितम् ॥८०॥

daśavarṇaṃ suvarṇaṃ ced
gadyāṇakam avāpyate |
niṣkeṇa tithivarṇaṃ tu
tadā vada kiyan mitam || 80 ||

Si on obtient un gadyāṇaka *d'or à dix carats avec un* niṣka*, dis alors combien en mesure-t-on pour [de l'or] à quinze carats ? || 80 ||*

Un *gadyāṇaka* d'or à dix carats est obtenu avec un seul *niṣka*, dans ces conditions, combien en obtient-on à quinze carats ?

On pose : 10, 1, 15.

Suivant la méthode précédente, on obtient une fraction de $\begin{array}{|c|}2\\3\\\hline\end{array}$ de *gadyāṇaka*.

Ici aussi, s'il y a augmentation [du nombre] de carats, il y a diminution du poids de l'or pour une quantité voulue, s'il y a diminution [du nombre] de carats avec la [même] quantité voulue, il y a augmentation du poids pour [cette quantité] médiane ; la règle inverse est donc [utilisée].

Un exemple pour le fractionnement des tas de grain :

सप्ताढकेन मानेन
राशौ सस्यस्य मापिते।
यदि मानशतं जातं
तदा पञ्चाढकेन किम् ॥ ८१॥

saptāḍhakena mānena
rāśau sasyasya māpite |
yadi mānaśataṃ jātaṃ
tadā pañcāḍhakena kim || 81 ||

Un tas de grains ayant été mesuré avec un récipient de sept, si on obtient cent mesures, combien [en obtient-on] alors avec un récipient de cinq || 81 ||

Un tas de grains a été mesuré à l'aide d'une mesure qui est un récipient jaugeant sept *droṇa*, on obtient cent mesures ; si ce même [tas] est mesuré à l'aide d'une mesure qui est un récipient jaugeant cinq *droṇa*, combien y aura-t-il alors de mesures ?

Ici aussi, s'il y a augmentation de la capacité, il y aura diminution du compte pour quantité voulue et, s'il y a diminution de la capacité, il y aura augmentation du compte ; il y a donc un calcul avec la règle inverse.

On pose : 7, 100, 5. On obtient 140 mesures.

Le nombre de mesures étant inversement proportionnel à la taille des récipients avec lesquels on effectue la mesure, on applique la règle de trois inverse en multipliant le « fruit », 100, par le « critère », 7, et on divise par la « quantité voulue », 5 :

$$\frac{7 \times 100}{5} = 140$$

Les règles de cinq, sept …

Formule opératoire pour les règles de cinq etc. Une strophe :

पञ्चसप्तनवराशिकादिके
ऽन्योन्यपक्षनयनं फलच्छिदाम्।
संविधाय बहुराशिजे वधे
स्वल्पराशिवधभाजिते फलम्॥ ८२॥

pañcasaptanavarāśikādike
'nyonyapakṣanayanaṃ phalacchidām |
saṃvidhāya bahurāśije vadhe
svalparāśivadhabhājite phalam || 82 ||

Pour les règles de cinq, sept, neuf, etc. après avoir procédé à la transposition, d'un côté à l'autre, des fruits et des dénominateurs, le produit issu des quantités [les plus] nombreuses étant divisé par le produit des quantités les moins nombreuses, on a le résultat || *82* ||

Les quantités pour les règles de cinq, sept, neuf ou onze étant posées, on doit faire une transposition des fruits et aussi faire une transposition des dénominateurs qui se correspondent ; ensuite, le produit de la pile la plus abondante étant divisé par le produit de la pile la moins abondante, on obtient le résultat.

Le côté le moins abondant où le fruit a été apporté est ce qui s'appelle la pile la plus abondante.

La règle de cinq

Un exemple pour la règle de cinq :

मासे शतस्य यदि पञ्चकलान्तरं स्याद्
वर्षे गते भवति किं वद षोडशानाम्।
कालं तथा कथय मूलकलान्तराभ्यां
मूलं धनं गणक कालफले विदित्वा॥ ८३॥

> **māse śatasya yadi pañcakalāntaraṃ syād**
> **varśe gate bhavati kiṃ vada ṣoḍaśānām |**
> **kālaṃ tathā kathaya mūlakalāntarābhyāṃ**
> **mūlaṃ dhanaṃ gaṇaka kālaphale viditvā || 83 ||**

> *Si en un mois, pour cent [unités], on a un intérêt de cinq, dis combien on a pour seize, une année étant écoulée. De même, énonce la durée d'après le capital et les intérêts et, connaissant la durée et le fruit, dis, ô calculateur, le capital d'origine* || *83* ||

Si, un mois étant écoulé, pour cent unités prêtées avec accroissement, on a cinq unités — dont le nom technique est intérêts — dis quel intérêt il y a pour seize unités prêtées avec accroissement en fonction du cours du capital, une fois une année écoulée ? **Tathā** de même, énonce la durée, à partir d'un fruit et d'un capital d'origine connus. Ensuite, ô calculateur, ayant connaissance de la durée écoulée et du fruit que sont les intérêts, énonce le capital d'origine.

Ainsi, avec cinq compartiments se répondant les uns aux autres, le calcul d'un sixième — qui est inconnu — peut être connu.

On pose :

1	12
100	16
5	

Après avoir déplacé le fruit, 5, de l'autre côté :

1	12
100	16
	5

, le produit des piles de chaque côté [donne] : 100 et 960.

Le produit issu de la pile [devenue] la plus abondante après l'adjonction du fruit, est 960 ; étant divisé par le produit de la pile la moins abondante, 100, le quotient est l'intérêt : 9 unités [et], après une simplification par vingt du reste, 60, une fraction d'unités de $\begin{array}{|c|}3\\5\end{array}$.

Pour connaître la durée recherchée, on pose :

1	º
100	16
5	$\begin{array}{|c|}48\\5\end{array}$

Une fois la transposition des deux fruits faite, on pose :

1	º
100	16
48	5
5	

,

[puis], transposition du dénominateur :

1	º
100	16
48	5
	5

, ces deux piles après produit [donnent] : 4 800 et 400.
Le produit de la pile la plus abondante, ayant pour partie importante le fruit, est divisé par la plus petite pile ; le quotient est la durée recherchée : 12 mois.

Pour connaître le capital on pose :

1	12
100	º
5	48
	5

Il y a permutation des fruits et transposition du dénominateur de l'autre côté, comme ceci :

1	12
100	º
48	5
	5

, les deux piles multipliées [donnent] : 4 800 et 300. Ayant divisé par la moins abondante, le quotient est le capital d'origine : 16 unités.

Les règles de cinq, sept, neuf et onze qui sont expliquées ici correspondent à ce que nous appelons des règles de trois composées : il s'agit en fait d'un problème de proportionnalité — comme la règle de trois — qui se résout à l'aide de plusieurs règles de trois successives. Ainsi pour le premier exemple donné : « si cent unités de capital placées pendant un mois rapportent cinq unités, combien rapporteront seize unités placées pendant un an », on a besoin de deux règles de trois : la première nous permet de savoir combien rapporteront seize unités placées pendant un mois :

Si	100 *unités*	*donnent*	5 *unités*	*en un mois*
alors	16 *unités*	*donneront*	y	*en un mois*

Les intérêts étant directement proportionnels au capital on a donc l'égalité de rapports suivante :

$$\frac{y}{5} = \frac{16}{100} \quad \text{ou :} \quad y = \frac{5 \times 16}{100}$$

Les intérêts sont aussi directement proportionnels à la durée du placement, une deuxième *règle de trois nous permet de résoudre le problème en faisant intervenir maintenant les autres données connues du problème ; pour simplifier nous conservons le résultat de la règle de trois précédente sous la forme « y » :*

Si	1 *mois*	*pour* 16 *unités*	*rapporte*	y
alors	12 *mois*	*pour* 16 *unités*	*rapporteront*	x

Ce qui donne alors les rapports suivants :

$$\frac{x}{y} = \frac{12}{1} \quad \textit{ou} : \quad x = 12\,y = 12 \times \frac{5 \times 16}{100}$$

Le procédé de calcul enseigné par Bhāskara est extrêmement simple dans sa mise en œuvre : il met en parallèle les données de même type sur deux colonnes, la première colonne correspondant aux « anciennes » données, la deuxième aux « nouvelles », cette dernière comportant une case vide[4] *correspondant à la quantité cherchée puis il demande de transposer d'une colonne à l'autre « le fruit », c'est-à-dire la quantité produite dans le problème — ici les intérêts — et non la quantité cherchée ! Le résultat est obtenu en divisant le produit des éléments contenus dans la colonne où ils sont les plus nombreux — c'est-à-dire la colonne où on n'a pas laissé de case vide — par le produit des éléments contenus dans la colonne où ils sont les moins nombreux. Ce qui donne :*

$$\begin{array}{r|c|c|} \textit{Durée :} & 1 & 12 \\ \textit{Capital :} & 100 & 16 \\ \textit{Intérêts :} & 5 \longleftrightarrow & \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|} 1 & 12 \\ 100 & 16 \\ & 5 \\ \hline \end{array}$$

Et donc les intérêts sont égaux à : $\dfrac{12 \times 16 \times 5}{100} = \dfrac{48}{5}$

Les deux autres questions du problème se résolvent aussi à l'aide de deux règles de trois successives.

Connaissant le capital, les intérêts produits et la durée pour l'un des deux couples capital/intérêt, il faut trouver la durée pour l'autre couple :

Si	100 *unités*	*donnent*	5 *unités*	*en un mois*
alors	16 *unités*	*donneront*	y *unités*	*en un mois*

On retrouve les mêmes proportions que pour le problème précédent :

$$\frac{y}{5} = \frac{16}{100} \quad \text{ou :} \quad y = \frac{5 \times 16}{100}$$

Une deuxième règle de trois nous permet de calculer la durée nécessaire pour que 16 *unités produisent* $48/5$ *d'unités en intérêts :*

Si	y *unités*	*sont produites par* 16 *unités*	*en un mois*
alors	$\frac{48}{5}$ *unités*	*seront produites par* 16 *unités*	*en* x *mois*

4. Dans le texte, nous avons noté cette place vide par ce signe : ० qui ressemble au zéro en écriture *devanāgarī* que les scribes utilisent à cet effet. Utiliser le zéro dans la traduction aurait rendu les opérations incompréhensibles !

Ce qui donne l'égalité de rapports suivante :

$$\frac{\frac{48}{5}}{y} = \frac{x}{1} \quad ou \quad x = \frac{48}{5} \times \frac{100}{5 \times 16} = \frac{48 \times 100}{5 \times 5 \times 16}$$

On comprend, sur cet exemple, la deuxième prescription de Bhāskara : « on procédera à la transposition des dénominateurs » *; le dénominateur de la fraction* $\frac{48}{5}$, *qui se trouve elle-même au numérateur d'une fraction, devient un élément multiplicateur du dénominateur de la « grande » fraction. Si nous avions de même une fraction comme élément du dénominateur de la « grande » fraction, son dénominateur deviendrait un élément multiplicateur du numérateur de la grande fraction :*

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \times c} \quad et \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \times c}{b}$$

La disposition préconisée dans la Līlāvatī *est donc la suivante ; nous avons gardé le trait de fraction — que les Indiens ne notent pas — pour la disposition initiale mais une fois l'échange des dénominateurs effectué, nous ne pouvons le garder car il est sans signification :*

$$\begin{array}{l} \textit{Durée :} \\ \textit{Capital :} \\ \textit{Intérêts :} \end{array} \begin{array}{|c|c|} 1 & \\ 100 & 16 \\ 5 \longleftrightarrow & \frac{48}{5} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} 1 & 16 \\ 100 & \\ \frac{48}{5 \longleftrightarrow} & 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} 1 & \\ 100 & 16 \\ 48 & 5 \\ & {\scriptstyle 5} \end{array}$$

Cet exemple montre les ambiguïtés de la notation employée : Bhāskara nous dit : « le produit issu des quantités plus nombreuses étant divisé par le produit des quantités moins nombreuses... » *or, une fois l'échange des dénominateurs effectué, il y a le même nombre de quantités dans les deux colonnes ! Nous avons noté en utilisant une taille de caractère plus petite, le dénominateur* 5 *une fois changé de colonne. Le commentaire vient alors à notre secours :* « Là où le fruit, parmi les quantités moins nombreuses, a été déplacé est ce qui s'appelle [le côté] des quantités plus nombreuses. » *Le « fruit »,* $48/5$, *a été déplacé de la colonne de droite à celle de gauche, le nombre de mois cherché est donc obtenu en divisant le produit des éléments de la colonne de gauche par le produit de ceux de la colonne de droite :*

$$\frac{1 \times 100 \times 48}{16 \times 5 \times 5} = 12$$

Enfin le troisième problème nous demande de trouver le capital, connaissant la durée et les intérêts produits :

Si	100 *unités*	*produisent*	5 *unités*	*en un mois*
alors	100 *unités*	*produiront*	y *unités*	*en douze mois*

$$\frac{y}{5} = \frac{12}{1} \quad ou : \quad y = 5 \times 12$$

Si	100 *unités*	*produisent*	*y unités*	*en douze mois*
alors	*x unités*	*produiront*	$\frac{48}{5}$ *unités*	*en douze mois*

$$\frac{x}{100} = \frac{\frac{48}{5}}{y} \quad ou: \quad x = \frac{\frac{48}{5} \times 100}{5 \times 12} = \frac{48 \times 100}{5 \times 5 \times 12}$$

Selon la disposition indienne :

$$\begin{array}{r|c|c|} \textit{Durée :} & 1 & 12 \\ \textit{Capital :} & 100 & \\ \textit{Intérêts :} & 5 \longleftrightarrow & \frac{48}{5} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} 1 & 12 \\ 100 & \\ \frac{48}{5} \longleftrightarrow & 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} 1 & 12 \\ 100 & \\ 48 & 5 \\ & 5 \end{array}$$

Il y a ici la même ambiguïté quant au nombre de termes de chaque colonnes, mais le « fruit » ayant été déplacé de la colonne de droite à celle de gauche, on doit diviser le produit des nombres situés dans la colonne de gauche par le produit de ceux situés dans la colonne de droite :

$$\frac{1 \times 100 \times 48}{12 \times 5 \times 5} = 16$$

Un deuxième exemple pour les fractions :

सत्र्यंशमासेन शतस्य चेत्स्यात्
कलान्तरं पञ्च सपञ्चमांशाः।
मासैस्त्रिभिः पञ्चलवाधिकैस्तत्
सार्धद्विषष्टेः स्फुटमुच्यतां किम~॥ ८४ ॥

satryaṃśamāsena śatasya cet syāt
kalāntaraṃ pañca sapañcamāṃśāḥ |
māsais tribhiḥ pañcalavādhikais tat
sārdhadviṣaṣṭheḥ sphuṭam ucyatāṃ kim || 84 ||

Si les intérêts pour cent [unités] pendant un mois et un tiers sont de cinq et un cinquième, que soit dit clairement combien ils seront pour soixante-deux [unités] augmentées d'un demi, pendant trois mois et un cinquième || 84 ||

Si pour cent *niṣka* donnés pendant un mois et un tiers, on en a cinq et un cinquième sous forme d'augmentation, que soit dit clairement selon cette méthode ce que sera cette [augmentation] pour soixante-deux augmenté d'un demi pendant trois mois et un cinquième.

On pose, avec réduction au même dénominateur selon [la classe] *bhāgā-nubandha* :

4	16
3	5
100	125
	2
26	
5	

et, une fois [effectuée] l'interversion du fruit [et] des dénominateurs, on pose :

4	16
5	3
100	125
2	26
5	

Les deux piles sont multipliées : 20 000 et 156 000. La plus grande pile, avec fruit, est divisée par la plus petite, sans fruit : $\begin{array}{|c|}156\,000 \\ 20\,000 \\ \hline\end{array}$.

Le quotient est de 7 unités et le reste, simplifié par quatre mille, est une fraction de l'unité : $\begin{array}{|c|}4 \\ 5 \\ \hline\end{array}$.

Dans ce cas aussi, comme précédemment, le calcul du temps, des richesses etc., qui sont inconnus, doit être ainsi compris.

Pour distinguer les fractions, nous avons utilisé des caractères plus petits et modifié les espacements dans la disposition de départ.

Les durées sont respectivement de un mois et un tiers, soit quatre tiers et trois mois et un cinquième, soit seize cinquièmes ; quant au deuxième montant il est de soixante-deux et un demi, soit cent vingt-cinq demis.

La méthode donnée nous fait faire successivement l'échange des « fruits », puis l'échange des dénominateurs ; en reprenant le schéma de notre précédent commentaire, on obtient :

$$\begin{array}{|c|c|}\frac{4}{3} & \frac{16}{5} \\ 100 & \frac{125}{2} \\ \frac{26}{5} \longleftrightarrow & \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\frac{4}{3} & \frac{16}{5} \\ 100 & \frac{125}{2} \\ & \frac{26}{5} \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}4 & 16 \\ 5 & 3 \\ 100 & 125 \\ 2 & 26 \\ 5 & \\ \hline\end{array}$$

On peut encore voir ici l'ambiguïté de la notation, et le commentateur nous le rappelle, il faut diviser le produit des éléments de la colonne où le fruit a été déplacé, c'est-à-dire la colonne de droite, par le produit de ceux de la colonne d'où le fruit a été retiré :

$$\frac{16 \times 3 \times 125 \times 26}{4 \times 5 \times 100 \times 2 \times 5} = \frac{156\,000}{20\,000} = 7 + \frac{4}{5}$$

La règle de sept

Un exemple pour la règle de sept :

विस्तारे त्रिकराः कराष्टकमिता दैर्घ्ये विचित्राश्च चेत्
रूपैरुत्कटपट्टसूत्रपटिका अष्टौ लभन्ते शतम्।
दैर्घ्ये सार्धकरत्रयापरपटी हस्तार्धविस्तारिणी
तादृक्किं लभते द्रुतं वद वणिग्वाणिज्यकं वेत्सि चेत~॥ ८५ ॥

vistāre trikarāḥ karāṣṭakamitā dairghye vicitrāś ca cet
rūpair utkaṭapaṭṭasūtrapaṭikā aṣṭau labhante śatam |
dairghye sārdhakaratrayāparapaṭī hastārdhavistāriṇī
tādṛk kiṃ labhate drutaṃ vada vaṇig vāṇijyakaṃ [vetsi cet || 85 ||

Si huit pièces d'étoffe tissées de soie, supérieures par leur apparence et multicolores, mesurant trois coudées de large et huit coudées de long, rapportent cent [unités], dis, ô commerçant, si tu connais le négoce, combien rapporte une autre pièce d'étoffe [de qualité semblable], de trois coudées et demi de long et d'une demie coudée de large || 85 ||

Il y a huit pièces d'étoffe tissées de soie, de trois coudées de large et huit coudées de long, supérieures par leurs apparences bien fabriquées, de qualité égale en poids et en dessins. Si ces huit [pièces d'étoffe] sont acquises pour cent *niṣka*, alors une seule pièce d'étoffe tissée de soie — possédant des dessins sur la longueur comme décrit précédemment — de trois coudées et demi de long et d'une demie coudée de large, **kiṃ labhate** pour combien est-elle acquise ? Si tu connais le négoce, ô commerçant, dis-le rapidement.

On pose :

3	1
1	2
8	7
1	2
8	1
1	1
100	
1	

Les fruits et dénominateurs une fois déplacés de l'autre côté, on pose :

3	1
2	1
8	7
2	1
8	1
1	1
º	100
1	º

Les deux piles sont multipliées comme précédemment : 768 et 700.
La pile qui a acquis le fruit est la plus abondante[5] ; celle-ci étant divisée par la moins abondante dont le fruit a été ôté[6], il est obtenu : *niṣka* 0. Dans un *niṣka*, il y a seize drachmes ; après avoir multiplié par seize, une fois divisé par le diviseur précédant, sont obtenus : drachmes, 14, *paṇa*, 9, *kākiṇī*, 1, *vārāṭaka*, 6 et, parce qu'une simplification est impossible, une fraction de $\begin{array}{|c|}2\\3\\\hline\end{array}$ de *vārāṭaka*.

La règle de sept, comme la règle de cinq, est une règle de trois composée — de même que les règles de neuf et onze qui suivent — et la méthode pour les appliquer peut être expliquée en utilisant plusieurs règle de trois consécutives, leur nombre augmentant en fonction du nombre de quantités mises en jeu.

Pour expliquer la validité de la règle édictée par Bhāskara page 11, on peut voir le problème sous l'aspect de la proportionnalité : une grandeur est proportionnelle à un certain nombre d'autres et on cherche quelle valeur prendra cette grandeur si on fait varier la valeur des autres. Dans l'exemple que nous venons de voir, le prix des étoffes est proportionnel à la longueur, à la largeur et au nombre des pièces ; connaissant le prix

5. C'est-à-dire celle de droite, dont le produit est égal à 700.
6. C'est-à-dire celle de gauche, dont le produit est égal à 768.

pour un nombre donné de pièces ayant une longueur et une largeur fixées, on se demande quel sera le prix pour un autre nombre de pièces ayant une autre longueur et une autre largeur.

On peut présenter le problème sous la forme suivante :

	Prix	*Longueur*	*Largeur*	*Quantité*
Valeurs 1 :	a_1	b_1	c_1	d_1
Valeurs 2 :	y	b_2	c_2	d_2

Dans le problème posé, $a_1 = 100$, $b_1 = 8$, $c_1 = 3$ *et* $d_1 = 8$ *sont les anciennes valeurs pour lesquelles on connaît le prix et les nouvelles valeurs sont* $b_2 = 3\,1/2$, $c_2 = 1/2$ *et* $d_2 = 1$.

On procède pas à pas ; le prix et la longueur étant proportionnels, on peut écrire :

$$\frac{a_1}{y} = \frac{b_1}{b_2} \quad \textit{d'où} \quad y = a_1 \times \frac{b_2}{b_1}$$

Maintenant, le prix est aussi proportionnel à la largeur ; on part du tableau suivant où l'on cherche le nouveau prix compte tenu du prix y *que l'on vient de calculer :*

Prix	*Longueur*	*Largeur*	*Quantité*
y	b_2	c_1	d_1
z	b_2	c_2	d_2

$\frac{y}{z} = \frac{c_1}{c_2} \quad \textit{d'où :} \quad z = y \times \frac{c_2}{c_1}$

En remplaçant y *:* $z = a_1 \times \frac{b_2}{b_1} \times \frac{c_2}{c_1}$

Enfin, le prix est proportionnel au nombre de pièces ; en tenant compte de ce que nous avons déjà calculé, on a maintenant le tableau suivant :

Prix	*Longueur*	*Largeur*	*Quantité*
z	b_2	c_2	d_1
x	b_2	c_2	d_2

$\frac{z}{x} = \frac{d_1}{d_2} \quad \textit{d'où :} \quad x = z \times \frac{d_2}{d_1}$

En remplaçant z *:* $x = a_1 \times \frac{b_2}{b_1} \times \frac{c_2}{c1} \times \frac{d_2}{d_1} = \frac{a_1 \times b_2 \times c_2 \times d_2}{b_1 \times c_1 \times d_1}$

On reconnaîtra dans la dernière fraction, le produit des éléments de la deuxième colonne, là où le fruit a été déplacé — a_1, *le prix — divisé par le produit des éléments de la première colonne, selon la méthode de Bhāskara.*

Nous avons expliqué plus haut pourquoi, toujours selon cette méthode, il fallait échanger les dénominateurs des fractions s'il y en a (voir p. 15).

Nous avons donné cette justification « moderne » en nous limitant à quatre grandeurs, ce qui correspond exactement à la règle de sept ; il est évident qu'on peut augmenter sans plus de difficultés le nombre de celles-ci et que les règles de neuf et onze qui suivent sont d'ores et déjà expliquées !

La méthode de Bhāskara. Dans le texte, le commentateur — les scribes ? — a choisi de faire correspondre des fractions, même quand la quantité est mesurée par un nombre entier, en mettant comme dénominateur « un » dans ce dernier cas :

$$\begin{array}{l} \textit{Largeur :} \\[2ex] \textit{Longueur :} \\[2ex] \textit{Quantité :} \\[2ex] \textit{Prix :} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \frac{3}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{8}{1} & \frac{7}{2} \\ \frac{8}{1} & \frac{1}{1} \\ \frac{100}{1} \longleftrightarrow & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \frac{3}{1} \longleftrightarrow & \frac{1}{2} \\ \frac{8}{1} \longleftrightarrow & \frac{7}{2} \\ \frac{8}{1} \longleftrightarrow & \frac{1}{1} \\ & \frac{100}{1} \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 8 & 7 \\ 2 & 1 \\ 8 & 1 \\ 1 & 1 \\ & 100 \\ \hline \end{array}$$

On divise le produit des nombres de la colonne de droite par celui des nombres de la colonne de gauche :

$$\frac{1 \times 1 \times 7 \times 1 \times 1 \times 1 \times 100}{3 \times 2 \times 8 \times 2 \times 8 \times 1} = \frac{700}{768}$$

Comme toujours quand on a un nombre fractionnaire, on passe à l'unité inférieure ; le prix étant supposé être en niṣka, *on convertit en drachme en multipliant par* 16 *:*

$$\frac{16 \times 700}{768} = \frac{11\,200}{768} = 14 + \frac{448}{768}$$

On multiplie le reste par 16 *pour obtenir des* paṇa *:*

$$\frac{16 \times 448}{768} = \frac{7\,168}{768} = 9 + \frac{256}{768}$$

On multiplie le reste par 4 *pour obtenir des* kākiṇī *:*

$$\frac{4 \times 256}{768} = \frac{1\,024}{768} = 1 + \frac{256}{768}$$

On convertit le reste en varāṭaka *en multipliant par* 20 *:*

$$\frac{20 \times 256}{768} = \frac{5\,120}{768} = 6 + \frac{512}{768} = 6 + \frac{2}{3}$$

La règle de neuf

Un exemple pour la règle de neuf :

पिण्डे येऽर्कमिताङ्गुलाः किल चतुर्वर्गाङ्गुला विस्तृतौ
पट्टदीर्घतया चतुर्दशकरास्त्रिंशल्लभन्ते शतम्।
एता विस्तृतिपिण्डदैर्घ्यमितयो येषां चतुर्वर्जिताः
पट्टास्ते वद मे चतुर्दश सखे मूल्यं लभन्ते कियत~॥ ८६ ॥

piṇḍe ye ’rkamitāṅgulāḥ kila caturvargāṅgulā vistṛtau
paṭṭadīrghatayā caturdaśakarās triṃśal labhante śatam |
etā vistṛtipiṇḍadairghyamitayo yeṣāṃ caturvarjitāḥ
paṭṭās te vada me caturdaśa sakhe mūlyaṃ labhante
[kiyat || 86 ||

Des [planches] qui ont douze doigts d’épaisseur, le carré de quatre doigts en largeur et quatorze coudées pour leur longueur : trente rapportent cent. Ces mêmes planches dont les largeur, épaisseur et longueur ont été diminuées de quatre, dis-moi, ô mon cher : quel montant rapportent-elles ? || 86 ||

Ye des planches en bois ont douze doigts en épaisseur, **caturvargāṅgulāḥ** seize doigts en largeur et quatorze de ce qui a la nature d’une coudée, en longueur ; trente, ayant de telles caractéristiques, rectilignes et débarrassées des défauts tels que nœuds et trous, rapportent cent unités dans une vente à prix unique ; elles sont acquises pour cent *niṣka*, telle est la signification.

D’autre part, **etāḥ mitayaḥ** les mesures précisément énoncées auparavant sont diminuées de quatre en largeur, épaisseur et longueur **yeṣām** pour d’autres planches décrites comme précédemment, c’est-à-dire : huit doigts pour l’épaisseur, douze doigts pour la largeur et dix coudées pour la longueur ; quel prix obtiennent quatorze [planches] ayant de telles caractéristiques ? Par l’intermédiaire d’une question, l’auteur apporte une clarification : « Dis moi cela, ô mon cher ! »

On pose :

12	8
16	12
14	10
30	14
100	º

Ici, après avoir déplacé le fruit de l'autre côté et effectué les multiplications de chaque côté, les deux quantités 80 640 et 1 344 000 sont obtenues. La division effectuée, on obtient 16 *niṣka* et une fraction de $\begin{array}{|c|}2\\3\\\hline\end{array}$ de *niṣka*.

Cet exemple ajoute une grandeur par rapport au précédent : l'épaisseur des planches. Les mesures données sont entières, ce qui supprime la procédure d'échange des dénominateurs.

Épaisseur :	12	8		12	8
Largeur :	16	12		16	12
Longueur :	14	10	$\longrightarrow$	14	10
Quantité :	30	14		30	14
Prix :	100 $\longleftrightarrow$				100

Le prix pour le deuxième lot de planches est donc :

$$\frac{100 \times 14 \times 10 \times 12 \times 8}{30 \times 14 \times 16 \times 12} = \frac{1\,344\,000}{80\,640} = 16 + \frac{5\,376}{8\,064} = 16 + \frac{2}{3}$$

La règle de onze

Un exemple pour la règle de onze :

पट्टा ये प्रथमोदितप्रमितयो गव्यूतिमात्रे स्थिताः
तेषामानयनाय चेच्छकटिनां द्रम्माष्टकं भाटकम्।
अन्ये ये तदनन्तरं निगदिता मानैश्चतुर्वर्जिताः
तेषां का भवतीति भाटकमितिर्गव्यूतिषट्के वद~॥ ८७॥

paṭṭā ye prathamoditapramitayo gavyūtimātre sthitāḥ
teṣām ānayanāya cec chakaṭinām drammāṣṭakaṃ [bhāṭakam |
anye ye tadanantaraṃ nigaditā mānaiś caturvarjitāḥ
teṣāṃ kā bhavatīti bhāṭakamitir gavyūtiṣaṭke vada || 87 ||

> *Les planches qui ont les dimensions dites précédemment ont été installées à une distance d'une* gavyūti. *Si, pour leur convoyage, la location de conducteurs de chariots est de huit drachmes, dis quel est le montant de la location pour ces autres décrites immédiatement après et qui ont été diminuées de quatre en dimensions et [installées à une distance] de six* gavyūti ǀǀ *87* ǀǀ

Ye les planches décrites dans le précédent exemple sont prises comme critère. Si elles ont été installées **mātre** à une distance d'une *gavyūti* et si, pour leur convoyage, il y a huit drachmes pour la location des conducteurs de chariots, alors, ces autres [planches] qui ont été prises en tant que quantité voulue et décrites par des mesures diminuées de quatre par rapport aux mesures précédentes, quel sera **mitiḥ** le montant de la location [du transport] pour leur installation à [une distance de] six *gavyūti* ? Après avoir bien compris, dis-le !

On pose :

12	8
16	12
14	10
30	14
1	6
8	º

Après avoir déplacé, comme précédemment, le fruit de l'autre côté et effectué de chaque côté la multiplication, si la pile la plus importante — parce qu'augmentée du fruit — est divisée par la plus petite — dû à sa privation du fruit —, 8 drachmes sont obtenues pour la location.

On reprend le même exemple que précédemment en ajoutant une grandeur : la distance sur laquelle on transporte ces planches.

Épaisseur :	12	8
Largeur :	16	12
Longueur :	14	10
Quantité :	30	14
Distance :	1	6
Prix :	8 ⟷	

$\longrightarrow$

12	8
16	12
14	10
30	14
1	6
	8

$$\frac{8 \times 6 \times 14 \times 10 \times 12 \times 8}{1 \times 30 \times 14 \times 16 \times 12} = 8$$

Troc

À cette occasion, l'auteur dit ici une formule concernant le calcul d'échange de biens parce que cela est de la même classe que la règle de cinq :

तथैव भाण्डप्रतिभाण्डकेऽपि
विधिर्विपर्यस्य हरांश्च मूल्ये~॥ ८८ ॥

tathaiva bhāṇḍapratibhāṇḍake 'pi
vidhir viparyasya harāṃś ca mūlye ‖ 88 ‖

Pour des biens contre des biens aussi, il y a une règle analogue, après avoir échangé les dénominateurs et les deux prix ‖ 88 ‖

Ce qui est dans les magasins est **bhāṇḍa** une marchandise. Si on pratique une contrepartie pour cela, **bhāṇḍapratibhāṇḍake** dans un échange de biens, **viparyasya** après avoir fait l'échange **harān** des dénominateurs et aussi **mūlye** des deux prix pour les deux [biens], **tathaiva** comme pour la règle de cinq, après avoir déplacé le fruit de l'autre côté et [effectué] la multiplication de chaque côté, la règle du début doit être appliquée.

Exemple :

द्रम्मेण लभ्यत इहाम्रशतत्रयं चेत्
त्रिंशत्पणेन विपणौ वरदाडिमानि।
आम्रैर्वदाशु दशभिः कति दाडिमानि
लभ्यानि तद्विनिमयेन भवन्ति मित्र~॥ ८९ ॥

drammeṇa labhyata ihāmraśatatrayaṃ cet
triṃśat paṇena vipaṇau varadāḍimāni |
āmrair vadāśu daśabhiḥ kati dāḍimāni
labhyāni tadvinimayena bhavanti mitra ‖ 89 ‖

Si ici, on obtient trois cents mangues pour une drachme et au marché trente grenades de choix pour un paṇa*, dis rapidement, ô mon ami, combien de grenades on obtient dans un échange avec dix mangues ‖ 89 ‖*

Iha dans la ville fortunée de Jambūsara[7], **vipaṇau** sur un lieu de vente, sur un marché aux légumes, aux fruits etc., si pour une drachme on obtient trois cents mangues, riches en saveur et bien sucrées, et aussi, pour un *paṇa*, trente grenades **varāṇi** pourvues de grandes qualités de saveur et de maturité, alors pour nous dont l'intention est [un troc] avec des grenades parce que nous avons entendu qu'il y avait un défaut dans la vente des fruits, combien obtient-on de grenades dans un échange avec dix mangues ? Ô mon ami, dis-le rapidement !

On pose :

16	1
300	30
10	

Une transposition du fruit de l'autre côté et un échange des deux prix [sont pratiqués] :

1	16
300	30
	10

Les deux piles sont multipliées : 300 et 4 800. La division de la pile la plus abondante par la moins abondante étant effectuée, 16 grenades sont obtenues.

On remarque, tout d'abord, que le commentateur convertit les drachmes en paṇa *pour traiter l'exemple ; une drachme vaut seize* paṇa.

Nous avons affaire à une règle de cinq : étant donnés cinq nombres, trouver un sixième répondant à des règles de proportionnalité auxquelles sont soumises les grandeurs mesurées par ces nombres. Dans le troc, les règles sont différentes de ce que nous avons vu jusqu'ici pour les exemples précédents ; en effet, nous cherchons à savoir combien nous obtiendrons de grenades en échange de mangues : si le prix à l'unité des grenades augmente, nous obtiendrons moins de grenades en échange des mangues ; la grandeur « prix » varie ici de manière inversement proportionnelle à la grandeur « échange ». Ceci explique que les prix passent d'une colonne à l'autre dans la procédure décrite par Bhāskara.

Plus précisément, reprenons les tableaux dont nous nous sommes servis pour la règle de sept :

	Échange	*Quantité*	*Prix*
Valeurs 1 :	10	300	16
Valeurs 2 :	y	30	1

7. La ville où est né Gaṅgādhara, comme il le dit dans le poème propitiatoire au début de son commentaire.

La grandeur « échange » est proportionnelle à la grandeur « quantité » (obtenue lors de l'achat) ; on a donc :

$$\frac{10}{y} = \frac{300}{30} \quad \textit{d'où} \quad y = 10 \times \frac{30}{300} = z$$

Pour faire intervenir la grandeur « prix », nous partons maintenant du tableau suivant :

Échange	*Quantité*	*Prix*
z	30	16
x	30	1

Mais cette fois-ci, nous avons vu que la grandeur « échange » est inversement proportionnelle à la grandeur « prix », on a donc :

$$\frac{z}{x} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{16} \quad \textit{d'où} \quad z = 16\,z = \frac{16 \times 30 \times 10}{300} = \frac{4\,800}{300} = 16$$

Maintenant, avec la disposition de Bhāskara :

$$\begin{array}{l} \textit{Prix :} \\ \textit{Quantité :} \\ \textit{Échange :} \end{array} \begin{array}{|c|c|} 16 & 1 \\ 300 & 30 \\ 10 \longleftrightarrow & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} 16 \longleftrightarrow & 1 \\ 300 & 30 \\ & 10 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} 1 & 16 \\ 300 & 30 \\ & 10 \\ \hline \end{array}$$

En divisant le produit des nombres de la colonne de droite par celui des nombres de la colonne de gauche, on obtient le résultat :

$$\frac{16 \times 30 \times 10}{300} = \frac{4\,800}{300} = 16$$

Ainsi est achevé le commentaire sur ce chapitre [traitant de] divers sujets, dans le commentaire *gaṇitāmṛtasāgarī*, composé par le mathématicien Gaṅgādhara, sur la *Līlāvatī*, méthode du fortuné Bhāskara.