



Minoration de la hauteur canonique pour les modules de Drinfeld à multiplications complexes

Hugues Bauchère

► To cite this version:

Hugues Bauchère. Minoration de la hauteur canonique pour les modules de Drinfeld à multiplications complexes. 2014. hal-01052513

HAL Id: hal-01052513

<https://hal.science/hal-01052513>

Preprint submitted on 5 Aug 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MINORATION DE LA HAUTEUR CANONIQUE POUR LES MODULES DE DRINFELD À MULTIPLICATIONS COMPLEXES

par

Hugues Bauchère

Résumé. — Soient K une extension finie de $\mathbb{F}_q(T)$, L/K une extension galoisienne de groupe de Galois G et E le sous-corps de L fixé par le centre de G . On suppose qu'il existe une place finie v de K telle que les degrés locaux de E/K au-dessus de v soient bornés. Soit ϕ un module de Drinfeld à multiplications complexes. On donne une minoration effective de la hauteur canonique associée à ϕ sur L privé des points de torsion de ϕ . Dans le cadre des corps de nombres, ce problème a été résolu par F. Amoroso, S. David et U. Zannier dans [ADZ11].

Abstract (Lower Bound for the Canonical Height for Drinfeld Modules with Complex Multiplication)

Let K be a finite extension of $\mathbb{F}_q(T)$, let L/K be a Galois extension with Galois group G and let E be the subfield of L fixed by the center of G . Assume that there exists a finite place v of K such that the local degrees of E/K above v are bounded. Let ϕ be a Drinfeld module with complex multiplication. We give an effective lower bound for the canonical height of ϕ on L outside the torsion points of ϕ . In the number field case, this problem was solved by F. Amoroso, S. David and U. Zannier in [ADZ11].

Sommaire

Introduction	2
1. Préliminaires	5
1.1. Notations générales	5
1.2. Places et degrés	5

Classification mathématique par sujets (2000). — 11G09 (11G50 11R37).
Mots clefs. — Bogomolov, module de Drinfeld, hauteur canonique, minoration.

1.3. Modules de Drinfeld	6
1.4. Endomorphismes d'un module de Drinfeld	7
1.5. Points de torsion et idéaux	8
1.6. Théorie de Hayes	9
1.7. Hauteurs	13
2. Démonstration du théorème 2	16
2.1. Inégalités métriques	17
2.2. Minorations de la hauteur canonique	22
2.3. Principe des tiroirs dans $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m})^\times$	27
2.4. Démonstration du théorème 2	32
3. Démonstration du théorème 1	37
Remerciements	40
Références	40

Introduction

Soient $A := \mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes en l'indéterminée T et à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_q$, k son corps des fractions et $\bar{k}$ une clôture algébrique de k .

Soit ϕ un A -module de Drinfeld défini sur $\bar{k}$ et de rang r . Dans [Den92], L. Denis définit la hauteur canonique $\hat{h}_\phi : \bar{k} \rightarrow \mathbb{R}_+$ associée à un A -module de Drinfeld ϕ . Il montre que cette hauteur s'annule uniquement sur les points de torsion de ϕ .

Soit L/k une extension de k . Par analogie avec la terminologie utilisée dans [BZ01], on dira que L a la propriété (B, ϕ) s'il existe une constante strictement positive qui minore $\hat{h}_\phi$ sur L privé des points de torsion de ϕ .

S. David et A. Pacheco ont montré dans [DP08] que pour tout module de Drinfeld ϕ , si K/k est une extension finie, alors la clôture abélienne de K avait la propriété (B, ϕ) . Dans cet article nous généralisons, dans le cadre des modules de Drinfeld à multiplications complexes, ce résultat (on renvoie au §1 pour les définitions précises des notions utilisées).

Théorème 1. — *Soit ϕ un A -module de Drinfeld défini sur $\bar{k}$ et à multiplications complexes. Soient K/k une extension finie et L/K une extension galoisienne (finie ou infinie) de groupe de Galois G . Soient H un sous-groupe du centre de G et $E \subseteq L$ le sous-corps fixé par H . Soit $d_0 > 0$ un entier. On suppose qu'il existe une place finie v de K telle que pour toute place w de E au-dessus de v , on ait $[E_w : K_v] \leq d_0$. Alors L*

a la propriété (B, ϕ) . Plus précisément, il existe une constante $c_0 > 0$ qui ne dépend que de ϕ telle que pour tout $\alpha \in L$ non de torsion pour ϕ , on ait:

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c_0 \deg v d_0^2 [K:k]}.$$

On illustre la tour d'extensions que nous venons de décrire par le diagramme suivant:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ G \mid \end{array} \begin{array}{c} L \\ \mid \\ E \\ \mid \\ K \\ \mid \\ k \end{array} \begin{array}{c} < \mathcal{Z}(G) \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Notons que lorsque l'extension L/K est finie, alors L a la propriété (B, ϕ) d'après le théorème de Northcott (*cf.* théorème 1.8, point 4).

Le théorème 1 est donc surtout intéressant lorsque l'extension galoisienne L/K est infinie.

Remarquons que ce théorème est l'analogie pour les modules de Drinfeld à multiplications complexes d'un résultat obtenu par F. Amoroso, S. David et U. Zannier dans [ADZ11] dans le cas du groupe multiplicatif. Dans ce cadre, même pour une extension abélienne L d'un corps de nombres K , le fait d'obtenir une minoration dépendant seulement du degré $[K : \mathbb{Q}]$ n'était pas possible à l'aide des techniques de [AZ00]. Pour ce faire les auteurs ont dû modifier leur méthode (*cf.* [AZ10]), notamment pour ne pas utiliser le théorème de Kronecker-Weber. Pour ce qui est des modules de Drinfeld, la minoration obtenue dans [DP08] n'est pas explicite. Dans le cadre de modules CM, leur méthode permettrait probablement d'obtenir une minoration dépendant seulement du degré $[K : k]$. Ici nous utilisons, comme dans [ADZ11], la méthode de [AZ10], ce qui nous permet d'obtenir en particulier, dans le cadre des modules CM, une version du théorème de [DP08] avec une constante dépendant seulement du degré $[K : k]$:

Corollaire 1. — *Soit ϕ un A -module de Drinfeld défini sur $\overline{k}$ à multiplications complexes. Soient K/k une extension finie et K^{ab} la clôture abélienne de K . Alors K^{ab} a la propriété (B, ϕ) . Plus précisément, il existe une constante $c_0 > 0$ qui ne dépend que de ϕ telle que pour tout $\alpha \in K^{\text{ab}}$ non de torsion pour ϕ , on ait:*

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c_0 [K:k]^2}.$$

Démonstration. — On applique le théorème 1 dans le cas $L = K^{\text{ab}}$ en prenant $H = G$. Alors $E = K$, on peut ainsi prendre $d_0 = 1$ et choisir n'importe quelle place finie et non triviale de K . Prenons une place finie v de K telle que $\deg v \leq [K : k]$ (une telle place existe, il suffit par exemple de prendre une place de K au-dessus de la place en T de k). D'après le théorème 1, il existe une constante $c_0 > 0$ ne dépendant que de ϕ telle que pour tout $\alpha \in K^{\text{ab}}$ non de torsion pour ϕ , on a :

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c_0 [K:k]^2},$$

ce qui permet de conclure. $\square$

S'il existe une place finie v de K telle que pour toute place w de L au-dessus de v , on ait $[L_w : K_v] \leq d_0$ pour un certain entier d_0 , alors, en considérant le sous-groupe trivial du centre du groupe de Galois de l'extension L/K , on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2. — *Soit ϕ un A -module de Drinfeld défini sur $\overline{k}$ et à multiplications complexes. Soient K/k une extension finie et L/K une extension galoisienne de groupe de Galois G . Soit $d_0 > 0$ un entier. S'il existe une place finie v de K telle que pour toute place w de L au-dessus de v , on ait $[L_w : K_v] \leq d_0$, alors L a la propriété (B, ϕ) . Plus précisément, il existe une constante $c_0 > 0$ qui ne dépend que de ϕ telle que pour tout $\alpha \in L$ non de torsion pour ϕ , on ait :*

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c_0 \deg v d_0^2 [K:k]}.$$

Afin de démontrer le théorème 1, nous aurons besoin de façon cruciale d'une congruence (un "relèvement du Frobenius", cf. proposition 1.6 ci-après). Celle-ci n'étant disponible que pour les modules de Drinfeld de signe normalisé (cf. §1.6 pour la définition), nous nous ramènerons au cas de modules de Drinfeld de signe normalisé. Nous nous ramènerons également au cas d'extensions finies. Plus précisément, nous déduirons le théorème 1 du théorème suivant :

Théorème 2. — *Soient F/k une extension CM finie, $\mathcal{O}_F$ son anneau d'entiers, d le degré sur $\mathbb{F}_q$ de l'unique place de F au-dessus de $\infty = \frac{1}{T}$ et ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé. Soient K/k une extension finie telle que ψ soit défini sur K et L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois G . Soient H un sous-groupe du centre de G et $E \subseteq L$ le sous-corps fixé par H . Soient $d_1 > 0$ un entier et v une place finie de K . On suppose que pour toute place w de E au-dessus*

de v , on ait $[E_w : K_v] \leq d_1$. Alors il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 \geq 1$ qui ne dépendent que de ψ telles que pour tout $\alpha \in L$ non de torsion pour ψ , on ait:

$$\widehat{h}_\psi(\alpha) \geq \frac{q^{-c_1 \deg v d_1^2 [K:k]}}{c_2 d_1^{q^d-1} [K:k]^{q^r}}.$$

Le plan de l'article est le suivant. Au §1, nous rassemblons les préliminaires nécessaires sur les corps de fonctions en caractéristique positive, sur les modules de Drinfeld et sur leur hauteur canonique. Au §2, on démontre le théorème 2. Enfin, au §3, on en déduit le théorème 1.

1. Préliminaires

1.1. Notations générales. —

Soit p un nombre premier et q une puissance de p . On considère $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments, $A := \mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ en l'indéterminée T et k le corps des fractions de A . Soit $a \in A$, on note $\deg_T a$ le degré de a en tant que polynôme en T .

Soient ∞ la place en $\frac{1}{T}$ et $k_\infty := \mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$ le corps des séries de Laurent sur $\mathbb{F}_q$, c'est un complété de k pour la valuation $\frac{1}{T}$ -adique $v_\infty = -\deg_T$. On fixe $\bar{k}_\infty$ une clôture algébrique de k_∞ et $\mathbb{C}_\infty$ un complété de $\bar{k}_\infty$ pour la valuation v_∞ que l'on a étendue naturellement à $\bar{k}_\infty$. Ensuite, on normalise sur $\mathbb{C}_\infty$ la valeur absolue associée à la valuation v_∞ en posant $|\cdot|_\infty := q^{-v_\infty(\cdot)}$. On note respectivement $\bar{k}$ la fermeture algébrique de k dans $\mathbb{C}_\infty$ et $\bar{\mathbb{F}}_q$ celle de $\mathbb{F}_q$ dans $\mathbb{C}_\infty$.

Soit K/k une extension finie, on désigne par $[K:k]$ le degré de cette extension, par $\mathcal{O}_K$ la fermeture intégrale de A dans K , par $\bar{K}$ la fermeture algébrique de K dans $\mathbb{C}_\infty$ et par K_∞ le complété de K dans $\mathbb{C}_\infty$ pour la valuation v_∞ .

Si L est une extension galoisienne de K , on note $\text{Gal}(L/K)$ son groupe de Galois.

Si E est un ensemble, on note $\#E$ son cardinal.

1.2. Places et degrés. —

Soient K une extension finie de k et $\mathcal{M}_K$ l'ensemble des places non triviales de K . Si $v \in \mathcal{M}_K$, on note $v : K \mapsto \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation associée et $|\cdot|_v := q^{-v(\cdot)}$ la valeur absolue normalisée associée. On note également $\mathcal{O}_v := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ son anneau de valuation, $\mathfrak{m}_v := \{x \in K \mid v(x) > 0\}$ son idéal maximal, $\mathbb{F}_v := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ son corps résiduel et $\deg v := [\mathbb{F}_v : \mathbb{F}_q]$ son degré sur $\mathbb{F}_q$.

Soit L une extension finie de K . Si w est une place de L au-dessus de v (ce que l'on note $w|v$), on pose $f(w/v) := [\mathbb{F}_w : \mathbb{F}_v]$ le degré résiduel de w sur v et $e(w/v)$ l'indice de ramification de w sur v , c'est-à-dire l'unique entier tel que pour tout $\alpha \in K$ on a :

$$w(\alpha) = e(w/v) v(\alpha).$$

On note K_v le complété de K en la place v et L_w celui de L en w . On appelle degré local de w sur v le degré de l'extension L_w/K_v .

Soient F/k une extension finie et R un *ordre* de F , *i.e.* un sous-anneau de $\mathcal{O}_F$ ayant F comme corps des fractions. Rappelons que $\mathcal{O}_F$ est l'*ordre maximal* de F (pour l'inclusion).

Pour tout idéal non nul $\mathfrak{a}$ de R , on définit :

$$\deg_R \mathfrak{a} := \log_q \#(R/\mathfrak{a}),$$

où $\log_q$ est le logarithme de base q .

On étend la définition précédente à tout élément non nul $\gamma \in R$ en posant :

$$\deg_R \gamma := \deg_R(\gamma),$$

où $(\gamma) := \gamma R$ est l'idéal de R engendré par γ . En particulier, pour tout $a \in A \setminus \{0\}$, on a :

$$\deg_A a = \deg_T a.$$

On notera également que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier non-nul de $\mathcal{O}_K$ et si $v_{\mathfrak{p}}$ est la valuation associée à $\mathfrak{p}$, alors on a $\deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} = \deg v_{\mathfrak{p}}$.

1.3. Modules de Drinfeld. —

Soient $L \subset \mathbb{C}_{\infty}$ une extension de k et τ l'application de Frobenius associée à $\mathbb{F}_q$ (*i.e.* $\tau(x) = x^q$ pour tout $x \in \mathbb{C}_{\infty}$), on note $L\{\tau\}$ l'anneau des polynômes de Öre sur L . Si $P \in L\{\tau\}$, on note $\deg_{\tau} P$ le degré de P en tant que polynôme en τ et DP le coefficient du monôme en τ^0 de P .

On peut généraliser la théorie classique des modules de Drinfeld aux ordres d'extensions CM de k en suivant [Hay79]. Soit F/k une extension finie de type CM, c'est-à-dire que F ne possède qu'une seule place au-dessus de ∞ . Soit R un ordre de F . On dit qu'un morphisme de $\mathbb{F}_q$ -algèbres $\rho : R \rightarrow \mathbb{C}_\infty\{\tau\}$ est un *R -module de Drinfeld* si pour tout $a \in R$, on a $D\rho_a = a$ et s'il existe $a \in R$ vérifiant $\rho_a \neq a\tau^0$.

D'après la proposition 2.3 de [Hay79], il existe un entier $r > 0$ tel que pour tout $a \in R \setminus \{0\}$, on ait: $\deg_\tau \rho_a = r \deg_R a$. Cet entier est appelé le *rang* de ρ .

Soient ρ et ϱ deux R -modules de Drinfeld. Un *morphisme* de ρ vers ϱ est un polynôme $P \in \mathbb{C}_\infty\{\tau\}$ vérifiant $P\rho_a = \varrho_a P$ pour tout $a \in R$. Un morphisme non nul de ρ vers ϱ est appelé *isogénie*. On remarque que si ρ et ϱ sont isogènes, alors ils ont nécessairement même rang. Un *isomorphisme* de ρ vers ϱ est une isogénie inversible, c'est donc un élément de $\mathbb{C}_\infty^*$.

On note $H_\rho \subset \mathbb{C}_\infty$ le corps engendré sur k par les coefficients des polynômes $\{\rho_a\}_{a \in R}$ de $\mathbb{C}_\infty\{\tau\}$. On dira que ρ est défini sur $L \subset \mathbb{C}_\infty$ si $H_\rho \subset L$, i.e. $\rho : R \rightarrow L\{\tau\}$.

Notons $t := [F : k]$. Si $(e_1, \dots, e_t)$ est une base de R en tant que A -module, alors H_ρ est le corps engendré sur k par les coefficients des polynômes $\rho_T \in \mathbb{C}_\infty\{\tau\}$ et $\{\rho_{e_i}\}_{1 \leq i \leq t}$. On remarque par ailleurs que si ρ est défini sur $\bar{k}$, alors H_ρ est une extension finie de k contenant F (car $D\rho_a = a$, pour tout $a \in R$).

1.4. Endomorphismes d'un module de Drinfeld. —

Dorénavant par module de Drinfeld on entendra module de Drinfeld défini sur $\bar{k}$.

Soit ϕ un A -module de Drinfeld de rang r . On note $\text{End}(\phi) \subset \bar{k}\{\tau\}$ l'ensemble des endomorphismes de ϕ sur $\bar{k}$. L'anneau $\text{End}(\phi)$ est un A -module de rang $\leq r$ (cf. cor. de la prop. 2.4. de [Dri74]) via l'action de ϕ . De plus, $\text{End}(\phi)$ se plonge naturellement dans $\bar{k}$ via l'application $P \mapsto DP$. Si on note R l'image de $\text{End}(\phi)$ dans $\bar{k}$, alors d'après le corollaire 4.7.15 de [Gos96], R est un ordre d'une extension finie F de k . De plus cette extension est de type CM (voir la preuve du théorème 4.7.17 de [Gos96]) de degré égal au rang t de R en tant que A -module.

L'isomorphisme de A -modules:

$$\phi' : R \xrightarrow{\sim} \text{End}(\phi) \quad (1)$$

définit naturellement une structure de R -module de Drinfeld de rang $\frac{r}{t}$ qui étend celle de ϕ , *i.e.* :

$$\forall a \in A, \phi'_a = \phi_a. \quad (2)$$

On dit que ϕ est à *multiplications complexes* (en abrégé CM) si ϕ' est de rang 1, autrement dit si $\text{End}(\phi)$ est un A -module de rang r (car alors $t = r$).

1.5. Points de torsion et idéaux. —

Soient F/k une extension finie de type CM, R un ordre de F , ϕ' un R -module de Drinfeld de rang r' et $H_{\phi'}$ le corps des coefficients de ϕ' (cf. §1.3).

Soit $a \in R \setminus \{0\}$. Un *point de a -torsion* de ϕ' est un élément $\delta \in \overline{k}$ tel que $\phi'_a(\delta) = 0$. On note $\phi'[a]$ l'ensemble des points de a -torsion.

De façon générale, si $\mathfrak{a}$ est un idéal non nul de R , un *point de $\mathfrak{a}$ -torsion* de ϕ' est un élément $\delta \in \overline{k}$ tel que $\phi'_a(\delta) = 0$ pour tout $a \in \mathfrak{a}$. On note $\phi'[\mathfrak{a}]$ l'ensemble des points de $\mathfrak{a}$ -torsion, c'est un R -module via ϕ' . On note également $\phi'[\mathfrak{a}^\infty] := \cup_{i \geq 0} \phi'[\mathfrak{a}^i]$.

Si $L \subseteq \overline{k}$ est une extension de k , on note $\phi'(L)_{\text{tors}}$ l'ensemble des points de torsion de ϕ' dans L .

Soit $\delta \in \overline{k}$ un point de torsion de ϕ' . On appelle *ordre* de δ l'idéal $\mathfrak{I}_{\phi'}(\delta) := \{a \in R \mid \phi'_a(\delta) = 0\}$, c'est le plus grand idéal annulateur de δ via l'action de ϕ' . On remarque immédiatement que δ est d'ordre premier à $\mathfrak{a}$ si et seulement s'il existe un idéal non nul $\mathfrak{b}$ de R premier à $\mathfrak{a}$ tel que $\delta \in \phi'[\mathfrak{b}]$ (en effet, dans ce cas $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{I}_{\phi'}(\delta)$).

Lorsque $R = \mathcal{O}_F$, le lemme suivant montre qu'on peut décomposer un point de torsion suivant un idéal premier non nul fixé de $\mathcal{O}_F$.

Lemme 1.1. — *Soient $\mathfrak{m}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$ et $\delta \in \overline{k}$ un point de torsion pour ϕ' . Alors, il existe $\delta_1 \in H_{\phi'}(\delta)$ un point de torsion pour ϕ' d'ordre une puissance de $\mathfrak{m}$ et $\delta_2 \in H_{\phi'}(\delta)$ un point de torsion pour ϕ' d'ordre premier à $\mathfrak{m}$ tels que $\delta = \delta_1 + \delta_2$.*

Démonstration. — Soit $a \in \mathcal{O}_F \setminus \{0\}$ tel que $\phi'_a(\delta) = 0$. Écrivons $(a) = \mathfrak{m}^g \mathfrak{b}$ avec $g \geq 0$ un entier et $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathcal{O}_F$ premier à $\mathfrak{m}$. Alors $\mathfrak{m}^g$ et $\mathfrak{b}$ sont premiers entre eux, donc $\mathfrak{m}^g + \mathfrak{b} = \mathcal{O}_F$. Ainsi, il existe $u \in \mathfrak{b}$ et $v \in \mathfrak{m}^g$ tels que $u + v = 1$. D'où

$$\delta = \phi'_1(\delta) = \phi'_u(\delta) + \phi'_v(\delta).$$

Posons $\delta_1 := \phi'_u(\delta)$ et $\delta_2 := \phi'_v(\delta)$. On va vérifier que $\delta_1 \in \phi'[\mathfrak{m}^\infty]$ et $\delta_2 \in \phi'[\mathfrak{b}]$. Soit m un élément de $\mathfrak{m}^g$. On a $mu \in \mathfrak{m}^g \mathfrak{b} = (a)$, il existe donc $c \in \mathcal{O}_F$ tel que $mu = ac$. On en déduit

$$\phi'_m(\delta_1) = \phi'_{mu}(\delta) = \phi'_{ac}(\delta) = \phi'_c(\phi'_a(\delta)) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $m \in \mathfrak{m}^g$, on a bien $\delta_1 \in \phi'[\mathfrak{m}^g]$ comme annoncé. Un raisonnement analogue montre que $\delta_2 \in \phi'[\mathfrak{b}]$. Le lemme est donc démontré. $\square$

1.6. Théorie de Hayes. —

Nous rassemblons dans ce paragraphe des résultats dus à Hayes qui seront essentiels pour la suite et nous démontrons une congruence qui est un point clef de la preuve du théorème principal.

Soient F/k une extension finie de type CM et R un ordre de F . On note ∞' l'unique place de F au-dessus de ∞ et $d := \deg \infty'$ son degré. Soient $\mathbb{F}_{\infty'}$ le corps résiduel de ∞' (qui est donc isomorphe à $\mathbb{F}_{q^d}$), $v_{\infty'}$ l'unique extension de v_∞ à F et $F_{\infty'}$ le complété de F pour $v_{\infty'}$.

Soit ρ un R -module de Drinfeld et $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de R . On note $\rho_{\mathfrak{a}}$ le générateur unitaire de l'idéal à gauche de $\overline{k}\{\tau\}$ engendré par la famille $\{\rho_a\}_{a \in \mathfrak{a}}$. D'après le §3 de [Hay79], il existe alors un unique R -module de Drinfeld ϱ tel que pour tout $a \in A$, on ait:

$$\rho_{\mathfrak{a}} \rho_a = \varrho_a \rho_{\mathfrak{a}}.$$

On notera $\mathfrak{a} * \rho$ le R -module ϱ , en suivant [Hay79].

De plus, si on note $\text{End}(\mathfrak{a})$ l'ensemble des éléments $a \in \mathcal{O}_F$ tels que $a\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$, alors, d'après la proposition 3.2 de [Hay79], ϱ est en fait un $\text{End}(\mathfrak{a})$ -module de Drinfeld.

Nous utiliserons exclusivement le cas particulier suivant pour étendre à l'ordre maximal l'anneau des scalaires de nos modules de Drinfeld CM. Soit $\mathfrak{C} := \{a \in \mathcal{O}_F \mid a\mathcal{O}_F \subset R\}$ le *conducteur* de R (i.e. le plus grand

idéal de $\mathcal{O}_F$ contenu dans R). On a alors $\text{End}(\mathfrak{C}) = \mathcal{O}_F$ et d'après ce qui précède, on obtient:

Proposition 1.2. — *Soit ρ un R -module de Drinfeld. Notons $\mathfrak{C}$ le conducteur de R et $\varphi = \mathfrak{C} * \rho$. Alors ρ est isogène à φ via $\rho_{\mathfrak{C}}$ et on a $\text{End}(\varphi) = \mathcal{O}_F$.*

Soit $\pi \in F$ une uniformisante de $v_{\infty'}$ (i.e. $v_{\infty'}(\pi) = 1$). On a alors $F_{\infty'} = \mathbb{F}_{\infty'}((\pi))$. Tout élément $\alpha \in F_{\infty'}^*$ peut donc s'écrire:

$$\alpha = \sum_{i \geq j} c_i \pi^i$$

où $j := v_{\infty'}(\alpha)$ et $c_i \in \mathbb{F}_{\infty'}$ pour tout entier $i \geq j$. En posant $\text{sgn}(\alpha) := c_j$ on définit alors, suivant la terminologie de Hayes, une *fonction signe* sur $F_{\infty'}$ (i.e. un morphisme de groupe $F_{\infty'}^* \rightarrow \mathbb{F}_{\infty'}^*$ dont la restriction à $\mathbb{F}_{\infty'}^*$ est l'identité).

Soit maintenant ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de rang 1. Pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, on note $\mu_{\psi}(a) \in \overline{k}$ le coefficient dominant de ψ_a , c'est-à-dire le coefficient du monôme de plus haut degré de $\psi_a \in \overline{k}\{\tau\}$. Pour tous $a \in \mathcal{O}_F$ et $b \in \mathcal{O}_F$ on a:

$$\mu_{\psi}(ab) = \mu_{\psi}(a) \mu_{\psi}(b)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_F} a}}. \quad (3)$$

D'après le §6 de [Hay79], l'application $x \mapsto \mu_{\psi}(x)$ s'étend en une application

$$\begin{aligned} \mu_{\psi} : F_{\infty'} &\longrightarrow \mathbb{C}_{\infty} \\ x &\longmapsto \mu_{\psi}(x) \end{aligned}.$$

Définition 1.3. — Soit ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de rang 1. On dit que ψ est de *signe normalisé* s'il existe $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}_{\infty'}/\mathbb{F}_q)$ tel que:

$$\mu_{\psi} = \sigma \circ \text{sgn}.$$

En particulier, si ψ est de signe normalisé, alors pour tout $a \in \mathcal{O}_F \setminus \{0\}$, on a:

$$\mu_{\psi}(a) \in \mathbb{F}_{\infty'}^* \simeq \mathbb{F}_{q^d}^*, \quad (4)$$

car F est de type CM.

D'après le théorème 12.3 de [Hay92], tout $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld φ de rang 1 est isomorphe à un module de Drinfeld de signe normalisé. Plus précisément:

Proposition 1.4. — Soient φ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de rang 1 et $z \in \bar{k}$ une racine du polynôme:

$$X^{q^d-1} - \mu_\varphi(\pi^{-1}).$$

Alors le $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld $\psi := z \varphi z^{-1}$ est de signe normalisé.

Démonstration. — Voir le théorème 12.3 de [Hay92]. $\square$

Soient ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé et H_ψ son corps des coefficients (cf. §1.3). Comme $\mu_\psi(a) \in \mathbb{F}_{\infty'}$ pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, d'après la proposition 11.3 de [Hay92], ψ est défini sur $\mathcal{O}_{H_\psi}$.

Par ailleurs, d'après le §14 de [Hay92], le corps H_ψ est indépendant du $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé, on le note H_F^+ . De plus, l'extension H_F^+/F est abélienne, finie (cf. prop. 14.1 de [Hay92]) et non ramifiée au-dessus de toutes les places finies de F (cf. Th. 14.4 de [Hay92]).

On peut donc associer à tout idéal premier non nul $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_F$ son *symbole d'Artin*, c'est-à-dire l'unique automorphisme $\sigma_{\mathfrak{m}} \in \text{Gal}(H_F^+/F)$ vérifiant:

$$\forall \gamma \in \mathcal{O}_{H_F^+}, \quad \sigma_{\mathfrak{m}}(\gamma) \equiv \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}}} \pmod{\mathfrak{n}}$$

où $\mathfrak{n}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{H_F^+}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$. Soient $\mathfrak{a}$ un idéal non nul de $\mathcal{O}_F$ et $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{m}_j^{e_j}$ sa décomposition en produit d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_F$. On étend la définition du symbole d'Artin à tout idéal non nul $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_F$ en posant:

$$\sigma_{\mathfrak{a}} = \sigma_{\mathfrak{m}_1}^{e_1} \cdots \sigma_{\mathfrak{m}_j}^{e_j}.$$

Soit $H_F^+(\psi[\mathfrak{a}])$ le corps engendré sur H_F^+ par les points de $\mathfrak{a}$ -torsion de ψ . Alors, d'après la proposition 7.5.4 de [Gos96], l'extension $H_F^+(\psi[\mathfrak{a}])/F$ est abélienne et non ramifiée au-dessus de tout idéal premier de $\mathcal{O}_F$ qui ne divise pas $\mathfrak{a}$. Dans le cas des idéaux premiers de $\mathcal{O}_F$ nous avons le résultat complémentaire suivant (cf. prop. 7.5.18 de [Gos96]):

Proposition 1.5. — Soient $\mathfrak{m}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$ et $i > 0$ un entier. Alors, l'extension $H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^i])/H_F^+$ est totalement ramifiée en tout premier de $\mathcal{O}_{H_F^+}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$.

Soient $\lambda \in \bar{k}$ un point de $\mathfrak{a}$ -torsion, $\mathfrak{b}$ un idéal non nul de $\mathcal{O}_F$ premier à $\mathfrak{a}$ et $\sigma_{\mathfrak{b}} \in \text{Gal}(H_F^+(\psi[\mathfrak{a}])/F)$ le symbole d'Artin de $\mathfrak{b}$. Alors, toujours d'après la proposition 7.5.4 de [Gos96], on a:

$$\sigma_{\mathfrak{b}}(\lambda) = \psi_{\mathfrak{b}}(\lambda). \quad (5)$$

De plus, d'après le corollaire 7.5.6 de [Gos96], on a:

$$\text{Gal}(H_F^+(\psi[\mathfrak{a}])/H_F^+) \simeq (\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})^\times. \quad (6)$$

Soient $\mathfrak{m}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$ et $\mathfrak{n}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_{H_F^+}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ (*i.e.* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathcal{O}_F$). D'après le corollaire 5.9 de [Hay92], pour tout entier $i \geq 1$ on a:

$$\psi_{\mathfrak{m}^i} \equiv \tau^{i \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}} \pmod{\mathfrak{n}} \quad (7)$$

(rappelons que $\psi_{\mathfrak{m}^i}$ désigne le générateur unitaire de l'idéal à gauche de $\bar{k}\{\tau\}$ engendré par la famille $\{\psi_a\}_{a \in \mathfrak{m}^i}$).

Nous voudrions maintenant pouvoir nous servir de cette congruence pour obtenir des minoration utiles par la suite. Le problème avec cette congruence est que $\psi_{\mathfrak{m}^i}$ n'est pas, en général, un endomorphisme de ψ . Pour que $\psi_{\mathfrak{m}^i}$ soit un endomorphisme de ψ il faut et il suffit qu'il existe $m \in \mathcal{O}_F$ tel que $\psi_m = \psi_{\mathfrak{m}^i}$. Il suffit donc que l'idéal $\mathfrak{m}^i$ soit principal et que l'un de ses générateurs $m \in \mathcal{O}_F$ vérifie $\mu_{\psi}(m) = 1$ (puisque si $\mathfrak{m}^i = (m)$, on a $\psi_m = \mu_{\psi}(m) \psi_{\mathfrak{m}^i}$).

L'idée est donc de considérer une puissance suffisamment grande de l'idéal $\mathfrak{m}$. Pour cela, On note $\mathfrak{h}$ le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$ et $d := \deg \infty'$ le degré de la place ∞' . Alors $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$ est un idéal principal. On fixe $m \in \mathcal{O}_F$ un générateur de $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$. Pour tout entier $i > 0$, on a d'après (3) p. 10:

$$\mu_{\psi}(m^i) = \mu_{\psi}(m)^{1+q^{\deg_{\mathcal{O}_F} m} + \dots + q^{(i-1) \deg_{\mathcal{O}_F} m}}.$$

Or $\mu_{\psi}(m) \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$ car ψ est de signe normalisé (*cf.* (4) p. 10). Donc si j et j' représentent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de i par d , alors:

$$\mu_{\psi}(m)^{q^{i \deg_{\mathcal{O}_F} m}} = \mu_{\psi}(m)^{q^{(jd+j') \deg_{\mathcal{O}_F} m}} = \mu_{\psi}(m)^{q^{j' \deg_{\mathcal{O}_F} m}}.$$

Ainsi,

$$\mu_{\psi}(m^{id}) = \left(\mu_{\psi}(m)^{1+q^{\deg_{\mathcal{O}_F} m} + \dots + q^{(d-1) \deg_{\mathcal{O}_F} m}} \right)^i.$$

En prenant $i = q^d - 1$, on obtient:

$$\mu_\psi(m^{d(q^d-1)}) = \left(\mu_\psi(m)^{1+q^{\deg_{\mathcal{O}_F} m} + \dots + q^{(d-1)\deg_{\mathcal{O}_F} m}} \right)^{q^d-1} = 1.$$

Nous considérerons plus loin la situation où K/H_F^+ et L/K sont deux extensions finies, $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Posons

$$\nu := d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_L} \mathfrak{q} / \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}$$

(c'est un entier car $\mathcal{O}_L/\mathfrak{q}$ est une extension finie du corps fini $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}$). Alors, d'après la congruence (7) p. 12 et la discussion ci-dessus, on a:

$$\psi_{m^\nu} = \psi_{\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu}} \equiv \tau^{\mathfrak{h} d(q^d-1) \deg_{\mathcal{O}_L} \mathfrak{q}} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Cela montre:

Proposition 1.6. — Soient F/k une extension CM finie, ∞' l'unique place de F au-dessus ∞ , d le degré sur $\mathbb{F}_q$ de la place ∞' , $\mathfrak{h}$ le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$ et ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé. Soient $\mathfrak{m}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$, $m \in \mathcal{O}_F$ un générateur de l'idéal principal $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$, K/H_F^+ et L/K deux extensions finies, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. On pose:

$$\nu := d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_L} \mathfrak{q} / \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}.$$

Alors on a:

$$\psi_{m^\nu} = \psi_{\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu}} \equiv \tau^{\mathfrak{h} d(q^d-1) \deg_{\mathcal{O}_L} \mathfrak{q}} \pmod{\mathfrak{p}}. \quad (8)$$

1.7. Hauteurs. —

Soient $\alpha \in \overline{k}$ et K une extension finie de k contenant α . La hauteur logarithmique et absolue de Weil de α , notée $h(\alpha)$, est définie par:

$$h(\alpha) := \frac{1}{[K : k]} \sum_{v \in \mathcal{M}_K} \deg v \log_q \max\{1, |\alpha|_v\}.$$

Cette définition ne dépend pas de l'extension finie K choisie. Rappelons que la hauteur de Weil est une fonction positive qui ne s'annule qu'en zéro et les racines de l'unité et qu'elle est invariante par conjugaison (*i.e.* pour tout $\alpha \in \overline{k}$ et tout conjugué $\beta \in \overline{k}$ de α sur k , on a $h(\beta) = h(\alpha)$). Par ailleurs, elle vérifie la *propriété de Northcott*: pour tous réels $D > 0$ et

$c > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de points $\alpha \in \overline{k}$ tels que $[k(\alpha) : k] \leq D$ et $h(\alpha) \leq c$.

De plus, pour tous $\alpha, \beta \in \overline{k}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

- $h(\alpha + \beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$;
- $h(\alpha\beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$;
- $h(\alpha^n) = |n| h(\alpha)$ où $|\cdot|$ est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$.

L. Denis (cf. [Den92]) a associé à tout A -module de Drinfeld une hauteur canonique. La construction de L. Denis se généralise sans aucune difficulté aux R -modules de Drinfeld définis sur $\overline{k}$, où R est un ordre d'une extension CM finie de k . On se contente donc d'en rappeler sa définition :

Définition 1.7. — Soient F/k une extension CM finie, R un ordre de F et ϕ' un R -module de Drinfeld de rang r' défini sur $\overline{k}$. On appelle *hauteur canonique* de ϕ' la fonction $\widehat{h}_{\phi'} : \overline{k} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\widehat{h}_{\phi'}(\alpha) := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{h(\phi'_{a^i}(\alpha))}{q^{i r' \deg_R a}}$$

où $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$.

Cette définition ne dépend pas de l'élément a choisi (th. 1 de [Den92]).

Comme dans le cas classique, la hauteur canonique satisfait les bonnes propriétés suivantes :

Théorème 1.8. — Soient F/k une extension CM finie, R un ordre de F et ϕ' un R -module de Drinfeld de rang r' défini sur $\overline{k}$. Alors la hauteur canonique $\widehat{h}_{\phi'}$ de ϕ' vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $a \in R$ et tout $\alpha \in \overline{k}$, on a :

$$\widehat{h}_{\phi'}(\phi'_a(\alpha)) = q^{r' \deg_R a} \widehat{h}_{\phi'}(\alpha);$$

2. Il existe une constante réelle $\gamma(\phi') \geq 1$ telle que pour tout $\alpha \in \overline{k}$, on a :

$$\left| \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) - h(\alpha) \right| \leq \gamma(\phi');$$

3. La fonction $\widehat{h}_{\phi'}$ est l'unique fonction définie sur $\overline{k}$ vérifiant à la fois la propriété 1 pour un certain $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$ et la propriété 2;
4. La fonction $\widehat{h}_{\phi'}$ vérifie la propriété de Northcott.

5. Soit $\alpha \in \bar{k}$, alors $\widehat{h}_{\phi'}(\alpha) = 0$ si et seulement si α est un point de torsion de ϕ' ;
 6. Pour tous $\alpha \in \bar{k}$ et $\delta \in \phi'(\bar{k})_{\text{tors}}$, on a :

$$\widehat{h}_{\phi'}(\alpha + \delta) = \widehat{h}_{\phi'}(\alpha);$$

7. Pour tous $\alpha, \beta \in \bar{k}$, on a :

$$\widehat{h}_{\phi'}(\alpha + \beta) \leq \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) + \widehat{h}_{\phi'}(\beta).$$

Soient F/k une extension CM finie, R un ordre de F , ϕ' un R -module de Drinfeld de rang r' défini sur $\bar{k}$ et ϕ la restriction de ϕ' à A (cf. égalité (2) p. 8). Nous allons maintenant montrer que les hauteurs canoniques relatives à ϕ et ϕ' coïncident.

Proposition 1.9. — Pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a $\widehat{h}_{\phi}(\alpha) = \widehat{h}_{\phi'}(\alpha)$.

Démonstration. — Soit t le rang de R en tant que A -module. D'après le §1.4, ϕ est de rang $r = r't$ et pour tout $a \in A$, on a $\deg_R a = t \deg_A a$. Soit $a \in A$ tel que $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$. Alors pour tout $\alpha \in \bar{k}$ on a :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(\phi'_{a^n}(\alpha))}{q^{nr' \deg_R a}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(\phi_{a^n}(\alpha))}{q^{nr't \deg_A a}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(\phi_{a^n}(\alpha))}{q^{nr \deg_A a}} = \widehat{h}_{\phi}(\alpha). \end{aligned}$$

□

Par abus de notation on pourra encore noter $\widehat{h}_{\phi}$ la hauteur normalisée du R -module de Drinfeld ϕ' .

On vient de voir que la hauteur canonique est invariante par extension des scalaires du module de Drinfeld. On va maintenant montrer par le biais de la proposition suivante, qui est une généralisation de la proposition 2 de [Poo95], que l'on peut relier les hauteurs canoniques associées à deux modules de Drinfeld isogènes.

Proposition 1.10. — Soient ρ et ϱ deux R -modules de Drinfeld de rang r définis sur $\bar{k}$ isogènes via $P \in \bar{k}\{\tau\}$ (i.e. $P\rho = \varrho P$). Alors, pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a :

$$q^{\deg_{\tau} P} \widehat{h}_{\rho}(\alpha) = \widehat{h}_{\varrho}(P(\alpha)).$$

Démonstration. — D'après la propriété fonctorielle de la hauteur (cf. th. B.2.5 de [HS00]), il existe une constante $c(P) > 0$ ne dépendant que du polynôme P telle que pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a :

$$|h(P(\alpha)) - q^{\deg_\tau P} h(\alpha)| \leq c(P).$$

Ainsi, pour tout $a \in R \setminus \overline{\mathbb{F}}_q$ et tout entier $i > 0$, on a :

$$\left| \frac{h(P(\rho_{a^i}(\alpha)))}{q^{i r \deg_R a}} - \frac{q^{\deg_\tau P} h(\rho_{a^i}(\alpha))}{q^{i r \deg_R a}} \right| \leq \frac{c(P)}{q^{i r \deg_R a}}.$$

Or $P(\rho_{a^i}(\alpha)) = \varrho_{a^i}(P(\alpha))$, d'où :

$$\left| \frac{h(\varrho_{a^i}(P(\alpha)))}{q^{i r \deg_R a}} - \frac{q^{\deg_\tau P} h(\rho_{a^i}(\alpha))}{q^{i r \deg_R a}} \right| \leq \frac{c(P)}{q^{i r \deg_R a}}.$$

On obtient donc le résultat souhaité en faisant tendre i vers l'infini. $\square$

2. Démonstration du théorème 2

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 2. Pour ce faire, nous commencerons par montrer dans le §2.1 des inégalités ultramétriques faisant intervenir un module de Drinfeld de signe normalisé, ce qui nous permettra, grâce à la formule du produit, d'en déduire au §2.2 des minoration conditionnelles de la hauteur canonique. À l'aide d'un argument reposant entre autres sur le principe des tiroirs (cf. 2.3), nous nous affranchirons dans le §2.4 de ces contraintes.

À partir de maintenant et jusqu'au §2.2, on fixe F/k une extension CM finie, ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé, K/k une extension finie sur laquelle ψ est défini et L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois G . Soient H un sous-groupe du centre de G et $E \subseteq L$ le sous-corps fixé par H . On se donne encore $d_1 > 0$ un entier et v une place finie non triviale de K telle que pour toute place $w|v$ de E , on ait $[E_w : K_v] \leq d_1$. on note $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_K$ associé à la place v , $\mathfrak{m} := \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_F$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_F$ en-dessous de $\mathfrak{p}$ et on fixe $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ (i.e. $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathcal{O}_K$). Soient $\mathfrak{h}$ le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$, $m \in \mathcal{O}_F$ un générateur de l'idéal principal $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$ et d le degré sur $\mathbb{F}_q$ de l'unique place de F au-dessus de ∞ . On pose :

$$\nu := d(q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} / \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}; \quad (9)$$

$$n := \mathfrak{h} d (q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}; \quad (10)$$

et

$$s := \mathfrak{h} d (q^d - 1). \quad (11)$$

2.1. Inégalités métriques. —

On établit ici quelques inégalités ultramétriques utiles pour la suite.

Lemme 2.1. — *Soit M une extension finie de K . Alors, pour tout $\alpha \in M$ et toute place finie w de M , on a :*

$$\max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} = \max\left\{1, |\alpha|_w^{q^n}\right\}.$$

Démonstration. — Soit $\alpha \in M$. Comme ψ est de signe normalisé, ses coefficients sont entiers (cf. §1.6). De plus, ψ_{m^ν} est un polynôme unitaire de degré n d'après la proposition 1.6 (relation (8)). Il existe donc des éléments $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{O}_K$ tels que :

$$\psi_{m^\nu}(\alpha) = a_0 \alpha + \dots + a_{n-1} \alpha^{q^{n-1}} + \alpha^{q^n}.$$

De plus, comme pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ le coefficient a_i est entier, pour toute place finie w de M , on a $|a_i|_w \leq 1$. Ainsi, il y a deux cas possibles :

1. Si $|\alpha|_w > 1$, alors pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on a :

$$\left| a_i \alpha^{q^i} \right|_w \leq |\alpha|_w^{q^i} < |\alpha|_w^{q^n},$$

d'où

$$|\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w = |\alpha|_w^{q^n} > 1$$

et donc

$$\max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} = |\alpha|_w^{q^n} = \max\left\{1, |\alpha|_w^{q^n}\right\}.$$

2. Si $|\alpha|_w \leq 1$, alors :

$$|\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w \leq 1$$

et donc

$$\max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} = 1 = \max\left\{1, |\alpha|_w^{q^n}\right\}.$$

□

Lemme 2.2. — Soit M une extension finie de K . Alors, pour tout $\alpha \in M$ et toute place $w|v$ de M , on a :

$$|\psi_{m^\nu}(\alpha) - \alpha^{q^n}|_w \leq q^{-e(w/v)} \max\{1, |\alpha|_w\}^{q^{n-1}}.$$

Démonstration. — Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ les coefficients de ψ_{m^ν} , i.e. :

$$\psi_{m^\nu} = a_0 \tau^0 + \dots + a_{n-1} \tau^{n-1} + \tau^n.$$

Soient $\alpha \in M$ et w une place de M au-dessus de v , alors, d'après l'inégalité ultramétrique, on a :

$$|\psi_{m^\nu}(\alpha) - \alpha^{q^n}|_w \leq \max_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ |a_i|_w |\alpha|_w^{q^i} \right\}.$$

Or, d'après la congruence (8) de la proposition 1.6, on a :

$$\psi_{m^\nu} \equiv \tau^n \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Ainsi pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $a_i \in \mathfrak{p}$, d'où $|a_i|_w \leq q^{-e(w/v)}$ ce qui permet de conclure. $\square$

Le lemme suivant, basé sur le théorème d'approximation forte, nous permettra de nous ramener dans les preuves au cas des entiers.

Lemme 2.3. — Soit M une extension finie de k . Soit w une place finie de M . Alors, pour tout $\alpha \in M$ non nul, il existe $\beta \in \mathcal{O}_M$ tel que $\alpha\beta \in \mathcal{O}_M$, et $|\beta|_w = \max\{1, |\alpha|_w\}^{-1}$.

Démonstration. — Soit S l'ensemble des places finies de M (i.e. des places ω de M telles que $\omega \nmid \infty$). Soit $\Sigma_0 := \{\omega \in S \mid |\alpha|_\omega > 1\}$ (c'est un ensemble fini car α n'a qu'un nombre fini de pôles). Soit $\Sigma := \Sigma_0 \cup \{w\}$. Alors, d'après le théorème d'approximation forte (cf. th. 1.6.5 de [Sti09]), il existe $\beta \in M$ tel que $|\beta|_\omega = \max\{1, |\alpha|_\omega\}^{-1}$ pour toute $\omega \in \Sigma$ et $|\beta|_\omega \leq 1$ pour toute $\omega \in S \setminus \Sigma$. Ainsi β et $\alpha\beta$ sont bien dans $\mathcal{O}_M$. $\square$

Proposition 2.4. — Supposons que l'extension L/E soit non ramifiée au-dessus de $\mathfrak{q}$. Soit $\sigma_{\mathfrak{q}}$ le symbole d'Artin associé à $\mathfrak{q}$. Alors, pour toute place non triviale w de L et tout $\alpha \in L$, on a :

$$|\psi_{m^\nu}(\alpha) - \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha)|_w \leq C(w) \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha)|_w\}$$

où $C(w) = q^{-1}$ si $w|v$ et $C(w) = 1$ sinon.

Démonstration. — Soit w une place non triviale de L . Si $w \nmid v$, l'inégalité découle directement de l'inégalité ultramétrique. On suppose donc que $w|v$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_L$, on a :

$$\sigma_{\mathfrak{q}}(\gamma) \equiv \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}}} \pmod{\mathfrak{q}\mathcal{O}_L}$$

et donc

$$\sigma_{\mathfrak{q}}^s(\gamma) \equiv \gamma^{q^{s \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}}} \equiv \gamma^{q^n} \pmod{\mathfrak{q}\mathcal{O}_L} \quad (12)$$

car $n = s \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}$ (cf. notations (10) et (11) p. 16). Si maintenant $\mathfrak{q}'$ est un autre idéal de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, alors $\mathfrak{q}'$ est non ramifié dans L et $\deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}' = \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}$ (car L/K et E/K sont galoisiennes). On a donc encore la congruence (12) avec $\mathfrak{q}'$ au lieu de $\mathfrak{q}$. Mais $\sigma_{\mathfrak{q}}$ et $\sigma_{\mathfrak{q}'}$, sont des éléments de H conjugués dans G et H est dans $\mathcal{Z}(G)$, donc $\sigma_{\mathfrak{q}} = \sigma_{\mathfrak{q}'}$. Ceci montre que pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_L$, on a :

$$|\gamma^{q^n} - \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\gamma)|_w \leq q^{-1}.$$

Soit $\alpha \in L$, alors d'après le lemme 2.3, il existe $\beta \in \mathcal{O}_L$ tel que $\alpha\beta \in \mathcal{O}_L$ et $|\beta|_w = \max\{1, |\alpha|_w\}^{-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} & |\alpha^{q^n} - \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha)|_w \\ &= |\beta|_w^{-q^n} |(\alpha\beta)^{q^n} - \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha\beta) + (\sigma_{\mathfrak{q}}^s(\beta) - \beta^{q^n}) \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha)|_w \\ &\leq |\beta|_w^{-q^n} \max\{|(\alpha\beta)^{q^n} - \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha\beta)|_w, |(\sigma_{\mathfrak{q}}^s(\beta) - \beta^{q^n}) \sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha)|_w\} \\ &\leq \max\{1, |\alpha|_w\}^{q^n} q^{-1} \max\{1, |\sigma_{\mathfrak{p}}^s(\alpha)|_w\} \\ &\stackrel{\text{lem. 2.1}}{\leq} q^{-1} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\sigma_{\mathfrak{q}}^s(\alpha)|_w\}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |\psi_{m^\nu}(\alpha) - \alpha^{q^n}|_w &\stackrel{\text{lem. 2.2}}{\leq} q^{-e(w/v)} \max\{1, |\alpha|_w\}^{q^{n-1}} \\ &\stackrel{\text{lem. 2.1}}{\leq} q^{-1} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\}. \end{aligned}$$

Le résultat découle maintenant directement de l'utilisation de l'inégalité ultramétrique. $\square$

La proposition suivante est l'analogue de la proposition 2.3 de [AZ10], la démonstration étant quasi identique, on ne la fait pas.

Proposition 2.5. — *Supposons que l'extension L/E soit ramifiée au-dessus de $\mathfrak{q}$. Alors l'ensemble*

$$H_{\mathfrak{q}} := \left\{ \sigma \in \text{Gal}(L/E) \mid \forall \gamma \in \mathcal{O}_L, \sigma(\gamma)^{q^{\deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}}} \equiv \gamma^{q^{\deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}}} \pmod{\mathfrak{q}\mathcal{O}_L} \right\}$$

est un sous-groupe non trivial du groupe d'inertie de $\mathfrak{q}$ sur L .

La proposition 2.4 établit une inégalité ultramétrique pour les extensions non ramifiées, une inégalité similaire dans le cas ramifié fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.6. — *On suppose que l'extension L/E est ramifiée au-dessus de $\mathfrak{q}$. Soient $\eta \in H_{\mathfrak{q}}$ tel que $\eta \neq \text{id}$ et $e_{\mathfrak{q}}(L/E)$ l'indice de ramification de $\mathfrak{q}$ sur L . Alors, pour toute place w de L et tout $\alpha \in L$, on a :*

$$\begin{aligned} & \left| \psi_{m^\nu}(\alpha) - \psi_{m^\nu}(\eta(\alpha)) \right|_w \\ & \leq C(w) \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\eta(\alpha))|_w\} \end{aligned}$$

où $C(w) = q^{-e_{\mathfrak{q}}(L/E)}$ si $w|v$ et $C(w) = 1$ sinon.

Démonstration. — Soit w une place de L . Si $w \nmid v$, l'inégalité découle directement de l'inégalité ultramétrique. On suppose donc que $w|v$. Soit $\mathfrak{q}'$ un idéal premier de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Alors $H_{\mathfrak{q}}$ et $H_{\mathfrak{q}'}$ sont dans H et sont conjugués dans G . Or H est dans $\mathcal{Z}(G)$, donc $H_{\mathfrak{q}} = H_{\mathfrak{q}'}$. De plus, $\deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} = \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}'$ et $e_{\mathfrak{q}}(L/E) = e_{\mathfrak{q}'}(L/E)$. En posant :

$$n := \mathfrak{h} d (q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q},$$

on a donc :

$$\eta(\gamma)^{q^n} \equiv \gamma^{q^n} \pmod{\mathfrak{q}'\mathcal{O}_L}.$$

Ainsi, pour tout $\gamma \in \mathcal{O}_L$, on a :

$$\left| \gamma^{q^n} - \eta(\gamma)^{q^n} \right|_w \leq q^{-e_{\mathfrak{q}}(L/E)}.$$

Soit $\alpha \in L$. Alors d'après le lemme 2.3, il existe $\beta \in \mathcal{O}_L$ tel que $\alpha\beta \in \mathcal{O}_L$ et $|\beta|_w = \max\{1, |\alpha|_w\}^{-1}$, ainsi:

$$\begin{aligned}
& |\alpha^{q^n} - \eta(\alpha)^{q^n}|_w \\
&= |\beta|_w^{-q^n} |(\alpha\beta)^{q^n} - \eta(\alpha\beta)^{q^n} + (\eta(\beta)^{q^n} - \beta^{q^n}) \eta(\alpha)^{q^n}|_w \\
&\leq |\beta|_w^{-q^n} \max\{|(\alpha\beta)^{q^n} - \eta(\alpha\beta)^{q^n}|, |(\eta(\beta)^{q^n} - \beta^{q^n}) \eta(\alpha)^{q^n}|_w\} \\
&\leq \max\{1, |\alpha|_v\}^{q^n} q^{-e_q(L/K)} \max\{1, |\eta(\alpha)|_w\}^{q^n} \\
&\stackrel{\text{lem. 2.1}}{\leq} q^{-e_q(L/K)} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\eta(\alpha))|_w\}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
|\psi_{m^\nu}(\alpha) - \alpha^{q^n}|_w &\stackrel{\text{lem. 2.2}}{\leq} q^{-e(w/v)} \max\{1, |\alpha|_w\}^{q^{n-1}} \\
&\stackrel{\text{lem. 2.1}}{\leq} q^{-e_q(L/E)} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\}.
\end{aligned}$$

Le résultat découle maintenant directement de l'utilisation de l'inégalité ultramétrique. $\square$

Le lemme suivant, que l'on couplera aux deux lemmes précédents par la suite, permet d'obtenir des majorations suffisamment fines en composant par ψ_{m^ν} , ce qui sera très utile pour obtenir les minoration de hauteur souhaitées (cf. prop. 2.8 et 2.9).

Lemme 2.7 (d'accélération). — Soient w une place de L au-dessus de v et $\alpha, \beta \in L$. On suppose qu'il existe un entier $c > 0$ tel que:

$$|\alpha - \beta|_w \leq q^{-ce_q(L/E)} \max\{1, |\alpha|_w\} \max\{1, |\beta|_w\}.$$

Alors, pour tout entier naturel l , on a:

$$|\psi_{m^{\nu l}}(\alpha - \beta)|_w \leq q^{-(c+l)e_q(L/E)} \max\{1, |\psi_{m^{\nu l}}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\psi_{m^{\nu l}}(\beta)|_w\}.$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur l . Pour $l = 0$ le résultat est immédiat. Montrons le cas $l = 1$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \bar{k}$ les coefficients de ψ_{m^ν} , i.e.:

$$\psi_{m^\nu} = a_0 \tau^0 + \dots + a_n \tau^n,$$

avec $a_0 = m^\nu$ et $a_n = 1$. D'après la congruence (8) p. 13, on a:

$$\psi_{m^\nu} = \psi_{\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu}} \equiv \tau^n \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Ainsi, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $|a_i|_w \leq q^{-e(w/v)}$. Or,

$$|\psi_{m^\nu}(\alpha - \beta)|_w \leq \max_{0 \leq i \leq n} \left\{ |a_i|_w |\alpha - \beta|_w^{q^i} \right\}.$$

Il y a donc deux cas possibles:

1. Si $|\alpha - \beta|_w \geq 1$, alors:

$$\begin{aligned} & |\psi_{m^\nu}(\alpha - \beta)|_w \\ & \leq |\alpha - \beta|_w^{q^n} \\ & \leq q^{-c e_q(L/E) q^n} \max\{1, |\alpha|_w\}^{q^n} \max\{1, |\beta|_w\}^{q^n} \\ & \stackrel{\text{lem.2.1}}{\leq} q^{-(c+1) e_q(L/E)} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\beta)|_w\}; \end{aligned}$$

2. Si $|\alpha - \beta|_w < 1$, alors:

$$\begin{aligned} & |\psi_{m^\nu}(\alpha - \beta)|_w \\ & \leq q^{-e(w/v)} |\alpha - \beta|_w \\ & \leq q^{-e(w/v)} q^{-c e_q(L/E)} \max\{1, |\alpha|_w\} \max\{1, |\beta|_w\} \\ & \leq q^{-(c+1) e_q(L/E)} \max\{1, |\alpha|_w\}^{q^n} \max\{1, |\beta|_w\}^{q^n} \\ & \stackrel{\text{lem.2.1}}{=} q^{-(c+1) e_q(L/E)} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\psi_{m^\nu}(\beta)|_w\}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant $l > 1$. Alors

$$\psi_{m^{l\nu}}(\alpha - \beta) = \psi_{m^\nu} \psi_{m^{\nu(l-1)}}(\alpha - \beta).$$

Or, par l'hypothèse de récurrence, on a:

$$\begin{aligned} & |\psi_{m^{\nu(l-1)}}(\alpha - \beta)|_w \\ & \leq q^{-(c+l-1) e_q(L/E)} \max\{1, |\psi_{m^{\nu(l-1)}}(\alpha)|_w\} \max\{1, |\psi_{m^{\nu(l-1)}}(\beta)|_w\}. \end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à substituer $\psi_{m^{\nu(l-1)}}(\alpha)$ à α et $\psi_{m^{\nu(l-1)}}(\beta)$ à β , ainsi qu'à faire agir ψ_{m^ν} sur $\psi_{m^{\nu(l-1)}}(\alpha) - \psi_{m^{\nu(l-1)}}(\beta)$ et à utiliser ce que l'on a montré dans le cas $l = 1$. $\square$

2.2. Minoration de la hauteur canonique. —

Dans tout ce paragraphe on utilise les notations fixées au début de cette partie (*cf.* p. 16). Elles feront implicitement partie des conditions de tous les énoncés de ce paragraphe. Notons aussi:

$$c_3 := 3 \mathfrak{h} d (q^d - 1) \gamma(\psi),$$

où $\gamma(\psi)$ est le réel défini dans le théorème 1.8, point 2.

La proposition suivante fournit une minoration de la hauteur normalisée dans le cas où l'extension L/E n'est pas ramifiée au-dessus de $\mathfrak{q}$.

Proposition 2.8. — *On suppose que l'extension L/E est non ramifiée au-dessus de $\mathfrak{q}$, alors pour tout $\alpha \in L$ qui n'est pas de torsion pour ψ , on a :*

$$\widehat{h}_\psi(\alpha) \geq \frac{q^{-c_3 \deg v d_1^2 [K:k]}}{2 [K:k]}.$$

Démonstration. — Soit $\alpha \in L$ non de torsion pour ψ . Commençons par montrer que pour tout $\sigma \in \text{Gal}(L/E)$ et pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a :

$$\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha) \neq \psi_{m^{\nu l}}(\sigma(\alpha)).$$

En effet, si $\psi_{m^\nu}(\psi_{m^{\nu l}}(\alpha)) = \sigma(\psi_{m^{\nu l}}(\alpha))$, alors pour tout entier $j \geq 1$, on a :

$$\psi_{m^\nu}^j(\psi_{m^{\nu l}}(\alpha)) = \sigma^j(\psi_{m^{\nu l}}(\alpha))$$

car ψ_{m^ν} et σ commutent. Soit $o(\sigma)$ l'ordre de σ dans $\text{Gal}(L/K)$, alors :

$$0 = \psi_{m^\nu}^{o(\sigma)}(\psi_{m^{\nu l}}(\alpha)) - \psi_{m^{\nu l}}(\alpha) = \psi_{m^{\nu(l+1)o(\sigma)-m^{\nu l}}}(\alpha).$$

Donc α est un point de torsion pour ψ , ce qui contredit l'hypothèse faite sur α . En particulier, en notant $\sigma_{\mathfrak{p}}$ le symbole d'Artin associé à $\mathfrak{p}$, on obtient :

$$\psi_{m^{\nu l}}(\psi_{m^\nu}(\alpha) - \sigma_{\mathfrak{p}}^s(\alpha)) \neq 0.$$

On peut donc appliquer la formule du produit (cf. th. 3 du §3 du chap. XII de [Art67]) :

$$0 = \sum_{w \in \mathcal{M}_L} \deg w \log_q |\psi_{m^{\nu l}}(\psi_{m^\nu}(\alpha) - \sigma_{\mathfrak{p}}^s(\alpha))|_w.$$

Ainsi, en appliquant la proposition 2.4 et le lemme 2.7 avec

$$l := (2\gamma(\psi) [K:k] + 1) [E_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] - 1,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{w|v} \deg w (-(l+1)) + \sum_{w \in \mathcal{M}_L} \deg w \log_q \max\{1, |\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha)|_w\} \\ + \sum_{w \in \mathcal{M}_L} \deg w \log_q \max\{1, |\psi_{m^{\nu l}}(\sigma_{\mathfrak{p}}^s(\alpha))|_w\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Or, pour toute place $u|v$ de E , on a:

$$\sum_{w|u} \deg w = [L : E] \deg u = [L : E] \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q}$$

car l'extension L/E est non ramifiée et l'extension L/K est galoisienne. De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{u|v} (l+1) [L : E] \deg u \\ &= (2\gamma(\psi) [K : k] + 1) \sum_{u|v} [E_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] [L : E] \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} \\ &\geq (2\gamma(\psi) [K : k] + 1) [L : K] \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

En divisant les membres de l'inégalité (13) par $[L : k]$, on obtient:

$$0 \leq -\frac{(2\gamma(\psi) [K : k] + 1) \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}{[K : k]} + h(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha)) + h(\psi_{m^{\nu l}}(\sigma_{\mathfrak{p}}^s(\alpha))),$$

d'où

$$\frac{(2\gamma(\psi) [K : k] + 1) \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}{[K : k]} \leq 2\gamma(\psi) + \widehat{h}_{\psi}(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha)) + \widehat{h}_{\psi}(\psi_{m^{\nu l}}(\alpha))$$

car pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a $|h(\alpha) - \widehat{h}_{\psi}(\alpha)| \leq \gamma(\psi)$, et la hauteur de Weil est invariante sous l'action du groupe de Galois. Ainsi:

$$\frac{(2\gamma(\psi) [K : k] + 1) \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}{[K : k]} \leq 2\gamma(\psi) + 2q^{n(l+1)} \widehat{h}_{\psi}(\alpha),$$

d'où

$$\frac{1}{[K : k]} \leq 2q^{n(l+1)} \widehat{h}_{\psi}(\alpha).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} n(l+1) &= \mathfrak{h} d (q^d - 1) \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} (2\gamma(\psi) [K : k] + 1) [E_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] \\ &\leq 3\mathfrak{h} d (q^d - 1) \gamma(\psi) [E_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] \deg_{\mathcal{O}_E} \mathfrak{q} [K : k] \\ &\leq 3\mathfrak{h} d (q^d - 1) \gamma(\psi) \deg v d_1^2 [K : k]. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. $\square$

Le résultat qui suit donne une minoration de la hauteur normalisée dans le cas ramifié et utilise la notation $H_{\mathfrak{q}}$ définie dans la proposition 2.5.

Proposition 2.9. — *On suppose que l'extension L/E est ramifiée au-dessus de $\mathfrak{q}$. Soit $\eta \in H_{\mathfrak{q}}$ tel que $\eta \neq \text{id}$. Alors, pour tout $\alpha \in L$ tel que $\alpha - \eta(\alpha) \notin \psi[\mathfrak{m}^\infty]$, on a :*

$$\widehat{h}_\psi(\alpha) \geq \frac{q^{-c_3 \deg v d_1^2 [K:k]}}{2 [K:k]}.$$

Démonstration. — Cette preuve est similaire à celle de la proposition 2.8 à la différence qu'on utilise la proposition 2.6 à la place de la proposition 2.4. Soit $\alpha \in L$ tel que $\alpha - \eta(\alpha) \notin \psi[\mathfrak{m}^\infty]$. Alors, en posant :

$$l := (2\gamma(\psi) [K:k] + 1) [E_{\mathfrak{q}} : K_{\mathfrak{p}}] - 1,$$

on a :

$$\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha) - \psi_{m^{\nu(l+1)}}(\eta(\alpha)) \neq 0.$$

On peut donc appliquer la formule du produit (cf. th. 3 du §3 du chap. XII de [Art67]), i.e. :

$$0 = \sum_{w \in \mathcal{M}_L} \deg w \log_q |\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha) - \psi_{m^{\nu(l+1)}}(\eta(\alpha))|_w.$$

Ainsi, en appliquant la proposition 2.6 et le lemme 2.7, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leq & \sum_{w|v} \deg w \, (-(l+1) e_{\mathfrak{q}}(L/E)) \\ & + \sum_{w \in \mathcal{M}_L} \deg w \log_q \max\{1, |\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha)|_w\} \\ & + \sum_{w \in \mathcal{M}_L} \deg w \log_q \max\{1, |\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\eta(\alpha))|_w\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Comme dans la preuve de la proposition 2.8, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{w|v} (l+1) \deg w e_{\mathfrak{q}}(L/E) &= \sum_{u|v} (l+1) [L:E] \deg u \\ &\geq (2\gamma(\psi) [K:k] + 1) [L:K] \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Donc, en divisant les membres de l'inégalité (14) par $[L:k]$, on obtient :

$$0 \leq -\frac{(2\gamma(\psi) [K:k] + 1) \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}{[K:k]} + h(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha)) + h(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\eta(\alpha))),$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{(2\gamma(\psi)[K:k] + 1) \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}}{[K:k]} &\leq 2\gamma(\psi) + 2\widehat{h}_\psi(\psi_{m^{\nu(l+1)}}(\alpha)) \\ &= 2\gamma(\psi) + 2q^{n(l+1)}\widehat{h}_\psi(\alpha). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient:

$$\frac{1}{[K:k]} \leq 2q^{n(l+1)}\widehat{h}_\psi(\alpha),$$

ce qui achève la preuve car

$$n(l+1) \leq 3\mathfrak{h}d(q^d - 1)\gamma(\psi) \deg v d_1^2 [K:k].$$

□

Nous pouvons regrouper les deux propositions précédentes en un seul théorème qui fournit une minoration conditionnelle de la hauteur normalisée.

Théorème 2.10 (de minoration conditionnelle)

Soient F/k une extension CM finie et ψ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de signe normalisé. Soient K/k une extension finie telle que ψ soit défini sur K , L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois G , H un sous-groupe du centre de G et $E \subseteq L$ le sous-corps fixé par H . Soient $d_1 > 0$ un entier et v une place finie de K . On suppose que pour toute place $w|v$ de E , on ait $[E_w : K_v] \leq d_1$. Soient $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_K$ associé à la place v et $\mathfrak{m} := \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_F$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_F$ en-dessous de $\mathfrak{p}$. Soit $\alpha \in L$ non de torsion pour ψ . On suppose que:

$$\forall \eta \in \text{Gal}(L/E), \quad \eta(\alpha) - \alpha \notin \psi[\mathfrak{m}^\infty] \setminus \{0\}. \quad (15)$$

Alors:

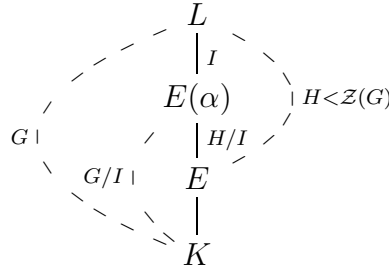
$$\widehat{h}_\psi(\alpha) \geq \frac{q^{-c_3 \deg v d_1^2 [K:k]}}{2[K:k]}.$$

Démonstration. — Soit $\alpha \notin \psi(L)_{\text{tors}}$ un élément de L qui vérifie la condition (15). Soit I le groupe de Galois de $L/E(\alpha)$. Comme $H := \text{Gal}(L/E)$ est un sous-groupe du centre de G , H est abélien et est un sous-groupe normal de G . De même, comme I est un sous-groupe de H , I est abélien et est un sous-groupe normal de G . Ainsi, H/I est un sous-groupe

normal de G/I et:

$$(G/I)/(H/I) \simeq G/H.$$

De plus, comme H est inclus dans le centre de G , par passage au quotient H/I est un sous-groupe du centre de G/I . Or $G/I \simeq \text{Gal}(E(\alpha)/K)$ et $H/I \simeq \text{Gal}(E(\alpha)/E)$. On peut donc supposer que $L := E(\alpha)$ ce qu'on fera désormais. On illustre la tour d'extensions que nous venons de décrire par le diagramme suivant:



Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de $\mathfrak{p}$.

1. Supposons que l'extension $E(\alpha)/E$ soit non ramifiée en $\mathfrak{q}$, alors, d'après la proposition 2.8, on a:

$$\widehat{h}_{\psi}(\alpha) \geq \frac{q^{-c_3 \deg v d_1^2 [K:k]}}{2 [K:k]}.$$

2. Supposons maintenant que l'extension $E(\alpha)/E$ soit ramifiée en $\mathfrak{q}$. Soit $\eta \in H_{\mathfrak{q}} \setminus \{\text{id}\}$ (on rappelle que $H_{\mathfrak{q}}$ est non trivial d'après la proposition 2.5). Comme $E = L(\alpha)$, on a $\eta(\alpha) - \alpha \neq 0$. Alors d'après la condition (15), on a $\eta(\alpha) - \alpha \notin \psi[\mathfrak{m}^{\infty}]$. On peut donc appliquer la proposition 2.9, d'où:

$$\widehat{h}_{\psi}(\alpha) \geq \frac{q^{-c_3 \deg v d_1^2 [K:k]}}{2 [K:k]}.$$

On obtient ainsi le résultat annoncé. $\square$

2.3. Principe des tiroirs dans $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m})^{\times}$. —

Le but de ce paragraphe est d'établir la proposition 2.13 qui nous permettra au §2.4 d'achever la preuve du théorème 2.

Soient F/k une extension finie de degré r , $\mathcal{O}_F$ la fermeture intégrale de A dans F , $\mathfrak{n}$ un idéal non nul et principal de $\mathcal{O}_F$ pour lequel on fixe un générateur $m \in \mathcal{O}_F$. Soient $\mathcal{R}_0$ un système de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}$

et $e > 0$ un entier. Pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, on note $\bar{a}$ l'image canonique de a dans $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e$.

Le lemme suivant permet de construire un système explicite de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e$ à partir du système $\mathcal{R}_0$ de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}$.

Lemme 2.11. — *L'ensemble $\mathcal{R} := \left\{ \sum_{i=0}^{e-1} \lambda_i m^i \mid \lambda_i \in \mathcal{R}_0 \right\}$ est un système de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e$.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que:

$$\#(\mathcal{R}_0)^e = \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})^e = q^{e \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n}} = q^{\deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n}^e} = \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e).$$

Il suffit donc de montrer que les éléments de $\mathcal{R}$ sont deux-à-deux distincts modulo $\mathfrak{n}^e$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1}, \mu_0, \dots, \mu_{e-1} \in \mathcal{R}_0$. Montrons donc que si:

$$\sum_{i=0}^{e-1} \lambda_i m^i \equiv \sum_{i=0}^{e-1} \mu_i m^i \pmod{\mathfrak{n}^e},$$

alors, pour tout $i \in \{0, \dots, e-1\}$, on a $\lambda_i = \mu_i$. En effet, pour tout $j \in \{1, \dots, e-1\}$, on a:

$$\sum_{i=0}^{e-1} \lambda_i m^i \equiv \sum_{i=0}^{e-1} \mu_i m^i \pmod{\mathfrak{n}^j} \iff \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i m^i \equiv \sum_{i=0}^{j-1} \mu_i m^i \pmod{\mathfrak{n}^j}.$$

On en déduit successivement $\lambda_0 = \mu_0, \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_{e-1} = \mu_{e-1}$. $\square$

Soit N le nombre d'éléments de $\mathcal{O}_F$ de degré (en $\mathcal{O}_F$) < 2 (qui est fini d'après le lemme 5.6 de [Hay79]). La proposition suivante, qui repose sur le principe des tiroirs, est un des ingrédients clefs qui nous permettra d'éliminer l'hypothèse technique (15) p. 26.

Proposition 2.12. — *Soient $B > 1$ un entier et H un sous-groupe de $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^\times$ d'indice $< B$. On suppose que $e \geq \log_q(2NB)$. Alors, il existe deux éléments a et b de $\mathcal{O}_F$ tels que $\bar{a} \in H, \bar{b} \in H$ et:*

$$2 < q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} < 2NBq^{d_m}$$

où $d_m := \max_{\lambda \in \mathcal{R}_0} \{\deg_{\mathcal{O}_F} \lambda\}$.

Démonstration. — D'après le lemme 2.11, l'ensemble:

$$\mathcal{R} := \left\{ \sum_{i=0}^{e-1} \lambda_i m^i \mid \lambda_i \in \mathcal{R}_0 \right\}$$

est un système de représentants des classes d'équivalence de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e$.

Posons:

$$c := \left\lceil \frac{\log_q(2NB)}{\deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n}} \right\rceil.$$

Soit

$$\Gamma := \left\{ \sum_{i=c}^{e-1} \lambda_i m^i \mid \lambda_i \in \mathcal{R}_0 \right\}.$$

Pour tout $\alpha \in \Gamma$, définissons

$$I_\alpha := \left\{ \sum_{i=0}^{c-1} \lambda_i m^i + \alpha \mid \lambda_i \in \mathcal{R}_0 \right\}.$$

Ainsi, $\mathcal{R}$ est la réunion disjointe de tous les I_α pour α parcourant Γ . Soit

$$\Lambda := \{a \in \mathcal{O}_F \mid \bar{a} \in H\}.$$

Alors, H est en bijection avec $\Lambda \cap \mathcal{R}$ qui est la réunion disjointe des $\Lambda \cap I_\alpha$ pour $\alpha \in \Gamma$. Supposons que pour tout $\alpha \in \Gamma$, on ait $\#(\Lambda \cap I_\alpha) \leq N$. Alors:

$$\#H = \#(\Lambda \cap \mathcal{R}) = \sum_{\alpha \in \Gamma} \#(\Lambda \cap I_\alpha) \leq N \# \Gamma.$$

Or, $\# \Gamma = q^{(e-c) \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n}}$ (car $e \geq \log_q(2NB) \geq c$), d'où:

$$\#H \leq N q^{(e-c) \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{n}} = N \frac{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)}{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^c)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} B > [(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^\times : H] &= \frac{\#((\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^\times)}{\#(H)} \\ &\geq \frac{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^c)}{N} \frac{\#((\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^\times)}{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)} \geq \frac{1}{2} \frac{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)}{N} \end{aligned}$$

car, d'après la proposition 1.6 de [Ros02], on a:

$$\#((\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e)^\times) = \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e) \left(1 - \frac{1}{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n})} \right) \geq \frac{1}{2} \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{n}^e).$$

On obtient donc $2NB > q^{c \deg_{\mathcal{O}_F} \mathbf{n}}$, ce qui contredit le choix de c . Il existe alors $\alpha \in \Gamma$ tel que $\#(\Lambda \cap I_\alpha) \geq N + 1$. On peut donc trouver a et b distincts dans $\Lambda \cap I_\alpha$ tels que $\deg_{\mathcal{O}_F}(b - a) \geq 2$. En effet, si a est fixé dans $\Lambda \cap I_\alpha$, le cardinal de l'ensemble $\{b - a \mid b \in \Lambda \cap I_\alpha\}$ est supérieur ou égal à $N + 1$. Or, il n'y a que N éléments de $\mathcal{O}_F$ de degré ≤ 1 . Donc il existe bien $b \in \Lambda \cap I_\alpha$ tel que $\deg_{\mathcal{O}_F}(b - a) \geq 2$. Et comme $a, b \in I_\alpha$, on a également:

$$\deg_{\mathcal{O}_F}(b - a) \leq (c - 1) \deg_{\mathcal{O}_F} \mathbf{n} + d_m.$$

□

On suppose de plus que l'extension F/k est CM. Soient φ un $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld de rang r , $\tilde{F} := F \cap \overline{\mathbb{F}}_q$ le corps des constantes de F , $\varsigma := \log_q \# \tilde{F}$ (i.e. $\tilde{F} = \mathbb{F}_{q^\varsigma}$) et $\mathfrak{h}$ le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$. Soient ∞' l'unique place de F au-dessus de ∞ et $d := \deg \infty'$ le degré de ∞' sur $\mathbb{F}_q$. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal premier non nul de $\mathcal{O}_F$, alors $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$ est un idéal principal dont on note m un générateur. La proposition suivante est un raffinement du résultat précédent (on rappelle que la notation μ_φ est définie au §1.6).

Proposition 2.13. — *Soient $B > 1$ un entier et H un sous-groupe de $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}e})^\times$ d'indice $< B$. On suppose que $e \geq \log_q(2Bq^{\varsigma(d+1)})$. Alors, il existe deux éléments a et b de $\mathcal{O}_F$ tels que $\bar{a} \in H$, $\bar{b} \in H$, $\deg_{\mathcal{O}_F} a = \deg_{\mathcal{O}_F} b$, $\mu_\varphi(a) = \mu_\varphi(b)$ et:*

$$2 < q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} < 2Bq^{\varsigma(d+1)+d_m}$$

où $d_m := \max_{\lambda \in \mathcal{R}_0} \{\deg_{\mathcal{O}_F} \lambda\}$.

Démonstration. — D'après la proposition 1.4.9 de [Sti09], le nombre N d'éléments de $\mathcal{O}_F$ de degré < 2 vérifie $N \leq q^{\varsigma(d+1)}$.

D'après la proposition 2.12, il existe a' et b' dans $\mathcal{O}_F$ tels que $\bar{a'} \in H$, $\bar{b'} \in H$ et:

$$2 < q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b'-a')} < 2Bq^{\varsigma(d+1)+d_m}.$$

Soit $\lambda \in \mathcal{O}_F$ de degré suffisamment grand, i.e. :

$$\deg_{\mathcal{O}_F} \lambda > \max\{\deg_{\mathcal{O}_F} a', \deg_{\mathcal{O}_F} b'\}.$$

Posons $a = a' + \lambda m^e$ et $b = b' + \lambda m^e$, alors $\bar{a} \in H$, $\bar{b} \in H$,

$$\deg_{\mathcal{O}_F} b = \deg_{\mathcal{O}_F} a = \deg_{\mathcal{O}_F} \lambda + e \deg_{\mathcal{O}_F} m$$

et

$$\deg_{\mathcal{O}_F}(b - a) = \deg_{\mathcal{O}_F}(b' - a') < \deg_{\mathcal{O}_F} a,$$

d'où

$$\deg_{\tau} \varphi_a = r \deg_{\mathcal{O}_F} a > r \deg_{\mathcal{O}_F}(b - a) = \deg_{\tau} \varphi_{b-a}.$$

Or $\varphi_{b-a} = \varphi_b - \varphi_a$, donc $\mu_{\varphi}(a) = \mu_{\varphi}(b)$. $\square$

Le lemme suivant établit une majoration de la constante d_m qui apparaît dans la proposition 2.13 en fonction d'une base fixée du A -module $\mathcal{O}_F$.

Lemme 2.14. — *Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathcal{O}_F$ en tant que A -module. Il existe un système de représentants $\mathcal{R}_0$ de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^h$ tel que:*

$$d_m := \max_{\lambda \in \mathcal{R}_0} \{\deg_{\mathcal{O}_F} \lambda\} \leq d_{\mathcal{O}_F} + \mathfrak{h} r \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}$$

où $d_{\mathcal{O}_F} := \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_{\mathcal{O}_F} e_i\}$.

Démonstration. — Soit $m_0 \in A$ le générateur unitaire de l'idéal premier de A en-dessous de $\mathfrak{m}$ (i.e. $(m_0) = A \cap \mathfrak{m}$). Comme $m_0 \in \mathfrak{m}$, on a $m_0^h \in \mathfrak{m}^h$, donc $\mathcal{O}_F/(m_0^h \mathcal{O}_F)$ se surjecte sur $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^h$. Ainsi, tout système de représentants de $\mathcal{O}_F/(m_0^h \mathcal{O}_F)$ contient un système de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^h$. Or, l'ensemble $\{a \in A \mid \deg_A a < \deg_A m_0^h\}$ est un système de représentants de $A/(m_0^h)$. Donc l'ensemble $\mathcal{R}_0$ des éléments $\lambda \in \mathcal{O}_F$ tel que $\lambda = a_1 e_1 + \dots + a_r e_r$ avec les $a_i \in A$ de degré $< \deg_A m_0^h$ forme un système de représentants de $\mathcal{O}_F/(m_0^h \mathcal{O}_F)$. De plus, pour tout $a \in A$, on a $\deg_{\mathcal{O}_F} a = r \deg_A a$ car:

$$\mathcal{O}_F/(a \mathcal{O}_F) \simeq (A/(a))^r.$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathcal{R}_0$, on a :

$$\begin{aligned}
 \deg_{\mathcal{O}_F} \lambda &= \deg_{\mathcal{O}_F} (a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r) \leq \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_{\mathcal{O}_F} a_i e_i\} \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_{\mathcal{O}_F} e_i\} + \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_{\mathcal{O}_F} a_i\} \\
 &\leq d_{\mathcal{O}_F} + r \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_A a_i\} \\
 &\leq d_{\mathcal{O}_F} + r \deg_A m_0^{\mathfrak{h}} \\
 &\leq d_{\mathcal{O}_F} + \mathfrak{h} r \deg_A m_0.
 \end{aligned}$$

Or, $\deg_A m_0 \leq \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}$ (car $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}$ est une extension finie de $A/(m_0)$), ce qui achève la preuve. $\square$

2.4. Démonstration du théorème 2. —

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 2.

Démonstration du théorème 2. — Rappelons que comme ψ est de signe normalisé son corps des coefficients est H_F^+ (cf. §1.6). Donc $K \supset H_F^+ \supset F$. Conformément aux notations de la page 16, notons $\mathfrak{p}$ l'idéal de $\mathcal{O}_K$ associé à la place v et $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_E$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. On pose $\mathfrak{m} := \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_F$, $\tilde{F} := F \cap \overline{\mathbb{F}}_q$ et $\varsigma := \log_q \# \tilde{F}$. Soient $\mathfrak{h}$ le nombre de classes de $\mathcal{O}_F$ et m un générateur de l'idéal principal $\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$. Fixons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathcal{O}_F$ en tant que A -module et $\mathcal{R}_0$ un système de représentants de $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}}$ tel que :

$$d_m := \max_{\lambda \in \mathcal{R}_0} \{\deg_{\mathcal{O}_F} \lambda\} \leq d_{\mathcal{O}_F} + \mathfrak{h} r \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m}$$

où $d_{\mathcal{O}_F} := \max_{1 \leq i \leq r} \{\deg_{\mathcal{O}_F} e_i\}$ (un tel système de représentants existe d'après le lemme 2.14). Soit $\alpha \in L$ non de torsion pour ψ . Soit i un entier suffisamment grand, *i.e.* tel que :

$$L \cap H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^\infty]) = L \cap H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}]) \quad (16)$$

et

$$\nu i \geq \log_q (4 d_1 [K : H_F^+] q^{\varsigma(d+1)}).$$

Alors, en posant :

$$H_1 := \text{Gal}(E(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}]) / E),$$

on a

$$H_1 \simeq \text{Gal}(H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}]) / E \cap H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{\mathfrak{h}\nu i}])).$$

On peut donc voir H_1 comme un sous-groupe de $\text{Gal}(H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{h\nu i}]) / H_F^+)$. Posons:

$$G_1 := \text{Gal}(H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{h\nu i}]) / H_F^+).$$

On illustre la tour d'extensions que nous venons de décrire par le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 & E(\psi[\mathfrak{m}^{h\nu i}]) & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 E & \xrightarrow{H_1} & H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{h\nu i}]) \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 & E \cap H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^\infty]) & \\
 & \downarrow & \\
 & H_F^+ & \text{---} \text{---} \text{---} G_1
 \end{array}$$

D'après la proposition 1.5, l'extension $H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{h\nu i}]) / H_F^+$ est totalement ramifiée en tout premier de H_F^+ au-dessus de $\mathfrak{m}$, ainsi:

$$[E \cap H_F^+(\psi[\mathfrak{m}^{h\nu i}]) : H_F^+] \leq e_q(E/H_F^+) \leq d_1 [K : H_F^+].$$

D'autre part, d'après l'isomorphisme (6) p. 12, on a:

$$G_1 \simeq (\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^{h\nu i})^\times.$$

On peut donc voir H_1 comme un sous-groupe de $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^{h\nu i})^\times$ et lui appliquer la proposition 2.13 avec $B := d_1 [K : H_F^+] + 1$. Ainsi, en notant pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, $\bar{a}$ l'image canonique de a dans $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^{h\nu i}$, on obtient qu'il existe deux éléments a et b de $\mathcal{O}_F$ tels que $\bar{a} \in H_1$, $\bar{b} \in H_1$, $\deg_{\mathcal{O}_F} a = \deg_{\mathcal{O}_F} b$, $\mu_\psi(a) = \mu_\psi(b)$ et:

$$2 < q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} < 2Bq^{\zeta(d+1)+d_m}.$$

De plus, d'après l'égalité (5) p. 12, en notant $\sigma_a \in H_1$ et $\sigma_b \in H_1$ les symboles d'Artin associés, respectivement, aux idéaux (a) et (b) de $\mathcal{O}_F$, pour tout $\lambda \in \psi[\mathfrak{m}^{h\nu i}]$, on a:

$$\mu_\psi(a) \sigma_a(\lambda) = \psi_a(\lambda) \tag{17}$$

et

$$\mu_\psi(b) \sigma_b(\lambda) = \psi_b(\lambda). \tag{18}$$

Soient $\tilde{\sigma}_a$ et $\tilde{\sigma}_b$ des prolongements respectifs de σ_a et σ_b à $L(\psi[\mathfrak{m}^{h\nu i}])$. Ainsi $\tilde{\sigma}_a$ et $\tilde{\sigma}_b$ sont des éléments de $\text{Gal}(L(\psi[\mathfrak{m}^{h\nu i}]) / E)$. On pose:

$$\beta := (\mu_\psi(b) \tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a) \tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\alpha) - \psi_{(b-a)q^d-1}(\alpha) \in L. \tag{19}$$

On a:

$$\begin{aligned}\widehat{h}_\psi(\beta) &= \widehat{h}_\psi\left((\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\alpha) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\alpha)\right) \\ &\leq \widehat{h}_\psi\left((\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\alpha)\right) + \widehat{h}_\psi\left(\psi_{(b-a)q^{d-1}}(\alpha)\right).\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}(\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\alpha) &= \sum_{j=0}^{q^d-1} (-1)^j \binom{q^d-1}{j} \mu_\psi(a)^j \mu_\psi(b)^{q^d-1-j} \tilde{\sigma}_b^{q^d-1-j} \circ \tilde{\sigma}_a^j(\alpha) \\ &\stackrel{\mu_\psi(a)=\mu_\psi(b)}{=} \sum_{j=0}^{q^d-1} (-1)^j \binom{q^d-1}{j} \mu_\psi(a)^{q^d-1} \tilde{\sigma}_b^{q^d-1-j} \circ \tilde{\sigma}_a^j(\alpha) \\ &= \sum_{j=0}^{q^d-1} (-1)^j \binom{q^d-1}{j} \tilde{\sigma}_b^{q^d-1-j} \circ \tilde{\sigma}_a^j(\alpha)\end{aligned}$$

car $\mu_\psi(a) \in \mathbb{F}_{q^d}^*$ d'après la relation (4) p. 10. Comme pour tout $x \in \bar{k}$ et tout $\zeta \in \mathbb{F}_q^*$ on a ⁽¹⁾ $\widehat{h}_\psi(\zeta x) = \widehat{h}_\psi(x)$, on en déduit:

$$\widehat{h}_\psi\left((\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\alpha)\right) \leq q^d \widehat{h}_\psi(\alpha). \quad (20)$$

Par ailleurs,

$$\widehat{h}_\psi\left(\psi_{(b-a)q^{d-1}}(\alpha)\right) = q^{(q^d-1)\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} \widehat{h}_\psi(\alpha). \quad (21)$$

En regroupant les relations ci-dessus, on obtient:

$$\widehat{h}_\psi(\beta) \leq \left(q^d + q^{(q^d-1)\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)}\right) \widehat{h}_\psi(\alpha) \leq 2 \left(q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)}\right)^{q^d-1} \widehat{h}_\psi(\alpha).$$

Or, par choix de a et b , on a:

$$2 < q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} < 2Bq^{\zeta(d+1)+d_m},$$

1. En effet, on a: $\widehat{h}_\psi(\zeta x) = \widehat{h}_\psi(\psi_\zeta(x)) = q^{\deg_{\mathcal{O}_F} \zeta} \widehat{h}_\psi(x) = \widehat{h}_\psi(x)$.

On pourrait aussi remarquer que $\binom{q^d-1}{j} = (-1)^j$ dans $\mathbb{F}_q$, car $\binom{q^d-1}{0} = 1$ et:

$$\binom{q^d-1}{j} + \binom{q^d-1}{j+1} = \binom{q^d}{j+1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

avec $B = d_1 [K : H_F^+] + 1$, ainsi:

$$\begin{aligned} \widehat{h}_\psi(\beta) &\leq 2 \left(2 (d_1 [K : H_F^+] + 1) q^{\varsigma(d+1)+d_m} \right)^{q^d-1} \widehat{h}_\psi(\alpha) \\ &\leq 2 \left(4 d_1 [K : k] q^{\varsigma(d+1)+d_m} \right)^{q^d-1} \widehat{h}_\psi(\alpha). \end{aligned}$$

Supposons dans un premier temps que les hypothèses du théorème 2.10 (avec α remplacé par β) soient vérifiées. D'après ce théorème on a alors:

$$\widehat{h}_\psi(\beta) \geq \left(2 [K : k] q^{3\mathfrak{h}d(q^d-1)\gamma(\psi) \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} d_1^2 [K:k]} \right)^{-1}$$

et donc:

$$\begin{aligned} \widehat{h}_\psi(\alpha) &\geq \\ &\left(4 (4 d_1)^{q^d-1} [K : k]^{q^d} q^{(q^d-1)(3\mathfrak{h}d\gamma(\psi) d_1^2 \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} [K:k] + \varsigma(d+1)+d_m)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} d_m &\leq d_{\mathcal{O}_F} + \mathfrak{h} r \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m} \leq 2 \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \mathfrak{h} r \deg_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{m} \\ &\leq 2 \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \mathfrak{h} r \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &3\mathfrak{h}d\gamma(\psi) d_1^2 \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} [K : k] + \varsigma(d+1) + d_m \\ &\leq 3\mathfrak{h}d\gamma(\psi) d_1^2 \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} [K : k] + 4 \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \mathfrak{h} r \varsigma \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} \\ &\leq \mathfrak{h} \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} (3d\gamma(\psi) d_1^2 [K : k] + 4r\varsigma \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\}) \\ &\leq 7\mathfrak{h}r\varsigma \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi) d_1^2 \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} [K : k]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\widehat{h}_\psi(\alpha) \geq \left(4 (4 d_1)^{q^d-1} [K : k]^{q^d} q^{7\mathfrak{h}r\varsigma(q^d-1) \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi) d_1^2 \deg_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{p} [K:k]} \right)^{-1},$$

ce qui nous donne le résultat énoncé en posant:

$$c_1 := 7\mathfrak{h}r\varsigma(q^d-1) \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi),$$

et $c_2 := 4^{q^d}$. Il est clair que les constantes c_1 et c_2 sont positives et ne dépendent que de ψ . Plus précisément, elles ne dépendent que de $\mathfrak{h}$, $d_{\mathcal{O}_F}$, r , d et $\gamma(\psi)$. Or $\gamma(\psi)$ ne dépend que de ψ et $\mathfrak{h}$, $d_{\mathcal{O}_F}$, r et d ne dépendent que de l'anneau $\mathcal{O}_F$, donc de ψ car $\mathcal{O}_F$ est l'anneau des endomorphismes de ψ .

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que β n'est pas un point de torsion pour ψ et que β vérifie la condition (15) du théorème 2.10: pour tout $\eta \in \text{Gal}(L/E)$, on a $\eta(\beta) - \beta \notin \psi[\mathbf{m}^\infty] \setminus \{0\}$. Supposons par l'absurde que β soit un point de torsion pour ψ . Dans ce cas, on a d'après la définition (19) p. 33 de β et les relations (20) et (21) p. 34:

$$\begin{aligned} q^{(q^d-1)\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} \widehat{h}_\psi(\alpha) &= \widehat{h}_\psi\left(\psi_{(b-a)q^{d-1}}(\alpha)\right) \\ &= \widehat{h}_\psi\left((\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\alpha)\right) \leq q^d \widehat{h}_\psi(\alpha). \end{aligned}$$

Or, $q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} > 2$ et $2^{q^d-1} \geq q^d$ donc $\widehat{h}_\psi(\alpha) = 0$, ce qui contredit le fait que α ne soit pas un point de torsion pour ψ . Montrons maintenant que β vérifie la condition (15) du théorème 2.10. Pour cela supposons par l'absurde qu'il existe $\eta \in \text{Gal}(L/E)$ tel que $\theta := \eta(\beta) - \beta \in L \cap \psi[\mathbf{m}^\infty] \setminus \{0\}$. Alors, en posant $\delta := \eta(\alpha) - \alpha \in L$, on a d'après la définition (19) p. 33 de β et en utilisant le fait que $\text{Gal}(L/E)$ est abélien:

$$\begin{aligned} \theta = \eta(\beta) - \beta &= \eta\left((\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\alpha) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\alpha)\right) \\ &\quad - (\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\alpha) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\alpha) \\ &= (\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\eta(\alpha)) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\eta(\alpha)) \\ &\quad - (\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\alpha) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\alpha) \\ &= (\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\eta(\alpha) - \alpha) \\ &\quad - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\eta(\alpha) - \alpha) \\ &= (\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\delta) - \psi_{(b-a)q^{d-1}}(\delta). \end{aligned}$$

Comme θ est un point de torsion pour ψ , on a d'après les relations (20) et (21) p. 34 (avec α remplacé par δ):

$$\begin{aligned} q^{(q^d-1)\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} \widehat{h}_\psi(\delta) &= \widehat{h}_\psi\left(\psi_{(b-a)q^{d-1}}(\delta)\right) \\ &= \widehat{h}_\psi\left((\mu_\psi(b)\tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a)\tilde{\sigma}_a)^{q^{d-1}}(\delta)\right) \\ &\leq q^d \widehat{h}_\psi(\delta). \end{aligned}$$

Donc δ est un point de torsion pour ψ car $q^{\deg_{\mathcal{O}_F}(b-a)} > 2$, et $2^{q^d-1} \geq q^d$. D'après le lemme 1.1, il existe $\delta_1 \in L$ et $\delta_2 \in L$ deux points de torsion

de ψ tels que $\delta = \delta_1 + \delta_2$ avec δ_1 d'ordre une puissance de $\mathfrak{m}$ et δ_2 d'ordre premier à $\mathfrak{m}$. Remarquons que $\delta_1 \in \psi[\mathfrak{m}^{h^{\nu i}}]$ par choix de i (cf. relation (16)). Ainsi, en utilisant les relations (17) et (18) p. 33, on obtient:

$$(\mu_\psi(b) \tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a) \tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\delta_1) - \psi_{(b-a)^{q^d-1}}(\delta_1) = 0.$$

Donc

$$\theta = (\mu_\psi(b) \tilde{\sigma}_b - \mu_\psi(a) \tilde{\sigma}_a)^{q^d-1}(\delta_2) - \psi_{(b-a)^{q^d-1}}(\delta_2).$$

Puisque δ_2 est d'ordre premier à $\mathfrak{m}$, on en déduit que θ est également d'ordre premier à $\mathfrak{m}$. Il existe donc un idéal non nul $\mathfrak{b}$ de $\mathcal{O}_F$ premier à $\mathfrak{m}$ tel que $\theta \in \psi[\mathfrak{b}]$. D'autre part, θ est d'ordre une puissance de $\mathfrak{m}$ par hypothèse. Il existe donc un entier $j > 0$ tel que $\theta \in \psi[\mathfrak{m}^j]$. Mais les idéaux $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{m}$ étant premiers entre eux, il en est de même de $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{m}^j$. Ainsi, il existe $u \in \mathfrak{b}$ et $v \in \mathfrak{m}^j$ tels que $u + v = 1$. Or, $\psi_u(\theta) = 0$ car $\theta \in \psi[\mathfrak{b}]$ et $\psi_v(\theta) = 0$ car $\theta \in \psi[\mathfrak{m}^j]$. D'où

$$\theta = \psi_1(\theta) = \psi_u(\theta) + \psi_v(\theta) = 0.$$

Ce qui contredit l'hypothèse suivant laquelle $\theta \neq 0$. Donc β vérifie bien la condition (15) du théorème 2.10, ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

3. Démonstration du théorème 1

Dans ce paragraphe nous montrons le résultat principal.

Démonstration du théorème 1. — Notons r le rang de ϕ , R l'image de $\text{End}(\phi)$ dans $\bar{k}$ via l'isomorphisme (1) p. 7, F le corps des fractions de R . On a vu au §1.4 que F est une extension CM de k de degré r et que R est un ordre de F . On a également vu qu'on pouvait naturellement munir ϕ d'une structure de R -module de rang 1.

Soient ϕ' le R -module de Drinfeld étendu de ϕ (cf. égalité (2) p. 8) et $\mathfrak{C}$ le conducteur de R . D'après le §1.6, le R -module de Drinfeld $\varphi' = \mathfrak{C} * \phi'$ est isogène à ϕ' via $\phi'_\mathfrak{C}$ et tel que $\text{End}(\varphi') = \mathcal{O}_F$. Le R -module φ' peut donc s'étendre en un $\mathcal{O}_F$ -module φ de rang 1. Soient ∞' l'unique place de F au-dessus de la place ∞ , d le degré sur $\mathbb{F}_q$ de la place ∞' , $\pi \in F$ une uniformisante de ∞' et $z \in \bar{k}$ une racine du polynôme $X^{q^d-1} - \mu_\varphi(\pi^{-1})$. Alors, d'après la proposition 1.4, le $\mathcal{O}_F$ -module de Drinfeld $\psi := z \varphi z^{-1}$

est de signe normalisé. De plus, comme $\psi = z \varphi z^{-1}$ et $\varphi' := \mathfrak{C} * \phi'$, le corps $F_\phi(z)$ est un corps de définition de ψ . D'après la proposition 1.9, pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a:

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) = \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) \quad \text{et} \quad \widehat{h}_{\varphi'}(\alpha) = \widehat{h}_\varphi(\alpha).$$

D'autre part, d'après la proposition 1.10, pour tout $\alpha \in \bar{k}$, on a:

$$q^{\deg_R \mathfrak{C}} \widehat{h}_{\phi'}(\alpha) = \widehat{h}_{\varphi'}(\phi'_\mathfrak{C}(\alpha))$$

et

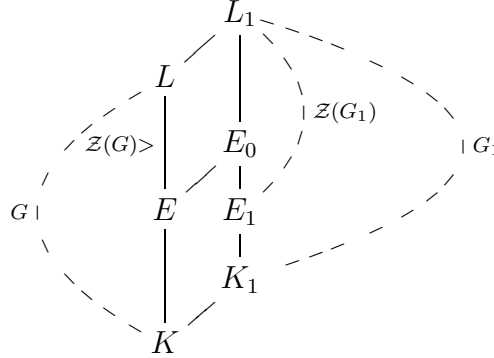
$$\widehat{h}_\varphi(\alpha) = \widehat{h}_\psi(z \alpha)$$

car $\deg_\tau \phi'_\mathfrak{C} = \deg_R \mathfrak{C}$ et $\deg_\tau z = 0$ (puisque $z \in \bar{k}^*$). Ainsi

$$q^{\deg_R \mathfrak{C}} \widehat{h}_\phi(\alpha) = \widehat{h}_\psi(z \phi'_\mathfrak{C}(\alpha)). \quad (22)$$

Nous allons appliquer le théorème 2 à ψ et au point $\beta = z \phi'_\mathfrak{C}(\alpha)$, ce qui nous donnera une minoration de $\widehat{h}_\phi(\alpha)$.

Remarquons tout d'abord qu'on peut supposer que K contient $F_\phi(z)$. En effet, en posant $K_1 := K F_\phi(z)$ et $L_1 := L F_\phi(z)$, l'extension L_1/K_1 est galoisienne. Soient $G_1 := \text{Gal}(L_1/K_1)$ et $E_1 := L_1^{\mathcal{Z}(G_1)}$. On vérifie aisément que si $E_0 := E F_\phi(z)$, alors $\text{Gal}(L_1/E_0)$ est un sous-groupe de $\mathcal{Z}(G_1)$, donc $E_1 \subset E_0$. On illustre la tour d'extensions que nous venons de décrire par le diagramme suivant:



De plus, si v_1 est une place de K_1 au-dessus de v , alors pour toute place w_1 de E_1 au-dessus de v_1 , on a $[(E_1)_{w_1} : (K_1)_{v_1}] \leq d_0$. En effet:

$$[(E_1)_{w_1} : (K_1)_{v_1}] \leq [(E_0)_{w_0} : (K_1)_{v_1}] \leq [E_w : K_v] \leq d_0,$$

où w_0 est une place de E_0 au-dessus de w_1 et w est la restriction de w_0 à E . Ainsi, s'il existe une constante $c'_0 > 0$ telle que pour tout $\alpha \in L_1 \setminus \phi(L_1)_{\text{tors}}$, on ait:

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c'_0 \deg v_1 d_0^2 [K_1:k]},$$

alors, en posant $c_0 := c'_0 [F_\phi(z) : k]^2$, pour tout $\alpha \in L \setminus \phi(L)_{\text{tors}}$, on a:

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) \geq q^{-c_0 \deg v d_0^2 [K:k]}$$

car

$$\deg v_1 \leq [F_\phi(z) : k] \deg v$$

et

$$[K_1 : K] \leq [F_\phi(z) : k] [K : k].$$

Donc, quitte à remplacer (K, L) par (K_1, L_1) , on peut supposer que $F_\phi(z) \subset K$, ce qu'on fera désormais.

Soit L'/K une extension galoisienne finie telle que $L' \subset L$ et notons $G' := \text{Gal}(L'/K)$ son groupe de Galois. Soit $E' := L' \cap E$. Alors, l'extension L'/E' est galoisienne et $\text{Gal}(L'/E')$ est un sous-groupe de $\mathcal{Z}(G')$. De plus, pour toute place $w|v$ de E' , on a $[E'_w : K_v] \leq d_0$. Soit $\beta \in L'$ qui n'est pas un point de torsion de ψ . Alors, d'après le théorème 2, il existe deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 \geq 1$ qui ne dépendent que de ψ (et donc que de ϕ) telles que:

$$\widehat{h}_\psi(\beta) \geq \frac{q^{-c_1 \deg v d_0^2 [K:k]}}{c_2 d_0^{q^d-1} [K : k]^{q^d}}.$$

Or, d'après la preuve du théorème 2, on a:

$$c_1 := 7 \mathfrak{h} r \varsigma (q^d - 1) \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi)$$

et $c_2 := 4^{q^d}$. En majorant grossièrement, on obtient:

$$c_2 d_0^{q^d-1} [K : k]^{q^d} \leq q^{2q^d} q^{(q^d-1)d_0} q^{q^d [K:k]} \leq q^{4q^d d_0 [K:k]}.$$

On en déduit:

$$\widehat{h}_\psi(\beta) \geq q^{-11 \mathfrak{h} r \varsigma q^d \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi) \deg v d_0^2 [K:k]}.$$

Soit $\alpha \in L \setminus \phi(L)_{\text{tors}}$. En substituant β par $z \phi'_\mathfrak{e}(\alpha)$ dans l'inégalité précédente et en utilisant l'égalité (22) p. 38, on obtient:

$$\widehat{h}_\phi(\alpha) = \frac{\widehat{h}_\psi(z \phi'_\mathfrak{e}(\alpha))}{q^{\deg_R \mathfrak{e}}} \geq q^{-11 \mathfrak{h} r \varsigma q^d \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi) \max\{1, \deg_R \mathfrak{e}\} \deg v d_0^2 [K:k]}.$$

D'où le résultat souhaité en posant:

$$c'_0 := 11 \mathfrak{h} r \varsigma q^d \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi) \max\{1, \deg_R \mathfrak{C}\}.$$

□

Remarque 3.1. — Il est possible d'expliciter la constante c_0 du théorème précédent. En effet, en reprenant la preuve du théorème 1, on obtient:

$$c_0 = 11 \mathfrak{h} r \varsigma q^d \max\{1, d_{\mathcal{O}_F}\} \gamma(\psi) \max\{1, \deg_R \mathfrak{C}\} [F_\phi(z) : k]^2.$$

En particulier, dans le cas du module de Carlitz (*i.e.* le A -module de Drinfeld C de rang 1 défini sur k par $C_T = T\tau^0 + \tau$), on obtient que pour toute extension finie K/k et pour tout $\alpha \in K^{\text{ab}} \setminus C(K^{\text{ab}})_{\text{tors}}$, on a:

$$\widehat{h}_C(\alpha) \geq q^{-11 q \gamma(C) [K:k]^2}.$$

Remarque 3.2. — Comme corollaire à leur théorème (*cf.* cor. 1.3 de [ADZ11]), F. Amoroso, S. David et U. Zannier montrent qu'une extension galoisienne infinie de groupe de Galois d'exposant fini a la propriété (B). En effet, dans sa thèse (*cf.* [Che10]), S. Checcoli montre que si K est un corps de nombres et si L/K est une extension galoisienne infinie de groupe de Galois G d'exposant fini, alors les degrés locaux sur L sont uniformément bornés en toutes les places de K . Ensuite S. Checcoli et P. Dèbes (*cf.* [CD13]) ont généralisé ce résultat à certaines classes de corps de fonctions. Une question naturelle est donc de savoir si ce résultat est encore vrai dans le cadre des corps de fonctions en caractéristique positive. Cette question fera l'objet d'un prochain article.

Remerciements

Je souhaite remercier Francesco Amoroso et Vincent Bosser mes directeurs de thèse ainsi que Bruno Anglès pour toutes les discussions que nous avons eues à propos de ce travail.

Références

- [ADZ11] F. AMOROSO, S. DAVID & U. ZANNIER – “On fields with the Property (B)”, Dec. 2011, [hal-00649954] (à paraître dans *Proc. Amer. Math. Soc.*).

- [Art67] E. ARTIN – *Algebraic numbers and algebraic functions*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1967.
- [AZ00] F. AMOROSO & U. ZANNIER – “A relative Dobrowolski lower bound over abelian extensions”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **29** (2000), no. 3, p. 711–727.
- [AZ10] ———, “A uniform relative Dobrowolski’s lower bound over abelian extensions”, *Bull. Lond. Math. Soc.* **42** (2010), no. 3, p. 489–498.
- [BZ01] E. BOMBIERI & U. ZANNIER – “A note on heights in certain infinite extensions of $\mathbb{Q}$ ”, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **12** (2001), p. 5–14 (2002).
- [CD13] S. CHECCOLI & P. DÈBES – “Tchebotarev theorems for function fields”, 2013, [arXiv:1301.1815].
- [Che10] S. CHECCOLI – “On fields of algebraic numbers with bounded local degrees”, Thèse, Université de Pise, 2010.
- [Den92] L. DENIS – “Hauteurs canoniques et modules de Drinfel’d”, *Math. Ann.* **294** (1992), no. 2, p. 213–223.
- [DP08] S. DAVID & A. PACHECO – “Le problème de Lehmer abélien pour un module de Drinfel’d”, *Int. J. Number Theory* **4** (2008), no. 6, p. 1043–1067.
- [Dri74] V. G. DRINFEL’D – “Elliptic modules”, *Mat. Sb. (N.S.)* **94(136)** (1974), no. 4(8), p. 594–627, 656, [Trad. anglaise: “Elliptic modules.”, *Math. U.S.S.R.-Sb.* **23** (1976), no. 4, p. 561–592].
- [Gos96] D. GOSS – *Basic structures of function field arithmetic*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*, vol. 35, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Hay79] D. R. HAYES – “Explicit class field theory in global function fields”, *Studies in algebra and number theory*, *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, vol. 6, Academic Press, New York, 1979, p. 173–217.
- [Hay92] ———, “A brief introduction to Drinfel’d modules”, *The arithmetic of function fields* (Columbus, OH, 1991), *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.*, vol. 2, de Gruyter, Berlin, 1992, p. 1–32.
- [HS00] M. HINDRY & J. H. SILVERMAN – *Diophantine geometry*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000, An introduction.
- [Poo95] B. POONEN – “Local height functions and the Mordell-Weil theorem for Drinfel’d modules”, *Compositio Math.* **97** (1995), no. 3, p. 349–368.
- [Ros02] M. ROSEN – *Number theory in function fields*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 210, Springer-Verlag, New York, 2002.

- [Sti09] H. STICHTENOTH – *Algebraic function fields and codes*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 254, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

August 5, 2014

HUGUES BAUCHÈRE, Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme,
CNRS UMR 6139, Université de Caen, Campus II, BP 5186, 14032
Caen Cedex, France • *E-mail* : `hugues.bauchere@unicaen.fr`
Url : `http://www.math.unicaen.fr/~bauchere/`