



HAL
open science

Construction de la matrice de l'élément fini triangulaire à déformation constante pour l'étude des problèmes à potentiel à partir de critères de consistance

Peter Bettess, Bernard Peseux, Omar Laghrouche

► **To cite this version:**

Peter Bettess, Bernard Peseux, Omar Laghrouche. Construction de la matrice de l'élément fini triangulaire à déformation constante pour l'étude des problèmes à potentiel à partir de critères de consistance. Mécanique Industrielle et Matériaux, 1999, 52 (2), pp.66-70. hal-01005992

HAL Id: hal-01005992

<https://hal.science/hal-01005992>

Submitted on 11 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

CONSTRUCTION DE LA MATRICE DE L'ÉLÉMENT FINI TRIANGULAIRE A DÉFORMATION CONSTANTE POUR L'ÉTUDE DES PROBLÈMES A POTENTIEL A PARTIR DE CRITÈRES DE CONSISTANCE

DERIVATION OF CONSTANT STRAIN TRIANGULAR FINITE ELEMENT FOR POTENTIAL PROBLEMS FROM CONSISTENCY CRITERIA

P. BETTESS*, B. PESEUX**, O. LAGHROUCHE*

ABSTRACT/RÉSUMÉ Ce papier court démontre comment la matrice d'un élément fini triangulaire à trois noeuds peut être construite de façon très simple, pour l'étude des problèmes à potentiels, à partir des conditions de consistance de « mouvement de solide rigide » et de symétrie, sans aucune référence aux fonctions d'interpolation, aux conditions de compatibilité, ou toute autre méthodologie conventionnelle en éléments finis. Cette démarche démontre également que la matrice de l'élément triangulaire à trois noeuds est unique.

This short paper demonstrates how the matrix for a three node triangular potential finite element can be derived very simply from the consistency conditions of "rigid body movement" and symmetry, without any reference to shape functions, compatibility, and all the other conventional finite element methodology. This also demonstrates that conventional three node linear element is unique.

KEY WORDS/MOTS CLÉS Élément fini - Élément triangulaire - Problèmes à potentiel - Matrice « raideur » - Conditions de consistance. *Finite element - Triangular finite element - Potential field problems - "Stiffness" matrix - Consistency conditions.*

1. INTRODUCTION

Depuis quelques années, Bergan et Hanssen [1] ont montré qu'il est possible de générer les matrices d'éléments finis par la prise en compte d'un certain nombre de conditions qui n'ont pas de relation avec les fonctions d'interpolation. Leur approche repose sur un critère de convergence concernant un seul élément, contrairement au patch test qui considère l'équilibre d'un groupe d'éléments. Ils ont alors introduit le test sur un élément pris individuellement (Individual Element Test) dont l'extension a conduit au test sur l'élément d'ordre supérieur (High Order Element Test). Le premier test assure que l'élément possède les modes de mouvement de solide rigide ainsi que ceux relatifs aux déformations constantes, et le deuxième utilise des modèles de déformations d'ordre supérieur. Ces conditions ne sont pas utilisées comme des tests *a posteriori* sur l'élément, mais interviennent directement dans la formulation de l'élément fini. Plus tard, Bergan et Nygard [2] ont introduit une nouvelle formulation dite « libre ». Dans cette dernière, le champ de déplacements doit contenir les modes de déformation fondamentaux qui doivent être linéairement indépendants.

Dans le présent papier, en utilisant les conditions de symétrie et de mouvement de solide rigide, on détermine la matrice de l'élément triangulaire à « déformation constante » utilisé pour résoudre les problèmes à potentiels. Afin d'explicitier la démarche, on détermine successivement les matrices d'un triangle rectangle isocèle, puis celle d'un triangle rectangle quelconque, et enfin on généralise la méthode en traitant le cas d'un triangle scalène. Une simple interprétation géométrique des éléments de la matrice de cet élément triangulaire est présentée à la fin du papier.

Notons que le premier élément triangulaire fut utilisé par Courant [3]. Il a développé l'idée de minimiser une fonctionnelle en utilisant une approximation linéaire de la fonction de contrainte à travers des surfaces triangulaires pour résoudre le problème de torsion d'un cadre carré. Selon Gupta et Meek [4], Courant peut être le premier à utiliser la procédure des éléments finis et en l'occurrence l'élément triangulaire.

Pour les problèmes d'élasticité, la première formulation des éléments triangulaires est due à Turner et al. [5] qui ont déterminé la matrice raideur de l'élément dans le cas de l'état de contraintes planes. Les auteurs mentionnent que non seulement l'élément triangulaire est simple, comparé à l'élément rectangulaire, mais sera utilisé comme élément de base dans les problèmes de plaques de formes arbitraires.

Concernant les problèmes à potentiels, le premier élément triangulaire a été formulé dans le papier de Zienkiewicz et Cheung [6]. Les auteurs ont analysé le problème de transfert de chaleur couplé à la torsion d'arbres de section circulaire. Ils ont introduit la notion de topologie du système ainsi que le concept de continuité de la fonction considérée à travers les frontières communes des éléments.

Dans ce qui suit, avant d'entamer la procédure basée sur les conditions de consistance, on détermine la matrice d'un élément triangulaire quelconque à trois noeuds en suivant la démarche habituellement utilisée dans la méthode des éléments finis.

2. MÉTHODE CONVENTIONNELLE

Cette méthode est rencontrée dans tous les ouvrages d'éléments finis [7] [8]. Soit un triangle quelconque (1, 2, 3) à trois noeuds de coordonnées respectives (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) (figure 1). La matrice de cet élément est construite pour traiter un problème tel que le champ inconnu ϕ à déterminer soit un champ scalaire.

* School of Engineering, University of Durham, Science Laboratories, South Road, Durham, DH1 3LE, Great Britain.

** Laboratoire de Mécanique et Matériaux, Division Mécanique des Structures, Ecole Centrale de Nantes, 1, rue de la Noë, 44321 cedex 03, France.

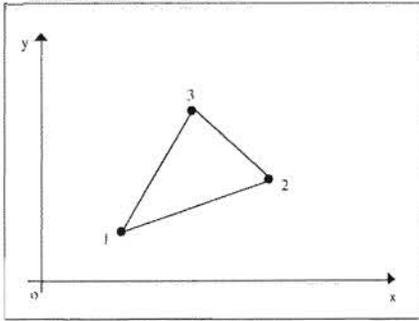


Figure 1 : Elément triangulaire quelconque à trois noeuds.
A finite triangular element.

En supposant une variation linéaire du champ ϕ dans l'élément, celui-ci peut s'exprimer par :

$$\phi = a + bx + cy \quad (1)$$

En écrivant l'équation (1) pour chaque noeud, on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ | & x_1 & y_1 \\ | & x_2 & y_2 \\ | & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (2)$$

Avec quelques manipulations algébriques simples, on peut résoudre le système d'équations (2) pour déterminer les constantes a, b et c en termes des coordonnées nodales ainsi que des valeurs nodales ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 . En remplaçant a, b, et c par leurs expressions dans l'équation (1), le potentiel ϕ pourra s'écrire sous la forme suivante :

$$\phi = \sum_1^3 N_i \phi_i \quad (3)$$

Les fonctions de forme N_i sont données par :

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (A_i + B_i x + C_i y) \quad (4)$$

où :

$$\begin{aligned} A_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & A_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & A_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ B_1 &= y_2 - y_3 & B_2 &= y_3 - y_1 & B_3 &= y_1 - y_2 \\ C_1 &= x_3 - x_2 & C_2 &= x_1 - x_3 & C_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Δ est l'aire de l'élément exprimée par :

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} | & | & | \\ | & x_1 & y_1 \\ | & x_2 & y_2 \\ | & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (6)$$

Le vecteur gradient peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} | & | & | \\ | & B_1 & B_2 & B_3 \\ | & C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = [B] \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

La matrice « raideur » de l'élément est alors donnée par l'expression :

$$[k] = \int_{\Omega} [B]^T [B] dS \quad (9)$$

où $[B]^T$ est la matrice transposée de $[B]$ et dS est un élément de surface de l'élément triangulaire.

L'intégration est immédiate puisque dans $[B]$ tous les coefficients sont constants. Soit finalement l'expression de la matrice « raideur » :

$$[k] = \frac{1}{4\Delta} \begin{pmatrix} | & | & | \\ | & B_1^2 + C_1^2 & B_1 B_2 + C_1 C_2 & B_1 B_3 + C_1 C_3 \\ | & B_2 B_1 + C_2 C_1 & B_2^2 + C_2^2 & B_2 B_3 + C_2 C_3 \\ | & B_3 B_1 + C_3 C_1 & B_3 B_2 + C_3 C_2 & B_3^2 + C_3^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Dans ce qui suit, la matrice « raideur » est reconstruite mais cette fois-ci on ne fait pas intervenir les fonctions d'interpolation. Seules les conditions de « mouvement de solide rigide » et de symétrie sont utilisées. On commence par traiter le cas d'un triangle rectangle isocèle, puis celui d'un triangle rectangle quelconque. Afin de pouvoir généraliser la méthode, on s'intéresse au cas d'un triangle scalène.

3. UTILISATION DES CONDITIONS DE CONSISTANCE

3.1. TRIANGLE RECTANGLE ISOCELE

On considère le triangle rectangle isocèle (1, 2, 3) d'hypothénuse $a\sqrt{2}$ (figure 2). A partir de considération de symétrie, la matrice raideur $[k]$ peut être écrite sous la forme :

$$[k] = \begin{pmatrix} | & | & | \\ | & \alpha - \beta - \beta & 0 \\ | & -\beta & \gamma - \delta \\ | & -\beta & -\delta & \gamma \end{pmatrix} \quad (11)$$

avec les conditions suivantes :

$$\alpha = 2\beta \quad \text{et} \quad \gamma = \delta + \beta \quad (12)$$

En construisant de la même façon la matrice correspondant au triangle (2, 3, 4), puis en assemblant les deux triangles on obtient :

$$[k] = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & \alpha - \beta - \beta & 0 & 0 \\ | & -\beta & 2\gamma - 2\delta & -\beta \\ | & -\beta & -2\delta & 2\gamma - \beta \\ | & 0 & -\beta & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (13)$$

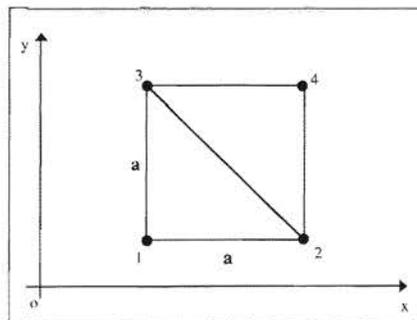


Figure 2 : Assemblage de deux triangles rectangles isocèles.
Assembly of two right-angled isosceles triangles.

L'étape suivante consiste à imposer un potentiel unité aux noeuds 2 et 4, et nul aux noeuds 1 et 3. Soit donc $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 1$, $\phi_3 = 0$, $\phi_4 = 1$. Ces conditions impliquent que $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{a}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$.

Le flux aux noeuds 1 et 3 est égal à $-1/2$ et aux noeuds 2 et 4 à $1/2$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & 2\beta & -\beta & -\beta & 0 \\ | & -\beta & 2\gamma & -2\delta & -\beta \\ | & -\beta & -2\delta & 2\gamma & -\beta \\ | & 0 & -\beta & -\beta & 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Ce qui conduit aux valeurs :

$$\beta = \gamma = \frac{1}{2}, \quad \delta = 0 \quad (15)$$

La matrice $[k]$ du triangle rectangle isocèle s'écrit alors :

$$[k] = \begin{pmatrix} | & | & | \\ | & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ | & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

matrice que l'on obtient à partir de la forme générale donnée par l'équation (10) pour $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_2 = 1$, $x_3 = 0$ et $y_3 = 1$.

3.2. TRIANGLE RECTANGLE QUELCONQUE

On considère le triangle rectangle (1, 2, 3) de cotés a et b montré sur la figure 3.

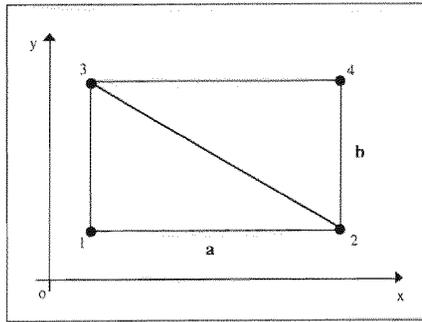


Figure 3 - Assemblage de deux triangles rectangles quelconques. Assembly of two right-angled triangles.

La matrice raideur de ce triangle peut-être écrite directement sous la forme :

$$[k] = \begin{bmatrix} \theta & -\alpha & -\beta \\ -\alpha & \omega & -\gamma \\ -\beta & -\gamma & \delta \end{bmatrix} \quad (17)$$

avec $\begin{cases} \theta = \alpha + \beta \\ \omega = \alpha + \gamma \\ \delta = \beta + \gamma \end{cases}$ (18)

En assemblant les deux triangles rectangles, celle-ci s'écrit :

$$[k] = \begin{bmatrix} \theta & -\alpha & -\beta & 0 \\ -\alpha & \omega + \delta & -2\gamma & -\beta \\ -\beta & -2\gamma & \omega + \delta & -\alpha \\ 0 & -\beta & -\alpha & \theta \end{bmatrix} \quad (19)$$

Comme précédemment, si le potentiel est nul aux nœuds 1 et 3 et égal à l'unité aux nœuds 2 et 4, $\phi_1 = 0, \phi_2 = 1, \phi_3 = 0, \phi_4 = 1$,

cela entraîne $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{a}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$. Le flux aux nœuds 1 et 3 est égal

à $-b/2a$ et aux nœuds 2 et 4 à $b/2a$. On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \theta & -\alpha & -\beta & 0 \\ -\alpha & \omega + \delta & -2\gamma & -\beta \\ -\beta & -2\gamma & \omega + \delta & -\alpha \\ 0 & -\beta & -\alpha & \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b/2a \\ b/2a \\ -b/2a \\ b/2a \end{pmatrix} \quad (20)$$

On obtient ainsi les valeurs :

$$\alpha = \frac{b}{2a}, \quad \gamma = 0 \quad (21)$$

Si le potentiel est nul aux nœuds 1 et 2 et égal à l'unité aux nœuds 3 et 4, $\phi_1 = 0, \phi_2 = 0, \phi_3 = 1, \phi_4 = 1$, cela entraîne

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{b}$. Le flux aux nœuds 1 et 2 est égal à $-a/2b$ et aux

nœuds 3 et 4 à $a/2b$. Ceci conduit aux valeurs :

$$\beta = \frac{a}{2b}, \quad \gamma = 0 \quad (22)$$

Et finalement la matrice [k] du triangle rectangle (1, 2, 3) s'écrit :

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{b}{2a} + \frac{a}{2b} & -\frac{b}{2a} & -\frac{a}{2b} & 0 \\ -\frac{b}{2a} & \frac{b}{2a} & 0 & 0 \\ -\frac{a}{2b} & 0 & \frac{a}{2b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2a} + \frac{a}{2b} \end{bmatrix} \quad (23)$$

matrice que l'on obtient à partir de la forme générale donnée par l'équation (9) pour $x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = a, y_2 = 0, x_3 = 0$ et $y_3 = b$.

3.3. GÉNÉRALISATION : TRIANGLE QUELCONQUE

Cette construction concerne le cas général qui est naturellement le plus intéressant. La forme générale de la matrice « raideur »

compte tenu des conditions de symétrie est donnée pour le triangle (1, 2, 3) par :

$$[k] = \begin{bmatrix} \theta & -\alpha & -\beta \\ -\alpha & \omega & -\gamma \\ -\beta & -\gamma & \delta \end{bmatrix} \quad (24)$$

Les conditions (18) sont toujours applicables.

Considérons maintenant un assemblage de deux triangles (1, 2, 3) et (4, 2, 3) tel que montré par la figure 4 :

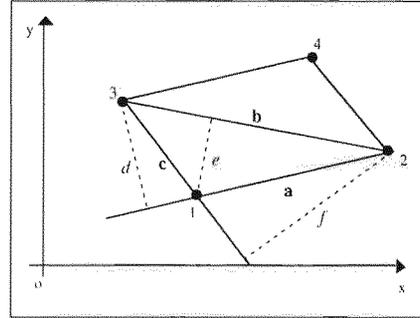


Figure 4 : Assemblage de deux triangles quelconques. Assembly of two ordinary triangles.

La matrice assemblée des deux triangles est alors donnée par :

$$[k] = \begin{bmatrix} \theta & -\alpha & -\beta & 0 \\ -\alpha & \omega + \delta & -2\gamma & -\beta \\ -\beta & -2\gamma & \omega + \delta & -\alpha \\ 0 & -\beta & -\alpha & \theta \end{bmatrix} \quad (25)$$

Une étape préliminaire consiste à déterminer les longueurs des cotés a, b et c ainsi que celles des hauteurs d, e et f.

Les longueurs des cotés du triangle (1, 2, 3) sont obtenues en appliquant le théorème de Pythagore (figure 4) :

$$\begin{aligned} a &= [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2} \\ b &= [(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2]^{1/2} \\ c &= [(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (26)$$

Les hauteurs sont trouvées en considérant le vecteur perpendiculaire au coté considéré puis en projetant un coté adjacent sur ce vecteur. En prenant l'exemple de la hauteur d, le vecteur perpendiculaire au vecteur \vec{a} défini par la direction 1-2 est donné par :

$$\vec{n}_a = (y_2 - y_1)\vec{i} - (x_2 - x_1)\vec{j} \quad (27)$$

où \vec{i} et \vec{j} désignent les vecteurs unitaires suivant les axes de coordonnées x et y.

La distance du nœud 3 au coté 1-2 est égale à la projection du vecteur \vec{b} défini par la direction 2-3 sur \vec{n}_a , soit :

$$d = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}_a}{\|\vec{n}_a\|} \quad (28)$$

ce qui donne :

$$d = \frac{(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_2)(x_2 - x_1)}{a} \quad (29)$$

De façon identique on obtient :

$$e = \frac{(x_1 - x_3)(y_3 - y_2) - (y_1 - y_3)(x_3 - x_2)}{b} \quad (30)$$

$$f = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 - y_3) - (y_2 - y_1)(x_1 - x_3)}{c}$$

L'étape suivante, consiste à appliquer une variation linéaire du potentiel dans la direction perpendiculaire au coté 1-2 sur une bande infinie de paires de triangles quelconques (1, 2, 3), (4, 2, 3) tel que montré par la figure 5.

Le fait de travailler sur une bande de triangles infinie, permet de réduire la matrice de l'assemblage à une matrice de dimension 2 en additionnant les lignes et les colonnes 1 et 2 ainsi que 3 et 4. On obtient alors :

$$[k] = \begin{bmatrix} 2(\beta + \gamma) & -2(\beta + \gamma) \\ -2(\beta + \gamma) & 2(\beta + \gamma) \end{bmatrix} \quad (31)$$

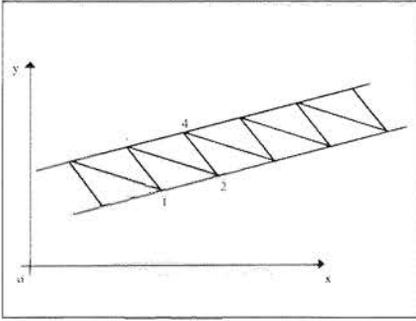


Figure 5 : Bande infinie de triangles.
Infinite band of triangles.

Maintenant on impose un potentiel unité aux nœuds 3 et 4 et nul aux nœuds 1 et 2, $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$, $\phi_3 = 1$, $\phi_4 = 1$, ce qui correspond à : $\frac{\partial \phi}{\partial n_n} = \frac{1}{d}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial t_n} = 0$, avec \vec{n}_n qui désigne la direction

normale au coté 1-2 et \vec{t}_n la direction tangentielle. Le flux aux nœuds 1 et 2 est égal à $-a/d$, celui aux nœuds 3 et 4 est égal à a/d . A partir de l'équation (31), on obtient alors la condition :

$$\beta + \gamma = \frac{a}{2d} = \frac{a^2}{2ad} = \frac{a^2}{4\Delta} \quad (32)$$

En substituant cette valeur et en comparant avec la valeur théorique obtenue en position (3,3) de la matrice de l'expression (10), on vérifie que cette valeur est correcte. Les termes diagonaux de la matrice sont obtenus par permutation circulaire.

$$\alpha + \gamma = \frac{c^2}{4\Delta} \quad (33)$$

$$\alpha + \beta = \frac{b^2}{4\Delta}$$

Considérons à nouveau l'expression (32). En remplaçant a, celle-ci peut être réécrite sous la forme :

$$\beta + \gamma = \frac{a^2}{4\Delta} = \frac{1}{4\Delta} \left[(x_2 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_1) \right]$$

$$= \frac{1}{4\Delta} \left[(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_3) \right]$$

$$+ \frac{1}{4\Delta} \left[(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) \right] \quad (34)$$

Ce qui est parfaitement en accord avec les résultats des expressions suivantes :

$$\beta = \frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_1 - y_2)(y_2 - y_1)}{4\Delta} \quad (35)$$

$$\gamma = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_1 - y_3)(y_3 - y_1)}{4\Delta}$$

Ceci peut être vérifié aussi pour le terme α en utilisant l'une des égalités de l'expression (33). On obtient ainsi tous les termes de la matrice de l'élément triangulaire, qui correspondent à ceux obtenus par la méthode conventionnelle et ceci en utilisant simplement les conditions suivantes :

- symétrie de la matrice ;
- mouvement de solide rigide ;
- un potentiel constant sur l'élément induit un flux nul ;
- un gradient linéaire du potentiel induit un flux constant.

Dans ce qui suit, on présente une interprétation simple des éléments de la matrice de l'élément triangulaire à trois nœuds en relation avec sa géométrie.

3.4. SIMPLE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

Considérons le triangle quelconque (1, 2, 3) de cotés a, b et c, et de hauteurs d, e et f, tel que montré par la figure 6. Les éléments de la matrice de ce triangle peuvent être déduits en ne considérant que les distances des nœuds aux cotés opposés ainsi que les projections orthogonales de chaque coté du triangle sur les deux autres.

Prenons l'exemple des éléments de la première ligne de la matrice élémentaire (24). L'élément (1,2) caractérise l'influence du nœud 1 sur le nœud 2. Il est déterminé par le module de la projection orthogonale du coté opposé au nœud 2 sur celui opposé

au nœud 1, rapporté à la distance séparant le nœud 1 du coté opposé :

$$\alpha = \frac{b_1}{2e} \quad (36)$$

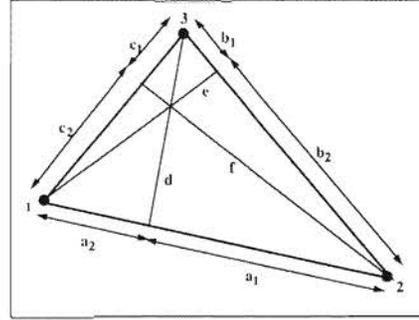


Figure 6 : Élément triangulaire quelconque.
Ordinary triangular element.

L'élément (1,3) est alors déterminé par le module de la projection orthogonale du coté 1-2 sur le coté 2-3, rapporté à la hauteur e :

$$\beta = \frac{b_2}{2e} \quad (37)$$

L'élément θ est obtenu en additionnant α et β . De la même façon, les éléments des deux autres lignes sont déterminés. La matrice de l'élément triangulaire aura la forme suivante :

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{b}{2e} & -\frac{b_1}{2e} & -\frac{b_2}{2e} \\ -\frac{c_1}{2f} & \frac{c}{2f} & -\frac{c_2}{2f} \\ -\frac{a_1}{2d} & -\frac{a_2}{2d} & \frac{a}{2d} \end{bmatrix} \quad (38)$$

En appliquant de simples relations entre les divers triangles formés par les cotés a, b et c ainsi que les hauteurs d, e et f de la figure 6, on peut montrer que la matrice de l'expression (38) est symétrique.

En prenant l'exemple des éléments (1,2) et (2,1), on peut montrer qu'ils sont égaux en exprimant, d'une part, l'aire du triangle (1, 2, 3) :

$$\Delta = e \cdot b = f \cdot c \quad (39)$$

$$\text{avec } \begin{cases} b = b_1 + b_2 \\ c = c_1 + c_2 \end{cases} \quad (40)$$

et en écrivant, d'autre part, les relations déduites du théorème de pythagore :

$$c^2 = b_1^2 + e^2 \quad (41)$$

$$b^2 = c_1^2 + f^2$$

En remplaçant (41) dans (39), on aboutit à l'égalité :

$$\frac{c_1}{f} = \frac{b_1}{e} \quad (42)$$

et par conséquent, les éléments (1,2) et (2,1) de la matrice de l'expression (38) sont identiques.

De la même façon, on peut vérifier la symétrie de la matrice pour les autres éléments.

De même on peut vérifier de façon relativement simple que les éléments de cette matrice correspondent bien à ceux de la matrice de l'expression (10).

En prenant l'élément (1,2), il peut s'écrire :

$$\frac{-b_1}{2e} = \frac{-b_1 \cdot b}{2e \cdot b} = \frac{-\vec{b}_1 \cdot \vec{c}}{4\Delta} \quad (43)$$

En calculant le produit scalaire des vecteurs \vec{b} et \vec{c} , on aboutit à l'expression de l'élément (1,2) de la matrice en (10).

4. CONCLUSION

Dans ce papier, la matrice « raideur » de l'élément triangulaire à « déformation constante » est construite en utilisant les conditions de symétrie et de « mouvement de solide rigide ». Cette méthode est très simple et présente divers avantages devant la méthode conventionnelle en éléments finis. A partir de cette analyse, on peut tirer les conclusions suivantes :

- La matrice élémentaire peut être construite de façon très simple en calculant juste quelques éléments, les autres en seront déduits.
- En utilisant cette méthode, on est pas confronté à la condition de continuité des éléments et on ne fait aucune référence aux fonctions d'interpolation.
- La matrice de l'élément triangulaire à trois nœuds est unique; il n'y a pas d'autres matrices possibles pour cet élément.
- Les éléments de la matrice ont une signification simple en rapport avec la géométrie de l'élément triangulaire.
- Ces conclusions sont en accord avec le concept de MacNeal [9] concernant les limites de perfection d'un élément.

Notons également que cette méthode peut être utilisée pour construire les matrices d'autres éléments [10], pour les problèmes à potentiels, sans avoir recours à la procédure conventionnelle faisant intervenir les fonctions d'interpolation ainsi que diverses conditions liées à la définition de l'élément.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.G. BERGAN and L. HANSSEN, 1976 : « A new approach for deriving "good" element stiffness matrices », in *The Mathematics of Finite Elements and Applications II-MAFELAP 1975*, J. R. Whiteman (Ed.), Academic Press, 483-497.
- [2] P.G. BERGAN and M.K. NYGRAD, 1984 : « Finite elements with increased freedom in choosing shape functions », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20, 643-663.
- [3] R. COURANT, 1942 : « Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations », *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1-23.
- [4] K.K. GUPTA and J.L. MEEK, 1996 : « A brief history of the beginning of the finite element method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 3761-3774.
- [5] M.J. TURNER, R.W. CLOUGH, H.C. MARTIN and L.T. TOPP : 1956. « Stiffness and deflection analysis of complex structures », *J. Aeronaut. Sci.*, 25, 805-823.
- [6] O.C. ZIENKIEWICZ and Y.K. CHEUNG, 1965 : « Finite elements in the solution of field problems », *The Engineer*, 220, 507-510.
- [7] O.C. ZIENKIEWICZ and R.L. TAYLOR, 1989 : *The Finite Element Method*, Vol. 1, McGraw Hill, Maidenhead.
- [8] G. DHATT & G. TOUZOT, 1984 : *Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis*, Collection Université de Compiègne, Maloine S.A. Édition.
- [9] R.H. MACNEAL, 1992 : « On the limits of finite element perfectability », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8, 1589-1601.
- [10] P. BETTESS and O. LAGHROUCHE, 1998 : « Derivation of rectangular finite element for potential problems from consistency criteria », *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 14, 35-42.