L'œuvre mathématique et astronomique de Bhāskarācārya, le Siddhāntaśiromai Chapitre 9: Calculs sur des mélanges

François Patte

L'œuvre mathématique et astronomique
de Bhāskarācārya

Le Siddhāntaśiromaṇi

L'arithmétique : Līlāvatī

Chapitre 9 : Calculs sur des mélanges

avec le commentaire Aṅkāmṛtasāgarī de Gaṅgādhara

édition, traduction et commentaires
par
François Patte

Neuvième chapitre

Problèmes de mélange

[Calculs d'intérêts]

Maintenant commencent les problèmes de mélange ; à ce sujet, une formule en une strophe et demi :

प्रमाणकालेन हतं प्रमाणं
विमिश्रकालेन हतं फलं च।
स्वयोगभक्ते च पृथक्स्थिते ते
मिश्राहते मूलकलान्तरे स्तः ॥९०॥
यद्वेष्टकर्माख्यविधेस्तु मूलं
मिश्राच्च्युतं तच्च कलान्तरं स्यात्।

pramāṇakālena hataṃ pramāṇaṃ
vimiśrakālena hataṃ phalaṃ ca |
svayogabhakte ca pṛthaksthite te
miśrāhate mūlakalāntare staḥ || 90 ||
yadveṣṭakarmākhyavidhes tu mūlaṃ
miśrāc cyutaṃ tac ca kalāntaraṃ syāt |

Le critère est multiplié par le temps de référence et le taux est multiplié par la durée de la composition [capital et intérêts] ; puis les deux disposés séparément sont divisés par leur somme et multipliés par la composition : on aura [le capital] d'origine et les intérêts || 90 || Ou bien alors, le [capital] d'origine [est calculé] par la formule nommée « règle de supposition » et, ce dernier ôté de la composition, on aura les intérêts.

Un montant, appelé critère, est multiplié par la durée unité de référence, puis le taux est multiplié par la durée écoulée voulue ; **te** les deux calculs placés séparément après avoir été multipliés par le montant composé, doivent être divisés par leur somme : les montants obtenus sont le montant d'origine et les intérêts, à savoir, le montant d'origine d'après le critère et le montant des intérêts d'après le taux.

« *Yadvā* » : indication d'une autre méthode. Selon la méthode exposée dans l'exemple, le montant d'origine est [obtenu] par la formule de la règle de supposition et ôté du [montant] composé, le reste représente les intérêts.

Le montant pris comme « critère », pour autant qu'on en puisse juger par les exemples qui suivent, est 100 *; comme de nos jours, les intérêts sont calculés en pourcentage, la différence est la durée « unité de référence » qui est d'un mois, ce qui nous révèle une pratique de prêts à intérêts particulièrement élevés.*

Cette règle a pour but de séparer, par un calcul, le capital de départ et le montant des intérêts quand on connaît le taux, la durée et le montant global, capital et intérêts — le montant composé (miśra) *—, obtenu au bout de cette durée.*

Le principe opératoire est, comme toujours chez Bhāskara, très simple : on multiplie le montant critère par le temps de référence, on multiplie le taux (sans le « pour cent ») par la durée puis on multiplie le montant composé par chacun des deux nombres obtenus et on divise ces résultats par la somme des deux premiers produits ; on obtient ainsi deux nombres, l'un représente le montant initialement prêté, l'autre le montant des intérêts produits pendant la période donnée. Gaṅgādhara nous donne un moyen mnémotechnique pour distinguer les deux : « le montant d'origine est obtenu du critère et le montant des intérêts d'après le fruit (le taux d'intérêt). »

Si on appelle C *le capital prêté,* t*, le taux d'intérêt, et* d*, la durée du prêt, les intérêts produits sont donc égaux à :*

$$I = C \times \frac{t}{100} \times d$$

La quantité composée (miśra) *est alors égale à :*

$$M = C + I = C + C \times \frac{t}{100} \times d = (100 + t \times d) \times \frac{C}{100}$$

La dernière égalité nous permet de retrouver facilement le capital d'origine si on connaît le montant composé :

$$C = \frac{100M}{100 + t \times d}$$

On reconnaît la règle donnée par Bhāskara pour effectuer ce calcul : le critère, 100*, est multiplié par le temps de référence* 1 *(mois) et le fruit* t *est multiplié par la durée* d *:* $t \times d$*. Le capital d'origine est bien le produit du montant composé,* M*, multiplié par le résultat de la première opération et divisé par la somme des deux résultats.*

Connaissant le capital prêté et le montant composé, on peut maintenant calculer le montant des intérêts produits :

$$I = M - C = M - \frac{100M}{100 + t \times d} = \frac{M(100 + t \times d) - 100M}{100 + t \times d} = \frac{M \times t \times d}{100 + t \times d}$$

On reconnaît, dans la dernière égalité, la formule donnée pour calculer directement les intérêts à partir du montant composé.

Un *śloka* explicatif :

पञ्चकेन शतेनाब्दे
मूलं स्वं सकलान्तरम्।
सहस्रं चेत्पृथक्तत्र
वद मूलकलान्तरे ॥९१॥

pañcakena śatenābde
mūlaṃ svaṃ sakalāntaram |
sahasraṃ cet pṛthak tatra
vada mūlakalāntare || 91 ||

Si, en une année, un montant d'origine à cinq pour cent [produit] mille, intérêts compris, dis alors, respectivement, l'origine et les intérêts || 91 ||

Pañcakena selon l'usage qui est ainsi : pour cent [unités] dont l'accroissement est de cinq chaque mois, **abde** une année étant écoulée, **sakalāntaraṃ mūlam** on a la somme de l'accroissement et du montant d'origine ; si mille [unités] sont acquises, dis alors quel est le montant d'origine, quels sont les intérêts.

On pose 1, 100, 5, 12, 1000.

Ici, le montant critère, 100, est multiplié par la durée de référence, 1 mois : 100. Le taux, mentionné pour le critère, 5, est multiplié par la durée écoulée voulue, 12 : 60. La somme de ces deux placés séparément est le diviseur : 160. La première quantité, 100, est multipliée par le [montant] composé : 100 000 ; une fois divisée par le diviseur 160, le montant d'origine est obtenu : 625. La deuxième quantité, 60, est multipliée par le [montant] composé : 60 000 ; une fois divisée par le diviseur 160, le montant des intérêts est obtenu : 375.

Et maintenant, suivant la méthode de supposition il en est ainsi : une [quantité] arbitraire, 1, est postulée ; ayant considéré celle-ci même comme le montant d'origine, on exécute par la pensée une règle de cinq : « si, pendant un mois, le fruit pour cent est cinq, quel est-il alors pendant une année, pour la [quantité] choisie 1 ? »

On pose : $\begin{array}{|c|c|} 1 & 12 \\ 100 & 1 \\ 5 & \\ \hline \end{array}$

Selon un procédé de calcul précédent[1], le fruit est obtenu : $\begin{array}{|c|} 3 \\ 5 \\ \hline \end{array}$; ce sont les intérêts pour une unité pendant une année révolue. Ceux-ci sont composés avec l'unité postulée en tant que montant d'origine : $\begin{array}{|c|} 8 \\ 5 \\ \hline \end{array}$. Maintenant, la donnée, 1000, doit être multipliée par l'unité [arbitraire] choisie et divisée par le fruit de cette [quantité] arbitraire $\begin{array}{|c|} 8 \\ 5 \\ \hline \end{array}$; le montant d'origine est obtenu : 625. Ce dernier étant ôté du montant composé, le reste représente les intérêts : 375.

La première méthode donnée par le commentateur applique à la lettre la règle donnée par Bhāskara : il suffit, dans notre commentaire précédent de remplacer M *par* $1\,000$, t *par* 5 *et* d *par* 12 *puisque le taux est un taux mensuel et que le prêt a une durée d'un an.*

Gaṅgādhara donne une deuxième méthode qui s'appuie sur deux procédés exposés précédemment : la règle de supposition, qui prescrit d'effectuer les calculs en donnant à l'inconnue une valeur arbitraire, le résultat cherché étant obtenu par une règle de trois et une règle de cinq puisque nous avons ici quatre quantités connues : la durée de référence, 1 *mois ; le taux mensuel,* 5, *pour le montant de référence* 100 *; la quantité choisie pour appliquer la règle de supposition est* 1 *et nous en cherchons une cinquième qui leur est proportionnelle.*

Partant de la disposition adoptée dans ce traité : $\begin{array}{|c|c|} 1 & 12 \\ 100 & 1 \\ 5 & \\ \hline \end{array}$, *on déplace le fruit,* 5, *de la colonne de gauche dans celle de droite :* $\begin{array}{|c|c|} 1 & 12 \\ 100 & 1 \\ & 5 \\ \hline \end{array}$, *et on divise le produit des éléments de la colonne de droite par le produit de ceux de la colonne de gauche :* $\dfrac{60}{100} = \dfrac{3}{5}$.

1. Il s'agit ici des procédés développés dans le chapitre précédent, les règles de supposition, et, dans le cas présent, de la règle de cinq.

Ceci correspond aux montant des intérêts pour la quantité arbitraire choisie, 1 *; si on les y ajoute, on obtient :* $\frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}\cdot$
Il ne reste qu'à appliquer la règle de supposition :

$$\frac{1000 \times 1}{\frac{8}{5}} = \frac{1000 \times 5}{8} = 625$$

Ce résultat est le capital prêté, il suffit de l'ôter du montant composé pour obtenir le montant des intérêts produits.

Une formule opératoire en une strophe :

अथ प्रमाणैर्गुणिताः स्वकाला
व्यतीतकालघ्नफलोद्धृतास्ते।
स्वयोगभक्ताश्च विमिश्रनिघ्नाः
प्रयुक्तखण्डानि पृथग्भवन्ति ॥९२॥

atha pramāṇair guṇitāḥ svakālā
vyatītakālaghnaphaloddhṛtās te |
svayogabhaktāś ca vimiśranighnāḥ
prayuktakhaṇḍāni pṛthag bhavanti || 92 ||

Leurs durées propres multipliées par les critères et divisées par les taux multipliés par leurs durées écoulées, ces [résultats] sont divisés par leur somme ; multipliés par le [montant] composé, on a respectivement [le montant] des parts prêtées || 92 ||

Svakālāḥ les durées des critères doivent être multipliées **pramāṇaiḥ** par les montants critères ; **te** les quantités ainsi formées doivent être divisées par leurs propres taux multipliés par leurs durées écoulées respectives ; après cela, leur somme est le diviseur et le montant composé est le multiplicateur. Ainsi, à partir de ces quantités, par l'action d'une multiplication et d'une division, les parts qui ont été prêtées sont respectivement produites.

Il s'agit ici de trouver chacune des parts d'une somme globale qui a été prêtée en plusieurs fois à des taux différents et pendant des durées différentes. Le montant des intérêts rapportés par chacune de ces parts est le même.
Si on appelle T *le montant total*[2] *de la somme prêtée et* A, B, C, *chacune des parts*

2. C'est ce montant total qui est appelé, dans cette règle, « montant composé » *(vimiśra)* ; ce terme désignait dans la règle précédente, le montant prêté augmenté des intérêts.

prêtées respectivement aux taux t_A, t_B, t_C, *pendant des durées* d_A, d_B *et* d_C, *l'intérêt commun* I *est donc égal à :*

$$I = A \times \frac{t_A}{100} \times d_A = B \times \frac{t_B}{100} \times d_B = C \times \frac{t_C}{100} \times d_C$$

Ce qui nous permet de calculer chacune des parts en fonction de l'intérêt qu'elles produisent :

$$A = I \times \frac{100}{t_A \times d_A}\,; \quad B = I \times \frac{100}{t_B \times d_B}\,; \quad C = I \times \frac{100}{t_C \times d_C}$$

Nous savons que la somme des parties A, B, *et* C *est le capital total :*

$$T = A + B + C = I \times \frac{100}{t_A \times d_A} + I \times \frac{100}{t_B \times d_B} + I \times \frac{100}{t_C \times d_C}$$
$$= I\,[\underbrace{\frac{100}{t_A \times d_A} + \frac{100}{t_B \times d_B} + \frac{100}{t_C \times d_C}}_{S}]$$

Si nous appelons, comme nous l'avons fait, S *la somme des fractions*[3]*, l'intérêt commun* I *est donc égal à :*

$$I = \frac{T}{S}$$

En reportant cette valeur dans les formules qui donnent chacune des parties en fonction de l'intérêt :

$$A = \frac{100}{t_A \times d_A} \times \frac{T}{S}\,; \quad B = \frac{100}{t_B \times d_B} \times \frac{T}{S}\,; \quad C = \frac{100}{t_C \times d_C} \times \frac{T}{S}$$

on obtient la formule donnée par Bhāskara : chacune des parties est égale au critère, 100*, divisé par le produit du taux auquel elle est prêtée et de la durée, multiplié par le montant total,* T*, divisé par la somme de toutes les fractions correspondant à chacune des parties.*

Pour rendre cela clair, l'auteur explique au moyen d'un exemple :

यत्पञ्चकत्रिकचतुष्कशतेन दत्तं
खण्डैस्त्रिभिर्गणक निष्कशतं षडूनम्।
मासेषु सप्तदशपञ्चसु तुल्यमाप्तं
खण्डत्रयेऽपि हि फलं वद खण्डसंख्याम् ॥९३॥

yatpañcakatrikacatuṣkaśatena dattaṃ
khaṇḍais tribhir gaṇaka niṣkaśataṃ ṣaḍūnam |
māseṣu saptadaśapañcasu tulyam āptaṃ
khaṇḍatraye 'pi hi phalaṃ vada khaṇḍasaṃkhyām || 93 ||

3. Une réduction au même dénominateur ici, rendrait la formule illisible.

> *Ô calculateur, cent* niṣka *diminués de six ont été prêtés à cinq, trois et quatre pour cent en trois parts pendant sept, dix et cinq mois pour un même gain, dis le compte des parts et aussi le fruit pour ces trois parts* || *93* ||

Une somme a été prêtée trois fois, par un certain créancier à un certain débiteur, de la manière suivante : une [part] a été prêtée à cinq pour cent, pour laquelle sept mois se sont écoulés ; une [part] a été prêtée à trois pour cent, dix mois se sont écoulés pour elle ; de même, une part a été prêtée à quatre pour cent, pour cette dernière, cinq mois se sont écoulés.

Ainsi, avec ces trois parts, une triade a été prêtée, chacune des parts du montant étant donnée à des moments différents et prêtée avec des accroissements inégaux ; la totalité de la somme originelle prêtée est de cent *niṣka* diminués de six et, pour ces trois quantités, l'intérêt rapporté est le même pendant lesdits mois, c'est-à-dire que le fruit produit est identique pour la première, celle du milieu et la dernière de ces quantités, aussi longtemps [qu'elles ont été prêtées]. Dans ces conditions, ô mathématicien ! Dis respectivement les mesures des sommes qui composent les parts et aussi le montant de l'accroissement égal.

On pose :

<table>
<tr><td>1| 7</td><td>1| 10</td><td>1| 5</td></tr>
<tr><td>100</td><td>100</td><td>100</td></tr>
<tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table>

La somme originelle composée est de 94 et les durées respectives : 1, 1, 1, sont multipliées par les montants critères : 100, 100, 100. Les taux : 5, 3, 4, sont multipliés par les durées écoulées : 7, 10, 5 ; sont produits : 35, 30, 20. Les quantités précédentes sont divisées —

100	100	100
35	30	20

— la somme de ces dernières, placées séparément, est, après avoir été simplifiée comme il convient :

235
21

. Les trois quantités précédemment mentionnées, sont multipliées par la somme composée 94 :

9400	9400	9400
35	30	20

Après avoir divisé par leur somme — *le dénominateur et le numérateur ayant été intervertis* etc. — les parts de la somme originelle sont obtenues séparément et dans l'ordre : 24, 28, 42.

De celles-ci, il est possible de déduire [le montant] des intérêts, par des calculs séparés fondés sur une règle de cinq, de la manière suivante : on pose

1	7
100	24
5	

Si l'accroissement pour cent pendant un mois est cinq, combien a-t-on alors pour vingt-quatre pendant sept mois ? De même aussi pour les trois parts, après avoir exécuté en pensée trois règles de cinq, les intérêts sont les mêmes pour les trois [parts], le montant en est :

42	42	42
5	5	5

. Huit unités et deux cinquième d'unité.

Le commentateur suit pas à pas la méthode de la règle. Les durées et montants critères sont tous les mêmes : 1 *mois et* 100 *unités, leur produit est donc* 100*. Le produit des taux par les durées correspondant à chacune des parts* A*,* B *et* C *sont respectivement* 35*,* 30 *et* 20*, d'où les fractions* $\frac{100}{35}$*,* $\frac{100}{30}$ *et* $\frac{100}{20}$*, dont on fait la somme comme le prescrit la règle :* $\frac{235}{21}$*. On a donc :*

$$A = \frac{100}{35} \times 94 \times \frac{21}{235} = 24\,; B = \frac{100}{30} \times 94 \times \frac{21}{235} = 28\,; C = \frac{100}{20} \times 94 \times \frac{21}{235} = 42$$

Le problème posé en exemple demande aussi de calculer le montant commun des intérêts. La règle est muette sur ce point et Gaṅgādhara propose d'utiliser une règle de cinq pour chacune des parts. Les calculs ne sont posés que pour la première part, voici ceux correspondant aux deux autres parts :

1	10
100	28
3	

,

1	5
100	42
4	

. En appliquant la méthode de la règle de cinq, on trouve bien le résultat indiqué.

Une formule[4] concernant un calcul d'intérêts égaux ; une strophe :

मासफलं यद्यधिकं
कनिष्ठराशेः समधिकराशिफलात्।
मासफलान्तरभक्तं
राशिद्वितीयान्तरं कालः ॥१४॥

4. Cette formule, et l'exemple qui l'accompagne, n'existent pas dans l'édition de Colebrooke, ni dans aucun autre commentaire que avons pu consulter.

māsaphalaṃ yady adhikaṃ
kaniṣṭharāśeḥ samadhikarāśiphalāt |
māsaphalāntarabhaktaṃ
rāśidvitīyāntaraṃ kālaḥ || 94 ||

Si le taux mensuel d'une quantité inférieure est plus grand que le taux d'une quantité supérieure, la différence des deux quantités divisée par la différence des gains mensuels est la durée || *94* ||

Étant donnée cette question : « quand deux quantités sont prêtées pendant la même durée — la plus petite quantité avec un taux plus grand et la plus grande quantité avec un taux plus petit — quand aura-t-on un même gain pour ces deux quantités ? », la différence des deux montants d'origine divisée par la différence des gains mensuels est la durée nécessaire à un même accroissement.

Parce qu'il y a en soi l'impossibilité d'un accroissement égal s'il y a un taux plus grand pour la plus grande quantité et un taux plus petit pour la plus petite, il est dit clairement dans cette formule : *« Si le taux mensuel [d'une quantité inférieure] est plus grand »* etc.

Cette règle, de même que l'exemple qui l'accompagne, ne semblent pas appartenir à la Līlāvatī*. On peut relever plusieurs raisons : seul le commentaire de Gaṅgādhara en fait état parmi tous les commentaires que nous avons consultés ; des manuscrits de ce commentaire, qui habituellement ne citent que le début des strophes, en font une citation intégrale ; la métrique* (āryā) *est, la plupart du temps erronée et, pour l'exemple, la deuxième partie diffère totalement dans certains manuscrits, même si le sens en est identique.*

Le problème posé est le suivant : étant données deux sommes, une plus grande et une plus petite, prêtées à des taux différents, la plus grande avec un intérêt plus petit que celui de la plus petite, quand obtiendrons-nous une même somme pour le capital et les intérêts cumulés ?

Gaṅgādhara fait remarquer que cela ne peut avoir lieu que dans le cas précisé par la règle : si la plus grande somme est prêtée à un taux tel que son rapport mensuel est supérieur à celui de la plus petite, il n'y a effectivement aucune possibilité d'obtenir un jour le même montant, capital et intérêts cumulés, pour les deux prêts.

On appelle A la quantité la plus grande prêtée au taux t_A et B, la quantité la plus petite prêtée au taux t_B. On a donc $A > B$ et, de plus, le rapport mensuel de A : $A \times \dfrac{t_A}{100}$, est inférieur à celui de B. On cherche le temps au bout duquel les sommes de chacune de ces deux quantités et des intérêts qu'elles produisent chacune pendant cette durée d deviennent égales, soit :

$$A + A \times \frac{t_A}{100} \times d = B + B \times \frac{t_B}{100} \times d$$

Égalité que l'on peut encore écrire :

$$A - B = B \times \frac{t_B}{100} \times d - A \times \frac{t_A}{100} \times d = \left[B \times \frac{t_B}{100} - A \times \frac{t_A}{100}\right] \times d$$

On obtient alors d *:*

$$d = \frac{A - B}{B \times \frac{t_B}{100} - A \times \frac{t_A}{100}}$$

Ce qui est bien la formule annoncée par la règle : $B \times \frac{t_B}{100}$ *étant le montant des intérêts produits par la quantité* B *en un mois et de même pour* A*.*

On voit bien sur cette formule la nécessité d'avoir un rapport mensuel plus faible pour la plus grande quantité : sinon la durée serait mesurée par un nombre négatif… ce qui serait difficile à interpréter !

Exemple :

पञ्चकशतेन दत्तं
रूपशतं द्विकशतेन दत्ते द्वे।
ज्ञाते फलप्रमाणे
समवृद्धिः केन कालेन ॥९५॥

pañcakaśatena dattaṃ
rūpaśataṃ dvikaśatena datte dve |
jñāte phalapramāṇe
samavṛddhiḥ kena kālena || 95 ||

Une centaine d'unités sont prêtées à cinq pour cent et deux [centaines] à deux pour cent, le critère pour les fruits étant connu, au bout de quelle durée y aura-t-il un même accroissement ? || 95 ||

Une centaine d'unités sont prêtées avec un accroissement de cinq pour cent et deux centaines avec un accroissement de deux pour cent ; dans ces conditions, si les gains pour les deux montants d'origine sont produits pendant une même durée, au bout de combien de temps y a-t-il le même montant pour ces deux quantités ?

On pose :

1	1
100	200
5	2

Ici la différence des montants d'origine est 100. En rapport avec les deux taux, le gain mensuel est d'une part 5, d'autre part 4 ; la division étant faite par la différence – 1 – des deux, une durée de 100 mois est [nécessaire] pour la production d'un même montant.
On exécute maintenant deux règles de cinq : si pendant un mois on obtient cinq pour cent combien alors [obtiendra-t-on] pour cent, pendant cent mois ?
On pose :

1	100
100	100
5	

Selon la méthode, telle qu'elle a été enseignée, [le montant] des intérêts est 500.
Deuxième règle de cinq. Si pendant un mois, le taux est deux pour cent, alors combien [obtiendra-t-on] pour deux cents, en cent mois ?
On pose :

1	100
100	200
2	

Le gain obtenu pour ces mois est 400. Deux quantités égales sont obtenues qui sont les sommes des montants d'origine et des intérêts :

600
600

On doit toujours procéder ainsi.

Gaṅgādhara applique d'abord la règle pour calculer la durée nécessaire à l'obtention d'une même somme cumulée : intérêts et capital.

La somme la plus grande, 200, prêtée à 2 pour cent, rapporte 4 en un mois et la somme la plus petite, 100, prêtée à 5 pour cent, rapporte 5 en un mois. On applique la règle :

$$d = \frac{200 - 100}{5 - 4} = 100$$

Puis il compléte le règle car, s'il nous est dit comment calculer la durée nécessaire à l'obtention d'un même montant pour les deux sommes, on ne nous dit pas comment se servir de ce résultat pour calculer la somme obtenue.

La méthode proposée consiste en deux règles de cinq qui permettent de calculer le rapport de chaque montant prêté. Selon la disposition adoptée pour calculer les règles de cinq, on déplace, dans le cas du plus petit montant, le 5 de la colonne de gauche dans la colonne de droite puis on divise le produit des nombres de la colonne de droite par le produit des nombres de la colonne de gauche, on obtient :

$$\frac{100 \times 100 \times 5}{1 \times 100} = 500$$

On fait de même avec le plus grand montant et on obtient :

$$\frac{100 \times 200 \times 2}{1 \times 100} = 400$$

Le montant des intérêts obtenus en 100 mois ajouté aux montant des capitaux prêtés — 100 dans le premier cas, 200 dans le deuxième — donne la même somme : 600.

Formule opératoire en une demie strophe, concernant l'association [de capitaux] :

प्रक्षेपका मिश्रहता विभक्ताः
प्रक्षेपयोगेन पृथक्फलानि ॥ ९६ ॥

prakṣepakā miśrahatā vibhaktāḥ
prakṣepayogena pṛthak phalāni || 96 ||

Les apports en capital, multipliés par la composition [capital et intérêts] et divisés par leur somme sont les gains respectifs || 96 ||

Prakṣepakāḥ — c'est-à-dire : elles sont ajoutées — plusieurs quantités. Après [les] avoir ajoutées, on entreprend d'autres transactions. Le gain qui provient de l'apport doit être connu comme la [quantité] composée. Ces apports, posés séparément, sont multipliés par la quantité composée et divisés par la somme des apports, les gains respectifs sont produits.

Il s'agit ici d'une simple règle de proportion : si plusieurs personnes s'associent pour faire du commerce, chacune apportant son capital propre, l'augmentation du capital de chacun est directement proportionnelle à l'augmentation du capital global et le facteur de proportionnalité est le rapport entre le capital global final et le capital global initial.

L'auteur explique à l'aide d'un exemple :

पञ्चाशदेकसहिता गणकाष्टषष्टिः
पञ्चोनिता नवतिरादिधनानि येषाम्।
प्राप्ता विमिश्रितधनैस्त्रिशती त्रिभिस्तैः
वाणिज्यतो वद विभज्य धनानि तेषाम् ॥ ९७॥

pañcāśad ekasahitā gaṇakāṣṭaṣaṣṭiḥ
pañconitā navatir ādidhanāni yeṣām |
prāptā vimiśritadhanais triśatī tribhis tair
vāṇijyato vada vibhajya dhanāni teṣām || 97 ||

Ô calculateur, trois cents [unités] ont été obtenues en commerçant avec les montants composés, [apports et bénéfices], de trois personnes dont les capitaux initiaux étaient de cinquante augmenté de un, soixante-huit et quatre-vingt-dix diminué de cinq. Dis la richesse de chacun après répartition || 97 ||

Trois cents [unités] ont été obtenus, **vāṇijyāt** une fois faites des [opérations] commerciales, **miśradhanaiḥ**, c'est-à-dire : après avoir rassemblé leurs capitaux respectifs, par des commerçants, dont les capitaux initiaux étaient ainsi : cinquante [unités] augmentées de une pour l'un, soixante augmentées de huit pour un autre, quatre-vingt-dix diminuées de cinq pour le dernier. Dis les parts des capitaux de chacun, après avoir fait une répartition conformément à leur [apport] initial respectif.

On pose : 51, 68, 85 ; montant composé obtenu : 300 ; somme des apports : 204.
Les apports assemblés : 51, 68, 85, sont multipliés par le montant composé, 300, et divisés par leur somme, les montants suivant les parts respectives sont produits : 75, 100, 125.
Ces derniers sont diminués des montants initiaux, les gains sont : 24, 32, 40.

Ou bien, le montant composé, 300, diminué du montant initial, 204 est la somme de tous les gains : 96. Les parts de gains sont calculées comme précédemment, à partir de ce dernier montant composé, avec apports initiaux : 24, 32, 40.

Ou bien, en imaginant des règles de trois séparées : si pour un montant d'origine de 204, la part initiale est 51, quelle sera-t-elle pour le montant obtenu 300 ? Par le calcul, ces mêmes quantités sont produites : 75, 100, 125.

Dans tous les cas, un exemple doit être considéré de cette manière.

La première méthode est une application directe de la règle : chaque apport augmente dans une proportion égale au rapport des capitaux initiaux et finaux : $\frac{300}{204}$.
Pour la deuxième méthode, on calcule le gain global — la différence des capitaux — et chaque gain est alors calculé proportionnellement à la part de chacun dans le capital initial :

$$96 \times \frac{51}{204} = 24\,; \quad 96 \times \frac{68}{204} = 32\,; \quad 96 \times \frac{85}{204} = 40$$

Le calcul utilisant une règle de trois est identique à la première méthode.

Comme le dit dans son *Gaṇitasāra* le mathématicien Viṣṇu[5] :

Cinq cents et demi, huit cents diminués de dix, trois cents, huit cents augmentés de soixante et dix fois cent ; tel est le capital partagé par cinq [personnes] d'un village. L'accroissement est de deux cents diminué d'un quart. Dis-moi alors, sans tarder, quel sera le capital produit séparément pour chacun dans un partage.

On pose : 550, 790, 300, 860, 1 000.

Le capital originel total de la collectivité est 3 500. Une augmentation de deux cents diminués d'un quart produit 3 675. D'après la méthode dite dans la formule, le capital de chacun produit par un partage est de 577 *niṣka* et 8 drachmes pour le premier, 829 et 8 drachmes pour le second, 315 pour le troisième, 903 pour le quatrième et 1 050 pour le cinquième et ainsi de suite ; cela doit toujours être compris ainsi.

Cet exercice supplémentaire n'apporte rien de nouveau et sa solution est simple en appliquant la règle de Bhāskara : le capital augmente de 175*, il se monte donc à* 3675 *et il suffit de multiplier le montant de chacune des parts par le rapport* $\frac{3675}{3500}$ *pour obtenir les montants obtenus par chacun.*

[Remplissage d'un bassin]

Formule opératoire en une demi-strophe :

भजेच्छिदोंशैरथ तैर्विमिश्रै
रूपं भजेत्स्यात्परिपूर्तिकालः ॥ ९८ ॥

bhajec chido 'ṃśair atha tair vimiśrai
rūpaṃ bhajet syāt paripūrtikālaḥ || 98 ||

On divisera les dénominateurs par les numérateurs, puis on divisera l'unité par ces derniers [résultats] composés et on aura le temps de remplissage || 98 ||

5. Il s'agit d'un des frères de Gaṅgādhara dont il nous a déjà parlé au début de son commentaire.

On divisera les dénominateurs par les numérateurs ensuite, on divisera l'unité par ces [résultats] composés ; le quotient est le temps de remplissage.

L'auteur rend cela clair à l'aide d'un exemple :

ये निर्झरा दिनदिनार्धतृतीयषष्ठैः
संपूरयन्ति हि पृथक्पृथगेव मुक्ताः।
वापीं यदा युगपदेव सखे विमुक्तास्
ते केन वासरलवेन तदा वदाशु ॥९९॥

ye nirjharā dinadinārdhatṛtīyaṣaṣṭaiḥ
saṃpūrayanti hi pṛthakpṛthag eva muktāḥ |
vāpīṃ yadā yugapad eva sakhe vimuktās
te kena vāsaralavena tadā vadāśu || 99 ||

Ces canaux qui, séparément ouverts, emplissent un bassin en un jour, une demi-journée, un tiers et un sixième de journée, quand ils sont ouverts tous ensemble, dis-moi rapidement, ô mon cher ! quelle fraction de jour [leur] est alors nécessaire ? || 99 ||

Dans un bassin bien étanche, il y a quatre canaux d'alimentation et ceux-ci, étant ouverts séparément, emplissent un bassin de la manière suivante : le premier en un jour, le deuxième en une demi-journée, le troisième en un tiers de journée et le quatrième en un sixième de journée ; s'ils sont ouverts tous ensemble, en quelle fraction de journée le remplissent-ils alors ?

On pose : $\begin{array}{|c|c|c|c|} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$.

Les dénominateurs sont divisés par les numérateurs, de cette manière : $\begin{array}{|c|c|c|c|} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$. Leur somme est $\begin{array}{|c|} 12 \\ 1 \\ \hline \end{array}$. L'unité est divisée [selon la formule :] « après avoir interverti dénominateur et numérateur » ; le quotient est le temps de remplissage du bassin, la fraction de journée est $\begin{array}{|c|} 1 \\ 12 \\ \hline \end{array}$, soit cinq *ghaṭī*.

Le temps de remplissage d'un bassin est inversement proportionnel au débit de la fontaine qui l'alimente : les unités de mesure de référence sont ici, la journée pour le temps et la capacité d'un certain bassin pour le volume d'eau ; si une fontaine remplit le bassin en une demi-journée, elle remplira deux bassins en une journée, son débit (le volume fourni pendant une unité de temps) est donc égal à deux. S'il y a plusieurs fontaines, il suffit donc d'additionner leurs débits pour avoir la quantité d'eau fournie par l'ensemble des fontaines, le temps de remplissage de notre bassin de référence est alors l'inverse de ce débit.

Ce sont ces opérations que nous propose la règle : inverser les rapports qui mesurent le temps (« on divisera les dénominateurs par les numérateurs… »), on obtient les débits des différentes fontaines ; on additionne ces débits et on inverse le résultat (« on divisera l'unité par ces derniers [résultats] composés ») pour calculer le temps.

Une ghaṭī *— le terme désigne une cruche à eau — est une mesure de temps de vingt-quatre minutes.*

On notera le « flou » de cette règle : on ne nous donne aucune unité ni aucun domaine d'application, ce qui en fait une règle extrêmement flexible à appliquer, son domaine étant de l'ordre des quantités qui varient de manière inversement proportionnelle l'une par rapport à l'autre.

[Achat et vente]

Formule opératoire, une strophe :

पण्यैः स्वमूल्यानि भजेत्स्वभागैर्
हत्वा तदैक्येन भजेच्च तानि।
भागांश्च मिश्रेण धनेन हत्वा
मूल्यानि पण्यानि यथाक्रमं स्युः ॥१००॥

paṇyaiḥ svamūlyāni bhajet svabhāgair
hatvā tadaikyena bhajec ca tāni |
bhāgāṃś ca miśreṇa dhanena hatvā
mūlyāni paṇyāni yathākramaṃ syuḥ || 100 ||

On divisera par les mesures les prix correspondants après les avoir multipliés par leur proportion respective ; après avoir multiplié par le montant composé et ces derniers et les proportions, on divisera par leur somme : on aura respectivement les prix et les mesures || 100 ||

Après avoir multiplié chaque prix par la proportion qui le concerne, on divisera ensuite par les mesures et enfin, en vue de la répartition, on effectuera séparément leur somme. Ensuite, ayant multiplié les [résultats], placés séparément, par la quantité composée, on divisera par la somme ; on obtient les prix. De là, après avoir aussi multiplié par la quantité composée les parts telles qu'elles sont placées, on divisera par la somme ; on obtient les mesures. Ainsi [sont] acquis dans l'ordre : les prix d'après les prix correspondants — selon la méthode enseignée —, les mesures, d'après les proportions.

Cette règle, un peu obscure dans sa formulation, est un problème de « partages inégaux » : on veut partager un nombre proportionnellement à des nombres qu'il nous faut d'abord déterminer. Les nombres à partager sont, dans les deux exemples qui suivent, une somme d'argent et la quantité de marchandises acquise avec cette somme ; quant aux nombres par rapport auxquels on partage, il faut les déterminer en fonction du prix du « marché »— trois mesures et demi de riz pour une drachme ou un pala *de camphre pour deux* niṣka *— proportionnellement à la somme que l'acheteur veut engager.*

Pour partager une somme S proportionnellement à des nombres a, b et c, il faut trouver trois nombres x, y et z dont la somme est égale à S et qui satisfont aux égalités :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Une propriété des suites de rapports égaux permet d'écrire :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{S}{a+b+c}$$

On obtient alors :

$$x = \frac{aS}{a+b+c}\,; \quad y = \frac{bS}{a+b+c}\,; \quad z = \frac{cS}{a+b+c}$$

On a bien alors la deuxième partie de la règle : « après avoir multiplié par le montant composé et ces derniers et les proportions, on divisera par leur somme », le « montant composé » étant ici représenté par S.

Quant à la première partie de la règle, elle nous permet de déterminer les nombres a, b et c car, l'usage commercial étant de donner les prix d'une denrée en fonction d'une unité de mesure, il faut d'abord calculer le prix de chaque ingrédient en fonction de la quantité relative entrant dans un mélange : un et deux dans le premier exemple, un, seize et huit dans le deuxième.

L'auteur rend cela clair à l'aide d'un exemple :

सार्धं तण्डुलमानकत्रयमहो द्रम्मेण मानाष्टकं
मुद्गानां तु यदि त्रयदशमिता एता वणिक्काकिणीः।

आदायार्पय तण्डुलांशयुगलं मुद्गैकभागान्वितं
क्षिप्रं क्षिप्रभुजो व्रजेम हि यतः सार्थोऽग्रतो यास्यति ॥१०१॥

sārdhaṃ taṇḍulamānakatrayam aho drammeṇa mānāṣṭakaṃ
mudgānāṃ tu yadi trayadaśamitā etā vaṇik kākiṇīḥ |
ādāyārpaya taṇḍulāṃśayugalaṃ mudgaikabhāgānvitaṃ
kṣipraṃ kṣiprabhujo vrajema hi yataḥ sārtho 'grato [yāsyati || 101 ||

Holà commerçant ! Si, pour une drachme, on a trois mesures et demi de riz ou huit mesures de haricots, ayant accepté ces treize kākiṇī, *apporte rapidement une double part de riz ajoutée à une part de haricots : nous allons manger immédiatement car la caravane va partir sur le champ* || *101* ||

Holà commerçant ! Pour une drachme, on obtient trois mesures et demi de riz et, pour une drachme, huit mesures de haricots ; ayant alors pris ces treize *kākiṇī* que je te donne, apporte rapidement deux portions de riz ajoutées à une portion de haricots car nous allons manger rapidement et, de plus, **sārthaḥ** [notre] communauté va partir immédiatement.

On pose : drachme 1, mesures de riz $\left|\begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array}\right|$; drachme 1, mesure de haricots 8 ; montant composé treize *kākiṇī*, parce qu'elles sont la soixante-quatrième partie de la drachme : $\left|\begin{array}{c} 13 \\ 64 \end{array}\right|$; portion de riz 2 ; portion de haricots 1.

Maintenant le calcul.

Ici, les deux prix des mesures, 1 et 1, sont multipliés par les deux portions des mesures 2 et 1, [on obtient] 2 et 1 ; puis divisés par les deux mesures, $\left|\begin{array}{c|c} 7 & 8 \\ 2 & 1 \end{array}\right|$, sont produits : $\left|\begin{array}{c|c} 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{array}\right|$; leur somme est le diviseur : $\left|\begin{array}{c} 39 \\ 56 \end{array}\right|$

Ces [résultats] mêmes $\left|\begin{array}{c|c} 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{array}\right|$ étant multipliés par le montant composé $\left|\begin{array}{c} 13 \\ 64 \end{array}\right|$: $\left|\begin{array}{c|c} 52 & 13 \\ 448 & 512 \end{array}\right|$, et divisés par la somme $\left|\begin{array}{c} 39 \\ 56 \end{array}\right|$, les prix du riz et des haricots : $\left|\begin{array}{c|c} 1 & 7 \\ 6 & 192 \end{array}\right|$ [sont produits].

Les deux parts de riz et de haricots, $\begin{array}{|c|c|}2 & 1\\ 1 & 1\\ \hline\end{array}$, multipliées par la quantité composée $\begin{array}{|c|}13\\ 64\\ \hline\end{array}$, sont produits : $\begin{array}{|c|c|}13 & 13\\ 32 & 64\\ \hline\end{array}$; quand on a divisé par la somme, les parts de riz et de haricots sont obtenues : $\begin{array}{|c|c|}17 & 7\\ 24 & 24\\ \hline\end{array}$

Maintenant, le prix du riz, précédemment [obtenu], est multiplié par quatre puis par seize ; une fois la division par le dénominateur effectuée, sont obtenus : 10 *kākiṇī*, 13 *varāṭaka* et une fraction de *varāṭaka* : $\begin{array}{|c|}1\\ 3\\ \hline\end{array}$.

Pour le prix des haricots, une fois la division par le dénominateur faite, sont obtenus 2 *kākiṇī*, 6 *varāṭaka* et une fraction de $\begin{array}{|c|}2\\ 3\\ \hline\end{array}$

Si pour une drachme on obtient trois mesures et demi de riz, une mesure de riz vaut donc $\frac{2}{7}$ *de drachme ; de même pour le prix des haricots : une mesure vaut* $\frac{1}{8}$ *de drachme. Deux mesures de riz et une mesure de haricots valent donc :* $\frac{4}{7}+\frac{1}{8}$*, en drachme. Notre acheteur veut dépenser 13* kākiṇī *pour acquérir un mélange composé de riz et de haricots dans un rapport de deux à un. Une drachme valant soixante-quatre* kākiṇī*, le rapport :* $\frac{\frac{13}{64}}{\frac{4}{7}+\frac{1}{8}}$ *représente la proportion qu'il peut obtenir d'un tel mélange ; si on multiplie ce rapport par le prix de deux mesures de riz, on obtient le prix du riz dans le mélange et, de même, si on multiplie ce rapport par deux — puisqu'il y a deux mesures de riz pour une de haricots — on obtient la part — volume ou poids — du riz dans le mélange acheté. On peut vérifier les calculs à la fin : une* kākiṇī *valant vingt* varāṭaka*, la somme du prix du riz et de celui des haricots fait bien treize* kākiṇī.

Deuxième exemple :

कर्पूरस्य परस्य निष्कयुगलेनैकं पलं प्राप्यते
वैश्यानन्दन चन्दनस्य च पलं द्रम्माष्टभागेन चेत्।
अष्टांशेन तथागुरोः पलदलं निष्केण मे देहि तान्
भागैरेककषोडशाष्टकमितैर्धूपं चिकीर्षाम्यहम् ॥१०२॥

karpūrasya parasya niṣkayugalenaikaṃ palaṃ prāpyate
vaiśyānandana candanasya ca palaṃ drammāṣṭabhāgena
[cet |

aṣṭāṃśena tathāguroḥ paladalaṃ niṣkeṇa me dehi tān
bhāgair ekakaṣoḍaśāṣṭakamitair dhūpaṃ cikīrṣāmy
[aham || 102 ||

Ô joie des commerçants ! Si pour un couple de niṣka *on obtient un* pala *de camphre supérieur et pour un huitième de drachme, un* pala *de santal et pour un huitième aussi, un demi-*pala *de bois d'Agar, donne-moi pour un* niṣka *de ces [ingrédients], dans des proportions de un, seize et huit, [car] je veux fabriquer un encens || 102 ||*

Ô joie des commerçants ! Pour deux *niṣka*, on obtient un *pala* du meilleur camphre, et pour un huitième de drachme, un *pala* de santal et pour un huitième de drachme aussi, un demi-*pala* de bois d'Agar ; connaissant ainsi leur prix, donne-[moi], pour un *niṣka*, **tān** du camphre, du santal et du bois d'Agar, dans les proportions de un, seize et huit, car je désire fabriquer un encens.

On pose :

1	16	8
32	1	1
	8	8

, montant composé 16.

Chaque prix :

32	1	1
1	8	8

, est multiplié par chacune des proportions 1, 16 et 8 :

32	2	1
1	1	1

, puis divisé par les mesures,

1	1	1
1	1	2

:

32	2	2
1	1	1

. Leur somme est le diviseur : 36.

À nouveau, ces derniers, placés séparément, sont multipliés par le montant composé 16 : 512, 32, 32 et divisés par la somme ; les prix des portions de camphre etc. sont obtenus :

14	8	8
2	9	9
9		

Maintenant, les proportions 1, 16 et 8 sont multipliées par le montant composé : 16, 256 et 128 et divisées par la somme 36 ; les [poids] en *pala* du camphre etc. sont obtenus :

4	64	32
9	9	9

Comme précédemment, le calcul des prix en drachmes etc., de même que pour le poids aussi, le calcul en *pala*, *karṣa*, etc. doivent être connus.

Ainsi finissent les règles concernant les achats.

Pour le calcul, le commentateur exprime tous les prix en drachmes ; un niṣka *valant seize drachmes, on obtient bien trente-deux pour le prix du camphre et seize pour la somme que l'acheteur accepte de donner : le « montant composé ».*
Pour la disposition initiale des calculs, le commentateur met sur la première ligne de son tableau, les proportions du mélange qu'il désire obtenir avec, au-dessous, le prix du marché de l'unité de poids.
La notation ne permet pas de distinguer les valeurs entières des prix (32) des valeurs fractionnaires (1/8) et donne l'illusion que le tableau comporte trois lignes.
On notera aussi que le tableau donnant les résultats, les prix de chaque ingrédient par colonne, ne présente pas ces résultats de manière logique. Ainsi, la première colonne, le prix camphre : $\begin{array}{|c|}14\\2\\9\\\hline\end{array}$*, est le résultat de la division* $\dfrac{512}{36} = 14 + \dfrac{2}{9}$*. De même, les deux dernières colonnes donnent les prix du santal et du bois d'Agar, soit le résultat de la division :* $\dfrac{32}{36} = \dfrac{8}{9}$*. Le tableau devrait être écrit :* $\begin{array}{|c|c|c|}14&0&0\\2&8&8\\9&9&9\\\hline\end{array}$
Comme dans l'exemple précédent, on établit le prix de chacune des parts en multipliant chaque prix « du marché » par le nombre qui mesure la proportion que l'on désire acquérir, puis en divisant par les mesures données comme référence pour chaque ingrédient — un pala *pour le camphre et le santal, un demi-*pala *pour le bois d'Agar — ; la somme est alors le prix que l'on aurait à payer si on achetait les quantités données en référence. En multipliant chaque part que l'on veut acquérir par le rapport entre le prix offert, seize drachmes, et le le prix de référence, trente-six drachmes, on obtient le prix de chaque ingrédient.*
En multipliant par ce même rapport chaque nombre mesurant les proportions, on obtient le poids de chaque composant du parfum.

Maintenant une formule :

नरघ्नदानोनितरत्नशेषैर्
इष्टे हृते स्युः खलु मूल्यसंख्याः।
शेषैर्हृते शेषवधे पृथक्स्थैर्
अभिन्नमूल्यान्यथ वा भवन्ति ॥१०३॥

naraghnadānonitaratnaśeṣair
iṣṭe hṛte syuḥ khalu mūlyasaṃkhyāḥ |

śeṣair hṛte śeṣavadhe pṛthaksthair
abhinnamūlyaany atha vā bhavanti || 103 ||

Une quantité choisie étant divisée par les restes [du nombre] de joyaux [une fois] diminués des dons [faits autant de] fois [qu'il y a] de personnes, on aura alors les comptes des valeurs. Si le produit des restes est divisé par chacun d'eux pris séparément, on obtient des valeurs non-fractionnaires || 103 ||

Voici la signification. **Narāḥ** de riches personnes ; le nombre de dons est multiplié par le nombre de celles-ci et les nombres de joyaux doivent être diminués de ce [résultat] ; une quantité arbitraire sera [alors] divisée par chacun des restes, on obtient les comptes des valeurs.

Mais ces comptes de valeur, parce que dépendant d'un [nombre] arbitraire, sont parfois entiers ou non-entiers, à cause du caractère fractionnaire des restes.

Il est dit : « **athavā** » pour calculer des valeurs entières. Le produit de ces restes pris séparément — la quantité [obtenue] une fois qu'ils ont été multipliés l'un par l'autre — étant divisé par chacun des restes, on obtient des valeurs entières.

Exemple :

माणिक्याष्टकमिन्द्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतं
सद्वज्राणि च पञ्च रत्नवणिजां येषां चतुर्णां धनम्।
संगस्नेहवशेन ते निजधनाद्दत्वैकमेकं मिथो
जातास्तुल्यधनाः पृथग्वद सखे तद्रत्नमूल्यानि मे ॥१०४॥

māṇikyāṣṭakam indranīladaśakaṃ muktāphalānāṃ śataṃ
sadvajrāṇi ca pañca ratnavaṇijāṃ yeṣāṃ caturṇāṃ dhanam |
saṃgasnehavaśena te nijadhanād datvaikam ekaṃ mitho
jātās tulyadhanāḥ pṛthag vada sakhe tadratnamūlyāni
[me || 104 ||

Quatre joailliers, dont la fortune [s'élève à] huit rubis, dix saphirs, une centaine de perles et cinq beaux diamants, s'étant mutuellement donné à chacun un [joyau] prélevé sur leur fortune personnelle au cours d'une rencontre amicale, obtiennent [ainsi] une même fortune ; dis-moi pour chacun, ô ma chère, la valeur de leurs joyaux || 104 ||

La fortune de l'une de ces riches personnes est de huit rubis, d'une autre, de dix saphirs, d'une autre, de cent perles, d'une autre, de cinq diamants ; au cours d'une rencontre amicale, ces quatre-là — quatre amis — dont la fortune est ainsi comptée, s'étant **mithaḥ** mutuellement donné, sur leur fortune propre, un rubis etc. à chacun, obtiennent une fortune identique, dis-moi alors pour chacun, ô ma chère à la belle intelligence, la valeur de leurs diamants etc.

On pose : rubis 8, saphirs 10, perles 100, diamants 5, personnes 4.

Puisque un est donné à chacun, le nombre de don, 1, est multiplié par le [nombre] de personnes 4 ; [on obtient] le nombre de dons : 4. Les nombres de joyaux sont diminués de ce dernier [résultat], les restes sont : rubis 4, saphirs 6, perles 96, diamants 1 ; une quantité arbitraire étant divisée par ceux-ci, on aura les valeurs.
La [quantité] arbitraire imaginée, 50, est divisée séparément, des valeurs fractionnaires sont produites : rubis $\begin{array}{|c|}12\\2\\4\\\hline\end{array}$, saphirs $\begin{array}{|c|}8\\1\\3\\\hline\end{array}$, perles $\begin{array}{|c|}25\\48\\\hline\end{array}$, diamants $\begin{array}{|c|}50\\0\\\hline\end{array}$

À cause du caractère fractionnaire de ces derniers, pour obtenir des nombres non-fractionnaires, une [quantité] arbitraire est imaginée avec discernement : 96. Ainsi, des valeurs entières sont obtenues : rubis 24, saphirs 16, perles 1, diamants 96. Une fois les dons réciproques [effectués], les fortunes identiques sont ainsi produites : 233.
Ou bien, pour calculer des valeurs entières par elles-mêmes, le produit des restes, 2 304, étant divisé séparément par les restes, on obtient des [valeurs] entières : 576, 384, 24, 2 304. À cause du don mutuel de un à chacun, les fortunes identiques sont produites : 5 592.

Appelons A, B, C et D ces quatre joailliers et r, s, p et d le nombre de rubis, saphirs, perles et diamants. Après l'échange des dons, la fortune de chacun s'élève à sa fortune initiale diminuée de trois et augmentée d'une unité de chacun des autres joyaux :

$$\begin{array}{lll} A & \textit{possède :} & 5r + 1s + 1p + 1d \\ B & & 1r + 7s + 1p + 1d \\ C & & 1r + 1s + 97p + 1d \\ D & & 1r + 1s + 1p + 2d \end{array}$$

Chacun possède maintenant la même fortune ; si on soustrait la fortune de B de celle de A, celle de C de celle de B et celle de D de celle de C, on obtient la suite d'égalité suivante :

$$4r = 6s = 96p = 1d$$

Où l'on reconnaît la suite de nombres : $4,\ 6,\ 96,\ 1$*, obtenue en appliquant la première prescription de la règle.*

Il est maintenant impossible de savoir le prix de chaque pierre sans connaître au moins le prix de l'une d'entre elles ; c'est ce que nous indique la règle en préconisant de choisir arbitrairement un nombre que l'on divisera par chacun des nombres de la suite obtenue. Cela revient à choisir un prix pour le diamant ; le commentateur choisit 50 *:*

$$r = \frac{50}{4} = 12 + \frac{2}{4}\,; \quad s = \frac{50}{6} = 8 + \frac{1}{3}\,; \quad p = \frac{96}{50} = \frac{25}{48}\,; \quad d = \frac{50}{1} = 50$$

On remarquera la notation employée qui ne représente pas des fractions, sauf pour le troisième tableau, mais le quotient de la division par 50 *sur la première ligne et le reste — fractionnaire pour les deux premiers — au-dessous et le dernier. Un seul manuscrit (-ka) choisit une représentation par des fractions.*

La règle nous enseigne comment n'obtenir que des valeurs entières — ce qui n'est pas le cas si on choisit 50 *—, mais, avant d'appliquer la règle telle qu'elle est énoncée, le commentateur nous dit qu'il est possible d'y parvenir en choisissant judicieusement le nombre arbitraire, et il choisit* 96 *qui est le plus petit multiple commun aux nombres* $4,\ 6,$ *et* 96 *; ceci semble indiquer que, même si aucun développement arithmétique de cette notion n'est apparente, ni ici, ni dans le chapitre sur la réduction des fractions, cette notion était connue des mathématiciens indiens.*

La règle nous dit de choisir comme nombre arbitraire, le produit de tous les nombres de la suite, ce qui est évidemment un moyen simple de construire un multiple commun et donc d'obtenir des entiers comme résultat.

[Alliages]

Une formule en une strophe concernant le calcul sur l'or :

सुवर्णवर्णाहतियोगराशौ
स्वर्णैक्यभक्ते कनकैक्यवर्णः।
वर्णो भवेच्छोधितहेमभक्ते
वर्णोद्धृते शोधितहेमसंख्या ॥१०५॥

suvarṇavarṇāhatiyogarāśau
svarṇaikyabhakte kanakaikyavarṇaḥ |
varṇo bhavec chodhitahemabhakte
varṇoddhṛte śodhitahemasaṃkhyā || 105 ||

La quantité somme des produits [du poids] de l'or et de son titre, étant divisée par la somme [des poids] d'or, [on obtient] le titre de l'alliage d'or ; divisé par [le poids] d'or raffiné, on aura le titre ; divisé par le titre, le compte [du poids] de l'or raffiné || 105 ||

Soit des poids d'ors respectivement de finesses diverses, [ces poids] d'or pur, multipliés par leurs titres respectifs — **suvarṇavarṇāhatiḥ** — la quantité qui est leur somme étant divisée **svarṇaikyena** par [le poids de] l'alliage de ces ors, est le titre de l'alliage d'or.

Maintenant, dans le cas d'un raffinage, de même, la quantité somme des produits [des poids] d'or par leurs titres étant divisée par le poids de [l'or] raffiné est le titre de [l'or] raffiné ; et aussi, étant divisée par le titre de [l'or] raffiné, on a le poids total de l'or raffiné.

Dans cette partie, nous avons traduit, par commodité, le mot sanskrit « varṇa » *qui désigne la pureté de l'or par « titre » ou « carat ». Il semble que le* « varṇa » *soit plutôt une sorte de titre, d'après les règle qui suivent ; aujourd'hui le titre d'un alliage est le rapport entre le poids de métal pur — l'or dans ce qui suit — et le poids de l'alliage qui le contient. C'est donc un nombre inférieur à un, ce qui n'est pas le cas dans les exemples donnés mais l'usage qui en est fait est le même : si on désigne par t le titre, par P_o le poids de l'or pur et par P_a le poids de l'alliage, le rapport entre ces trois nombres est le suivant :*

$$P_o = t \times P_a$$

La règle précédente nous donne trois usages de cette formule. Si on veut connaître le titre d'un alliage de trois lingots (par exemple), chacun d'un titre différent, en multipliant le poids de chaque lingot par son titre, on obtient le poids d'or pur que chaque lingot contient ; la somme de ces produits est le poids d'or pur contenu dans l'ensemble des trois lingots. Si on divise cette somme par le poids total du lingot obtenu par l'alliage des trois — la somme des poids des trois lingots — on obtient le titre de l'alliage. Soit trois lingots de titres respectifs t_1, t_2 et t_3 et de poids P_1, P_2 et P_3, le poids d'or pur contenu dans chacun est :

$$P_{o1} = t_1 \times P_1\,; \quad P_{o2} = t_2 \times P_2\,; \quad P_{o3} = t_3 \times P_3$$

Le titre de l'alliage est donc :

$$t = \frac{P_{o1} + P_{o2} + P_{o3}}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{t_1 \times P_1 + t_2 \times P_2 + t_3 \times P_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

Si, maintenant, on raffine ce nouveau lingot, alliage des trois, il s'en suit une perte de poids, mais le poids de l'or contenu est toujours le même ; désignant par P_r le poids après raffinage, le titre de l'or obtenu est donc :

$$t_r = \frac{t_1 \times P_1 + t_2 \times P_2 + t_3 \times P_3}{P_r}$$

Si on veut connaître le poids de l'or après raffinage, la même formule est donnée sous cette forme :

$$P_r = \frac{t_1 \times P_1 + t_2 \times P_2 + t_3 \times P_3}{t_r}$$

Un exemple en deux strophes :

विश्वार्करुद्रदशवर्णसुवर्णमाषा
दिग्वेदलोचनयुगप्रमिताः क्रमेण।
आवर्तितेषु वद तेषु सुवर्णवर्णस्
तूर्णं सुवर्णगणितज्ञ वणिग्भवेत्कः ॥१०६॥
ते शोधनेन यदि विंशतिरुक्तमाषाः
स्युः षोडश द्रविणवर्णमितिस्तदा का।
चेच्छोधितं भवति षोडशवर्णहेम
ते विंशतिः कति तदा तु भवन्ति माषाः ॥१०७॥

viśvārkarudradaśavarṇasuvarṇamāṣā
digvedalocanayugapramitāḥ krameṇa |
āvartiteṣu vada teṣu suvarṇavarṇas
tūrṇaṃ suvarṇagaṇitajña vaṇig bhavet kaḥ || 106 ||
te śodhanena yadi viṃśatir uktamāṣāḥ
syuḥ ṣoḍaśa draviṇa varṇamitis tadā kā |
cec chodhitaṃ bhavati ṣoḍaśavarṇahema
te viṃśatiḥ kati tadā tu bhavanti māṣāḥ || 107 ||

Le poids, en māṣa*, [de lingots] d'or de titres treize, douze, onze et dix sont mesurés respectivement par dix, quatre, deux et quatre ; ceux-ci étant combinés, ô commerçant, toi qui connaît le calcul sur l'or, dis rapidement, quel sera le titre du [lingot] d'or.* || *106* || *Si, par raffinage, lesdits vingt* māṣa *deviennent seize, quelle est alors la mesure du titre de cette richesse ? Si l'or est raffiné au titre de seize, combien alors de* māṣa *ces vingt-là produisent-ils ?* || *107* ||

Viśva treize, **ārka** douze, **rudra** onze, dix, c'est bien connu ; des quantités d'or, dont les titres sont ainsi énoncés, ont respectivement des poids en *māṣa* formulés de cette manière : **diś** dix, **veda** quatre, **locane** deux et **yuga** quatre.

Voici la signification. Dix *māṣa* d'or à treize carats, quatre *māṣa* à douze carats, deux *māṣa* à onze carats et quatre *māṣa* à dix carats ; de telles quantités d'or **āvartiteṣu** étant combinées en une seule, quel est le titre de l'or [résultant] ? Ô toi qui connais le calcul sur l'or, dis-le rapidement.

Signification de la deuxième strophe. Maintenant, lesdits vingt *māṣa*, s'il y a un raffinage et si seize *māṣa* sont obtenus, quel sera alors le titre ? Et aussi, par le raffinage de cette [quantité], si on obtient seize carats, que deviennent alors, par suite de la diminution, ces vingt *māṣa* ?

On pose :

13	12	11	10
10	4	2	4

Le produit [des poids] de l'or : 10, 4, 2 et 4, et des titres : 13, 12, 11 et 10, est obtenu : 130, 48, 22 et 40 ; leur somme est 240, une fois la division par la somme [des poids] d'or effectuée, le titre de l'alliage est obtenu : 12.
Si, après raffinage, ces derniers [lingots] ont [un poids] de seize *māṣa*, quel sera leur titre ? 15 carats sont obtenus avec seize parts.
Si ce même or a un titre de seize, alors quel est [le poids] en *māṣa* ? 15 *māṣa* sont obtenus.

Une formule pour connaître un titre inconnu :

स्वर्णैक्यनिघ्नाद्युतिजातवर्णात्
सुवर्णतद्वर्णवधैक्यहीनात्।
अज्ञातवर्णाग्निजसंख्ययाप्तम्
अज्ञातवर्णस्य भवेत्प्रमाणम् ॥१०८॥

svarṇaikyanighnād yutijātavarṇāt
suvarṇatadvarṇavadhaikyahīnāt |
ajñātavarṇāgnijasaṃkhyayāptam
ajñātavarṇasya bhavet pramāṇam || 108 ||

À partir du titre de l'alliage obtenu, multiplié par la somme [des poids] de l'or et diminué de la somme des produits [des poids] *de l'or par leurs titres respectifs, le quotient par le compte [du poids] de l'or dont le titre est inconnu, sera la mesure du titre inconnu* || *108* ||

Le titre issu de l'alliage est multiplié par la somme [des poids] de l'or et cela même doit être diminué de la somme des produits [des poids] de l'or et des titres ; à partir de ce dernier [résultat], on a le titre inconnu, quotient du compte [de poids] **agnijam** de l'or dont le titre est inconnu.

Exemple :

दशेशवर्णा वसुनेत्रमाषा
अज्ञातवर्णस्य षडेतदैक्ये।
जातं सखे द्वादशकं सुवर्णम्
अज्ञातवर्णस्य वद प्रमाणम् ॥१०९॥

daśeśavarṇā vasunetramāṣā
ajñātavarṇasya ṣaḍ etadaikye |
jātaṃ sakhe dvādaśakaṃ suvarṇam
ajñātavarṇasya vada pramāṇam || 109 ||

Soit huit et deux māṣa *de titres dix et onze et six de titre inconnu : si on compose ceux-ci, de l'or au [titre] douze est obtenu, ô ma chère ! Dis la mesure du titre inconnu !* || *109* ||

Vasumāṣam huit *māṣa* d'or de titre dix et **netramāṣam** deux *māṣa* **īśavarṇam** de titre onze et six *māṣa* dont le titre n'est pas connu ; par un alliage, un titre de douze est obtenu, dis [la valeur] du titre inconnu.

On pose :

10	11	0
8	2	6

La somme [des poids] d'or 8, 2 et 6, est 16 ; le titre issu de l'alliage, 12, est multiplié : 192. Les deux produits [des poids] d'or et de leurs titres sont 80 et 22, la somme est 102. Le produit obtenu est diminué de cette dernière, il reste 90. Le quotient par le compte, 6, [du poids de l'or] de titre inconnu [est effectué] : le titre inconnu est produit : 15.

On connaît le poids total de l'alliage des trois ors : $8+2+6$ *et son titre :* 12. *La quantité d'or pur contenu dans l'alliage est donc son poids multiplié par son titre :* $16\times 12 = 192$. *Comme on connaît le poids d'or pur contenu dans deux des lingots :* $8 \times 10 = 80$ *et*

$2 \times 11 = 22$, *le poids d'or pur contenu dans le troisième lingot est donc :* $192 - 102 = 90$. *Le poids de ce dernier lingot étant six, son titre est donc* $90/6 = 15$.

Ensuite, une formule pour connaître [un poids] d'or inconnu :

स्वर्णैक्यनिघ्नो युतिजातवर्णः
स्वर्णघ्नवर्णैक्यवियोजितोऽसौ।
अहेमवर्णाग्निजयोगवर्ण-
विश्लेषभक्तोऽविदिताग्निजं स्यात् ॥११०॥

svarṇaikyanighno yutijātavarṇaḥ
svarṇaghnavarṇaikyaviyojito 'sau |
ahemavarṇāgnijayogavarṇa-
viśleṣabhakto 'viditāgnijaṃ syāt || 110 ||

Le titre issu de l'alliage, multiplié par la somme [des poids] de l'or, est diminué de la somme des produits [des poids) de l'or et des titres ; ce dernier [résultat] divisé par le reste [de la différence] entre le titre de l'or inconnu et le titre de l'alliage sera [le poids] de l'or que l'on ne connaît pas || 110 ||

Le titre issu de l'alliage est multiplié par la somme [des poids] de l'or et cela même **viyojitaḥ** doit être diminué de la somme des produits [des poids] de l'or et des titres [puis] divisé **viśleṣeṇa** par la différence du titre de l'or inconnu et du titre de l'alliage, on obtient [le poids] **agnijam** — né du feu — de l'or.

Agnija, en vérité, est l'or comme cela a été dit par Bhaṭṭa Halāyudha : « Un nom du feu est *hiraṇyaretas* : celui dont la semence est l'or ; ainsi ce qui est issu du feu doit être l'or. »

Exemple :

दशेन्द्रवर्णा गुणचन्द्रमाषाः
किं चित्तथा षोडशकस्य तेषाम्।
जातं युतौ द्वादशकं सुवर्णं
कतीह षोडशवर्णमाषाः ॥१११॥

daśendravarṇā guṇacandramāṣāḥ
kiṃ cit tathā ṣoḍaśakasya teṣām |
jātaṃ yutau dvādaśakaṃ suvarṇaṃ
katīha te ṣoḍaśavarṇamāṣāḥ || 111 ||

Soit trois et un māṣa *de titres dix et quatorze ainsi qu'un certain [poids de titre] seize ; dans leur alliage un titre de douze est obtenu, combien y a-t-il alors de* māṣa *de titre seize ? || 111 ||*

Trois — évalués par *guṇa* — *māṣa*, de titre dix ; ensuite, un — évalué par *candra* — *māṣa*, quatorze — évalués *indra* — carats ; ensuite, un certain poids inconnu **ṣoḍaśakasya** de titre seize. Dans l'alliage de trois telles [quantités], de l'or de titre douze est obtenu, combien avait-on de *māṣa* de titre seize ? La question est ainsi posée.

On pose :

10	14	16
3	1	0

, titre de l'alliage obtenu : 12.

Le titre issu de l'alliage, 12, multiplié par la somme [des poids] d'or, 4 est 48. **Viyojitaḥ** il est diminué de 44, somme de ces deux : les titres multipliés par [leur poids] d'or respectifs 30 et 14, il reste 4 ; puis, quand la division par la différence 4 des deux — le titre de [la quantité] d'or inconnue, 16, et le titre de l'alliage, 12 —, est effectuée, le poids de l'or inconnu est obtenu : 1 *māṣa*.

Le problème est de trouver le poids d'un lingot de titre connu, qui entre dans un alliage avec deux autres lingots dont on connaît le poids et le titre ; on connaît également le titre de l'alliage.
La méthode est la même que pour les problèmes précédents : évaluer la mesure de la quantité d'or pur ; celle-ci est la même si on la calcule pour le lingot final : $(3+1+x)\times 12$ *ou si on la calcule à partir de chaque lingot :* $3 \times 10 + 1 \times 14 + x \times 16$.
De cette égalité on tire : $(16-12)\,x = 4 \times 12 - 30 - 14 = 4$ *(x est le poids inconnu).*

Une formule du même genre :

साध्येनोनोऽनल्पवणी विधेयः
साध्यो वर्णः स्वल्पवणीनितश्च ।
इष्टक्षुण्णे शेषके स्वर्णमाने
स्यातां स्वल्पानल्पयोर्वर्णयोस्ते ॥ ११२ ॥

sādhyenono 'nalpavarṇo vidheyaḥ
sādhyo varṇaḥ svalpavarṇonitaś ca |
iṣṭakṣuṇṇe śeṣake svarṇamāne
syātāṃ svalpānalpayor varṇayos te || 112 ||

Le titre le plus grand doit être diminué du titre de l'alliage de deux et le titre égal au titre de l'alliage de deux diminué du titre le plus petit, les deux restes, multipliés par un [nombre] arbitraire, seront les deux mesures [des poids] d'or, respectivement ceux des titres le plus petit et le plus grand || 112 ||

Quand l'alliage de deux poids inconnus de deux ors est effectué, alors le titre qui est celui de l'alliage issu des deux ors a pour nom technique : « titre *sādhya* ». **Analpaḥ** le titre le plus grand d'entre les deux doit être diminué du titre *sādhya*, puis, le titre *sādhya* doit être diminué du titre le plus petit. Les deux restes, multipliés par une quantité arbitraire, sont les deux poids qui mesurent respectivement [le poids] de l'or de titre le plus petit et de titre le plus grand.

Dans cette règle on ne connaît que les titres de deux lingots et le titre de l'alliage ; celui-ci étant la moyenne pondérée des deux titres, sa valeur se trouve être nécessairement comprise entre les deux, d'où le « croisement » : on diminue le titre le plus grand du titre de l'alliage, on retire du titre de l'alliage le plus petit.
Les poids sont inconnus mais suivent la loi qui lie les titres et les poids ; soit P_1 le poids de l'or de titre t_1 et P_2 le poids de l'or de titre t_2 et supposons $t_1 > t_2$, le titre t_s de l'alliage est, nous l'avons vu :

$$t_s = \frac{t_1 \times P_1 + t_2 \times P_2}{P_1 + P_2}$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$t_1 \times P_1 + t_2 \times P_2 = t_s \times (P_1 + P_2) \quad \text{ou} \quad (t_1 - t_s) \times P_1 = (t_s - t_2) \times P_2$$

Le rapport des deux poids est constant et le poids P_2 est proportionnel à la différence $t_1 - t_s$ tandis que le poids P_1 est proportionnel à l'autre différence $t_s - t_2$ avec le même facteur de proportionnalité, d'où le nombre arbitraire qui multiplie les deux différences.

Exemple :

हाटकगुटिके षोडश-
दशवर्णे तद्युतौ सखे जातम् ।
द्वादशवर्णं स्वर्णं
ब्रूहि तयोः स्वर्णमाने मे ॥ ११३ ॥

hāṭakaguṭike ṣoḍaśa-
daśavarṇe tadyutau sakhe jātam |
dvādaśavarṇaṃ svarṇaṃ
brūhi tayoḥ svarṇamāne me || 113 ||

Soit deux billes d'or dont les titres sont seize et dix ; dans leur alliage, ô ma chère, de l'or de titre douze est obtenu. Dis-moi la mesure [des deux poids] de ces deux [ors] || *113* ||

Soit deux billes **hāṭakasya** d'or, l'une de titre seize et l'autre de titre dix ; **yutau** si on fait un alliage des deux, de l'or de titre douze est produit. Ô ma chère ! dis-moi **māne** les deux poids de chacune des deux billes.

On pose les deux titres : 16 et 10 ; le titre *sādhya* : 12.

Le titre **analpaḥ** le plus grand, 16, est diminué du titre *sādhya*, 12 ; il reste 4. Puis, le titre *sādhya*, 12, est diminué du titre le plus petit, 10 ; il reste 2. Ces deux restes, 4 et 2, sont les mesures respectivement du [poids] le plus petit et du plus grand. Si ces deux mesures sont, dans l'ordre, multipliées par un, [on obtient :]

16	10
2	4

, multipliés par deux :

16	10
4	8

, réduits de moitié :

16	10
1	2

Ce calcul sur l'or doit être toujours ainsi conjecturé.