Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono, considerati secondo la naturale loro forma e costituzione.

MEMORIA

DEL SIG. DOTTOR GABRIO PIOLA

Ricevuta adì 6 Ottobre 1845.

Avviene non di rado che i nuovi ritrovamenti mediante i quali fu accresciuto qualche ramo delle Matematiche applicate, non appajano subito nel concetto e nella esposizione sgombri da superfluità o lungaggini. La complicazione de' procedimenti analitici può giungere anche a tale da non parer più possibile l'andare innanzi: ed è invece allora che talvolta si scopre un punto di vista più generale, si concentrano molte particolarità e si forma una teorica compendiosa e così bene assicurata da infondere lena per ulteriori progressi. Sarebbe desiderabile che questo avvenisse anche per le ultime aggiunte fatte da moderni Geometri alla Meccanica razionale: e quanto a me direi che il modo di riuscirvi l'abbiamo nelle nostre mani: resta da vedere se altri vorranno essere del mio avviso.

Scrissi più volte non parermi necessario il creare una nuova Meccanica, dipartendoci dai luminosi metodi della Meccanica analitica di Lagrange, per rendere ragione dei fenomeni più intimi del moto dei corpi: potersi piegare que' metodi a

About the fundamental equations of the motion of bodies whatsoever, as considered following the natural their form and constitution.

MEMOIR(*)

OF SIR DOCTOR GABRIO PIOLA

Translated by Francesco dell'Isola[a], Ugo Andreaus[a], Luca Placidi[b] and Daria Scerrato[c]

[a]Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Roma La Sapienza, Via Eudossiana 18, 00184, Roma, Italy

[b]International Telematic University Uninettuno, C.so Vittorio Emanuele II, 39, 00186, Rome, Italy

[c]International Center MeMOCS "Mathematics and Mechanics of Complex System", Università degli studi dell'Aquila, Palazzo Caetani, Via San Pasquale snc, Cisterna di Latina, Italy

Received October 6th 1845

It happens not so seldom that new achievements -by means of which a branch of applied mathematics was augmented- do not appear immediately, in the concept and in the exposition, free from superfluities and lengthinesses. The complication of analytical procedures can reach such a level that it could seem impossible to go further: indeed it is in this moment -instead- that sometimes a more general point of view can be discovered, many particularities are concentrated, and a compendious theory is formed which is so well-grounded that it can infuse vigour for further progresses. It should be desirable that this could happen also for the last additions made by the modern Geometers to rational Mechanics: and in my opinion I should say that the true method suitable to succeed we have in our own hands: it has to be seen if others will be willing to share my opinion.

I wrote many times that it does not seem to me needed to create a new Mechanics, departing from the luminous method of Lagrange's Analytical Mechanics, if one wants to describe the internal phenomena occurring in the motion of bodies: [indeed it is my opinion that] it is possible to adapt those methods to

(*) The exact reference is the following: Piola, G., Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono, considerati secondo la naturale loro forma e costituzione - Memoria del Signor Dottor Gabrio Piola - Ricevuta adí 6 Ottobre 1845, Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, 24, pp. 1-186, (1848).

tutte le esigenze della moderna fisica matematica: essere anzi questa la vera via da tenersi, perché, sicura se' suoi principj, conduce a sicure conseguenze, e promette ulteriori e grandiose conquiste. Però mi stettero e mi stanno anche attualmente contro autorità ben rispettabili, davanti alle quali io dovrei darmi per vinto, se la bontà della causa avesse ad argomentarsi dal valor scientifico del suo patrocinatore. Ma comecché io non posso rinunciare alla mia persuasione, credetti convenisse fare un nuovo tentativo, riunendo in questa Memoria i miei pensieri sull'argomento e procurando di esporli con tale accuratezza da conciliar loro l'attenzione dei Geometri. Perocché non dissimulo accorgermi ora che ne' precedenti miei scritti alcune idee non furono esposte con sufficiente maturità: ve ne ha qualcuna troppo spinta, ve ne ha qualch'altra ancora troppo timorosa: certe parti di quelle scritture potevano essere omesse, perché non tendenti direttamente allo scopo: e a più forte ragione quelle altre che quantunque necessarie conseguenze di supposizioni allora tenute per vere, stante l'interpretazione da me data a qualche passo d'insigne Autore, non mi sentirei ora più di ripetere e di sostenere dopo che quelle supposizioni mi apparvero false o per lo meno dubbie (Vedi il già detto nel T. VI del Giornale dell'I.R. Istituto Lombardo pag. 328).

La ragione in forza della quale, anche più che per l'eleganza e grandiosità de' processi analitici, io preferisco agli altri tutti in Meccanica i metodi di Lagrange, si è perché veggo in essi l'espressione di quella saggia filosofia insegnataci da Newton che parte dai fatti per salire alle leggi, e quindi discendere alla spiegazione degli altri fatti. Fondare le formole primordiali sopra ipotesi anche benissimo ragionate, ma che non ricevono conferma se non per una lontana corrispondenza con alcuni fenomeni osservati, ottenuta scendendo dal generale al particolare, è a parer mio non cautelarsi abbastanza, è un tornare in certa maniera alla filosofia di Cartesio o di Gassendo: giacché il magistero della natura nei minimi spazj nei quali noi pretendiamo cogliere il lavoro delle azioni molecolari, sarà forse

all needs of modern Mathematical physics : [and that] this is, nay, the true route to follow because, being well-grounded in its principles, it leads to reliable consequences and it promises ulterior and grandiose achievements. However I had -and still nowadays I have- as opposers well respectable authorities, in front of which I should concede the point, if the validity of a scientific opinion had to be based on an argument concerning the scientific value of its supporter. Nevertheless, as I cannot renounce to my persuasion, I believed it was suitable to try another effort, gathering in this Memoir my thoughts about the subject and having care to expose them with the accuracy needed to assure to them the due attention of Geometers. However, I do not dissimulate to be aware now that, in my precedent works, some ideas were not exposed with sufficient maturity: [that] some of them are too bold, some other too timorous: [that] some parts of those works could have been omitted, as they were not pointing directly to the aim: [that] with stronger reason those other [ideas] which although logical consequences of suppositions then I previously accepted as true, because of the interpretation that I had given to some sentences of some eminent Author, [indeed are ideas which] I could not anymore repeat and sustain after that those suppositions appeared to me to be false or at least doubtful (See the aforementioned work T. VI del Giornale dell I. R. Istituto Lombardo pag. 328).

Even more than for its elegance and the grandiosity of its analytical processes, the true reason for which I prefer to all the other methods in Mechanics those methods due to Lagrange is that I see in them the expression of that wise philosophy thought to us by Newton, which starts from the facts to rise up to the laws and then [starting from established laws] goes down again to the explanation of other facts. In my opinion it is not safe enough to found the primordial formulas [of a theory] upon hypotheses which even being very well-thought do not receive support if not for a far correspondence with some observed phenomena, [correspondence] obtained particularizing general statements, [indeed in my opinion] this should be as coming back in a certain sense to the philosophy of Descartes and Gassendi: as the "magisterium of nature" [the experimental evidence] at the very small scale in which we try to conceive the effect of molecular actions will perhaps be

assai diverso da quello che noi possiamo rappresentarci per mezzo di immagini procurate dai nostri sensi contemplando gli effetti in grande. E fosse pur anche piccolissima questa diversità: una deviazione affatto insensibile nei primi elementi che bisogna intendere moltiplicati a milioni e a miliardi prima di venire a dimensioni sensibili, può essere il lontano principio di notabili errori. Ma coi metodi di Lagrange mettendosi a calcolo non le azioni delle forze interne, ma i loro effetti, i quali sono ben noti e nulla risentono dell'incertezza intorno al modo d'agire della cause, non può restarci alcun dubbio sull'esattezza dei risultati. È vero che l' immaginazione nostra riesce meno soddisfatta, perché non le si concede di salire fino alle primissime origini dei moti intestini nei corpi : ma che perciò? Ben largo compenso di questa, privazione abbiamo nella sicurezza delle deduzioni. Io qui potrei ripetere, se non fossero assai noti i savj documenti coi quali Newton richiamava alla scienza dei fatti i filosofi che prima di lui aveano lasciato alla immaginazione un troppo libero slancio.

E notisi che io non intendo per questo proscrivere i dettati della Fisica moderna intorno alla costituzione interna dei corpi e alle azioni molecolari; penso anzi recar loro il maggior de' servigj. Quando le equazioni degli equilibrj e dei moti siano stabiliti sopra principj inconcussi, per aver messo a calcolo effetti certi piuttosto che ipotetiche espressioni di forze, credo lecito cercare di ricostruire da capo quelle equazioni mediante supposizioni intorno a queste azioni molecolari e se ci riesca per tal modo di ricondurci a risultamenti identici con quelli che sappiamo in anticipazioni esser veri, credo che quelle ipotesi acquisteranno così tal grado di probabilità quale non potrebbero a gran pezza sperare altrimenti. allora la fisica molecolare potrà esser incoraggiata a tirare innanzi con le sue deduzioni, purché, fatta esperta dalle aberrazioni di alcuni antichi pensatori troppo arditi, si risovvenga di cercar tratto tratto nell'osservazione quei richiami che stanno la per avvertirla se mai deviasse.

very different from what we can mentally realize by means of the images impressed in our senses when experiencing their effects in a larger scale. Even let us assume that this difference be very small: a deviation quite insensitive in the fundamental constituents [of matter] -which one needs to consider as multiplied by millions and by billions before one can reach sensible dimensions- can be the ultimate source of notable errors. On the contrary, by using Lagrangian methods, one does not consider in the calculations the actions of internal forces but [only] their effects, which are well-known and are not at all influenced by the incertitude about the way prime causes act, [so that] no doubt can arise regarding the exactitude of the results. It is true that our imagination may be less satisfied, as Lagrangian methods do not allow to it to trace the very fundamental origins of the internal motions in bodies: does it really matters? A very large compensation for this deprivation can be found in the certitude of deductions. I could here repeat, if they were not very well-known, the wise documents with which Newton summoned to the science of facts those philosophers who before him had left a too free leap to their imagination.

It has to be remarked that I do not intend for this reason to proscribe the dictation of modern Physics about the internal constitution of bodies and the molecular interactions; I think, nay, to render to them the greater of services. When the equations of equilibrium and motion will be established firmly upon indisputable principles, because one has to introduce in the calculations certain effects rather than hypothetical expression of forces, I believe to be licit to try to reconstruct anew those equations by means of [suitable] assumptions about such molecular interactions: and if we manage in this way to get results which are identical to those we already know to be true, I believe that these hypotheses will acquire such a high degree of likeliness which one could never hope to get with other methods. Then the molecular Physics will be encouraged to continue with its deductions, under condition that, being aware of the aberrations of some bald ancient thinkers, it will retain to look carefully step-by-step in the experimental observation those hints which are explicit warnings indicating eventual deviations.

Taluno potrà qui obbiettarmi esser questa una sapienza assai vecchia, sì da non valere la pena ch'io me ne facessi nuovamente promulgatore: ma che le mie belle teoriche vengono poi meno alla prova, giacché il Poisson ha assicurato (Mémoires de l'Institut de France T. VIII. pag. 326, 400; Journal de l'Ecole polyt. cah. XX. pag 2) che la maniera lagrangiana di scrivere gli effetti delle forze per mezzo di equazioni di condizione (quella maniera qui proclamata siccome l'unica idonea a tenere conto dei fatti anzichè delle cause) è troppo astratta; che vi ha bisogno di una scienza più vicina alla realtà delle cose; che quella analisi estesa ai corpi della natura deve essere rigettata come insufficiente. Rispondo che io pure riconosco star qui il nodo della quistione. Essere poi o no una millanteria l'asserzione che i metodi di Lagrange bastino a tutto ed abbiano anche in se tale potenza che s'agguagli alle possibili e ulteriori ricerche, che questo è ciò che dovrà decidersi più tardi, e innanzi darmi torno, si troverà giusto di lasciarmi esporre tutto ciò che ho raccolto a mia difesa. Spero mettere in chiaro nella seguente memoria che l'unico motivo pel quale la meccanica analitica parve restar addietro nella trattazione di alcuni problemi, fu che Lagrange nello scrivere dell'equilibrio e del moto di un corpo solido, non è disceso fino ad assegnare le equazioni spettanti a un solo punto qualunque di esso. Se questo avesse fatto, e lo potea benissimo senza uscire dai metodi insegnati nel suo libro, sarebbe giunto prontamente alle stesse equazioni cui arrivarono con molta fatica i Geometri francesi del nostro tempo e che ora servono di base alle nuove teoriche. Però quello ch'egli non fece, perché la morte lo tolse alle scienze prima che avesse finito la sua grand'opera, può esser fatto da altri: ed ecco l'assunto intorno al quale rischiai qualche tentativo fino dagli anni 1832 e 1835 (Vedi la Memoria della Meccanica dei corpi naturalmente estesi inserita nel I Tomo degli Opuscoli matematici e fisici; Milano, Giusti, 1832: e l'altra Sulla nuova analisi per tutte le quistioni della Meccanica molecolare inserita nel Tomo XXI di questi Atti.).

Somebody could here object to me that this is a very old knowledge, which does not deserve to be newly promulgate by me: but that my beautiful theories [after being published] are fallacious in the end, because Poisson has assured (Mémoires de l'Institut de France T. VIII. pag. 326, 400; Journal de l'Ecole polyt. cah. XX. pag 2) that the Lagrangian method used for writing the effects of the forces by means of constrains equations (method which is proclaimed here as the only one really idoneous to take into accounts facts instead of causes) is too abstract; that it is necessary to develop a Science closer to the reality of things; that such analysis [the Lagrangian one] extended to the real bodies must be rejected as insufficient. I respond that I also recognize the difficult question to be in these considerations. If it is well founded or not the statement that the Lagrangian methods are sufficient to the description of all mechanical phenomena, and are so powerful that they are suitable for all further possible researches, this is what shall be decided later, and before rebutting my point of view, it will be fair to leave me to expose all arguments which I have gathered to defend my point of view. I hope to clarify in the following Memoir that the only reason for which the Analytical Mechanics seemed to be insufficient in the solution of some problems, is that Lagrange, while writing the conditions for equilibrium and motion of a three dimensional body, did not detailed his model by assigning the equations relative to every material point belonging to it. If he had done this, and he could very well do it without departing from the methods imparted in his book, he would have obtained easily the same equations to which the French Geometers of our times arrived very painfully, [equations] which now are the foundation of new theories. However those results which he could not obtain, because death subtracted him to sciences before he could complete his great oeuvre, these results can be obtained by others: this is the assumption which led me to start some efforts since the years 1832 and 1835 (See the Memoir della Meccanica dei corpi naturalmente estesi inserted in the 1st Tome of Opuscoli matematici e fisici; Milano, Giusti, 1832: and the other Sulla nuova analisi per tutte le quistioni della Meccanica molecolare in the Tome XXI of these Proceedings).

Nel mentre poi colla seguente memoria mirerò di nuovo allo scopo ora devisato, procurerò di raggiungerne anche un altro. Dimostrata rigorosamente in più luoghi è l'equazione generale della meccanica, scritta con la notazione del calcolo delle variazione, pel caso di un sistema qualunque discreto di corpi considerati siccome punti in cui siano concentrate diverse masse, animati da forze esterne attive e soggetti anche a forze interne attive e passive. Ma, partire da essa e passare alle formole spettanti all'equilibrio e al moto dei corpi estesi secondo le tre dimensioni, è questo un passo assai duro per chi voglia veder le cose con chiarezza e non si accontenti di una mezza intelligenza. Uno de' miei primi tentativi intorno a questo argomento può vedersi nella memoria Sui principj della Meccanca Analitica di Lagrange pubblicata in Milano fin dall'anno 1825, dove ho esposte in proposito alcune idee giuste, ma con accompagnamenti o troppo complicati o superflui. Vi tornai sopra nella memoria posta nel tono XXI di questi Atti, e credetti avervi fatto un notabile guadagno, introducendo non poche semplificazioni ed abbreviazioni, ma poscia mi accorsi della possibilità di ulteriori miglioramenti che farò entrare nella presente. Di grande vantaggio è sempre la cura di chiarir bene le idee intorno alla natura delle diverse quantità analitiche e allo spirito dei metodi: e che anche da questo lato rimanesse qualche cosa a fare, ne lascerò il giudizio ai lettori intelligenti.

Lo studioso s'accorgerà ch'io mi proposi anche altri fini col presente lavoro, avendovi stabilite varie formole che possano servir di punto di partenza per indagini ulteriori. Di uno non voglio tacere ed è quello di ridimostrare (Capo V), adottando le idee meglio assicurate forniteci dalla fisica moderna intorno ai fluidi, le equazioni fondamentali del loro moto. Imperocchè essendomi occupato a lungo in altri miei scritti dei problemi della idrodinamica (vedi i due primi volumi delle memorie dell'I.R. Istituto Lombardo) mi si obbiettò potere con le mie deduzioni essere in difetto, visto quanto ebbe a dire il Poisson intorno alle equazioni dell'idrodinamica ordinaria.

While with the present memoir I will aim again to the goal now devised, I will manage to reach also another one. [Indeed] it is rigorously proven in many places the general equation of mechanics, written with the notation of calculus of variations, in the case of a whatsoever discrete system of bodies regarded as points in which different masses are concentrated and subjected to external active forces and to internal active and passive forces. However, starting from this last equation [i.e. the equation for a discrete system of points] and obtaining the formulas relative to equilibrium and motion of bodies with three dimensional extensions [i.e. deformable bodies], it is a step very difficult for those who are willing to see things clearly and are not happy to get an incomplete understanding. One among my first efforts in this subject can be recognized in my Memoir "On the principles of Analytical Mechanics by Lagrange" Published in Milan already in the year 1825, where I presented in this regard some correct ideas but with some specific technical details either too complex or indeed superfluous. I came back to this point in the memoir published in T. XXI of these Proceedings and I believed to have achieved a remarkable improvement by introducing not negligible abbreviations and simplifications: but thereafter I perceived the possibility of further improvements which I introduced in the present one. Great advantage can always be obtained when having the care of clarifying appropriately the ideas concerning the nature of different analytical quantities and the spirit of the methods: [to establish] if also from this point of view something has been left to be done, I will leave the judgement to intelligent readers.

The scholar will perceive that I propose myself also other aims with the present work, having established here various formulas, which can serve as a starting point for further investigations. I will not omit to mention one of these aims and precisely that one which consists in demonstrating anew (Capo V), by adopting the ideas better founded which are provided by modern Physics about fluids, the fundamental equations of their motions. In as much as I treated lengthly in other my works the problems of hydrodynamics (See the first two volumes of Memoirs of I. R. Istituto Lombardo) it was objected that my deduction could be defective, considered what stated by Poisson about the equations of ordinary Hydrodynamics.

Ora io credetti poter dimostrare che le considerazioni del Geometra francese in questa circostanza sono corse troppo innanzi, che nonostanti le sue obbiezioni la teorica fondamentale del moto de' fluidi rimane a tutta prova quale d'Alembert e Eulero l'hanno stabilita, quale fu riprodotta dallo stesso Fourier con l'aggiunta di altra equazione dedotta dalla teorica del calore, alla quale però non è necessario aver riguardo nelle questioni più ovvie della scienza delle acque. Per questa parte la presente memoria serve di sostegno e di complemento alle altre testè ricordate.

CAPO I.

NOZIONI PRELIMINARI (*)[1]

1. Bisogna distinguere con accuratezza il corpo dallo spazio da eso occupato. Questo spazio è sempre un'estensione continua che possiamo concepire formata dalla congerie di infiniti punti geometrici (così denominando noi per comodo gli elementi dell'estensione) posti in assoluto contatto gli uni degli altri, senza alcuna benchè minima interruzione. Non badiamo a quel dilemma che dice: o questi punti sono inestesi, e allora la loro aggregazione, per quanto vogliasi accumulata, non darà mai l'estensione: o sono estesi, e allora un numero infinito di essi darebbe sempre uno spazio infinito. Secondo la vera metafisica degli indivisibili insegnataci da Cavalieri, conviene considerare dapprima lo spazio diviso in un grandissimo numero di parti, la cui somma torni a restituire lo stesso spazio, ma però parti dotate di estensione. In appresso si passa a

[1](*)Non intendo raccogliere in questo capitolo d'introduzione tutte le nozioni preliminari di meccanica, giacchè suppongo di scrivere per lettori istrutti; ma quelle sole, che pur sono molte, ove ho dovuto introdurre modificazioni per potere adoperare i metodi di Lagrange sopra corpi considerati siccome composti di molecole disgiunte. Nella stessa occasione ho fatto entrare in questo Capo alcuni preliminari analitici, dei quali avrò bisogno in progresso.

Now I believed to be able to prove that the considerations of the French Geometers in this circumstance were pushed too far ahead, and that -notwithstanding his objections- the fundamental theory of the motions of fluids is well-grounded as established by D'Alembert and Euler, and exactly as it was reproduced by Fourier himself with the addition of another equation deduced with the theory of heath, [equation] to which, however, it is not necessary to refer in the most obvious questions concerning the science of waters. For what concerns the motion of fluids, the present Memoir is intended to support and complement the aforementioned ones.

CAPO I

PRELIMINARY NOTIONS (*)[1]

1. It is necessary to distinguish accurately the body from the space which it occupies. This space is always a continuous extension which we can conceive as formed by the cluster of the infinite geometrical points (in this way we denominate for simplicity the elements of extension) placed in absolute contact one with the others, without any interruption. We do not care about the dilemma which states: either this points are without extension and hence their aggregation, even when tightly amassed, will never produce an extension; or they are extended, and hence an infinite number of them will always give an infinite space. According to the true metaphysics of indivisible whose knowledge has imparted to us by Cavalieri, it is convenient to consider first the space as divided in a great number of parts, the sum of which will restitute the same amount of space, having however these parts still a finite extension. Subsequently we pass to

[1](*)I do not Intend to gather in these introductory chapter all preliminary notions needed for the study of mechanics, since I assume to be writing for readers already educated in this science; [I intend] however to recall here the still numerous notions which need to be suitably modified in order to be able to use the Lagrangian Methods to deal with bodies considered as composed by disjoint molecules [i.e. continuous bodies regarded as limit case of molecular systems]. In this same occasion I have decided to include in this Capo some analytical preliminaries which I will need in the sequel.

concepire inoltrata all'indefinito questa divisione in parti in altre più piccole di loro, fino a ridurle, se fa bisogno, al disotto di ogni termine apprezzabile dai sensi e dalla immaginazione. Abbiamo qui a fronte l'uno dell'altro due principj opposti che si compensano. Una somma di termini positivi cresce continuamente accrescendo il numero di tali termini, e diminuisce, diminuendo continuamente la grandezza di ciascuno di essi. Senza dubbio se, ragionando di quella somma, vogliamo badare ad uno solo dei suddetti principj, perdendo di vista l'altro, ne ridurremmo il valore all'infinito o allo zero: ma bisogna farli camminare di pari passo, e non disgiungerli mai, di modo che l'accrescimento continuo del numero dei termini compensi sempre il loro attenuarsi continuo. E questa operazione può da noi concepirsi spinta oltre ogni limite, e fin entro a quei recessi dove hanno origine le affezioni delle curve, le prime sfumature nelle quantità che contengono qualche elemento variabile. Pretendere di condurre l'immaginazione a vedere, quasi testimonio oculare, anche in queste profondità il compensarsi reciproco dei due sunnominati principj, è voler cosa non concessa all'uomo nello stato attuale. Ma ciò che è indiscernibile all'immaginazione, è, oso dire, chiaro alla ragione, la quale conosce che a quelle profondità arriva la potenza del calcolo. In queste considerazioni, per dirlo di passaggio, sta quanto basta per poter rispondere ad ogni difficoltà mossa contro le applicazioni del calcolo integrale.

2. L'esistenza di un corpo è un fenomeno che si avvera in varie parti dello spazio. Dove esiste un corpo, *alcuni non tutti* i punti geometrici dello spazio da esso occupato sono dotati di proprietà particolari, delle quali sarebbe qui fuori di luogo indagar la natura, bastando il dire essere quelle proprietà che accompagnano l'essenza della materia; chiameremo questi punti privilegiati sparsi fra i geometrici, *punti materiali o fisici.* Bisogna concepire tali punti materiali disgiunti fra loro e stanti a distanze piccolissime in presenza gli uni degli altri. Anche qui non ci tratterremo a discutere come avvenga che

conceive as repeated infinite times this division of parts into other parts which are even smaller than the previous ones until we will reduce them, if needed, below any term tangible by senses or by imagination. We have here two opposed principles one in front of the other which compensate one with the other. A sum of positive terms increases continuously when the number of such terms increases, and decreases, when the magnitude of each of them continuously decreases. Undoubtedly if, when reasoning about this sum, we want to control only one of the two aforementioned principles, neglecting the other, we will reduce the value [of the sum] to infinity or to zero: however it is needed to have them operating simultaneously, and one never has to disjoint them, in such a way that the continuous growth of the number of the terms is always compensated by their continuous decrease of value. And this operation can be conceived by us as overcoming every limit, being able to reach all details which are hidden in the intimate properties of curves, [and being able to control] all orders of magnitude of quantities which contain variable elements. To believe that imagination can be able to see, nearly as an ocular witness, also in his depth the reciprocal compensation of the two aforementioned principle it is not something which is allowed to human mind in the present situation. However what is indiscernible for the imagination actually is, I dare to say, clear for the reason, which knows that at these depths can arrive the power of calculus. In these considerations, by the way, is included what it is necessary to answer to every objection arisen against the application of integral calculus.

2. The existence of a body is a phenomenon which occurs in some parts of the space. Where a body exists, *some not all* the geometric points of the space occupied by it are endowed with particular properties, properties about which it is here out of place to discuss the nature, as it is enough to say that these properties are those which are related to the true essence of matter; we will call these privileged points diffused among the geometric points, *material or physical points.* We need to conceive such material points as disjoint one with the other and being located at very small distances one in presence of all the others. Again here we will not try to discuss how it happens that

questi punti materiali disgiunti si tengano fra loro a distanza e non si addossino o si disperdano. Vi ha chi con profonde vedute intorno alle leggi di forze attrattive o repulsive emananti dai punti materiali, cercò dare spiegazione di questo fatto; ma tali pensamenti sarebbero ora troppo anticipati. Per noi che qui non miriamo se non a formarci idee chiare, basta ammettere il fatto senza indagarne la causa.

3. La distribuzione dei punti materiali fra i geometrici per costituire i diversi corpi (e quì intendiamo sempre corpi che in tutte le loro parti siano della stessa natura) può aver luogo in infinite maniere. Possiamo rappresentarcela all'immaginazione per modo che le minime distanze fra detti punti siano più piccole da una parte che dall'altra, e passino per molte grandezze variabili secondo diversissime leggi. Per formarcene però un concetto matematico, conviene partire come da termine di confronto, da una disposizione regolare, che forse non avrà mai luogo in natura, ma che noi possiamo benissimo immaginare: epperò nella Memoria inserita nel Tomo XXI, la chiamammo *disposizione ideale.* Riferendo i diversi punti materiali di un corpo a tre assi ortogonali di coordinate x, y, z, suppongo le coordinate x, y, z di uno qualunque di questi punti, funzioni di tre coordinate ortogonali a, b, c per lo stesso punto in una distribuzione antecedente uniforme, nella quale gl' incrementi piccolissimi delle coordinate a, b, c per passare d' uno in altro punto materiale fossero costanti per ciascun asse, eguali fra loro ed espressi da una comune lettera σ di grandezza arbitraria, ma sommamente piccola. Immagino che la diversa struttura dei corpi quali ce li dà la natura, non consista se non nella diversa forma delle funzioni $x\ (a,\ b,\ c)$; $y\ (a,\ b,\ c)$; $z\ (a,\ b,\ c)$ per ciascun corpo. Quando io retrocedo coll' immaginazione a considerare i punti fisici dei differenti corpi (del legno per esempio, o dell' oro) nella disposizione antecedente ideale, me li rappresento tutti in eguali circostanze: passando poi da quella alla disposizione reale, penso che una certa forma delle funzioni $x\ (a,\ b,\ c)$; $y\ (a,\ b,\ c)$; $z\ (a,\ b,\ c)$ mi darà la disposizione

these material points are disjoint and keep a distance between themselves so that they do not collapse one on the others or they are not dispersed. There is somebody who, having a depth understanding of the laws of attractive and repulsive forces among material points, tried to give an explication of this fact; however these considerations would be now too premature. To our aims, as we are simply aiming to form in our mind [the most] clear ideas, it is enough to admit this fact without trying to investigate about its cause.

3. The distribution of material points among the geometrical ones, to constitute the different bodies (and here we consider always bodies which in all their parts have the same nature) can occur in different ways. We could represent in our imagination [this distribution] in such a way that the very small distances among these points be smaller somewhere than they are somewhere else, and assume different variable values following very different laws. However, in order to have in our mind formed a mathematical concept, it is convenient to start, as a term of comparison, from a regular array, which maybe will never occur in nature, which however we can very well imagine: and for this reason in the Memoir inserted in the Tome XXI we called it the *ideal array.* By referring the different material points of a body to a system of three orthogonal axes having as coordinate variables x, y, z, I assume the coordinates x, y, z, of the generic one of these points given as functions of the three orthogonal coordinates a, b, c labelling the same point in a uniform and antecedent array, in which the very small increments of the coordinates a, b, c needed to move from one to the closest next material point were constant for each axis and equal one to the other and expressed by the common letter σ having an arbitrarily small [positive] value, I imagine that the different structure of the bodies, as determined by their true nature, does consist simply in the different form of the functions $x(a,b,c); y(a,b,c); z(a,b,c)$ [assumed] for each body. When with my imagination I go back to consider the physical points of different bodies (of wood, or of gold, for instance) in the antecedent ideal array, I represent them in my mind all in the same circumstances: when then passing from the aforementioned ideal array to the real one, I think that a certain form of the functions $x(a,b,c); y(a,b,c); z(a,b,c)$ will supply to me the array

dei punti fisici nel legno, un' altra forma mi darà quella dei punti fisici nell' oro, e così via via.

4. Ripeterò quello che disse Newton in un caso simile : *mathematicus dumtaxat est hic conceptus.* Questa maniera di concepire la struttura dei differenti corpi, è quanto basta al Matematico che vuol metterne in equazione gli equilibrj e i movimenti. Pei bisogni del Fisico è permesso andare innanzi, e quei punti materiali chiamarli molecole tutte eguali fra loro, ancora estese, diversamente configurate, impenetrabili, inalterabili; però di tale esilità che non sia possibile ai nostri sensi, fossero anche le cento volte più perfetti, notarvi distinzioni di parti. Può anche immaginare ciascuna di queste molecole composta di un egual numero di particelle (chiamate atomi) di altri corpi semplici, particelle non separabili se non per mezzo di un altro genere di forze diverse da quelle che si considerano in Meccanica, cioè di forze chimiche: e quindi respingere a questa seconda sorta di particelle quella assoluta invariabilità che il Meccanico può supporre addirittura nelle molecole. Il Metafisico va, se gli piace, ancora più innanzi: per lui uno di questi atomi resistenti invincibilmente alle forze fisiche e chimiche, può ingrandirsi ancora quasi un mondo, sì che sia lecito considerarvi per entro un numero quanto vuolsi grande di punti ridotti adesso affatto inestesi, da cui emanino forze che li tengano a distanze sempre inalterabili da agenti creati. Lasceremo da parte quest'ultima speculazione, forse vera, ma per noi non necessaria: e quanto al mentovato concetto fisico dei punti materiali, lo richiameremo più innanzi quando cercheremo di ravvicinare la nostra maniera di vedere a quella degli Scrittori moderni. Per ora tutto ciò che riterremo del' averne fatto cenno, sarà l'arbitrio di usare promiscuamente il vocabolo di *molecole,* invece di punti fisici o materiali.

5. Considerando i corpi fatti di molecole disgiunte, diventa assai chiara l'idea della densità, che si fa maggiore, dove le molecole sono più ravvicinate, minore dove sono più diradate, costante in quei corpi che dappertutto sotto eguali porzioni del

characteristic of the physical points of wood, while another form will give me the array characteristic of gold and so on.

4. I will repeat here what Newton said in a similar case: *mathematicus dumtaxat est hic conceptus.* [which can be translated as follows: *At least this is a mathematical concept*]. This way of conceiving the structure of different bodies, is what is sufficient for a Mathematician, who wants to model by means of equations their equilibria and their motions. In order to meet the needs of the Physicist it is allowed to go further, and to call these material points molecules, [to assume that they] all equal one to the others, still endowed with extention, having different configurations, impenetrable, inalterable: however [these molecules will be assumed to be] so small in dimensions that it could not be possible to our senses, even if they were one hundred times more perfect, to detect any [their] distinct part. [The Physicist] can also imagine each of these molecules as composed by an equal number of particles (called atoms) of other simpler bodies, particles which could be separated one from the other only by means of another kind of forces, different from those which are considered in Mechanics, that is chemical forces, and consequently to attribute to this second kind of particles that absolute invariability which the Mechanician can assume even for molecules. The Metaphycisist will push his imagination, if he likes, even further: in his mind one of these atoms, which is able to resist to physical and chemical forces, could become nearly as great as a world, in such a way that it will be licit to consider inside it a number, as great as one wants, of points now considered having a nonnegligible extension, points from which emanate forces which keep [all of] them at distances always inalterable by any created agent. We will leave aside this last speculation, which may be true, but not needed for our aims: and for what concerns the aforementioned physical concept [that is the concept] of material points, we will recall it in what follows, when we will try to reconcile our point of view with the opinion of modern Writers. For the moment all what we will retain from our previous summary discussion will be the arbitrary and intermittent use of the word *molecules* at the place of the terms physical points or material points.

5. When considering the bodies as composed of disjoint molecules, it will become really clear the idea of density, which is greater where the molecules are closer, [is] smaller where they are more rarefied, [is] constant in those bodies which everywhere in equal parts

loro volume contengono egual numero di molecole , variabile in quei corpi dove ciò non succede.

Scolio. Per poco che si rifletta, si viene a comprendere , che i corpi possono essere a densità costante anche con diversa disposizione relativa delle loro molecole, bastando che sotto eguali porzioni di volume il numero delle molecole sia dappertutto il medesimo, il che può avverarsi in infiniti modi. Fra questi ne citerò due, l' uno dei quali è puramente ideale, l' altro reale. L' ideale è quello spettante alla distribuzione descritta più sopra al N. 3. in relazione con tre assi ortogonali di coordinate a, b, c : il reale è quello della distribuzione che prendono le molecole dei corpi ridotti allo stato liquido. Farò vedere fra poco che noi possiamo aver di mira il secondo, e ridurlo mentalmente al primo, senza che ciò porti alcuna alterazione nelle formole analitiche. Nella Memoria inserita nel Tomo XXI e anche dopo, ho studiato a lungo per capire come stia la collocazione rispettiva delle molecole nei liquidi : ma debbo confessare, che avendo trovato modo di concepirla chiaramente in un piano, non mi è riuscito lo stesso intento anche nello spazio a tre dimesioni (V. Giornale del ' Istituto Lombardo. T. VI. pag. 328 : Nota.) . Ora però sono giunto a comprendere (e lo mostrerò fra poco) che si può saltar di piè pari questa difficoltà, si può cioè far di meno del conoscere la vera disposizione rispettiva delle molecole nei liquidi in riposo, bastando il sapere essere essa tale da risultarne dappertutto la densità costante.

Se s' immagina che le molecole di un corpo a densità costante siano diradate in uno spazio doppio, triplo, ecc., restando però sempre a densità costante, la densità si dirà risultare la metà, un terzo, ecc. di quella di prima ; e viceversa, se il volume sia ridotto la metà, un terzo, ecc. comprendendo lo stesso numero di molecole, la densità si dirà ridotta doppia, tripla, ecc. Adunque le differenti densità costanti di uno stesso corpo sono fra loro in ragione inversa dei volumi occupati da un egual numero di molecole. Una di queste densità suole assumersi per

of their volume contain an equal number of molecules, [and is] variable in those bodies where this last circumstance does not occur.

Scholium. If one reflects a little, he will easily understand that the bodies can have a constant density also with different relative placements of their molecules, as it is enough [for having this property] that inside equal parts of volume the number of included molecules be the same, circumstance which can be verified in infinite manners. Among these I will cite [here] two, the first of which is purely ideal, the second one being real. The ideal manner is the one relative to the array described in the previous point 3. by making use of the three orthogonal axes of coordinates a, b, c : the real manner is the one relative to the array which is assumed by the molecules of the bodies when they are reduced to their liquid state. I will shortly show that we can aim [to study a body whose molecules are placed in the] the second array by reducing it mentally to the first, and this [mental process] will not produce any change in the analytical formulas. In the Memoir inserted in the Tome XXI and also after it, I have longly studied to understand how the molecules dispose themselves in liquids: I must however confess that, even if I could conceive it clearly in a plane I did not manage the same task also in the three-dimensional space (See Giornale del ' Istituto Lombardo. T. VI. pag. 328 : footnote.). Instead now I did manage to understand (and I will show this shortly) that we can completely ignore this difficulty, i.e. it is possible to ignore the true respective disposition of the molecules in liquids at rest, as it is enough to know that [this disposition] is such that the corresponding density is constant in space.

If one imagines that the molecules of a body having constant density are rarefied in a space [having volume] doubled, tripled, etc., keeping however their density constant in space [and keeping fixed the number of molecules] then the density will be reduced to one half, one third etc with respect to the previous value. Therefore the different densities constant in space of the same body are inversely proportional to the volumes occupied by the same number of molecules. One of these densities is usually assumed as

unitaria, ed è quella che corrisponde ad uno stato del corpo in certe determinate circostanze fisiche, stato che si è convenuto di prendere a base dei confronti.

6. La somma di tutte le molecole di un corpo, fatta astrazione dalle distanze che le separano , chiamasi la *Massa* del corpo. Però l' espressione numerica di questa massa non può venire formata dal numero di dette molecole, il quale in ogni estensione finita è sempre immensamente grande : ma dal rapporto di detto numero grandissimo all' altro pure grandissimo delle molecole dello stesso corpo comprese entro l'unità di volume, e distribuitevi colla densità costante unitaria. Si sa che il rapporto anche di due numeri grandissimi può essere espresso in poche cifre, talora semplicissime. Se pertanto prendasi per unitaria la massa compresa nell' unità di volume colla densità unitaria, la massa M in un volume V , quando la densità costante del corpo è ancora l' unitaria, ci sarà data dall' equazione $M = V$; e se la densità è Γ volte l' unitaria (Γ numero che spesso è una frazione) sarà espressa dalla formola $M = \Gamma \cdot V$.

7. Prima di procedere innanzi sarà bene intrattenerci a spiegare quello che si è soltanto accennato al N. 3., cioè che considerando le $x(a,b,c); y(a,b,c); z(a,b,c)$ (coordinate relative allo stato vero di un corpo qualunque) siccome funzioni delle a, b, c coordinate spettanti a quella distribuzione ideale nella quale le molecole sono rappresentate agli angoli di tanti cubi immensamente piccoli in contatto gli uni degli altri, possiamo anche dire queste a, b, c essere le coordinate delle diverse molecole in uno stato antecedente liquido da cui si immaginassero tolte per passare a quello che hanno nel corpo naturale anzidetto. E questa riduzione giova, perchè questo stato antecedente ideale non è allora più fuori della natura : le idee vengono meglio fissate: e se ne ha un deciso vataggio principalmente nella Idrodinamica. Tanto razionalmente quanto analiticamente si riconosce permesso lo scambio. Mentalmente niente ci vieta concepire entro uno stesso volume le molecole

the unitary one, and it is that [density] which corresponds to a particular state of the body in certain physical circumstances, [that particular] state which is chosen to be the referential one.

6. The sum of all the molecules of a body, regardless of the distances separating them, is called the mass of the body. However the numerical expression of this mass cannot be formed by the number of said molecules, as this number in any finite extension is always immensely great: instead [one has to consider it to be given] by the ratio between the said immensely great number and the other number, immensely great too, of the molecules of the same body included in the unit volume, [molecules which are] there distributed with a constant [in space] unitary density. It is well-known that the ration of two numbers each of them being even immensely great can be sometimes expressed in few digits, sometimes very simple. If therefore one assumes as unitary the mass included in the unit of volume when the density is unitary, the mass M in a volume V, when the constant density of the body is still the unitary one, will be given by the equation $M = V$; and if the density is Γ times the unitary one (Γ being a number which is often a fraction) it will be expresses by the formula $M = \Gamma \cdot V$.

7. Before moving forward it will be appropriate to explain in a greater detail what has been simply mentioned in the sect. 3, i.e. that when considering the $x(a,b,c); y(a,b,c); z(a,b,c)$ (coordinates relative to the true state of a generic body) as functions of the coordinates a, b, c relative to that ideal array in which the molecules are represented in the corners of many cubes, immensely small in contact one with the other, we can also say that these a, b, c are the coordinates of the different molecules in a liquid antecedent state from which they are assumed to move to the aforementioned true state. And this reduction is useful, as this ideal antecedent state is not any more outside the nature: the ideas are better fixed: and one gets a significant advantage expecially in Hydrodynamics. Both from the rational and analytical points of view it can be recognized that this exchange is allowed. Mentally nothing is forbidding us to conceive in the same volume the molecules

del liquido togliersi a quella disposizione in cui sono (qualunque essa sia) per mettersi ai vertici degli angoli degli ideati cubetti, e starvi tutte, nessuna eccettuata, estendendosi a tutto ancora il volume: qualche mancanza nei cubetti alle superficie conterminanti il detto volume, non fa difetto, attesa l' estrema piccolezza di essi, il che si farà manifesto per ciò che a momenti soggiungeremo. Così procedendo, la grandezza σ del lato di tutti quei cubi, la quale sulle prime poteva parere indeterminata, viene a ricevere una determinazione, abbisognando che essa sia nè più nè meno di quella che ci vuole affinchè sotto lo stesso volume del liquido stia un egual numero di molecole ridotte alla disposizione dei cubi. Una tale grandezza minima σ è un elemento singolare e di frequentissimo uso anche per le cose posteriori.

Analiticamente poi quello scambio non produce alcuna alterazione sensibile. Dette p, q, r le coordinate di una molecola quando il corpo è nello stato liquido con densità costante, e dette a, b, c le coordinate della stessa molecola quando la disposizione molecolare s' intende essere quella anzidetta dei cubi, le p, q, r (badisi bene) non possono differire dalle a, b, c se non per differenze minori o eguali al lato σ di quei cubi , talchè sarebbero

$$a = p + \sigma l; \quad b = q + \sigma m; \quad c = r + \sigma n; \tag{1}$$

essendo l, m, n coefficienti numerici non maggiori dell' unità ; nè farebbe difetto quand' anche fossero due o tre volte più grandi, il che non credo possa mai addivenire. Ora l' assumere le a, b, c invece delle p, q, r non può portare alcun divario aprezzabile nei valori delle formole analitiche, le quali , supponendo fatta la sostituzione dei valori (1), possono immaginarsi svolte secondo le potenze positive della σ, e cangiate in serie i cui primi termini sono que' medesimi che si avrebbero mettendo le vere coordinate $p, q, r,$ e gli altri possono francamente trascurarsi perchè moltiplicati colle potenze di σ. Vedremo più volte nel seguito di questa Memoria il bisogno di trascurar

of the liquid to move from the array in which they are (whatever it will be) to place themselves at the vertices of the corners of the conceived little cubes, and to find all of them place, no-one excluded, being [these molecules] still distributed inside the whole volume: some lacking cubes at the boundary of considered volume will not be a true difficulty, [if one has] considered that they are extremely small, this is [a logical argument which will become] clearer because of some further argument which we will add in the sequel. By reasoning in this way the dimension σ of the edge of all these cubes, which at the beginning could have seemed undetermined, actually is determined, as it logically needs to assume exactly the value necessary so that in the same volume of liquid will be placed an equal number of molecules reduced to the array of cubes. This very small quantity σ is a very peculiar one and will be used very often in the sequel.

Analytically then that aforementioned exchange [of array] will not produce any sensible alteration. Once called p, q, r the coordinates of one molecule when the body is in a liquid state with constant density, and called a, b, c the coordinates of the same molecule when the molecular array is intended to be the aforementioned one of the cubes, the p, q, r (one has to mind this statement closely) cannot differ from the a, b, c if not for differences smaller or equal to the side size σ of those cubes, so that they can be expressed by means of

$$a = p + \sigma l; \quad b = q + \sigma m; \quad c = r + \sigma n; \tag{1}$$

where l, m, n are numerical coefficients not greater than unit; and there could not be any problem even if they were two or three times greater, circumstance which I do not believe could never occur. Now by considering a, b, c instead of the p, q, r will not produce any remarkable difference in the values of the analytical formulas, which, by assuming that the values given in (1) are replaced, can be imagined as expanded in terms of the positive powers of the σ, and recognized to be series where the first terms are the same which one could obtain by considering the true values of the coordinates p, q, r, and the remaining ones can be really neglected because they are multiplied times higher powers of σ. We will see many times in the following of this Memoir the necessity of neglecting

termini che essendo moltiplicati per la σ, danno valori di quantità inapprezzabili dai nostri sensi : siccome quindi si tratta di un principio d' uso frequente, gioveranno le seguenti rilessioni.

Scolio. L' ammissibilità del principio si riferisce alla condizione attuale dell' uomo collocato, dice Pascal nei suoi Pensieri (Parte I^a Art. IV) a immense distanze tanto dall' infinito quanto dallo zero: distanze nelle quali è permesso immaginare tanti ordini di grandezze, di cui ciascuno sia come un tutto relativamente a quello che lo precede, e quasi un niente relativamente a quello che lo segue. Quindi risulta che quelle stesse quantità asserite siccome trascurabili per noi senza tema di errore, potrebbero essere grandi e tutt' altro che trascurabili per esseri i quali fossero, per esempio, adatti a percepire le proporzioni che reggono l' organizzazione degli animaletti infusorj. Per tali esseri quei corpi che a noi pajono continui, potrebbero apparire come mucchj di sacchi : l' acqua, che per noi è un vero liquido, potrebbe comparire come per noi il miglio o un ammasso scorrevole di pallini di piombo. Ma anche per tali esseri ci sarebbero poi i veri fluidi, rispetto ai quali varrebbero per essi le stesse conseguenze che noi deduciamo rispetto all' acqua. Vi hanno dunque quantità che riduconsi nulle assolutamente per tutti gli ordini di esseri, come gli elementi analitici adoperati nel calcolo integrale, e vi hanno quantità nulle solo per esseri di un cert' ordine, che non lo sarebbero per altri, come alcuni elementi che entrano nelle considerazioni di Meccanica. Io, educato da Brunacci alla scuola di Lagrange, ho sempre impugnato l'infinitesimo metafisico, ritenendo che per l' analisi e la geometria (se si vogliono conseguire idee chiare) vi si deve sempre sostituire l' indeterminato piccolo quanto fa bisogno : ma ammetto ciò che potrebbe chiamarsi l'infinitesimo fisico, di cui è chiarissima l'idea. Non è uno zero assoluto, è anzi tal grandezza che per altri esseri potrebbe riuscire apprezzabile, ma è uno zero relativamente alla portata dei nostri sensi, pei quali tutto quanto è al disotto di loro, è precisamente come non esistesse.

terms which, being multiplied by the quantity σ, give values to quantities which cannot be detected by our senses: as a principle is dealt with which will be frequently used, consequently the following reflections may be useful.

Scholium. The admissibility of the principle refers to the true condition of the human being, placed, as said by Pascal in his Thoughts (Part I. Art.IV) at immense distances both from infinity and the zero: distances in which one can imagine many orders of magnitude, of which one [order of magnitude] can be regarded as a whole when compared with the one which is preceding it, and nearly nothing when compared with [the order of magnitude] which follows it. Therefore it results that the same quantities which are asserted to be negligible for us without being afraid of going wrong, could be great and not at all negligible quantities for beings which could be, for instance, capables to perceive the proportions which characterized the structure of microorganisms. For those beings those bodies which appear to us to be continuous could appear as bunches of sacks: water, which for us is a true liquid, could appear as for us [appears] millet or a flowing bunch of lead shots. But also for these beings there would exist true fluids, relative to which the same consequences, which we deduce relatively to water, should hold true for them. There are therefore quantities which are null absolutely for all orders of beings, as the analytical elements used in the Integral Calculus, and there are quantities which are null only for beings of a certain order, and these quantities would not be null for other beings, as some elements which are considered in Mechanics. As I was educated by Brunacci at the school of Lagrange, I always opposed the metaphysical infinitesimal, as I believe that for the analysis and the geometry (if one wants to achieve clear ideas) it has to be replaced by the "indeterminately small" as much as it is needed: however I accept what could be defined the physical infinitesimal, of which the idea is clear at all. It is not an absolute zero, it is nay a magnitude which for other beings could be appreciable, but it is a zero relatively to the acuity of our senses, for which everything which is below their sensitivity threshold is exactly as if it were not existing.

Concludiamo pel caso attuale. Delle due maniere indicate al N. 3. per la distribuzione delle molecole onde ottenere la densità costante, possiamo dire essere quella dello stato liquido la precedente colle coordinate a, b, c, da cui immaginiamo trasportati i corpi allo stato attuale colle coordinate $x(a,b,c); y(a,b,c); z(a,b,c)$: e nondimeno trattare analiticamente le a, b, c come se la disposizione delle molecole fosse quella dei cubi. Quantunque poi questa proposizione, in forza degli addotti ragionamenti, sia a mio parere sufficientemente provata, mi ricorderò di recarne più tardi una riconferma.

8. Vediamo di formarci l'idea e l' espressione della densità variabile, e per riuscirvi immaginiamo di assistere a quella operazione mediante la quale le molecole si tolgono alla disposizione (a, b, c) di densità costante assunta come unitaria, per passare alla disposizione reale $[x(a,b,c), y(a,b,c), z(a,b,c)]$. In quella prima immaginiamo la massa divisa entro uno spazio qualunque in tanti parallelepipedi kij (di lati k, i, j) comprendenti ciascuno un certo numero eguale di quei cubetti descritti al principio del N.° precedente, e in contatto gli uni degli altri. Nel trapasso alla disposizione reale quelle piccole masse eguali in conseguenza di un muoversi delle molecole piccolissimo, e che altera le loro reciproche distanze, saranno venute a disporsi sotto volumi $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ succedentisi gli uni accanto agli altri, i quali non saranno eguali fra loro, come lo erano quei primi parallelepipedi, e saranno anche di diversa configurazione relativamente alle superficie che li comprendono. Immaginiamo ora che in ciascuno di questi volumetti così stabiliti, le molecole (le quali sono per tutti in egual numero) senza uscire da essi tornino ad una disposizione che dia la densità costante. Poichè i volumi $v_1, v_2, v_3, ...$ sono fra loro diversi, le anzidette densità costanti in ciascuno, saranno diverse fra loro, e diverse dalla densità unitaria primitiva, ed espresse (Vedi N. 5. sul fine) dalle frazioni

$$\frac{kij}{v_1};\ \frac{kij}{v_2};\ \frac{kij}{v_3};\ .....\ \frac{kij}{v_n}. \qquad (2)$$

We resume here our argument at hand. Between the two manners indicated in sect. 3 for finding the arrays of the molecules having a constant density, we can say that the array relative to the liquid state is the one which is preceding the array characterized by the coordinates a, b, c, from which we assume the bodies are transported to the actual state, the one having as coordinates [for the considered material point] $x(a,b,c); y(a,b,c); z(a,b,c)$: however [we can] treat nonetheless the coordinates a, b, c, as if the array of the molecules were the one [constructed by means] of the cubes. Albeit this proposition, because of the adduced reasonings, may be in my opinion considered as sufficiently proven, I will remember to establish its reassertion with further arguments.

8. Let us try now to form in our mind the idea and the [mathematical] expression of variable [in space] density [field], and in order to succeed in this task let us imagine to witness that operation by means of which the molecules move from the array (a, b, c) having unitary spatially constant density to arrange in the real array $[x(a,b,c),\ y(a,b,c),\ z(a,b,c)]$. In the first array we imagine the mass in any volume as divided in many parallelepipeds kij (having as sides k, i, j) each including a certain equal number of those little cubes described at the beginning of the precedent sect.[7], all being in contact one with the others. In the passage to the real array those small equal masses because of a small displacement of the molecules, [displacement] which alters their relative distances, will arrive to place themselves into the volumes $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ [which are] packed one close to the others, [volumes] which will not be [anymore] equal one to the other, as happened for the original parallelepipeds, and will assume a different configuration with respect to the surfaces which includes them. Let us imagine then that in each of these little volumes so constructed, the molecules (which are for all of them in equal number) without coming out of them be placed again in an array allowing for a constant density. As the volumes $v_1, v_2, v_3, ...$ are now different one with respect to the other, the aforementioned constant densities in each of them will be different, and different from the unitary initial density, so that they will be expressed (see sect. 5 at the end) by the fractions

$$\frac{kij}{v_1};\ \frac{kij}{v_2};\ \frac{kij}{v_3};\ .....\ \frac{kij}{v_n}. \qquad (2)$$

Il corpo che risulterebbe dopo l' ideata riduzione delle molecole, sarebbe bensì un corpo a densità cangiante di tratto in tratto, ma non il vero corpo a densità variabile. Nondimeno noi possiamo col pensiero impicciolire continuamente di grandezza e crescere di numero i primitivi parallelepipedi kij , e i corrispondenti volumetti $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ che colla loro somma compongono il volume intero del corpo. Ci si presenta allora alla mente una serie indefinita di corpi a densità cangiante, che occupano tutti uno stesso volume V , nei quali i salti di densità d'uno in altro volume diventano sempre più frequenti, e una stessa densità persevera sempre più poco. Il corpo a densità variabile è quello, lo stato del quale viene sempre meno imperfettamente rappresentato dai corpi dell' anzidetta serie più che c' innoltriamo in essa, e sta come limite di tali successivi avvicinamenti.

9. Fissata l' idea della densità variabile, cerchiamone l'espressione. Il volumetto v_n sia quello contenente la massa che nella disposizione precedente ideale occupava il parallelepipedo kij il cui vertice più vicino all' origine degli assi avea le coordinate a, b, c. È manifesto che le dimensioni del volume v_n dipenderanno dalle forme delle funzioni
$x(a,b,c), y(a,b,c), z(a,b,c)$ che regolarono la collocazione rispettiva delle molecole nel trapasso alla disposizione reale. Esso è in generale espresso dalla formola

$$v_n = \int dx \int dy \int dz.1$$

dovendosi intendere le integrazioni definite secondo i valori che prendono le x, y, z alle superficie conterminanti il volume : ma non si vede a prima giunta come effettuare tale operazione analitica. Si arriva però all'intento traformando detto integrale triplicato nell'altro equivalente preso per le variabili a, b, c delle quali conosciamo i limiti che si riferiscono alle dimensioni del parallelepipedo kij . Abbiamo per tal modo, giusta la nota teorica per la trasformazione degli integrali triplicati (*)[1]

[1](*)Lacroix. Traité ec. T. II. n. 531. pag. 208 ; ovvero Bordoni. Lezioni ec. T. I. pag 380.

The body which would result after the conceived reduction of the molecules, would be however a body having a piecewise constant density, and would not be the true body with varying density. Nevertheless we can with our thought decrease the dimensions and increase the number of the primitive little parallelepipeds kij , and the corresponding little volumes $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ which with their sum compose the whole volume of the body. There appears then to our mind an indefinite series of bodies having varying density, which all occupy the same volume V, in which the jumps of density from one to the other small volume become more and more frequent, and the same value of density remains constant for smaller and smaller distances. The body with varying density is then characterized as the one whose state is less and less imperfectly represented by the bodies of aforementioned series increasingly forward we advance in it, and [the body] can be regarded as the limit of such subsequent approximations.

9. Once the idea of variable density [field] is stated, let us find its expression. Let the little volume v_n be that one which contains the mass which in the precedent ideal array occupied the parallelepiped kij, whose vertex closer to the origin of axes had the coordinates a, b, c. It is manifest that the dimensions of the volume v_n will depend on the form of the functions $x(a,b,c), y(a,b,c), z(a,b,c)$ which determine the relative placement of the molecules in the passage to the real configuration. It is in general represented by the formula

$$v_n = \int dx \int dy \int dz.1$$

where one must consider the integrations boundaries defined following the values which the variables x, y, z assume at the surface which bounds the volume: however it is not easy to see at first sight how this analytical operation has to be performed. It is however possible to reach the intended result by transforming this triple integral into the equivalent one in terms of the variables a, b, c of which we know the integration limits which can be easily referred to the dimensions of the parallelepiped kij. In this way, by applying the well-known theory for the transformation of triple integrals (*)[1] we have

[1](*)Lacroix. Traité ec. T. II. n. 531. pag. 208 ; or Bordoni. Lezioni ec. T. I. pag 380.

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \int_c^{c+j} dc.H \tag{3}$$

essendo H un sestinomio come segue

$$\begin{aligned} H = & \frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} \\ & + \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{da} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\frac{dz}{da} \\ & + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{db} \end{aligned} \tag{4}$$

È facile svolgere l' integrale triplicato dell' equazione (3) in una serie ordinata secondo gli aumenti k, i, j : e ciò per la doppia ragione che questi aumenti sono indeterminati, e che i limiti delle successive integrazioni sono indipendenti gli uni dagli altri.

Infatti chiamiamo per un momento $F(c)$ l' integrale $\int dc.H$ indefinito ed incompleto, avremo

$$\int_c^{c+j} dc.H = F(c+j) - F(c) = j\frac{dF}{dc} + \frac{j^2}{2}\frac{d^2F}{dc^2} + \text{ec.}$$

ossia, siccome $\frac{dF}{dc} = H$,

$$\int_c^{c+j} dc.H = j\ H + \frac{j^2}{2}\frac{dH}{dc} + \text{ec.}$$

Ci è quindi lecito cambiare il valore di v_n dato dalla (3) nel seguente

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \left(j\ H + \frac{j^2}{2}\frac{dH}{dc} + \text{ec.} \right)$$

e come abbiamo potuto fare sparire un segno integrale, collo stesso artifizio faremo sparire anche gli altri due, e ci risulterà

$$v_n = k\ i\ j\ H + \frac{k^2ij}{2}\frac{dH}{da} + \frac{ki^2j}{2}\frac{dH}{db} + \frac{kij^2}{2}\frac{dH}{dc} + \text{ec.}$$

Sostituendo questo valore di v_n nell' ultima delle espressioni (2), e dividendo i due termini della frazione per $k\ i\ j$, avremo

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \int_c^{c+j} dc.H \tag{3}$$

where H is the sextinomial which follows

$$\begin{aligned} H = & \frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} \\ & + \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{da} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\frac{dz}{da} \\ & + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{db} \end{aligned} \tag{4}$$

It is easy to develop the triple integral in the equation (3) into a series with respect to the increments k, i, j and this for the double reason that these increments are indetermined and the limits of the successive integrations are independent one of the others.

Indeed let us call for a moment $F(c)$ the indefinite and incomplete integral $\int dc.H$, we will have

$$\int_c^{c+j} dc.H = F(c+j) - F(c) = j\frac{dF}{dc} + \frac{j^2}{2}\frac{d^2F}{dc^2} + \text{etc.}$$

which, as $\frac{dF}{dc} = H$, reads

$$\int_c^{c+j} dc.H = j\ H + \frac{j^2}{2}\frac{dH}{dc} + \text{etc.}$$

It is therefore licit to change the value of v_n, as given by (3) into the following

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \left(j\ H + \frac{j^2}{2}\frac{dH}{dc} + \text{etc.} \right)$$

and exactly as we managed to replace one integral sign, via the same procedure we will replace also the other two, and will get

$$v_n = k\ i\ j\ H + \frac{k^2ij}{2}\frac{dH}{da} + \frac{ki^2j}{2}\frac{dH}{db} + \frac{kij^2}{2}\frac{dH}{dc} + \text{etc.}$$

Replacing this value for v_n in the last of the expressions (2), and dividing the two terms of the fraction by $k\ i\ j$, yield

$$\frac{1}{H+\frac{k}{2}\frac{dH}{da}+\frac{i}{2}\frac{dH}{db}+\frac{j}{2}\frac{dH}{dc}+\text{ec.}} \tag{5}$$

per l' espressione della densità costante entro il volumetto v_n. Mentre col successivo impicciolirsi dei volumetti $v_1, v_2, ...v_n$, veniamo, come sopra abbiamo descritto, ad accostarci continuamente al vero corpo a densità variabile, il valore della precedente frazione (5), a motivo dell' impicciolimento continuo delle k, i, j, s'accosterà esso pure come a limite della frazione $\frac{1}{H}$: quindi detta Γ l' espressione della densità variabile, avremo

$$\Gamma = \frac{1}{H}. \tag{6}$$

È questa una formola capitale, di cui ci occorrerà tratto tratto l'applicazione, e da cui si deducono prontamente conseguenze che altrimenti si avevano con molto stento. Viene essa dall' avere considerata la composizione dei corpi come precedente dopo una primitiva disposizione ideale ed uniforme delle loro molecole, quale si ha nello stato di fluidità: e dall' aver riguardate le coordinate x, y, z dello stato reale come funzioni delle coordinate a, b, c spettanti a quello stato precedente(*)[1].

Aggiungiamo una considerazione già fatta da Lagrange, cioè che dalle equazioni

$$x = x\,(a,b,c)\,;\;\; y = y\,(a,b,c)\,;\;\; z = z\,(a,b,c) \tag{7}$$

possono intendersi dedotte le inverse

$$a = a\,(x,y,z)\,;\;\; b = b\,(x,y,z)\,;\, c = c\,(x,y,z) \tag{8}$$

per cui si abbiano le a, b, c in funzione delle x, y, z : e che quindi ogni funzione $K(a,b,c)$ delle a, b, c può essere riguardata ridotta ad una forma $K(x,y,z)$ in funzione delle x, y, z

[1](*) Nella memoria inserita nel T. XXI di questi Atti ho dato una dimostrazione della formola (6) diversa dalla presente e molto più lunga : essa era dedotta da considerazioni geometriche che poi conobbi poter evitare, adottando, come qui feci, la teoria dei limiti.

$$\frac{1}{H+\frac{k}{2}\frac{dH}{da}+\frac{i}{2}\frac{dH}{db}+\frac{j}{2}\frac{dH}{dc}+\text{etc.}} \tag{5}$$

for the expression of the constant density inside the little volume v_n. While with the progressive decrease of the little volumes $v_1, v_2, ...v_n$, we get, as we described before, closer and closer to the true body with variable density, the value of the precedent fraction (5), because of the continuous decrease of the variables k, i, j, will become closer and closer as a limit to the fraction $\frac{1}{H}$: therefore once called Γ the expression of the variable density, we will have

$$\Gamma = \frac{1}{H}. \tag{6}$$

This is a formula of capital importance whose application we will need very often, [indeed it is a formula] from which one can easily deduce consequences which otherwise can be obtained very painfully. It comes out because the [referential] precedent fluid configuration of the bodies was assumed to be reached from a primitive ideal and uniform array of the molecules and because the coordinates x, y, z of the real state were regarded as functions of the coordinates a, b, c relative to that precedent state.(*)[1]

We add here a consideration which was already presented by Lagrange, i.e. that from the equations

$$x = x\,(a,b,c)\,;\;\; y = y\,(a,b,c)\,;\;\; z = z\,(a,b,c) \tag{7}$$

we can assume to be able to deduce their inverse equations

$$a = a\,(x,y,z)\,;\;\; b = b\,(x,y,z)\,;\, c = c\,(x,y,z) \tag{8}$$

from which we can get the variables a, b, c as functions of the variables x, y, z : and therefore [we can assume] that every function $K(a,b,c)$ of the variables a, b, c can be reduced to a form $K(x,y,z)$ as a function of the variables x, y, z.

[1](*) In the Memoir inserted in T.XXI of the present Proceedings I gave a demostration of the formula (6) different from the one which I presented here and much more involved: indeed it was deduced there from some geometrical considerations which I understood later that I could avoid, by adopting, as I have done here, the theory of limits.

mediante la sostituzione dei valori (8) . Adunque la densità $\Gamma(x,\ y,\ z)$ nel punto $(x,\ y,\ z)$ è quella funzione delle coordinate dello stato reale che si ottiene dal secondo membro della (6) ove s' immaginino eseguite tutte le derivazioni indicate nel sestinomio (4) e ad operazioni finite sostituiti i valori (8) .

10. È ora facile avere l'espressione della massa di un corpo a densità variabile per mezzo delle dimensioni ch' esso ha nel suo stato reale. La massa M che sta nel volume V di detto corpo, stava in un diverso volume, quando la disposizione delle molecole era la precedente ideale colla densità unitaria, e allora sarebbesi avuto (Vedi N. 6)

$$M = \int da \int db \int dc.1 \tag{9}$$

intendendo le integrazioni definite giusta i valori delle a, b, c alle superficie conterminanti il volume. Mettendo invece dell' unità il valore equivalente ΓH (equazione (6)), la formola precedente diventa

$$M = \int da \int db \int dc.H\Gamma$$

dalla quale, per la teorica della trasformazione degli integrali triplicati più sopra ricordata, si può passare immedatamente all'altra

$$M = \int dx \int dy \int dz.\Gamma(x,y,z) \tag{10}$$

dove adesso i limiti delle integrazioni si hanno pei valori che prendono le $x,\ y,\ z$ ai limiti delle superficie nello stato reale del corpo. Se avessimo rapportato lo stato reale del corpo non ad uno stato antecedente di densità costante unitaria, ma di densità costante espressa da un numero μ ci sarebbe risultato moltiplicato per questo stesso numero μ tanto il secondo membro della formola (6) quanto quello della formola (10) .

Possiamo osservare che nella formola (10) l'effetto della funzione Γ introdotta sotto l'integrale triplicato, si è quello di rettificare un errore che senza di essa ci risulterebbe, non potendo più la massa avere per espressione la stessa espressione del volume, come nella formola (9) : infatti la massa è ancora

by means of the replacement of the values (8). Therefore the density $\Gamma(x,\ y,\ z)$ in the point $(x,\ y,\ z)$ is that function of the coordinates of the real state which is obtained from the second member of the (6), where all the derivations indicated in the sextinomial (4) are imagined as performed, by replacing the values given by (8).

10. It is now easy to obtain the expression of the mass of a body having a [spatially] variable density by means of the configuration which it assumed in its real state. The mass M placed in the volume V of said body was placed in a different volume when the configuration of the molecules was the precedent ideal one and the density was unitary. In that case one would have had (See sect. 6)

$$M = \int da \int db \int dc.1 \tag{9}$$

regarding the integration limits being defined by the values of a, b, c which delineated the volume. Replacing the unit with the equivalent value ΓH (equation (6)), the precedent formula becomes

$$M = \int da \int db \int dc.H\Gamma$$

from which, because of the theory of transformation of triple integrals previously already recalled, one can obtain immediately the following one

$$M = \int dx \int dy \int dz.\Gamma(x,y,z) \tag{10}$$

where now the integration limits are given by the values assumed by the variables x, y, z on the surface which is the boundary of [the volume occupied by] the body in the real state. If, instead of referring [the body] to an antecedent state having unitary density, we had referred [its] real state to a referential configuration having constant density given by a number μ we would have had multiplied times the same number μ both the second members of the formulas (6) and (10).

We can remark that in the formula (10) the effect of the function Γ introduced in the triple integral, is that of rectifying the error which, without it, we would get, as the mass [in the real state] cannot have the same expression relatively to the [occupied] volume: indeed the mass is remained

la stessa e il volume è cambiato. Di più : la struttura del calcolo integrale suppone costanti gli aumenti delle variabili adoperate nelle integrazioni, mentre x, y, z che passano d' una in altra molecola dello stato reale, non hanno veramente i loro aumenti eguali : pare quindi che si commetta un errore coll' usare delle x, y, z come si farebbe di variabili semplici in formole integrali. Non è vero : l' introduzione del fattore Γ corregge questo errore, cioè fa sì che si abbiano risultati giusti anche adoperando come variabili semplici le x, y, z che in realtà non lo sono. È questa una osservazione la quale potrà ricorrere frequentemente nello studio della seguente Memoria.

11. Sogliono i Matematici considerare talvolta la materia, non configurata secondo un volume a tre dimensioni ma in una linea o in una superficie : si hanno allora sistemi chiamati lineari o superficiali. Veramente essi non sono che astrazioni, ed è perciò che la maggiore attenzione del Geometra deve sempre rivolgersi ai sistemi a tre dimensioni. Nondimeno ne è utile la considerazione, giacchè le diverse analisi per le tre sorte di sistemi offrono riscontri che le rischiarano, e di più servono anche ad applicazioni fisiche, quantunque però sempre in via di approssimazione, non essendo in natura mai il corpo, rigorosamente parlando, destituito di una o di due dimensioni.

Quantunque tanto pei sistemi lineari quanto pei superficiali ci abbisognino speciali considerazioni affine di rappresentarci la distribuzione delle molecole, e formaci l'idea della densità e la misura della massa, pure sono esse affatto analoghe alle surriferite pei i sistemi a tre dimensioni : quindi le esporrò in maniera succinta.

Pel sistema lineare comunque curvilineo, conviene considerare le molecole nello stato reale, ivi trasportate da uno stato antecedente ideale nel quale erano tutte collocate in una linea retta parallela all'asse delle ascisse, e distanti fra loro d' intervalli piccolissimi eguali. Chiamata a l' ascissa variabile per una molecola generica nello stato antecedente (le altre due coordinate figurano fra le costanti), le coordinate rettangole

the same and the volume is changed. I will add more to this argument: the structure of the integral calculus assumes that the increases of the variables used in the integrations are constant, while the variables x, y, z which change when passing from one to another molecule in the real state, do not suffer equal changes: one could therefore believe that he is wrong when using the variables x, y, z as the simple variables in integral formulas. It is not true: the introduction of the factor Γ corrects this error, that is, it leads to the correct results also when using as simple variables [i.e as integration variables] the variables x, y, z which actually were not those used in the integration. This is an observation which will be recurring frequently in the study of the following Memoir.

11. Sometimes mathematicians are used considering the matter configured not in a volume with three dimensions but [configured] in a line or in a surface: in these cases we have the so called linear or superficial systems. Indeed [these systems] are nothing other that abstractions and it is just for this reason that the Geometer should pay the greatest attention to the three dimensional systems. Nevertheless, it is useful to consider [these systems] because several analyses for the three kinds of systems provide feedback that make [such analyses] clear, and moreover [such analyses] are useful for physical applications, even though always in approximate way, because the bodies, rigorously speaking, are being never deprived in Nature of one or two dimensions.

Although for both linear and superficial systems we need special considerations in order to represent the distribution of the molecules, and [in order] to form the idea of the density and of the measure of the mass, [the idea and the measure] are still similar to the above referred for the three dimensional systems: thus, I will expound on them shortly.

For what concerns the linear generally curvilinear system, it is useful to consider the molecules in the real state, therein transported from an antecedent ideal state in which [the molecules] were collocated in a rectilinear line parallel to the abscissa axis, and far apart very small equal intervals from each other. Let us call a the variable abscissa for a general molecule in the previous state (the other two coordinates appear in [the list of] constants), the rectangular coordinates

x, y, z della stessa molecola nello stato reale debbono riguardarsi funzioni delle a,

$$x = x(a)\,;\;\; y = y(a)\,;\;\; z = z(a)\,; \tag{11}$$

funzioni che mediante la loro forma regoleranno la distribuzione della materia nello stato reale, e dopo l' eliminazione della a ci daranno le due equazioni della curva geometrica in cui le molecole sono distribuite.

Consideriamo nello stato antecedente molte piccole parti eguali k di quella retta, comprendenti un egual numero di molecole, le quali nello stato reale occuperanno gli archetti $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ diseguali fra loro. Se anche quì concepiamo che in ciascuno di questi archetti le piccole masse eguali tornino a mettersi con distanze eguali fra le loro molecole (distanze che saranno però diverse per ciascun archetto) la densità dell'archetto v_n rapportata alla primitiva sarà espressa da

$$\frac{k}{v_n} \tag{12}$$

Abbiamo per v_n tre espressioni : la prima

$$v_n = \int dx \cdot \sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

considerando le y, z funzioni di x ed essendo i limiti dell' integrale determinati dai valori di x per le due estremità di detto arco. La seconda

$$v_n = \int_a^{a+k} da \cdot \frac{dx}{da}\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

quando si trasforma l' integrale e lo si prende per la variabile a di cui la x è funzione. La terza

$$v_n = k\,\frac{dx}{da}\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \frac{k^2}{2}\cdot\frac{d\cdot\frac{dx}{da}\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \text{ec.}}}{da} \tag{13}$$

x, y, z of the same molecule in the real state have to be seen as functions of a,

$$x = x(a)\,;\;\; y = y(a)\,;\;\; z = z(a)\,; \tag{11}$$

functions that, through their form, will regulate the distribution of matter in the real state, and after the elimination of a will give us the two equations of the geometric curve in which the molecules are distributed.

Let us consider, in the antecedent state, many small and equal parts k of that straight line, including an equal number of molecules, which in the real state will fill the small arches $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ unequal to each other. If, even in this case, we conceive that in each of these small arches the small and equal masses come back to set themselves with equal distances between their molecules (distances, however, that will be different for each arch), then the density of the small arch v_n with respect to the primitive one will be expressed as follows

$$\frac{k}{v_n} \tag{12}$$

We have for v_n three expressions: the first

$$v_n = \int dx \cdot \sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

since we consider y, z as functions of x and being the limits of the integral given by the values of x for the two extreme points of the cited arch. The second one

$$v_n = \int_a^{a+k} da \cdot \frac{dx}{da}\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

when the integral is transformed and it is expressed in terms of the variable a, of which x is a function

$$v_n = k\,\frac{dx}{da}\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \frac{k^2}{2}\cdot\frac{d\cdot\frac{dx}{da}\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \text{etc.}}}{da} \tag{13}$$

quando si riduce l' integrale in serie, come si è fatto al N. 9. Dalle espressioni (12) e (13) caviamo mediante una riduzione al limite analoga, ma più semplice, dell' usata al N. 9, la densità variabile Γ pel punto $(x,\ y,\ z)$ espressa dalla formola

$$\Gamma = \frac{\imath}{\frac{dx}{da}\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \tag{14}$$

ovvero, poichè

$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{da}; \qquad \frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{da} \tag{15}$$

$$\Gamma = \frac{\imath}{\sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2}}; \tag{16}$$

il secondo membro di questa equazione ci presenta la densità Γ come funzione di a, ma ci è sempre lecito considerarla funzione di x, immaginando sostituito ad a il suo valore $a = a(x)$ cavato dalla prima delle (11).

Quanto alla misura della massa M, le tre formole che corrispondono successivamente a quelle del N. 9, sono le seguenti

$$M = \int da\cdot\imath$$

$$M = \int da\cdot\frac{dx}{da}\ \Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$M = \int dx\cdot\ \Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}. \tag{17}$$

La prima dà la massa misurata dal volume nella distribuzione primitiva, intendendo che i limiti dell' integrale siano i valori della a per le due estremità di quella retta : la seconda è ancora la prima ove si è introdotta sotto il segno integrale un' espressione eguale all' unità in forza dell' equazione (14) : la terza è quella che si ottiene trasformando l' integrale in maniera che sia espresso mediante le variabili proprie dello stato reale.

when the integral is reduced in series, see e.g. what we did at sect. 9. From the expressions (12) and (13) we obtain, through a limit reduction, that is similar, but simpler, of that used at sect. 9, the variable density Γ at the point $(x,\ y,\ z)$ expressed in the formula,

$$\Gamma = \frac{\imath}{\frac{dx}{da}\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \tag{14}$$

or, since

$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{da}; \qquad \frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{da} \tag{15}$$

$$\Gamma = \frac{\imath}{\sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2}}; \tag{16}$$

the right-hand side of this [above] equation gives us the density Γ as a function of a, however it is anyway correct to consider [the function Γ] as a function of x, taking the substitution $a = a(x)$ into account, that is obtained from the first of the (11).

For what concerns the measure of the mass M, the three formulas that correspond respectively to those of sect. 9, are the following

$$M = \int da\cdot\imath$$

$$M = \int da\cdot\frac{dx}{da}\ \Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$M = \int dx\cdot\ \Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}. \tag{17}$$

The first one gives the mass that is measured from the volume in the primitive distribution, taking into account that the limits of the integral are those values of a corresponding to the two extremes of that straight line: the second one is again the first where it is introduced under the integral sign an expression equal to unit by virtue of the equation (14): the third one is that obtained by transforming the integral in such a way that it is expressed through the variables that are natural in the real state.

12. Pei sistemi superficiali comunque curvi, le molecole nello stato antecedente ideale si suppongono distribuite in un piano che può prendersi parallelo a quello delle x, y, e così uniformemente che distino fra loro di piccoli intervalli eguali secondo i due assi, ovvero, ciò che torna lo stesso, siano collocate agli angoli di tanti quadratelli uguali che ricoprano tutta quella superficie piana, potendo però lasciare (il che non fa difetto) qualche manco vicino alle linee curve da cui può intendersi limitata la figura piana. Chiamate a, b le coordinate variabili della molecola generica in tale stato antecedente, le coordinate rettangole x, y, z della stessa molecola nello stato reale, debbono riguardarsi funzioni delle a, b,

$$x = x\ (a,b)\,;\quad y = y\ (a,b)\,;\quad z = z\ (a,b)\,; \tag{18}$$

fuzioni che mediante la loro forma regoleranno la distribuzione della materia per entro alla superficie curva dello stato reale. Si può intendere che vengano eliminate fra esse le due variabili a, b, e così ottenuta una equazione fra le x, y, z, che sarà quella della superficie del sistema.

Consideriamo nello stato antecedente tanti piccoli rettangoli $k\ i$ che comprendano un egual numero di molecole : passando allo stato reale, queste piccole masse eguali si metteranno in tante porzioncelle $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ di superficie curva, le quali, generalmente parlando, saranno diverse fra loro, e in nessuna di esse la densità sarà costante. Però immaginando che in ciascuno di questi spazietti le molecole si rimettano in una distribuzione uniforme, avremo un sistema superficiale a densità cangiante, che si avvicinerà sempre più al sistema vero, quanto più i mentovati spazietti cresceranno di numero e scemeranno di grandezza. La densità nello spazietto v_n rapportata alla primitiva dello stato ideale, sarà espressa da

$$\frac{k\ i}{v_n}. \tag{19}$$

Abbiamo per v_n tre espressioni. La prima

12. For what concerns the superficial generally curved systems, the molecules in the ideal antecedent state are assumed to be distributed in a plane that can be considered parallel to that of x, y, and so uniformly [distributed] that [the molecules] are far apart from each other by small intervals that are equal along the two axes, or, that is the same, being collocated at the corners of many and equal little squares that cover all that plane surface, being possible to leave (that is not a fault) some gaps near the curved lines from which it can be intended the plane domain to be limited. Let us call a, b the variable coordinates of the generic molecule in that antecedent state, the rectangular coordinates x, y, z of the same molecule in the real state have to be seen as functions of the a, b,

$$x = x\ (a,b)\,;\quad y = y\ (a,b)\,;\quad z = z\ (a,b)\,; \tag{18}$$

functions that, through their form, will regulate the distribution of matter inside the curved surface of the real state. It is possible to intend that the two variables a, b are eliminated among [the three equations in (18)] and that an equation among x, y, z is obtained, which will be that one of the surface of the system.

Let us consider, in the antecedent state, many small rectangles $k\ i$ including an equal number of molecules: being transported to the real state, these small equal masses will be collocated in as many little portions $v_1, v_2, v_3, ...v_n$ of curved surface, which [little portions], generally speaking, will be unequal to each other and in none of them the density will be constant. However, if we conceive that in each of these little spaces the molecules will be collocated in a uniform distribution, then the superficial system will have a variable density, that will be closer and closer to the real system, as much as these mentioned little spaces will increase their number and decrease their size. The density of the little space v_n compared to the primitive one of the ideal state will be expressed as follows

$$\frac{k\ i}{v_n}. \tag{19}$$

We have three expressions for v_n: the first one

$$v_n = \int dx \int dy \cdot \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

intendendo z funzione di x, y, e supponendo le integrazioni definite secondo i valori che prendono le x, y alle linee conterminanti lo spazietto superficiale. La seconda espressione di v_n ci è data trasformando, secondo la nota teorica, il precedente integrale duplicato in un altro preso per le a, b di cui le x, y sono funzioni e risulta

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \cdot K$$

essendosi posto per abbreviare

$$K = \frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\,\frac{dy}{da}\,\sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}. \tag{20}$$

Da ultimo otteniamo

$$v_n = k\ i \cdot K + \frac{k^2 i}{2}\frac{dK}{da} + \frac{ki^2}{2}\frac{dK}{db} + \text{ec.} \tag{21}$$

svolgendo in serie l' integrale duplicato nella maniera indicata al N. 9.

Dalle espressioni (19) e (21) ci risulta colla teorica dei limiti la densità variabile Γ pel punto (x, y, z) del sistema superficiale, espressa da

$$\Gamma = \frac{\imath}{K}. \tag{22}$$

Noteremo che ricavando i valori di $\frac{dz}{dx}$,$\frac{dz}{dy}$ dalle due equazioni

$$\frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{da} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{da}; \qquad \frac{dz}{db} = \frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{db} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{db}; \tag{23}$$

e sostituendoli nella formola (20), essa riducesi alla più simmetrica

$$K = \sqrt{\left(\frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\,\frac{dx}{db} - \frac{dz}{db}\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\,\frac{dz}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right)^2}; \tag{24}$$

$$v_n = \int dx \int dy \cdot \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

since we consider z as a function of x, y, and [since] we assume the definite integration as limited by the values which the x, y take along the lines limiting the little superficial spaces. The second expression of v_n is obtained by transforming, following the well-known theory, the precedent double integral in another one calculated in terms of the a, b of which x, y are functions and it yields

$$v_n = \int_a^{a+k} da \int_b^{b+i} db \cdot K$$

where, for shortness' sake, we have taken

$$K = \frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\,\frac{dy}{da}\,\sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}. \tag{20}$$

Finally we obtain

$$v_n = k\ i \cdot K + \frac{k^2 i}{2}\frac{dK}{da} + \frac{ki^2}{2}\frac{dK}{db} + \text{etc.} \tag{21}$$

since the double integral is develop in series as we did at sect. 9.

From the expressions (19) and (21) it results, from the theory of limits, that the variable density Γ at the point (x, y, z) of the superficial system is given by

$$\Gamma = \frac{\imath}{K}. \tag{22}$$

We will note that, expressing the values $\frac{dz}{dx}$,$\frac{dz}{dy}$ from the two equations

$$\frac{dz}{da} = \frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{da} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{da}; \qquad \frac{dz}{db} = \frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{db} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{db}; \tag{23}$$

and substituting $[\frac{dz}{dx}$,$\frac{dz}{dy}]$ into (20), [the (20)] is reduced to the more symmetric

$$K = \sqrt{\left(\frac{dx}{da}\,\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\,\frac{dx}{db} - \frac{dz}{db}\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\,\frac{dz}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right)^2}; \tag{24}$$

per la quale la (22) ci presenta la densità Γ funzione delle a, b : ma ci è sempre lecito considerarla funzione di x, y, immaginando sostituiti ad a, b i loro valori

$$a = a(x, y); \quad b = b(x, y) \tag{25}$$

dedotti dalle prime due delle equazioni (18).

Quanto alla misura della massa M, le formole che corrispondono successivamente a quelle del N. 9. sono le seguenti :

$$\begin{aligned} M &= \int da \int db \cdot 1 \\ M &= \int da \int db \cdot \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} \right) \Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \\ M &= \int dx \int dy \cdot \Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Di esse la prima dà la massa misurata dal volume, nella distribuzione primitiva : la seconda è ancora la prima, messavi sotto il doppio segno integrale, $K\Gamma$ in luogo dell' unità per effetto della formola (22), avendo sostituito per K il valore (20) : e da essa si passa alla terza in forza della teorica della trasformazione degli integrali duplicati, avendosi così un integrale espresso mediante le variabili proprie dello stato reale.

13. Dalle formole ottenute in questi ultimi numeri possono dedursi prontamente alcune conseguenze alle quali altrimenti non si arriva se non con qualche stento. Prima però farò osservare che quando si considerano i corpi nello stato di moto, le coordinate x, y, z di un punto qualunque del corpo alla fine del tempo t, si debbono considerare funzioni di coordinate p, q, r corrispondenti a quel punto al principio del tempo, e di t. Le coordinate p, q, r poi dello stato reale al principio del tempo debbono considerarsi funzioni delle a, b, c coordinate di uno stato antecedente ideale. Nondimeno è lecito saltar via la considerazione delle coordinate intermedie p, q, r e invece di contemplare forme come la

$$x \ [p(a, b, c), q(a, b, c), r(a, b, c), t]$$

for which the (22) gives us the density Γ as a function of the a, b: however, it is anyway correct to consider [the function Γ] as a function of x, y, presuming substituted to a, b their values

$$a = a(x, y); \quad b = b(x, y) \tag{25}$$

deduced from the first two of the equations (18).

For what concerns the measure of the mass M, the formulas that correspond respectively to those of sect. 9, are the following:

$$\begin{aligned} M &= \int da \int db \cdot 1 \\ M &= \int da \int db \cdot \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} \right) \Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \\ M &= \int dx \int dy \cdot \Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Among them, the first gives the mass that is measured from the volume in the primitive distribution: the second one is again the first one, where the expression $K\Gamma$ is introduced under the integral double sign instead of the unit because of the equation (22), having substituted the value (20) for K: [from the second expression] we pass to the third one that is obtained by virtue of the theory of the transformation of double integrals, in such a way that an integral is expressed through the variables that are natural in the real state.

13. From the obtained formulas in these last sections, we can deduce readily some consequences to which otherwise we could not get up without some difficulties. First, however, I will observe that when one considers the bodies in a state of motion, the coordinates x, y, z of a generic point of the body at the end of time t, have to be considered as functions of coordinates p, q, r corresponding to that point at the beginning of time, and of t. The coordinates p, q, r, then, of the real state at the beginning of time have to be considered as functions of the a, b, c, [that are] coordinates of an antecedent ideal state. Nevertheless, it is justifiable to skip the [previous] consideration of the intermediate coordinates p, q, r and, rather than contemplating forms as the [following]

$$x \ [p(a, b, c), q(a, b, c), r(a, b, c), t]$$

proporci a dirittura le forme $x\ (a,b,c,t)$, $y\ (a,b,c,t)$, $z\ (a,b,c,t)$ quali risulterebbero dalle precedenti per lo scioglimento e la fusione delle funzioni $p\,(a,b,c)$, $q\,(a,b,c)$, $r\,(a,b,c)$. Quando poi il corpo sia un liquido che parte dalla quiete al principio del tempo t, è manifesto che le a,b,c tengono il luogo delle p,q,r, giusta l' idea che ci siamo formati dello stato precedente ideale sulla fine del N. 7.

14. Ai numeri (43) e (44) della Memoria inserita nel **T. XXI** ho fatto vedere come dalla equazione (6) dipende la formola delle condensazioni, e la così detta equazione della continuità, la quale non si verifica soltanto pei corpi fluidi, ma in generale. Mi sarebbe comodo rimandare il lettore al luogo citato : affinchè però l' attuale Memoria possa essere letta indipendentemente da quella, riprodurrò qui almeno la dimostrazione dell' equazione della continuità.

Si pongono le seguenti denominazioni introdotte la prima volta da Lagrange (ho cambiate le lettere per evitare equivoci)

$$\begin{aligned}
l_1 &= \frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dz}{db}\frac{dy}{dc}\\
l_2 &= \frac{dz}{db}\frac{dx}{dc} - \frac{dx}{db}\frac{dz}{dc}\\
l_3 &= \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} - \frac{dy}{db}\frac{dx}{dc}\\
m_1 &= \frac{dz}{da}\frac{dy}{dc} - \frac{dy}{da}\frac{dz}{dc}\\
m_2 &= \frac{dx}{da}\frac{dz}{dc} - \frac{dz}{da}\frac{dx}{dc}\\
m_3 &= \frac{dy}{da}\frac{dx}{dc} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\\
n_1 &= \frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dz}{da}\frac{dy}{db}\\
n_2 &= \frac{dz}{da}\frac{dx}{db} - \frac{dx}{da}\frac{dz}{db}\\
n_3 &= \frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}
\end{aligned} \tag{27}$$

to bring to our attention even the forms $x\ (a,b,c,t)$, $y\ (a,b,c,t)$, $z\ (a,b,c,t)$ as resulting from the precedent [not numbered equations] for the dissolution and the fusion [, i.e. for the composition,] of the functions [$x(p,q,r,t)$ and the functions] $p\,(a,b,c)$, $q\,(a,b,c)$, $r\,(a,b,c)$. When, then, the body is a liquid that starts from rest at the beginning of the time t, it is obvious that the a,b,c take the place of the p,q,r, [being confirmed] the idea that we have formed about the precedent ideal state at the end of the sect. 7.

14. In the sections (43) and (44) of the Memoir included in T. XXI, I have shown how from the equation (6) depends the formula of condensations and the so called equation of continuity, that is true not only for fluid bodies but also in general. I could really refer the reader to the aforementioned Memoir: however, in order to make this Memoir independent from that [cited Memoir], I will recall here at least the demonstration of the equation of continuity.

We give the following definitions introduced by Lagrange for the first time (I have changed the letters to avoid misunderstandings)

$$\begin{aligned}
l_1 &= \frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dz}{db}\frac{dy}{dc}\\
l_2 &= \frac{dz}{db}\frac{dx}{dc} - \frac{dx}{db}\frac{dz}{dc}\\
l_3 &= \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} - \frac{dy}{db}\frac{dx}{dc}\\
m_1 &= \frac{dz}{da}\frac{dy}{dc} - \frac{dy}{da}\frac{dz}{dc}\\
m_2 &= \frac{dx}{da}\frac{dz}{dc} - \frac{dz}{da}\frac{dx}{dc}\\
m_3 &= \frac{dy}{da}\frac{dx}{dc} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\\
n_1 &= \frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dz}{da}\frac{dy}{db}\\
n_2 &= \frac{dz}{da}\frac{dx}{db} - \frac{dx}{da}\frac{dz}{db}\\
n_3 &= \frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}
\end{aligned} \tag{27}$$

richiamando altresì l' espressione della H data nella (4) : e si osserva mediante l' attuale sostituzione l' identità delle nove equazioni

$$\begin{aligned}
l_1\frac{dx}{da}+m_1\frac{dx}{db}+n_1\frac{dx}{dc}&=H\\
l_2\frac{dx}{da}+m_2\frac{dx}{db}+n_2\frac{dx}{dc}&=0\\
l_3\frac{dx}{da}+m_3\frac{dx}{db}+n_3\frac{dx}{dc}&=0\\
l_1\frac{dy}{da}+m_1\frac{dy}{db}+n_1\frac{dy}{dc}&=0\\
l_2\frac{dy}{da}+m_2\frac{dy}{db}+n_2\frac{dy}{dc}&=H\\
l_3\frac{dy}{da}+m_3\frac{dy}{db}+n_3\frac{dy}{dc}&=0\\
l_1\frac{dz}{da}+m_1\frac{dz}{db}+n_1\frac{dz}{dc}&=0\\
l_2\frac{dz}{da}+m_2\frac{dz}{db}+n_2\frac{dz}{dc}&=0\\
l_3\frac{dz}{da}+m_3\frac{dz}{db}+n_3\frac{dz}{dc}&=H.
\end{aligned}\tag{28}$$

Indico con un apice la derivata totale della densità Γ pel tempo (indicazione mantenuta anche per altre quantità), e noto essere

$$\Gamma'=\frac{d\Gamma}{dx}u+\frac{d\Gamma}{dy}v+\frac{d\Gamma}{dz}w+\frac{d\Gamma}{dt}\tag{29}$$

quando si considera $\Gamma(x,y,z,t)$ ridotta funzione delle tre coordinate e del tempo esplicito, come si è detto sul finire del N. 9. Le u, v,w stanno in luogo delle derivate $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ delle x,y,z pel tempo, derivate che dapprima funzioni di a,b,c,t si riguardano ridivenute funzioni di x,y,z,t, sempre pel giuco dei valori (8), talchè si abbiano le equazioni identiche

$$\frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t);\ \frac{dy}{dt}=v(x,y,z,t);\ \frac{dz}{dt}=w(x,y,z,t);\tag{30}$$

also recalling the expression of the H given in (4): and we observe via the present substitution the identity of the nine equations

$$\begin{aligned}
l_1\frac{dx}{da}+m_1\frac{dx}{db}+n_1\frac{dx}{dc}&=H\\
l_2\frac{dx}{da}+m_2\frac{dx}{db}+n_2\frac{dx}{dc}&=0\\
l_3\frac{dx}{da}+m_3\frac{dx}{db}+n_3\frac{dx}{dc}&=0\\
l_1\frac{dy}{da}+m_1\frac{dy}{db}+n_1\frac{dy}{dc}&=0\\
l_2\frac{dy}{da}+m_2\frac{dy}{db}+n_2\frac{dy}{dc}&=H\\
l_3\frac{dy}{da}+m_3\frac{dy}{db}+n_3\frac{dy}{dc}&=0\\
l_1\frac{dz}{da}+m_1\frac{dz}{db}+n_1\frac{dz}{dc}&=0\\
l_2\frac{dz}{da}+m_2\frac{dz}{db}+n_2\frac{dz}{dc}&=0\\
l_3\frac{dz}{da}+m_3\frac{dz}{db}+n_3\frac{dz}{dc}&=H.
\end{aligned}\tag{28}$$

I indicate with an prime the total derivative of the density Γ with respect to time (this indication is maintained for other quantities too), and I note that

$$\Gamma'=\frac{d\Gamma}{dx}u+\frac{d\Gamma}{dy}v+\frac{d\Gamma}{dz}w+\frac{d\Gamma}{dt}\tag{29}$$

does hold when $\Gamma(x,y,z,t)$ is considered as a reduced function of the three coordinates and of the explicit time, as it has be stated at the end of sect. 9. The u,v,w are in lieu of the derivatives $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ of the x,y,z with respect to time, derivatives that, [being] initially functions of a,b,c,t, are then seen as functions of x,y,z,t, again by playing with the values of (8), so that we have the identities

$$\frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t);\ \frac{dy}{dt}=v(x,y,z,t);\ \frac{dz}{dt}=w(x,y,z,t);\tag{30}$$

la $\frac{d\Gamma}{dt}$ indica la derivata parziale della $\Gamma(x,y,z,t)$ pel t solamente esplicito.

Dalla equazione (6) derivata logaritmicamente e totalmente pel tempo, abbiamo

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{H'}{H}=0; \tag{31}$$

abbiamo poi dalla (4) e dalle (27)

$$\begin{aligned} H' = {} & l_1\frac{d^2x}{dadt}+m_1\frac{d^2x}{dbdt}+n_1\frac{d^2x}{dcdt} \\ & +l_2\frac{d^2y}{dadt}+m_2\frac{d^2y}{dbdt}+n_2\frac{d^2y}{dcdt} \\ & +l_3\frac{d^2z}{dadt}+m_3\frac{d^2z}{dbdt}+n_3\frac{d^2z}{dcdt}. \end{aligned} \tag{32}$$

Ora dalle (30) deduciamo prontamente le nove

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dadt} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{da}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{da}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{da} \\ \frac{d^2x}{dbdt} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{db}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{db}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{db} \\ \frac{d^2x}{dcdt} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dc}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dc} \\ \frac{d^2y}{dadt} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{da}+\frac{dv}{dy}\frac{dy}{da}+\frac{dv}{dz}\frac{dz}{da} \\ \frac{d^2y}{dbdt} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{db}+\frac{dv}{dy}\frac{dy}{db}+\frac{dv}{dz}\frac{dz}{db} \\ \frac{d^2y}{dcdt} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dc}+\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dc} \\ \frac{d^2z}{dadt} &= \frac{dw}{dx}\frac{dx}{da}+\frac{dw}{dy}\frac{dy}{da}+\frac{dw}{dz}\frac{dz}{da} \\ \frac{d^2z}{dbdt} &= \frac{dw}{dx}\frac{dx}{db}+\frac{dw}{dy}\frac{dy}{db}+\frac{dw}{dz}\frac{dz}{db} \\ \frac{d^2z}{dcdt} &= \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{dw}{dy}\frac{dy}{dc}+\frac{dw}{dz}\frac{dz}{dc} \end{aligned}$$

e questi valori sostituiti nel precedente di H' (equazione (32)) lo riducono

the $\frac{d\Gamma}{dt}$ indicates the partial derivative of the $\Gamma(x,y,z,t)$ with respect to t [that is the] only explicit [variable].

From the logarithmic and total derivatives of (6) with respect to time, we have,

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{H'}{H}=0; \tag{31}$$

then, we have from the (4) and from the (27)

$$\begin{aligned} H' = {} & l_1\frac{d^2x}{dadt}+m_1\frac{d^2x}{dbdt}+n_1\frac{d^2x}{dcdt} \\ & +l_2\frac{d^2y}{dadt}+m_2\frac{d^2y}{dbdt}+n_2\frac{d^2y}{dcdt} \\ & +l_3\frac{d^2z}{dadt}+m_3\frac{d^2z}{dbdt}+n_3\frac{d^2z}{dcdt}. \end{aligned} \tag{32}$$

Now, from the (30) we deduce shortly the following nine

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dadt} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{da}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{da}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{da} \\ \frac{d^2x}{dbdt} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{db}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{db}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{db} \\ \frac{d^2x}{dcdt} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dc}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dc} \\ \frac{d^2y}{dadt} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{da}+\frac{dv}{dy}\frac{dy}{da}+\frac{dv}{dz}\frac{dz}{da} \\ \frac{d^2y}{dbdt} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{db}+\frac{dv}{dy}\frac{dy}{db}+\frac{dv}{dz}\frac{dz}{db} \\ \frac{d^2y}{dcdt} &= \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dc}+\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dc} \\ \frac{d^2z}{dadt} &= \frac{dw}{dx}\frac{dx}{da}+\frac{dw}{dy}\frac{dy}{da}+\frac{dw}{dz}\frac{dz}{da} \\ \frac{d^2z}{dbdt} &= \frac{dw}{dx}\frac{dx}{db}+\frac{dw}{dy}\frac{dy}{db}+\frac{dw}{dz}\frac{dz}{db} \\ \frac{d^2z}{dcdt} &= \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{dw}{dy}\frac{dy}{dc}+\frac{dw}{dz}\frac{dz}{dc} \end{aligned}$$

and these values substituted in the precedent H' (equation (32)), reduce it to

$$
\begin{aligned}
H' = &\frac{du}{dx}\left(l_1\frac{dx}{da}+m_1\frac{dx}{db}+n_1\frac{dx}{dc}\right)\\
&+\frac{du}{dy}\left(l_1\frac{dy}{da}+m_1\frac{dy}{db}+n_1\frac{dy}{dc}\right)\\
&+\frac{du}{dz}\left(l_1\frac{dz}{da}+m_1\frac{dz}{db}+n_1\frac{dz}{dc}\right)\\
&+\frac{dv}{dx}\left(l_2\frac{dx}{da}+m_2\frac{dx}{db}+n_2\frac{dx}{dc}\right)\\
&+\frac{dv}{dy}\left(l_2\frac{dy}{da}+m_2\frac{dy}{db}+n_2\frac{dy}{dc}\right)\\
&+\frac{dv}{dz}\left(l_2\frac{dz}{da}+m_2\frac{dz}{db}+n_2\frac{dz}{dc}\right)\\
&+\frac{dw}{dx}\left(l_3\frac{dx}{da}+m_3\frac{dx}{db}+n_3\frac{dx}{dc}\right)\\
&+\frac{dw}{dy}\left(l_3\frac{dy}{da}+m_3\frac{dy}{db}+n_3\frac{dy}{dc}\right)\\
&+\frac{dw}{dz}\left(l_3\frac{dz}{da}+m_3\frac{dz}{db}+n_3\frac{dz}{dc}\right)
\end{aligned}
$$

il quale per le identiche equazioni (28) diventa a colpo d' occhio

$$H' = H\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right);$$

quindi l' antecedente equazione (31) risulta

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0; \tag{33}$$

ossia moltiplicando per Γ e mettendo per Γ' il valore (26)

$$\frac{d\cdot\Gamma u}{dx}+\frac{d\cdot\Gamma v}{dy}+\frac{d\cdot\Gamma w}{dz}+\frac{d\Gamma}{dt}=0. \tag{34}$$

È molto importante l' osservazione che questa equazione della continuità non contiene più alcuna traccia delle a, b, c variabili dello stato antecedente, le quali nondimeno fanno tanto giuoco nella dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
H' = &\frac{du}{dx}\left(l_1\frac{dx}{da}+m_1\frac{dx}{db}+n_1\frac{dx}{dc}\right)\\
&+\frac{du}{dy}\left(l_1\frac{dy}{da}+m_1\frac{dy}{db}+n_1\frac{dy}{dc}\right)\\
&+\frac{du}{dz}\left(l_1\frac{dz}{da}+m_1\frac{dz}{db}+n_1\frac{dz}{dc}\right)\\
&+\frac{dv}{dx}\left(l_2\frac{dx}{da}+m_2\frac{dx}{db}+n_2\frac{dx}{dc}\right)\\
&+\frac{dv}{dy}\left(l_2\frac{dy}{da}+m_2\frac{dy}{db}+n_2\frac{dy}{dc}\right)\\
&+\frac{dv}{dz}\left(l_2\frac{dz}{da}+m_2\frac{dz}{db}+n_2\frac{dz}{dc}\right)\\
&+\frac{dw}{dx}\left(l_3\frac{dx}{da}+m_3\frac{dx}{db}+n_3\frac{dx}{dc}\right)\\
&+\frac{dw}{dy}\left(l_3\frac{dy}{da}+m_3\frac{dy}{db}+n_3\frac{dy}{dc}\right)\\
&+\frac{dw}{dz}\left(l_3\frac{dz}{da}+m_3\frac{dz}{db}+n_3\frac{dz}{dc}\right)
\end{aligned}
$$

which $[H']$, because of the identities (28), is transformed at a glance

$$H' = H\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right);$$

hence, the previous equation (31) becomes

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0; \tag{33}$$

or, multiplying by Γ and assigning the value (26) to Γ' yields

$$\frac{d\cdot\Gamma u}{dx}+\frac{d\cdot\Gamma v}{dy}+\frac{d\cdot\Gamma w}{dz}+\frac{d\Gamma}{dt}=0. \tag{34}$$

It is very important to observe that this equation of continuity does not contain any trace of the a, b, c, variables of the previous state, which nevertheless have been so useful in the demonstration.

15. Formiamoci a seconda degli stessi principj le equazioni della continuità anche per gli altri due sistemi lineare e superficiale.

Cominciando dal lineare ; la formola (16) ci dà

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadt}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadt}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadt}}{\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2}=0.$$

Osserviamo che in questo caso le u, v, w rispettivamente eguali alle $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$,sono da considerarsi funzioni soltanto delle x, t : quindi $\frac{d^2x}{dadt}=\frac{du}{da}=\frac{du}{dx}\,\frac{dx}{da}$, e similmente

$$\frac{d^2y}{dadt}=\frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{da};\qquad \frac{d^2z}{dadt}=\frac{dw}{dx}\,\frac{dx}{da};$$

e rammentate anche le (15), la precedente formola ci si muterà nell' altra

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}+\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dx}\,\frac{dv}{dx}+\frac{dz}{dx}\,\frac{dw}{dx}=0 \tag{35}$$

che è l' equazione cercata, la quale ora più non contiene se non quantità in relazione collo stato reale del sistema.

Pei sistemi superficiali : derivando pel tempo l' equazione (22) ove K ha il valore (24) e richiamando per abbreviare le ultime tre denominazioni scritte nelle (27) abbiamo

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{n_1n_1'+n_2n_2'+n_3n_3'}{n_1^2+n_2^2+n_3^2}=0. \tag{36}$$

Nel caso attuale le u, v, w, eguali rispettivamente alle $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, si debbono considerare ridotte funzioni di x, y, t : abbiamo quindi primieramente

15. Let us formulate according to the same principles the equations of continuity for the other two linear and superficial systems.

Starting with the linear one, the formula (16) gives us

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadt}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadt}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadt}}{\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2}=0.$$

We observe that in this case the u, v, w respectively equal to $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, are to be considered only functions of x, t: hence

$$\frac{d^2x}{dadt}=\frac{du}{da}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{da},$$

and similarly

$$\frac{d^2y}{dadt}=\frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{da};\qquad \frac{d^2z}{dadt}=\frac{dw}{dx}\,\frac{dx}{da};$$

by recalling also the (15), the precedent formula shall be turned in the other

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}+\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dx}\,\frac{dv}{dx}+\frac{dz}{dx}\,\frac{dw}{dx}=0 \tag{35}$$

that is the equation sought, which now no longer contains quantities if not in relation with the real state of the system.

For superficial systems: deriving with respect to time the equation (22) where K has the value (24) and recalling to shorten the last three definitions written in (27) we have

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}+\frac{n_1n_1'+n_2n_2'+n_3n_3'}{n_1^2+n_2^2+n_3^2}=0. \tag{36}$$

In the present case the u, v, w, equal respectively to $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, must be considered as reduced functions of x, y , [z with respect to] t: we then first place

$$n'_1 = \frac{dy}{da}\frac{dw}{db} + \frac{dz}{db}\frac{dv}{da} - \frac{dz}{da}\frac{dv}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dw}{da}$$
$$n'_2 = \frac{dz}{da}\frac{du}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dw}{da} - \frac{dx}{da}\frac{dw}{db} - \frac{dz}{db}\frac{du}{da}$$
$$n'_3 = \frac{dx}{da}\frac{dv}{db} + \frac{dy}{db}\frac{du}{da} - \frac{dy}{da}\frac{du}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dv}{da},$$

poi osservando essere

$$\frac{dw}{db} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{db}; \qquad \frac{dv}{da} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{da};$$

e così per altre quattro espressioni simili, tenuti d' occhio i valori di cui n_1, n_2, n_3 sono un' espressione compendiosa, ci risultano

$$n'_1 = -n_3\,\frac{dw}{dx} - n_2\,\frac{dv}{dx} + n_1\frac{dv}{dy}$$
$$n'_2 = n_2\frac{du}{dx} - n_1\frac{du}{dy} - n_3\frac{dw}{dy}$$
$$n'_3 = n_3\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right);$$

e osservando inoltre che dalle equazioni (23) sciolte per $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ si cavano

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{n_1}{n_3}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{n_2}{n_3}$$

da cui possono dedursi i valori di n_1, n_2 dati per n_3 : fatte tutte le sostituzioni, la (36) si riduce

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\} + \left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}\frac{du}{dx} \tag{37}$$
$$-\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\frac{dv}{dy} + \frac{dz}{dx}\frac{dw}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dw}{dy} = 0.$$

Questa è la cercata equazione della continuità pei sistemi superficiali, che non contiene se non quantità in relazione collo stato reale. Io la diedi per la prima volta fino dall' anno 1825, e il ch. Signor Dottor Pietro Maggi ne ha fatto un uso felice nella sua Memoria sulle linee di stringimento e di allargamento pubblicata in Verona l' anno 1835.

$$n'_1 = \frac{dy}{da}\frac{dw}{db} + \frac{dz}{db}\frac{dv}{da} - \frac{dz}{da}\frac{dv}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dw}{da}$$
$$n'_2 = \frac{dz}{da}\frac{du}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dw}{da} - \frac{dx}{da}\frac{dw}{db} - \frac{dz}{db}\frac{du}{da}$$
$$n'_3 = \frac{dx}{da}\frac{dv}{db} + \frac{dy}{db}\frac{du}{da} - \frac{dy}{da}\frac{du}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dv}{da},$$

observing then to be

$$\frac{dw}{db} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{db} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{db}; \qquad \frac{dv}{da} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{da};$$

and so for four other similar expressions, keeping an eye on the values of which n_1, n_2, n_3 are a compendious expression, yield

$$n'_1 = -n_3\,\frac{dw}{dx} - n_2\,\frac{dv}{dx} + n_1\frac{dv}{dy}$$
$$n'_2 = n_2\frac{du}{dx} - n_1\frac{du}{dy} - n_3\frac{dw}{dy}$$
$$n'_3 = n_3\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right);$$

and further noting that from the equations (23) expressed in terms of $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ are obtained

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{n_1}{n_3}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{n_2}{n_3}$$

from which the values of n_1, n_2 can be deduced in terms of n_3: all the substitutions having been done, the (36) reduces to

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\} + \left\{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}\frac{du}{dx} \tag{37}$$
$$-\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + \left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\frac{dv}{dy} + \frac{dz}{dx}\frac{dw}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dw}{dy} = 0.$$

This is the sought equation of continuity for the superficial systems, that does not contain if not quantities in relation with the real state. I gave it for the first time since the year 1825, and the ch. Mr. Dr. Pietro Maggi has made a happy use of it in his memoir on the principal directions [of superficial systems] published in Verona in the year 1835 [Pietro Luigi Maggi, Ricerche sulle linee di stringimento e d'allargamento: aggiuntevi alcune considerazioni meccaniche ed idrauliche, G. Antonelli, 1835 - 85 pages.].

CAPO II.

Schiarimenti relativi al passaggio dall' equazione generale della Meccanica pei sistemi discreti a quella per le tre sorte di sistemi continui.

L' equazione generale della Meccanica relativa al moto e all'equilibrio di un sistema discreto di punti ove si considerino concentrate differenti masse finite, e in qualunque modo agenti gli uni sugli altri, o assoggettati a condizioni scritte in equazioni alle quali le coordinate di quei punti debbano sempre soddisfare : una tale equazione, dico, espressa mediante i simboli proprj del calcolo delle variazioni, è dimostrata in più libri con tal rigore che non può lasciar luogo ad alcun dubbio ragionevole. Citerò, oltre la M.^{a} A.^{a} , la Meccanica Celeste T. I. pag. 38 : e forse per riguardo alla considerazione delle differenti masse, non dispiacerà vedere quanto io ne scrissi nella Memoria pubblicata fin dall' anno 1825 : (pag. 42 e seguenti). Assumerò pertanto una tale equazione siccome una verità nota, e solo mi farò a descriverla per ben fissare le idee da annettersi ai differenti elementi analitici che la compongono. Ma pei passaggi da essa a quelle che si riferiscono alle tre sorte di sistemi continui, troppe cose furono lasciate sottintese, la di cui mancanza è maggiormente sensibile nel proposito di considerare i corpi come ammassi di molecole disgiunte : quindi taluno forse mi saprà buon grado d'aver qui riunite le opportune spiegazioni, visto che è poi dalle tre accennate riduzioni dell' equazione generale, che emergono i mezzi a trattare le più grandi e difficili questioni della Meccanica.

16. I punti fisici sono di numero n , ed

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; .....x_n, y_n, z_n$$

esprimono le rispettive coordinate ortogonali alla fine di un tempo t ;

CAPO II.

Some clarifications relatively to the deduction from the general equation of the Mechanics of Discrete Systems of the general equation valid for the Mechanics of One-Dimensional, Two- and Three-dimensional Continuous Systems.

The general equation of the Mechanics, relatively to [both] motion and equilibrium, of a discrete system of material points in which different finite masses are concentrated, and [those points] anyhow interacting one with the other or subjected to conditions written in equations which must be verified by the spatial coordinates of these points: that equation, I mean, which is expressed in terms of the proper notation of the calculus of variations is demonstrated in many books, with such a rigor that there is no space left to any doubt whatsoever [about its validity]. I will cite here, beyond the Analytical Mechanics also the Celestial Mechanics T.I. pag.38, and maybe -for what concerns the consideration of different masses- the reader will be interested about what I wrote in the Memoir published in the year 1825 (pag. 42 and following). I will assume therefore such equation as a well-known truth and I will describe it only to better clarify the concepts which are related to the different analytical elements which compose it. However [in the past studies] too many aspects of the deduction which from the general equation for discrete systems leads to those valid for the three kinds of [considered] continuous systems were left not completely clarified, and the lack of these deductive arguments is even more noticeable when one aims to consider the bodies as constituted by a mass of disjoint molecules: therefore maybe somebody will appreciate that I gathered here all needed and suitable explications, in consideration of the fact that it is exactly from the three reductions of the general equation to which we alluded that the [conceptual] tools emerge which are able to treat the most difficult questions in Mechanics.

16. The number of physical points is n and

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; .....x_n, y_n, z_n$$

represent the respective orthogonal coordinates at the end of a time interval t;

$$X_1, Y_1, Z_1; \quad X_2, Y_2, Z_2; .....X_n, Y_n, Z_n$$

le rispettive componenti secondo i tre assi delle forze acceleratrici esterne alla fine dello stesso tempo t ;

$$K_{1,2}, K_{1,3} K_{2,3} .....\text{e in generale } K_{i,\ j}$$

le forze acceleratrici interne che agiscono secondo le rette congiungenti i punti $(1,2)$, $(1,3)$, ... $(2,3)$ .....e in generale $(i,\ j)$;

$$m_1; m_2; .....m_n$$

le masse dei rispettivi punti fisici;

$$L = 0,\ M = 0;\ N = 0;\ \text{ec.}$$

varie equazioni di condizione che hanno luogo fra le coordinate dei diversi punti.

L'equazione generale, di cui si disse, è la seguente

$$S\ m \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right)\ \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right)\ \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right)\ \delta z \right\} \tag{1}$$

$$+\ Sm_i m_j\ K\delta p + \lambda\delta L + \mu\delta M + \upsilon\delta N + \text{ec.} = 0;$$

il primo segno S significa la somma di tanti trinomj quanti se ne ottengono marcando successivamente il trinomio scritto, cogli indici $1, 2, 3, ...n$ dei diversi punti ai piedi delle lettere che lo compongono, eccettuate quelle che indicano operazioni cioè la d, δ . Il secondo segno S esprime la somma di tutti i termini introdotti dalle forze interne attive, essendo

$$p = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

Le lettere λ, μ, ν, ec. significano moltiplicatori indeterminati; la caratteristica δ è come nel calcolo delle variazioni.

Circa ai termini di terza specie portati nella equazione (1) dalle equazioni di condizione, può osservarsi che spesso non diversificano tra di loro se non pel passaggio da un punto all' altro in condizioni affatto simili, e che allora molti di essi possono abbracciarsi con un segno sommatorio, e invece di quella terza parte, si può scrivere

$$S\lambda\delta L + S\mu\delta M + S\upsilon\delta N + \text{ ec.} \tag{2}$$

$$X_1, Y_1, Z_1; \quad X_2, Y_2, Z_2; .....X_n, Y_n, Z_n$$

represent the respective components along the three [considered othogonal] axes of the accelerating external forces at the end of the same time t;

$$K_{1,2}, K_{1,3} K_{2,3} .....\text{and in general } K_{i,\ j}$$

[represent] the internal accelerating forces which act in the direction of the lines joining the points $(1,2)$, $(1,3)$, ... $(2,3)$ .....and in general $(i,\ j)$;

$$m_1; m_2; .....m_n$$

[denote] the masses of the corresponding physical points;

$$L = 0,\ M = 0;\ N = 0; \text{etc.}$$

[represent] various equations of conditions which hold among the coordinates of the different points [i.e. the equations of applied Lagrangian constraints].

The general equation which has been mentioned above is the following:

$$S\ m \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right)\ \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right)\ \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right)\ \delta z \right\}$$
$$+\ Sm_i m_j\ K\delta p + \lambda\delta L + \mu\delta M + \upsilon\delta N + \text{ etc.} = 0; \tag{1}$$

the fist sign S means the sum of as many trinomials as one can obtain by successively labelling with a subscript all the letters of the written trinomial using the [sequence of] indices $1, 2, 3, ..., n$ of the different [physical] points, but excluding [in the labeling process] the letters which indicate operations, that is, the letters d and δ. The second sign S expresses the sum of all terms introduced by the internal active forces, being

$$p = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

The letters λ, μ, ν, etc. mean some indetermined multipliers, the characteristics δ is intended as in the calculus of variations.

In regard to the terms of the third kind introduced in the equation (1) by the equations of condition, it can be remarked that, very often, they differ one from the other only for the exchange of one point with another in conditions which are completely similar so that [in this last case] they can all be included in a summation sign and, instead of the third part of equation (1), one can write

$$S\lambda\delta L + S\mu\delta M + S\upsilon\delta N + \text{ etc.} \tag{2}$$

17. È noto che l' equazione (1) si rompe in tante quante sono le variazioni indipendenti $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$; $\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$; .....,cioè $3n$; e che se mettiamo fra le x_1, y_1, z_1, x_2, *ec.* un numero p di equazioni di condizione, lo spezzamento non si effettua più allo stesso modo, ma possono seguirsi due vie, le quali conducono ai medesimi risultamenti. Possono dette equazioni trattarsi, come vedesi nella terza parte dell' equazione generale (1); e allora le $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$; δx_2, ... si considerano ancora come se fossero fra di loro indipendenti, a motivo dei nuovi moltiplicatori introdotti i quali sono tanti, quante le anzidette equazioni fra le variabili. E si possono mediante le variate di dette equazioni di condizione determinare linearmente per le altre tante delle variazioni $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$; δx_2, ... quante sono quelle equazioni. Allora, fatta la sostituzione dei valori ottenuti, il numero delle residue variazioni indipendenti si riduce $3n-p$: e quindi $3n-p$ sono le equazioni che si ricavano col mettere i loro coefficienti a zero nella equazione generale ; i risultamenti sono i medesimi che si avrebbero tenendo la prima strada e poi eliminando fra le equazioni ottenute i coefficienti indeterminati introdotti operando a quella maniera. È poi permesso adottare un metodo misto, vale a dire conservare alcune equazioni di condizione e trattarle come si vede nella terza parte dell'equazione generale (1), e per un altro numero di equazioni di condizione, contemplarle tenendo il secondo dei sopra descritti andamenti.

18. Prima di progredire spiegando le modificazioni prese dall' equazione (1) nei tre casi dei sistemi continui, è bene che ci tratteniamo alquanto in considerazioni relative alle quantità X, Y, Z ; $\frac{d^2x}{dt^2}$,$\frac{d^2y}{dt^2}$,$\frac{d^2z}{dt^2}$, cui siamo soliti chiamare forze acceleratrici applicate, o forze acceleratrici attuali pel punto generico di un corpo ; sia poi il sistema a tre dimensioni, o superficiale o lineare. Non c'è dubbio che queste stesse espressioni nella equazione generale (1) dei sistemi discreti, significano forze rapportate ad una forza unitaria applicata all' unità di

17. It is well-known that the equation (1) can be split in as many equations as many are the independent variations $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$; $\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$; .....,that is $3n$; and that if we impose among the variables x_1, y_1, z_1, x_2, *ec.* exactly p equations of conditions, the splitting will not be performed in the same way, but it is possible to follow two ways, which, however, produce both the same results. The said equations can be treated as it is possible to see in the third part of the general equation (1); and then the variations $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$; δx_2, ... will be regarded as if they were independent one from the others, because of the newly introduced multipliers which are as many as the aforementioned equations among the variables. On the other hand by using the variations of said equations of condition it is then possible to determine linearly as many among the variations $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$; δx_2, ... as are the equations of conditions in terms of the remaining variations. Then, once replaced the obtained values, the number of residual independent variations reduces to $3n-p$: and therefore $3n-p$ are the equations which are obtained imposing that their coefficients are vanishing in the general equation; the results are the same as those which one would have obtained by using the first described way and then by eliminating among the obtained equations the indetermined coefficients which are introduced by having chosen that procedure. It is also possible to adopt a mixed method, that is to choose some equations of condition and treat them as it is seen in the third part of the general equation (1) and to account for the remaining set of equations of condition by using the second between the aforementioned methods.

18. Before progressing by explaining the different forms assumed by the equation (1) in the three cases of continuous systems, it is suitable that we discuss extensively about the quantities X, Y, Z ; $\frac{d^2x}{dt^2}$,$\frac{d^2y}{dt^2}$,$\frac{d^2z}{dt^2}$, which we are used to call applied accelerating forces, or actual (i.e. Eulerian) accelerating forces applied to the generic physical point of a body, in all considered cases i.e. mechanical systems having one, two or three dimensions. There is no doubt that these same expressions in the general equation (1) valid for discrete systems actually mean forces relative to a unit force applied to a unit

massa : ciò è tanto vero, che quando nei diversi punti del sistema discreto s' intendono concentrate diverse masse $m_1, m_2, m_3...$, queste stesse $m_1, m_2, m_3...$, che sono numeri rapportati all'unità di massa, diventano moltiplicatori di quelle forze, come si vede nella (1). E qui giova rammentare che per la misura delle forze continue, noi cominciamo a convenire di chiamare unità di forza quella forza acceleratrice costante che fa percorrere all'unità di massa nell'unità di tempo, partendo dalla quiete, la mezza unità di spazio. Come poi faccia la detta forza unitaria a produrre un tale effetto sull'unità di massa, quando questa non è considerata siccome concentrata in un punto,ma occupante spazio (il che si avvera sempre nello stato naturale), vi sono due maniere per farcene un' immagine. Si può intendere la forza unitaria divisa in innumerabili forze elementari eguali applicate ai diversi punti fisici della massa unitaria, ovvero si può intendere detta massa ridotta solida, e applicata la forza ad un solo punto di essa, propagandosi il moto agli altri punti per effetto della rigidità del corpo. Denominiamo poi X una forza multipla X volte dell' anzidetta.

Ma quando parliamo di forze X, Y, Z applicate ai singoli punti di un corpo, che cosa dobbiamo intendere ? È manifesto che se ognuna di tali forze fosse della grandezza di quelle che muovono l' unità di massa, poiché sempre maggiore d' ogni assegnabile è il numero delle molecole di un corpo, la somma di tutte quelle forze sarebbe per noi sempre una forza infinita. Adunque in tal caso esse sono forze simili a quelle forze elementari nelle quali dicemmo più sopra potersi intendere divisa la forza unitaria : cioè le lettere X, Y, Z debbono ancora intendersi numeri rapportati all'unità di forza applicata all' unità di massa, ma estremamente impiccoliti a motivo del fattore m, che si vede nell' equazione generale (1), e che in tal caso diventa piccolissimo. Importa assai conoscere l' espressione di questo fattore. Supponendo (ed è lecito il farlo senza nuocere alla generalità) che tutte le molecole del corpo siano eguali fra loro, il numero m esprime la massa di ciascuna, è eguale

mass: this statement is logically unavoidable when one recalls that in the different physical points of the discrete system one intends as concentrated the different masses $m_1, m_2, m_3...$, and that these same masses $m_1, m_2, m_3...$, which are numbers representing ratios with respect to the unit mass, become multipliers of these aforementioned forces, as it is seen from (1). Here it is beneficial to recall that in order to introduce a measure of continuously distributed forces we start by agreeing to call unitary force that accelerating constant force which moves the unit mass in the unit time, starting from rest, the half unit of space. How this unit force manages to produce such an effect on the unit mass, when this last is not assumed to be concentrated in one point but to be occupying a part of space [having nonvanishing dimensions] (which is always true in the natural state), there are two ways for imagining it. It is possible to intend the unit force as divided into unnumbered elementary forces all equal and applied to the different physical points of the unit mass, or it is possible to intend such a mass to be "solid" [i.e. moving as a rigid body] and [to assume] the force as applied to one of its physical points, so that the motion propagates to its other points as an effect of the rigidity of the body. We will then call X a force which is X time multiple of the aforementioned one.

Now: when we talk about the forces X, Y, Z as applied to the single points of a body, what do we really must mean? It is manifest that if each of such forces were of the same order of magnitude of those which move the unit mass, as the number of molecules of a given body is always greater than any conceiveable one, the sum of all such forces would always be, for us, an infinite force. Therefore, in the considered instance, such forces are similar to those elementary forces into which we said just before it is possible to intend as divided the unit force, that is: the letters X, Y, Z must be regarded again as numbers representing suitable ratios to the unit force as applied to the unit of mass, which are extremely small because of the factor m, which appears in the general equation (1) and which becomes in the considered instance very small. It is very important to know the expression of this factor. By assuming that (which is licit without loss of generality) all the molecules of the body are equal each to the others [that is that the body is homogeneous] then the number m, which expresses the mass of each of them, is equal

per tutte. Immaginiamo l' unità di massa distribuita nel cubo eguale all' unità di volume, come si è detto al N. 6 del Capo precedente, di maniera che tutte le molecole di essa massa siano nel verso dei tre lati del cubo fra loro distanti di intervalli eguali e piccolissimi espressi dalla lettera σ . Sia n il numero degli intervalli eguali fra molecola e molecola in un lato del cubo, talché, per essere ogni spigolo del cubo eguale all' unità lineare, si abbia

$$1 = n\sigma; \tag{3}$$

il numero totale delle molecole nel detto cubo sarà $(n+1)^3$; quindi, essendo per mezzo dell' unità espressa la massa cioè la somma delle molecole in tutto il cubo, detta massa per una sola molecola avrà l' espressione $\frac{1}{(n+1)^3}$ ovvero $\frac{\sigma^3}{(1+\sigma)^3}$, avendo messo per n il suo valore cavato dalla (3) : ma la massa di una molecola è altrimenti significata da m ; dunque l' equazione

$$m = \frac{\sigma^3}{(1+\sigma)^3} = \sigma^3 - 3\sigma^4 + 6\sigma^5 - \text{ ec.}; \tag{4}$$

della quale serie basterà tenere il primo termine, giacchè i seguenti essendo estremamente piccoli al fronte del primo, darebbero nell' equazione generale termini della stessa natura di quelli che al N. 7 dicemmo potersi francamente trascurare.

19. Forza elementare di diverso genere da quella ora descritta, occore quando s' intende che una massa finita sia mossa, non da forze applicate a tutti i suoi punti, come nel caso della gravità, ma da forze applicate ai soli punti di una parte della sua superficie, come nel caso della pressione atmosferica sulla superficie dei corpi. Non impegnamoci per ora a voler concepire il modo col quale l'azione effettuata sui punti della superficie si trasmette a tutti gli altri punti della massa : ammettiamo il fatto, e immaginando il cubo, come sopra contenente l' unità di massa, mosso da tante forze elementari eguali applicate alle sole molecole che sono in una sola sua faccia, cerchiamo l' espressione di una di esse : vedremo così come debba interpretarsi in tal caso la lettera m che moltiplicasse un' espres

for all of them. Let us assume that the unit mas is distributed in a cube which is the unit of volume, as said in sect. 6 of the preceding Capo, in such a way that all the molecules constituting [the] considered [unit] mass are distributed along the three sides of the cube, equally distant one from the other, placed at the endpoints of very small intervals indicated by the letter σ. Let n be the number of the equal intervals between any pair of closest molecules in any side of the cube, so that, as the edge of the cube is equal to the unit lenght, we have that

$$1 = n\sigma; \tag{3}$$

and the total number of the molecules of said cube will be $(n+1)^3$; therefore, as the unit mass has been chosen equal to the sum of the masses of the molecules in the cube of unit volume, the mass of a single molecule will be given by the expression $\frac{1}{(n+1)^3}$ or equivalently $\frac{\sigma^3}{(1+\sigma)^3}$, having substituted for n the value calculated from (3): as the mass of each molecule has been denoted by m,we get the equation

$$m = \frac{\sigma^3}{(1+\sigma)^3} = \sigma^3 - 3\sigma^4 + 6\sigma^5 - \text{ etc. }; \tag{4}$$

The first term of the last series shall be sufficient to be held as the following ones are extremely small, when compared with the first and would produce in the general equation terms having the same nature of those terms which in sect. 7 we said can be definitively neglected.

19. An elementary force of a kind different from the one now considered occurs when one can establish that a finite mass is moved not by forces applied to each of its points, as in the case of gravity, but by forces applied only to the [physical] points of a part of its surface, as in the case of atmospheric pressure on the surface of bodies. Let us, for the moment, refrain from the effort of understanding the way in which the action exerted on the points of the surface is transmitted to all the other points of the mass: let us admit this circumstance, and by imagining that the cube, which, as assumed before, contains the unit mas, is moved by many equal and elementary forces applied only to the molecules which are placed only on one of its faces, we look for the expression of one of these [elementary forces]: we will thus see as one has to interpret in such case the symbol m which may be a factor in an expression [representing such a]

sione di forza nella equazione generale. Essendo $(n+1)^2$ il numero delle molecole in una di quelle facce, un numero $(n+1)^2$ di forze elementari eguali produrrebbe lo stesso effetto della forza operante sull' unità di massa, quindi una di quelle è $\frac{1}{(n+1)^2}$ di questa. Pertanto il fattore che in tal caso impicciolisce le forze X, Y, Z è $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\sigma^2}{(1+\sigma)^2}$, e si ha

$$m = \frac{\sigma^2}{(1+\sigma)^2} = \sigma^2 - 2\sigma^3 + 3\sigma^4 - \text{ ec.} \tag{5}$$

20. Altra forza elementare di diverso genere delle due sopra descritte è quella che si suppone produrre moto in una massa finita essendo applicata ai singoli punti di una sola linea tracciata sulla superficie di un corpo. Per averne l' espressione, immaginiamo ancora lo stesso cubo coll' unità di massa, mosso da tante forze elementari eguali applicate ai singoli punti di un suo lato, che sono di numero $n+1$. Si vede che un numero $n+1$ di tali forze elementari produce lo stesso effetto della forza operante sull' unità di massa, e che quindi una di quelle è $\frac{1}{n+1}$ di questa. Di tal maniera il fattore che impicciolisce le X, Y, Z è in tal caso $\frac{1}{n+1} = \frac{\sigma}{1+\sigma}$, e si ha

$$m = \frac{\sigma}{1+\sigma} = \sigma - \sigma^2 + \sigma^3 - \text{ ec.} \tag{6}$$

Finalmente si ha il caso di una forza X che produce moto nella unità di massa essendo applicata ad un solo suo punto, e allora non occorre più la considerazione di forze elementari : quella medesima ha il concetto che serve di base alle precedenti deduzioni.

21. Nelle questioni di moto o di equilibrio per corpi estesi, si presentano spesso a comporre il fenomeno forze di tutte quattro le differenti specie sopra descritte ; però le lettere X, Y, Z, e qualunque altra espressione di forza significano sempre numeri rapportati a forze della quarta specie delle sunnominate, cioè muoventi masse finite essendo applicate ad un solo loro

force in the general equation. Being $(n+1)^2$ the number of the molecules in one of those faces, a number of $(n+1)^2$ of equal elementary forces would produce the same effect of the force acting on the unit mass, therefore one of the elementary forces is given by the fraction $\frac{1}{(n+1)^2}$ of the force per unit mass. Therefore the factor which reduces the forces X, Y, Z [to get the corresponding elementary force] is, in the considered case, $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\sigma^2}{(1+\sigma)^2}$, and we get

$$m = \frac{\sigma^2}{(1+\sigma)^2} = \sigma^2 - 2\sigma^3 + 3\sigma^4 - \text{ etc.} \tag{5}$$

20. Another kind of elementary force, different from the two kinds previously described, is that one which it is assumed to produce the motion of a finite mass being applied to each point of a given line drawn on a surface of a body. To get its expression, let us imagine again the same cube having unit mass, as moved by many equal elementary forces applied to each point of one of its edges, the number [of these points] being $n+1$. It can be seen that $n+1$ of such elementary forces produce exactly the same effect as the force applied to the unit of mass, and therefore that one of these [elementary] forces is given by the fraction $\frac{1}{n+1}$ of the force per unit mass. Therefore the factor which decreases the forces X, Y, Z [to get the corresponding elementary force] is, in the considered case, $\frac{1}{n+1} = \frac{\sigma}{1+\sigma}$,and we get

$$m = \frac{\sigma}{1+\sigma} = \sigma - \sigma^2 + \sigma^3 - \text{ etc.} \tag{6}$$

Finally it has to be considered the case of a force X which produces the motion of the unit mass being applied to only one of its points, and then it will not be needed to consider elementary forces: the same force $[X]$ is a sufficient starting point for the precedently described deductions.

21. In the questions concerning the motion or the equilibrium of extended bodies, very often are present -in the occurrence of the phenomenon- all four kind of forces described above; however the letters X, Y, Z,and any whatsoever other expresion of force always mean numbers expressing the forces of the fourth kind which were mentioned before, i.e. [forces] which move finite masses being applied to only one of their

punto. Per le altre tre specie i numeri X, Y, Z, e simili, s' intendono impiccioliti da fattori somministrati dalla lettera m che apparisce nell' equazione generale (1), giusta il canone seguente.

" Quando si parla di forze applicate ai singoli punti di una linea fisica, alla lettera m nella equazione generale devesi sostituire la σ intervallo fra molecola e molecola nella disposizione antecedente ideale; quando si parla di forze applicate ai singoli punti di una superficie, devesi alla m sostituire il fattore σ^2 ; e interpretare la stessa m come avente il valore σ^3 , quando si tratta di forze applicate ai singoli punti fisici di un corpo dotato delle tre dimensioni. "

22. Ciò che si è detto delle forze elementari di seconda e terza specie applicate a superficie o a linee fisiche , vale eziandio quando queste superficie o queste linee non si considerano nei corpi, ma astrattamente in quei sistemi che denominiamo superficiali o lineari. Già dicemmo (Cap. I°, n. II) che tali sistemi, rigorosamente parlando, non si danno, giacchè una terza dimensione nel caso di un velo materiale, e due altre dimensioni nel caso di un filo materiale , veramente non mancano : prova ne è il potersi le masse in questi due casi confrontare con quelle dei corpi a tre dimensioni. Siccome dunque un sistema lineare o un sistema superficiale non sono che supposizioni ammissibili per approssimazione, non deve far urto in tali casi un 'altra correlativa supposizione, cioè che le molecole per essi siano di differente natura in paragone di quelle dei corpi a tre dimensioni. Pei sistemi lineari sono molecole con tali concentrazioni di massa secondo due dimensioni che la riunione di quel numero soltanto di esse che stanno con intervallo piccolissimo σ in una linea finita, basta per avere a dirittura una massa confrontabile colle masse finite ; nei sistemi superficiali sono molecole colla concentrazione di massa secondo una dimensione, di modo che si ottiene una massa finita raccogliendone quante ne stanno in una superficie estesa con intervalli molecolari per due versi come l' anzidetto. Pertanto in questi casi è anche più manifesto di quando si consi-

points. When the other three kinds of forces are considered, the numbers X, Y, Z and all the similar quantities are meant multiplied by the factors [smaller than unit] represented by the letter m which appears in the general equation (1), following the algoritm specified below:

" When talking about forces applied to each point of a physical line, the letter m in the general equation has to be replaced by the [factor] σ, which [represents] the interval between any pair of closest molecules in the ideal [reference] antecedent configuration; when talking about forces applied to each point of a [physical] surface, the [letter] m has to be replaced by the factor σ^2; and finally the same m has to be interpreted as having the value σ^3, when dealing with forces applied to physical points belonging to a body having all the three dimensions. "

22. What said for the elementary forces of the second and third kind [i.e. those forces] applied to physical surfaces or lines, is still valid when these surfaces or these lines are not considered as parts of bodies, but in an abstract way [when they] are regarded as belonging to those systems which we called linear or superficial. We already said (Capo I, sect. 11) that such systems, rigorously speaking, are not actually existing, because a third dimension in the case of a material veil, or two other dimensions in the case of a material string, in reality are not lacking: as proved by the fact that the masses in these two cases can be compared with the masses of three-dimensional bodies. Therefore, as a linear system or a superficial system are simply [mathematical] assumptions which can be regarded as approximations, it has not to be consider inappropriate, in such cases, a corresponding assumption, which assumes that the molecules for such [two and one dimensional] systems have a different nature as compared with those [molecules] constituting three-dimensional bodies. For linear systems the [physical] molecules have such a mass concentration in two [space] dimension that the union of those molecules which belong to a very small interval σ of a finite line is enough to have indeed a mass which is comparable with finite masses: in superficial systems the [physical] molecules have a mass concentration in one [space] dimentions such that it is possible to get a finite mass by gathering as many as are located in a surface which is extended as [a square having as sides] two intervals long as the aforementioned one [i.e. having a surface measure given by σ^2]. Therefore in these cases it is even more manifest than when one considers

derano le linee o le superficie nei corpi, il doversi la m interpretare per σ e per σ^2. Infatti un numero $n+1$ di quelle molecole (sistema lineare) darà tanta massa quanta è l' unitaria, dunque la massa di una sola molecola è $\frac{1}{n+1} = \sigma$-ec.; un numero $(n+1)^2$ (sistema superficiale) darà ancora tanta massa quanta è l' unitaria, dunque la massa di una molecola in questo secondo caso sarà $\frac{1}{(n+1)^2} = \sigma^2$-ec. Solamente è da avvertire che dette molecole con masse concentrate possono per alcuni problemi non supporsi eguali fra loro, cioè può supporsi che il rapporto delle loro masse non sia eguale all' unità, ma espresso da un numero N : allora nella equazione generale (1) bisognerebbe fare $m = \sigma N$ pei sistemi lineari, ed $m = \sigma^2 N$ pei sistemi supeficiali. Accennando la possibilità dell' introduzione di questo fattore N , gioverà prescinderne sulle prime per maggiore semplicità.

È anche possibile escogitare forze elementari di un ordine di piccolezza più elevato di quello per le forze della prima specie che cercammo spiegare al N.18; siccome però una siffatta speculazione non occorre se non quando si cerca formarsi un concetto delle azioni molecolari, ci riserveremo di farne parola a luogo più opportuno.

23. S ' introduce la continuità in un sistema quando si suppone che le coordinate di tutti i suoi punti dipendano da tre sole funzioni di una, o di due, o di tre variabili semplici (cui se è questione di moto si aggiunge anche il tempo) le quali mantengano sempre le stesse forme passando da un punto all' altro del sistema e soltanto mutino valore pel cangiar di valore che fanno quelle variabili semplici. Ciò verremo ora mettendo in chiaro per le tre sorte di sistemi continui. Introdurre per tal modo la continuità equivale al legare tutte le variabili esprimenti le coordinate dei diversi punti mediante tante equazioni di condizione quante sono esse variabili , meno tre. È questo un principio sottinteso nella Meccanica Analitica che giova ridurre

some lines or surfaces inside [three-dimensional] bodies, that the m must be interpreted to be equal [respectively] to σ or to σ^2. Indeed a number $n+1$ of those molecules which constitutes a linear system shall carry the same mass as carried by the unit one, and therefore the mass of a single molecule is $\frac{1}{n+1} = \sigma$-etc.; a number $(n+1)^2$ of those molecules which constitutes a superficial system will carry the same mass as carried by the unit one, and therefore the mass of a molecule in this second case will be given by $\frac{1}{(n+1)^2} = \sigma^2$-etc. One warning is due [to the reader]: said molecules, can be, in some particular problems, assumed not to have necessarily equal concentrated masses, that is it is possible to assume that the ratio of their masses is not equal to unit, but expressed by a number N : then in the general equation (1) one should assume that $m = \sigma N$ for linear systems and $m = \sigma^2 N$ for superficial systems. Having foreshadowed the possibility of the introduction of this factor N, for seek of simplicity it will be convenient in a first moment to leave it aside.

It is also possible to excogitate elementary forces whose order of smallness is greater than that one introduced for the forces of the first kind which we tried to explain in sect. 18; since, however, such speculation is not necessary except when trying to form a concept of molecular actions, we reserve to mention it in the most appropriate place.

23. It is possible to introduce the continuity of a system when one assumes that all the coordinates of all its points depend only on three functions of one or two or three simple [independent] variables (to which time has also to be added if motion is involved) which [functions] maintain always the same forms when passing from a point to another of the system and only change their value because of the change of value to which the simple variables are undergoing. This procedure will be now clarified for the three kinds of continuous systems. To introduce in such a way the continuity is equivalent to constraint all the variables which express the coordinates of the different points by means of as many equations of conditions as many are the said variables minus three. This is a principle implied in Analytical Mechanics, which is useful to express

più esplicito, giacchè sta in esso veramente il mezzo col quale passare dall' equazione generale della Meccanica pei sistemi discreti a quelle pei sistemi continui

§ 1
Sistemi lineari

24. Adottando per un tal genere di sistemi il concetto già dichiarato al N. 11 Capo precedente, porremo a significare le coordinate del punto generico le equazioni

$$x = f(a,t)\,;\quad y = \phi(a,t)\,;\quad z = \psi(a,t)\,. \tag{7}$$

Le forme di funzioni espresse coi simboli f, ϕ,ψ rimagono le medesime percorrendo i diversi punti fisici del sistema. Se si immagina che il filo materiale cominci quando $a = l$, e finisca quando $a = k$, si deve intendere che le coordinate dei suoi diversi punti abbiano espressioni come segue

$$x_1 = f(l,t)\,;\quad x_2 = f(l+\sigma,t)\,;\quad x_3 = f(l+2\sigma,t)\,;\quad \text{ec.}$$

$$y_1 = \phi(l,t)\,;\quad y_2 = \phi(l+\sigma,t)\,;\quad y_3 = \phi(l+2\sigma,t)\,;\quad \text{ec.} \tag{8}$$

$$z_1 = \psi(l,t)\,;\quad z_2 = \psi(l+\sigma,t)\,;\quad z_3 = \psi(l+2\sigma,t)\,;\quad \text{ec.}$$

essendo rispettivamente $f(k,t)$, $\phi(k,t)$, $\psi(k,t)$ i valori delle coordinate dell' ultimo punto.

Qui possiamo immaginare eliminata la l fra la prima e le seguenti equazioni della prima fila. Sia $l = p(x_1)$ il valore di l dedotto dalla prima equazione; risostituendolo in tutte quelle equazioni, esse diverranno

$$x_1 = f\ [p(x_1),t]\,;\quad x_2 = f\ [p(x_1)+\sigma,t]\,;\quad x_3 = f\ [p(x_1)+2\sigma,t]\,;\ \text{ec.} \tag{9}$$

la prima sarà identica, cioè come se non fosse, le seguenti che hanno un significato, saranno tante quante le x dei diversi punti meno una. Allo stesso modo, se $l = q(y_1)$ sarà il valore di l cavato dalla prima equazione nella seconda fila delle (8), potremo scrivere

$$y_1 = \phi\,[q(y_1),t]\,;\quad y_2 = \phi\,[q(y_1)+\sigma,t]\,;\quad y_3 = \phi\,[q(y_1)+2\sigma,t]\,;\ \text{ec.} \tag{10}$$

.

more explicitly, since it truly supplies the means by using which ones it is possible to deduce from the general equation of Mechanics valid for discrete systems the equations which are valid for continuous systems.

§ 1
Linear systems

By adopting for such a kind of systems the concept that has been already held in the precedent Capo sect. 11, we will use the following equations to indicate the coordinates of the generic point

$$x = f(a,t)\,;\quad y = \phi(a,t)\,;\quad z = \psi(a,t)\,. \tag{7}$$

The forms of functions expressed with the symbols f, ϕ and ψ remain the same along the different physical points of the system. If you imagine that the material string begins when $a = l$, and ends when $a = k$, it must be understood that the coordinates of its points have different expressions as follows

$$x_1 = f(l,t)\,;\quad x_2 = f(l+\sigma,t)\,;\quad x_3 = f(l+2\sigma,t)\,;\quad \text{etc.}$$

$$y_1 = \phi(l,t)\,;\quad y_2 = \phi(l+\sigma,t)\,;\quad y_3 = \phi(l+2\sigma,t)\,;\quad \text{etc.} \tag{8}$$

$$z_1 = \psi(l,t)\,;\quad z_2 = \psi(l+\sigma,t)\,;\quad z_3 = \psi(l+2\sigma,t)\,;\quad \text{etc.}$$

being respectively $f(k,t)$, $\phi(k,t)$, $\psi(k,t)$ the values of the coordinates of the last point.

Here we can imagine l eliminated between the first and the following equations of the first row. Let $l = p(x_1)$ be the value of l deduced from the first equation; substituting it back in all those equations, they will become

$$x_1 = f\ [p(x_1),t]\,;\quad x_2 = f\ [p(x_1)+\sigma,t]\,;\quad x_3 = f\ [p(x_1)+2\sigma,t]\,;\ \text{etc.} \tag{9}$$

the first will be the same, that is as if it did not exist, the following [equations] which have a meaning, will be as numerous as the x of the different points minus one. Similarly, if $l = q(y_1)$ will be the value of l deduced from the first equation of the second row of (8), we can write

$$y_1 = \phi\,[q(y_1),t]\,;\quad y_2 = \phi\,[q(y_1)+\sigma,t]\,;\quad y_3 = \phi\,[q(y_1)+2\sigma,t]\,;\ \text{etc.} \tag{10}$$

e similmente

$$z_1 = \psi\,[r\,(z_1)\,,t]\,;\quad z_2 = \psi\,[r\,(z_1) + \sigma, t]\,;\quad z_3 = \psi\,[r\,(z_1) + 2\sigma, t]\,;\ \text{ec.} \tag{11}$$

avendo rappresentato per $l = r\,(z_1)$ il valore di l dedotto dalla prima equazione della terza fila.

Le equazioni (9), (10), (11), che incominciano tutte da una equazione identica, sono le equazioni di condizione fra le coordinate dei diversi punti, introdotte dall' ammettere la continuità, come dicemmo nel num. precedente, e che sono tante quante le coordinate, meno tre. A taluno potrebbe sembrare che risultassero due altre equazioni di condizione

$$y_1 = \phi\,[p\,(x_1)\,,t]\,;\quad z_1 = \psi\,[p\,(x_1)\,,t]$$

mettendo al luogo di l nelle espressioni per y_1, z_1 il valore della stessa l dedotto dalla prima equazione : ma sarebbe in inganno.

Si disse che le forme f, ϕ, ψ sono arbitrarie, ciascuna indipendentemente dalle altre due : stabilita la forma f per la prima fila delle equazioni (8) , risulta veramente un legame fra le x dei diversi punti, come apparisce dalle (9), non già un legame fra le x e le y : l'arbitrio che sussiste nella forma ϕ anche quando è pronunciata la f (dicasi a un di presso della forma ψ per riguardo alle z) toglie quel vincolo di dipendenza che sembrerebbe apparire nelle due equazioni ultimamente scritte.

25. Passiamo a vedere come debba intendersi nel nostro caso la composizione delle variazioni δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, *ec.* Se prendiamo le variate delle equazioni (9), (10), (11), abbiamo

$$\begin{aligned}
&\delta x_1 = f\,\prime\,(p)\ p\prime\,(x_1)\ \delta x_1\,; \qquad \delta x_2 = f\,\prime\,(p+\sigma)\ p\prime\,(x_1)\,\delta x_1\,;\\
&\delta y_1 = \phi\prime\,(q)\ q\prime\,(y_1)\ \delta y_1\,; \qquad \delta y_2 = \phi\prime\,(q+\sigma)\ q\prime\,(y_1)\ \delta y_1\,; \quad \text{ec.}\\
&\delta z_1 = \psi\prime\,(r)\ r\prime\,(z_1)\ \delta z_1\,; \qquad \delta z_2 = \psi\prime\,(r+\sigma)\ r\prime\,(z_1)\ \delta z_1\,;
\end{aligned} \tag{12}$$

in guisa che ponendo

$$p\prime\,(x_1)\ \delta x_1 = \xi\,; \quad q\prime\,(y_1)\ \delta y_1 = \eta\,; \quad r\prime\,(z_1)\ \delta z_1 = \zeta \tag{13}$$

and similarly

$$z_1 = \psi\,[r\,(z_1)\,,t]\,;\quad z_2 = \psi\,[r\,(z_1) + \sigma, t]\,;\quad z_3 = \psi\,[r\,(z_1) + 2\sigma, t]\,;\ \text{etc.} \tag{11}$$

having represented for $l = r(z_1)$ the value of l deduced from the first equation of the third row.

The equations (9), (10), (11), which all begin by an identical equation, are the equations of condition between the coordinates of the different points, introduced from admitting continuity, as we said in the preceding section, and which are as many as the coordinates, minus three. To someone it might seem that two other equations of condition prove

$$y_1 = \phi\,[p\,(x_1)\,,t]\,;\quad z_1 = \psi\,[p\,(x_1)\,,t]$$

putting in place of l in the expression of y_1, z_1 the value of that l deduced from the first equation: but it would be misleading.

It was said that the forms f, ϕ, ψ are arbitrary, each independently from the other two: once established the form f for the first row of equations (8), there really proves a link between the x of the different points, as can be seen from (9), not already a link between the x and the y: the arbitrariness that exists in the form ϕ even when the [function] f is assigned (it analogously applies to the form ψ with respect to z) removes that constraint of dependency that seems to appear in the last two equations.

25. Let us see how it is to be understood in our case, the composition of variations δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, etc. If we consider the variations of the equations (9), (10), (11), we have

$$\begin{aligned}
&\delta x_1 = f'\,(p)\ p'\,(x_1)\ \delta x_1\,; \qquad \delta x_2 = f'\,(p+\sigma)\ p\prime\,(x_1)\,\delta x_1\,;\\
&\delta y_1 = \phi'\,(q)\ q'\,(y_1)\ \delta y_1\,; \qquad \delta y_2 = \phi'\,(q+\sigma)\ q\prime\,(y_1)\ \delta y_1\,; \quad \text{etc.}\\
&\delta z_1 = \psi'\,(r)\ r'\,(z_1)\ \delta z_1\,; \qquad \delta z_2 = \psi'\,(r+\sigma)\ r\prime\,(z_1)\ \delta z_1\,;
\end{aligned} \tag{12}$$

in such a manner that by placing

$$p\prime\,(x_1)\ \delta x_1 = \xi\,; \quad q\prime\,(y_1)\ \delta y_1 = \eta\,; \quad r\prime\,(z_1)\ \delta z_1 = \zeta \tag{13}$$

e restituendo in luogo delle $p(x_1)$, $q(y_1)$, $r(z_1)$ la l che le eguaglia tutte e tre, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\delta x_{_1} = f'(l)\ \xi; \quad \delta x_{_2} = f'(l+\sigma)\ \xi; \quad \delta x_{_3} = f'(l+2\sigma)\ \xi;\\
&\delta y_{_1} = \phi'(l)\ \eta; \quad \delta y_{_2} = \phi'(l+\sigma)\ \eta; \quad \delta y_{_3} = \phi'(l+2\sigma)\ \eta; \quad \text{ec.}\\
&\delta z_{_1} = \psi'(l)\ \zeta; \quad \delta z_{_2} = \psi'(l+\sigma)\ \zeta; \quad \delta z_{_3} = \psi'(l+2\sigma)\ \zeta;
\end{aligned} \tag{14}$$

Vedesi dopo di ciò, che chiamando $\delta x, \delta y, \delta z$ le variazioni delle coordinate x, y, z spettanti al punto generico,avremo

$$\delta x = f'(a)\ \xi; \quad \delta y = \phi'(a)\ \eta; \quad \delta z = \psi'(a)\ \zeta, \tag{15}$$

essendo le ξ, η, ζ quantità che non mutano di valore passando dal primo all' ultimo punto del sistema. Pertanto le equazioni (14), (15) ci insegnano che le variazioni contengono bensì tre quantità arbitrarie, cioè le $\delta x_{_1}, \delta y_{_1}, \delta z_{_1}$ delle equazioni (13) , ma non variano passando dalle coordinate di un punto del sistema a quelle di un altro punto se non alla maniera colla quale (equazioni (8)) variano le stesse coordinate.

26. Adottare per le $x_{_1}, y_{_1}, z_{_1}, x_{_2}$, ec., e per le $\delta x_{_1}, \delta y_{_1}, \delta z_{_1}, \delta x_{_2}$, ec. valori come quelli espressi nelle equazioni (8), (14) è in sostanza un seguire il secondo degli andamenti descritti al num°. 17, è cioè un adottare valori in forza dei quali riescano di loro natura già soddisfatte tutte le equazioni di condizione introdotte dalla continuità ed espresse colle (9), (10), (11) : quest' ultime quindi non si dovranno più contemplare a parte.

È ora facile capire che il segno S nella prima parte della equazione generale (1) si cambia in una sommatoria estesa da $a = l$ fino ad $a = k$, ossia in un integrale finito definito (vedi i trattatisti, o il Vol. XX di questi Atti, pag. 632) esteso da $a = l$ sino ad $a = k + \sigma$, che può scriversi

$$\sum_{l}^{k+\sigma} \Delta a \cdot \sigma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \tag{16}$$

dove ho messo σ in luogo di m giusta il detto al num°. 21.

and substituting in place of $p(x_1)$, $q(y_1)$, $r(z_1)$ the l that equals all three, we get

$$\begin{aligned}
&\delta x_{_1} = f'(l)\ \xi; \quad \delta x_{_2} = f'(l+\sigma)\ \xi; \quad \delta x_{_3} = f'(l+2\sigma)\ \xi;\\
&\delta y_{_1} = \phi\prime(l)\ \eta; \quad \delta y_{_2} = \phi\prime(l+\sigma)\ \eta; \quad \delta y_{_3} = \phi\prime(l+2\sigma)\ \eta; \quad \text{etc.}\\
&\delta z_{_1} = \psi\prime(l)\ \zeta; \quad \delta z_{_2} = \psi\prime(l+\sigma)\ \zeta; \quad \delta z_{_3} = \psi\prime(l+2\sigma)\ \zeta;
\end{aligned} \tag{14}$$

It will be seen thereafter that, calling δx, δy, δz the variations of the coordinates x, y, z characterizing the generic point, we will have

$$\delta x = f\ \prime(a)\ \xi; \quad \delta y = \phi\prime(a)\ \eta; \quad \delta z = \psi\prime(a)\ \zeta, \tag{15}$$

since the ξ, η, ζ are quantities that do not change their values by passing from the first to the last point of the system. Therefore the equations (14), (15) teach us that it is true that the variations contain three arbitrary quantities, i.e. $\delta x_{_1}$, $\delta y_{_1}$, $\delta z_{_1}$ of the equations (13), but they do not vary passing from the coordinates of a point of the system to those of another point if not in the manner by which (equations (8)) the same coordinates do vary.

26. Adopting for $x_{_1}$, $y_{_1}$, $z_{_1}$, $x_{_2}$, etc., and for $\delta x_{_1}$, $\delta y_{_1}$, $\delta z_{_1}$, $\delta x_{_2}$, etc. values such as those expressed in equations (8), (14) is essentially as following the second of the trends described in sect. 17, is the same as adopting values in virtue of which the equations of condition introduced by the continuity and expressed by the (9), (10), (11) are already satisfied by their nature: then the latter ones have no longer to be contemplated separately.

And it is now easy to see that the symbol S in the first part of the general equation (1) changes in a summation extended by $a = l$ up to $a = k$, i.e. a finite definite integral (see the treatises, or the Vol. XX of these Proceedings, p. 632) extended from $a = l$ up to $a = k + \sigma$, which can be written

$$\sum_{l}^{k+\sigma} \Delta a \cdot \sigma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \tag{16}$$

where I put σ instead of m in accordance with [what I] said in sect. 21.

Abbiamo un teorema d' analisi (*)[1] che ci somministra il mezzo di passare da un integrale finito definito ad un integrale continuo parimente definito, e può scriversi nella equazione

$$\sigma\sum_{l}^{k+\sigma}\Delta a\cdot\Omega=\int_{l}^{k}da\cdot\Omega+\sigma\Psi \tag{17}$$

essendo Ω una funzione qualunque della variabile a e intendendosi nell' espressione $\sigma\Psi$ compendiati tutti i termini che facendosi sempre più piccoli finiscono coll 'annullarsi insieme con σ. Pertanto l' espressione (16) può cambiarsi nella equivalente

$$\int_{l}^{k}da\cdot\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}+\sigma\Psi \tag{18}$$

e l' aggiunta $\sigma\Psi$ si dovrà trascurare per la ragione più volte accennata. Ed ecco come si adatta ad un sistema lineare la prima parte dell' equazione generale (1); ometterò in questo luogo d' introdurre termini corrispondenti alla seconda parte di quella equazione generale, portati da forze interne attive, supponendo che tali forze non vi siano, e tanto per incominciare a dare un esempio e venire a qualche conclusione nota, tratterò il caso del filo flessibile ed inestensibile.

27. La condizione dell' inestensibilità del filo ci fa capire che la densità Γ colla quale la materia è distribuita nel filo , quantunque possa cambiare passando da un punto all' altro, resterà per ogni punto la stessa in qualunque ipotesi di curvatura e di movimento, ossia (analiticamente parlando) anche quando le x, y, z si mutano nelle $x+i\delta x$, $y+i\delta y$, $z+i\delta z$. Risulta quindi nulla la variazione della densità, e si ha l' equazione di condizione

$$\delta\Gamma=0; \tag{19}$$

ossia mettendo per Γ il suo valore (Capo I°. equazione (16))

$$\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}=0. \tag{20}$$

[1](*) Lacroix : Traité ec. T. III. pag. 98: ovvero Bordoni : Lezioni ec. T. II.p. 479.

We have a theorem of analysis (*)[1] which gives us the means to switch from a definite finite integral to a likewise definite continuous integral, that can be written in the equation

$$\sigma\sum_{l}^{k+\sigma}\Delta a\cdot\Omega=\int_{l}^{k}da\cdot\Omega+\sigma\Psi \tag{17}$$

being Ω any function of the variable a and meaning in the expression $\sigma\Psi$ summarized all the terms that, becoming smaller and smaller, end to be annihilated [together] with σ. Therefore the expression (16) may change in the equivalent

$$\int_{l}^{k}da\cdot\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}+\sigma\Psi \tag{18}$$

and the addition of $\sigma\Psi$ will have to be disregarded for the reason most often mentioned. And here's how the first part of the general equation (1) fits to a linear system; I will omit in this place to introduce terms corresponding to the second part of that general equation, brought by internal active forces, by assuming that such forces are zero, and just to begin to give an example and to come to some known conclusion, I will treat the case of flexible and inextensible string.

27. The inextensibility condition of the string makes us aware that the density Γ with which the material is distributed in the string, although it may change going from one point to another, will remain the same for each point in any assumption of curvature and movement, i.e. (analytically speaking) even when the x, y, z are transformed in the $x+i\delta x$, $y+i\delta y$, $z+i\delta z$. It is therefore null the variation of the density, and one has the equation of condition

$$\delta\Gamma=0; \tag{19}$$

i.e. putting in Γ its value (Capo I° equation (16))

$$\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}=0. \tag{20}$$

[1](*) Lacroix : Traité etc. T. III. p. 98: or Bordoni: Lezioni etc. T. II. p. 479.

Questa equazione di condizione deve intendersi replicata per ogni punto del sistema. Ora convien fissare un principio generale. Quando una equazione di condizione non muta passando da un punto all'altro del sistema se non pel mutare delle coordinate, non può che cambiare alla stessa maniera anche il coefficiente che nell' equazione generale meccanica ne moltiplica la variata. Nel caso attuale, se l' equazione si esprime per $L = 0$, essa si adatta ai diversi punti mettendo per L (che è una funzione di a) prima $a = l$, poi $a = l + \sigma$, poi $a = l + 2\sigma$,ec. , talchè le diverse equazioni di condizione pei diversi punti possono indicarsi con

$$L_1 = 0; \quad L_2 = 0; \quad L_3 = 0; \quad \text{ec.}$$

Queste introdurrebbero nella terza parte dell'equazione generale (1) i termini

$$\lambda_1 \delta L_1 + \lambda_2 \delta L_2 + \lambda_3 \delta L_3 + \text{ec.} \tag{21}$$

Ora si dice che i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ec. non possono cambiare che come cambiano le L_1, L_2, L_3, ec., cioè debbono discendere tutti da una stessa funzione $\lambda(a)$, cosicchè si abbia

$$\lambda_1 = \lambda(l); \quad \lambda_2 = \lambda(l + \sigma); \quad \lambda_3 = \lambda(l + 2\sigma); \text{ec.}$$

Ciò essendo, si fa manifesto che tutti i termini come nella somma qui sopra segnata (21), possono raccogliersi mediante una sommatoria; il che avevamo già previsto scrivendo l'espressione (2). Vi sono due modi per giungere a persuadersi l'esposto principio. Il primo è desunto dalla considerazione che quei coefficienti (come ha provato si bene Lagrange pei sistemi discreti) rappresentano forze interne passive, cioè pressioni o tensioni che hanno luogo in quel punto pel quale si verifica l'equazione di condizione, e che quindi debbono cambiare da un punto all'altro unicamente pel cambiare che fanno le coordinate. L'altro mezzo è puramente analitico e consiste nell'osservare quel che avviene ne' sistemi discreti quando regna fra i loro punti una condizione dell'indole delle sopra indicate, per esempio la costanza delle distanze. Dalle equazioni spettanti

This equation of condition must be understood replicated for each point of the system. Is now time to establish a general principle. When an equation of condition does not change going from one point to another point of the system if not for the change of coordinates, also the coefficient that multiplies the varied equation in the general mechanical equation must change in the same way. In the present case, if the equation is expressed for $L = 0$, it adapts to different points by putting for L (which is a function of a) before $a = l$, then $a = l + \sigma$, then $a = l + 2\sigma$, etc., so that the various equations of condition for the different points can be specified with

$$L_1 = 0; \quad L_2 = 0; \quad L_3 = 0; \quad \text{etc.}$$

These introduce in the third part of the general equation (2) the terms

$$\lambda_1 \delta L_1 + \lambda_2 \delta L_2 + \lambda_3 \delta L_3 + \text{etc.} \tag{21}$$

Now it is said that the coefficients λ_1, λ_2, λ_3, etc. must change according to L_1, L_2, L_3, etc., i.e. all must descend from a same function $\lambda(a)$, so that we have

$$\lambda_1 = \lambda(l); \quad \lambda_2 = \lambda(l + \sigma); \quad \lambda_3 = \lambda(l + 2\sigma); ec$$

Being so, it becomes manifest that all the terms in the above marked sum (21), can be collected through a summation; we had already planned this fact by writing the expression (2). There are two ways to reach to be convinced of the exposed principle. The first is derived from the consideration that these coefficients (as Lagrange so well demonstrated for the discrete systems) are passive internal forces, i.e. pressures or tensions that take place at that point through which the equation of condition is enforced, and that therefore must change from one point to another only due to the coordinates change. The other way is purely analytical and consists in observing what happens in the discrete systems when a condition, having a nature similar to those indicated above, rules between their points, for example the constancy of the distances. From the equations relative

ad un punto si cava il valore del coefficiente che moltiplica la variata dell'equazione corrispondente, e da quelle spettanti ad un altro punto si cava il valore del coefficiente analogo, e si vede che tali valori non differiscono se non pei valori diversi delle coordinate. Ed anche senza pensare di aver condotto alla fine tali calcoli: ed anche quando il sistema è continuo alla maniera sopra descritta, si sente che se tutto ciò da cui dipende la determinazione del coefficiente λ non muta nei due casi se non per esservi al luogo della variabile a una volta la l, e un'altra volta la $l+\sigma$, i due valori del coefficiente non possono che differire alla stessa maniera. Questo ragionamento vale anche quando essendo più d'una le equazioni di condizione che si ripetono di punto in punto, sono anche più d'uno i rispettivi coefficienti: caso preveduto nello stendere l'espressione (2).

28. Nel caso attuale la sommatoria che comprende tutti i termini portati nell' equazione generale (1) dall' equazione di condizione (20), e che può tradursi in un integrale finito definito in corrispondenza al già detto per l' espressione (16), sarà

$$\sum_l^{k+\sigma} \Delta a \cdot \sigma\lambda \left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da} \right); \tag{22}$$

dove ho messo $\sigma\lambda$ in luogo di λ , il che può sembrare arbitrario trattandosi di un coefficiente indeterminato, ma l' ho fatto appositamente, perchè siccome poco più sopra dicemmo, un tal coefficiente rappresenta una forza della stessa natura delle X, Y, Z, rapportata alla stessa unità di misura, quindi il numero che la significa deve essere attenuato, del pari che per le anzidette, dal coefficiente σ (rivedi il canone stabilito al num$^{\circ}$ 21.) .

L'espressione (22) si muta come la (16) in forza del teorema (17) nell' altra

$$\int_l^k da \cdot \lambda \left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da} \right) + \sigma\Phi \tag{23}$$

essendo compendiati nella quantità $\sigma\Phi$ i termini che poi si debono trascurare.

to a point we obtain the value of the coefficient that multiplies the variation of the corresponding equation, and we see that such values do differ only for the different values of the coordinates. And even without thinking to have performed such calculations to the very end: and even when the system is continuous in the manner described above, we feel that if everything upon which the determination of the coefficient λ depends[, it] does change in both cases only because in the place of the variable a there is one time the l, and another time the $l+\sigma$, the two values of the coefficient must differ in the same way. This reasoning applies even when, being more than one the equations of conditions that are repeated from point to point, also the respective coefficients are more than one: this is indeed the case which has been foreseen when the expression (2) was drawn up.

28. In the present case the sum that includes all terms brought in the general equation (1) from the equation of condition (20), and that can translate into a definite finite integral in correspondence to what has already been said about the expression (16), will be

$$\sum_l^{k+\sigma} \Delta a \cdot \sigma\lambda \left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da} \right); \tag{22}$$

where I put $\sigma\lambda$ in place of λ, which may seem arbitrary since it is an indeterminate coefficient, but I have done it on purpose, because as we just said above, such a coefficient represents a force of the same nature of the X, Y, Z, compared to the same unit of measures, hence the number that signifies it must be attenuated, in the same way as for the aforesaid [X, Y, Z], by the coefficient σ (review the convention stated at the sect. 21).

The expression (22) is transformed in the same way as the (16) under the Theorem (17) in the other

$$\int_l^k da \cdot \lambda \left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da} \right) + \sigma\Phi \tag{23}$$

being summarized in the amount $\sigma\Phi$ the terms which should then be ignored.

Riunendo le espressioni (18) e (23) e non essendovi nel presente caso altre condizioni da contemplare, l' equazione pel moto del filo inestendibile cavata dalla generale (1) sarà

$$\int_l^k da \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\}$$

$$+ \int_l^k da \cdot \lambda \left(\frac{dx}{da} \frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da} \frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da} \frac{d\delta z}{da} \right) = 0. \qquad (24)$$

Potrei qui trattenermi a far vedere le deduzioni che discendono da questa equazione; cominciando dal trasformare i termini sotto il secondo integrale per modo che le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ non siano affette da altre operazioni di derivazione (trasformazioni note nel calcolo delle variazioni) mi risulterebbero tre termini da compenetrarsi con quelli esistenti sotto il primo integrale, e avrei di più una quantità trinomiale che porterei ai limiti, essendo una quantità differenziale esatta sulla quale si eseguisce l' integrazione : annullando poi sotto il segno integrale i coefficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$, come Lagrange ha insegnato doversi fare, mi verrebbero tre equazioni che con molta facilità trasformerei nelle già conosciute. Potrei anche dire che per certi problemi sotto il primo integrale dell' equazione (24) conviene introdurre un fattore $N(a)$ la cui origine dipende dalle riflessioni accennate verso il fine num$^{\circ}$ 22. Memore però di avere un lungo viaggio a percorrere, mi dispenso dallo stendere le indicate operazioni, essendo solo mio scopo in questo Capo, siccome dissi al principio di esso, dare le spiegazioni rimaste sottintese nella grand' opera di Lagrange: il che seguiterò a fare, colla intenzione di invogliare sempre più i lettori a studiare finamente anche i più tenui passaggi nell' uso di un metodo il quale, vogliasi o non vogliasi, finirà col trionfare d 'ogni contraria insistenza, e si stabilirà sovrano nella meccanica razionale, come il calcolo differenziale e integrale si è stabilito nell' analisi.

By combining expressions (18) and (23) and, since in the present case there are no other conditions to be contemplated, the equation for the motion of the unextendable string deduced from the general [equation] (1) will be

$$\int_l^k da \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \qquad (24)$$

$$+ \int_l^k da \cdot \lambda \left(\frac{dx}{da} \frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da} \frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da} \frac{d\delta z}{da} \right) = 0.$$

I could talk at length here to show the deductions which follow from this equation; starting from the transformation of the terms under the second integral so that the variations δx, δy, δz are not affected by other derivations (known trasformations in the calculus of variations) I would have three terms to melt with the existing ones in the first integral, and I would also have a trinomial that i would bring to the limits, being an exact differential quantity on which the integration is executed: then by canceling under the integral sign the total coefficients δx, δy, δz, as Lagrange taught having to do, I would have three equations which I would easily transform into the already known ones. I could also say that for certain problems under the first integral of the equation (24) is convenient to introduce a factor $N(a)$ the origin of which depends on the considerations mentioned about towards the end of sect. 22. Mindful, however, of having a long journey to go, I dispense myself from drawing up the indicated operations, being only my purpose in this Capo, as I said at the beginning of it, to give the explanations which remained implied in the grand work by Lagrange: which I will continue to make, with the intention to increasingly encourage my readers to study finely even the most delicate steps in the use of a method which, willingly or unwillingly, will eventually triumph of any contrary insistence, and establish sovereign in rational mechanics, as the differential and integral calculus are established in the [mathematical] analysis.

§. 2.
SISTEMI SUPERFICIALI.

29. Per dedurre dall' equazione meccanica (1) generale pei sistemi discreti quelle pur generali relative all' equilibrio e al moto dei sistemi superficiali, limiteremo dapprima le nostre considerazioni ad un aggregato di molecole che nella disposizione antecedente ideale (rivedi num°. 12) fossero configurate in un rettangolo; vedremo poi fra poco che questa limitazione può togliersi restando le più importanti conseguenze anche per quando la configurazione delle molecole nello stato antecedente si supponga in una superficie piana terminata da un contorno qualunque: ma giova sul principio evitare una complicazione non necessaria a comprendere quella riduzione che ci siamo proposto di schiarire. Nella supposizione pertanto del rettangolo, ammettiamo che le ascisse a cominciassero da $a = l$, e finissero con $a = k$, e le ordinate b cominciassero da $b = h$, e finissero con $b = i$. Passando alla considerazione delle coordinate x, y, z dello stato reale, i valori di tutte le x per quel aggregato di molecole potranno distribuirsi in una serie doppia che indicheremo dapprima con indici al piede come segue

$$\begin{array}{lllll} x_{1,1}; & x_{2,1}; & x_{3,1}; & x_{4,1}; & \text{ec.} \\ x_{1,2}; & x_{2,2}; & x_{3,2}; & x_{4,2}; & ec \\ x_{1,3}; & x_{2,3}; & x_{3,3}; & x_{4,3}; & \text{ec.} \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{array} \tag{25}$$

poi coi valori corrispondenti dedotti da una sola funzione $f(a, b)$ alla maniera che soggiungiamo

$$\begin{array}{l} f(l,h);\ f(l+\sigma,h);\ f(l+2\sigma,h).....f(k,h) \\ f(l,h+\sigma); f(l+\sigma,h+\sigma); f(l+2\sigma,h+\sigma).....f(k,h+\sigma) \\ f(l,h+2\sigma); f(l+\sigma,h+2\sigma); f(l+2\sigma,h+2\sigma).....f(k,h+2\sigma) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(l,i);\ f(l+\sigma,i);\ f(l+2\sigma,i).....f(k,i). \end{array} \tag{26}$$

§. 2.

SUPERFICIAL SYSTEMS.

29. To infer from the general mechanical equation (1) for the discrete systems those also general ones relating to the equilibrium and the motion of the superficial systems, we will limit our considerations at first to an aggregate of molecules which in the previous ideal arrangement (review sect. 12) were configured in a rectangle; then we will see shortly that this limitation can be removed the most important consequences holding even when the configurations of the molecules in the antecedent state is supposed to be in a flat surface limited by any boundary: but it should be at the beginning avoided a complication unnecessary to understand that reduction we proposed to lighten. Therefore, in the [preceding] supposition of the rectangle, we admit that the abscissas a began from $a = l$, and ended with $a = k$, and the ordinates b began from $b = h$, and ended with $b = i$. Moving on to the consideration of the coordinates x, y, z of the real state, the values of all the x for that aggregate of molecules can be distributed in a double series denoted first with subscripts as follows,

$$\begin{array}{lllll} x_{1,1}; & x_{2,1}; & x_{3,1}; & x_{4,1}; & \text{etc.} \\ x_{1,2}; & x_{2,2}; & x_{3,2}; & x_{4,2}; & ec \\ x_{1,3}; & x_{2,3}; & x_{3,3}; & x_{4,3}; & \text{etc.} \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{array} \tag{25}$$

then with the corresponding values derived from a single function $f(a, b)$ in the manner we add

$$\begin{array}{l} f(l,h);\ f(l+\sigma,h);\ f(l+2\sigma,h).....f(k,h) \\ f(l,h+\sigma); f(l+\sigma,h+\sigma); f(l+2\sigma,h+\sigma).....f(k,h+\sigma) \\ f(l,h+2\sigma); f(l+\sigma,h+2\sigma); f(l+2\sigma,h+2\sigma).....f(k,h+2\sigma) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(l,i);\ f(l+\sigma,i);\ f(l+2\sigma,i).....f(k,i). \end{array} \tag{26}$$

Similmente dovremo immaginare che si faccia per le diverse y, e per le diverse z : cioè indicandone dapprima i valori con indici al piede e con serie doppie analoghe alla (25): poi rispettivamente con serie doppie dedotte per le y da una funzione $\phi(a,b)$, e per le z da una funzione $\psi(a,b)$ in perfetta corrispondenza colla (26).

Ora vogliamo anche qui provare, come nel §. precedente, che dovendo le forme f, ϕ, ψ non mutarsi mai per tutto il sistema, vengono a introdursi tante equazioni di condizione quante sono le coordinate dei diversi punti, meno tre : e dedursene per conseguenza che le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ delle coordinate dei diversi punti mutano da un punto all' altro alla stessa maniera con cui mutano i valori delle coordinate nella serie doppia (26) e nelle altre due simili: non restare quindi che tre variazioni veramente indipendenti ed arbitrarie. Immaginiamo dalle due equazioni

$$x_{1},_{1} = f(l,h); \quad y_{1},_{1} = \phi(l,h)$$

cavati i valori inversi di l, h, che segneremo mediante le

$$l = p\,(x_{1},_{1}\,, y_{1},_{1}\,)\;; \quad h = q\,(x_{1},_{1}\,, y_{1},_{1}\,), \tag{27}$$

e sostituiti in tutti i termini della serie doppia (26). Il confronto delle espressioni che risultano dopo tale sostituzione coi valori corrispondenti della serie doppia (25) darà tante equazioni fra varie coordinate dei diversi punti, quanti sono i punti : una sarà identica e le altre saranno equazioni di condizione. Prendendone le variate, e ponendo per abbreviare

$$\begin{aligned} \xi &= p'\left(x_{1},_{1}\right)\delta x_{1,1} + p'\left(y_{1},_{1}\right)\delta y_{1,1} \\ \eta &= q'\left(x_{1},_{1}\right)\delta x_{1,1} + q'\left(y_{1},_{1}\right)\delta y_{1,1}; \end{aligned} \tag{28}$$

poscia indicando con un apice in alto le derivate per p, e con un apice al basso quelle per q, avremo

Similarly we shall imagine to do for the different y, and for the different z: that is, first indicating their values with subscripts and with double series similar to (25): then respectively with double series deducted for the y from a function $\phi(a,b)$, and for the z from a function $\psi(a,b)$ in perfect correspondence with (26).

Now we also want to try here, as in §. above, that having the forms f, ϕ, ψ not to ever mutate for the whole system, as many equations are to be introduced as the coordinates of several points are provided, minus three: and to deduce as a consequence that the variations δx, δy, δz of the coordinates of the different points change from one point to another in the same manner with which the values of the coordinates in the double series (26) and in the other two similar do change: so that there remain only three truly independent and arbitrary variations. Imagine from the two equations

$$x_{1},_{1} = f(l,h); \quad y_{1},_{1} = \phi(l,h)$$

deduced the inverse values of l, h, which we will mark through the

$$l = p\,(x_{1},_{1}\,, y_{1},_{1}\,)\;; \quad h = q\,(x_{1},_{1}\,, y_{1},_{1}\,), \tag{27}$$

and substituted in all the terms of the double series (26). The comparison of the expressions that result after this substitution with the corresponding values of the double series (25) will give as many equations between various coordinates of the different points as the points are: one will be the same and the other will be equations of condition. Picking the variations, and assuming for brevity['s sake]

$$\begin{aligned} \xi &= p'\left(x_{1},_{1}\right)\delta x_{1,1} + p'\left(y_{1},_{1}\right)\delta y_{1,1} \\ \eta &= q'\left(x_{1},_{1}\right)\delta x_{1,1} + q'\left(y_{1},_{1}\right)\delta y_{1,1}; \end{aligned} \tag{28}$$

afterwards indicating with a superscript the derivatives for p, and with a subscript those for q, we will have

$$
\begin{aligned}
\delta x_{1,1} &= f\,'(p,q)\xi + f\,_1(p,q)\eta \\
\delta x_{2,1} &= f\,'(p+\sigma,q)\xi + f\,_1(p+\sigma,q)\eta \\
\delta x_{3,1} &= f\,'(p+2\sigma,q)\xi + f\,_1(p+2\sigma,q)\eta \\
&\text{.....} \\
\delta x_{1,2} &= f\,'(p,q+\sigma)\xi + f\,_1(p,q+\sigma)\eta \\
\delta x_{2,2} &= f\,'(p+\sigma,q+\sigma)\xi + f\,_1(p+\sigma,q+\sigma)\eta \\
&\text{.....}
\end{aligned}
\qquad (29)
$$

Presentemente rimettendo per p, q i valori dati dalle (27) [si] vedrà che queste variazioni (29) variano come i termini della serie doppia (26), essendo ξ, η quantità che rimangono le medesime per tutti. In maniera affatto simile colla sostituzione dei valori (27) nei termini della serie doppia simile alla (26) e formata mediante la funzione $\phi(a,b)$, comporremo un altro numero di equazioni di condizione eguale a quello delle molecole: una però di tali equazioni sarebbe identica. Prendendone poi le variate, potremo provare che anche le variazioni $\delta y_{1,1}; \delta y_{2,1}; \delta y_{3,1}; .....\delta y_{1,2}; \delta y_{2,2}; .....$variano da punto a punto come le (29) e quindi come i termini delle (26). Volendo da ultimo venire alle stesse conseguenze anche per un terzo numero di equazioni di condizione eguale al numero delle molecole, compresavi una identica, e per le variazioni $\delta z_{1,1}; \delta z_{2,1}; \delta z_{3,1}; ....\delta z_{1,2}; \delta z_{2,2}; ....$, converrà assumere le equazioni $x_{1,1} = f(l,h)$; $z_{1,1} = \psi(l,h)$ onde dedurne i valori inversi del[la coppia di coordinate] l, h analogamente al già detto scrivendo le (27), e rifare per le x, e per le z il medesimo discorso sopra tenuto per le x e per le y. I valori di tutte le variazioni (29) e delle altre due serie corrispondenti conterranno le tre sole variazioni $\delta x_{1,1}; \delta y_{1,1}; \delta z_{1,1}$ rimaste assolutamente arbitrarie. Se a taluno paresse risultare pei sistemi superficiali dal principio della continuità un'altra equazione di condizione fra le coordinate, oltre quelle di numero eguale al triplo del numero delle molecole, meno tre, il suo dubbio potrebbe dissiparsi per mezzo di un ragionamento simile al praticato sul fine del num.° 24.

$$
\begin{aligned}
\delta x_{1,1} &= f\,'(p,q)\xi + f\,_1(p,q)\eta \\
\delta x_{2,1} &= f\,'(p+\sigma,q)\xi + f\,_1(p+\sigma,q)\eta \\
\delta x_{3,1} &= f\,'(p+2\sigma,q)\xi + f\,_1(p+2\sigma,q)\eta \\
&\text{.....} \\
\delta x_{1,2} &= f\,'(p,q+\sigma)\xi + f\,_1(p,q+\sigma)\eta \\
\delta x_{2,2} &= f\,'(p+\sigma,q+\sigma)\xi + f\,_1(p+\sigma,q+\sigma)\eta \\
&\text{.....}
\end{aligned}
\qquad (29)
$$

Presently putting for p, q the values given by (27) one will see that these variations (29) vary as the terms of the double series (26), being ξ, η quantities which remain the same for all [the terms of the double series]. In a quite similar manner with the substitution (27) in the terms of the double series similar to the (26) and formed by means of the function $\phi(a,b)$, we shall compose another number of equations of condition equal to that of the molecules: one of these equations, however, would be identical. Picking then their variations, we can prove that also the variations $\delta y_{1,1}; \delta y_{2,1}; \delta y_{3,1}; .....\delta y_{1,2}; \delta y_{2,2}; .....$ vary from point to point as the (29) and then as the terms of (26). Wanting at last to come to the same consequences also for a third number of equations of condition equal to the number of the molecules, including an identical one, and for the variations $\delta z_{1,1}; \delta z_{2,1}; \delta z_{3,1}; ....\delta z_{1,2}; \delta z_{2,2}....$, we agree to assume the equations $x_{1,1} = f(l,h)$; $z_{1,1} = \psi(l,h)$ in order to deduce from them the values inverse of l, h analogously to what has been already said by writing the (27), and [we agree] to redo for the x, and for the z the same reasoning done above for the x and for the y. The values of all the variations (29) and of the other two corresponding series will contain only the three variations $\delta x_{1,1}; \delta y_{1,1}; \delta z_{1,1}$ remained absolutely arbitrary. If another equation of condition among the coordinates should seem to result to someone for the superficial systems from the principle of the continuity, besides those in number equal to three times the number of molecules, minus three, his doubt could dissipate by means of a reasoning similar to that one done at the end of the sect. 24.

30. Assicurati così che tutte le quantità componenti il trinomio sottoposto al primo segno S nella equazione generale (1) variano da molecola a molecola alla maniera dei termini di una serie doppia, potremo invece di S mettere il segno di una doppia sommatoria o di un duplicato integrale finito, il quale sia definito in quanto ad a fra i limiti $a = l, a = k + \sigma$, e in quanto a b fra i limiti $b = h, b = i + \sigma$; avremo cioè invece di quella prima parte l' espressione

$$\sum_l^{k+\sigma} \Delta a \sum_h^{i+\sigma} \Delta b \cdot \sigma^2 \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \qquad (30)$$

nella quale ho introdotto il fattore σ^2 invece della lettera m, giusta l' esposto ai numeri 21, 22, e avrei anche potuto (in conformità al detto verso il fine del num.° 22.) far entrare un altro fattore N funzione di a, b, che ommetto non essendo necessario al mio intento.

Non riuscirà ora difficile capire che se la configurazione delle molecole nello stato antecedente non sarà un rettangolo ma una superficie piana limitata da un contorno fatto di linee qualsivogliono, siccome supponemmo anche al num.° 12., non avremo più i limiti dell'integrale finito duplicato (30) costanti e fra di loro indipendenti, ma che nel resto sussisteranno tutte le precedenti deduzioni. Vuolsi dire che in tal caso le diverse linee orizzontali della serie doppia equivalente, non saranno fatte di un egual numero di termini, un tal numero cambierà dipendentemente dal cambiare che fa la differenza dei valori estremi della a ; invece della b poi vi sarà una funzione di a costante in ogni linea orizzontale (rivedi la (26)) ove a avrà il valore dell 'ascissa per quel punto della linea di contorno che è insieme il primo di quella fila orizzontale. La somma di tutti i termini di una così fatta serie doppia equivarrà ancora ad un integrale duplicato: solamente i limiti di b saranno funzioni di a, e i limiti di a saranno i valori di questa variabile la cui differenza è la massima. Pertanto in questo caso più generale basterà indicare i segni integrali della espressione (30) scrivendo

30. Since we were sure that all the terms of the trinomium under the first symbol S in the general equation (1) vary from molecule to molecule in the manner of the terms of a double series, instead of S we can put the symbol of a double sum or of a double finite integral which is defined as to a in between the limits $a = l, a = k + \sigma$, and as b in between the limits $b = h, b = i + \sigma$; instead of that first part we shall have the expression

$$\sum_l^{k+\sigma} \Delta a \sum_h^{i+\sigma} \Delta b \cdot \sigma^2 \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \qquad (30)$$

in which I introduced the symbol σ^2 instead of the symbol m by recalling what was exposed in the sections 21, 22, and in addition I could have (in accordance with what it was said towards the end of the sect. 22) to get another factor N function of a, b, which I omit because it is not necessary to my intent.

It shall not now be difficult to understand that if the configuration of the molecules in the antecedent state will not be a rectangle, but a flat surface bounded by a contour made of any lines, since we assumed also at the sect. 12, we will have no longer constant and independent of each other the limits of the double finite integral (30), but [we will have] that all preceding deductions will persist in the remaining parts. We mean that in such a case the different horizontal lines of the equivalent double series, will not be made of an equal number of terms, [that] such a number will change depending on the change of the difference between the extreme values of the a; instead of the b then there will be a function of a constant in every horizontal line (review the (26)) where a will have the value of the abscissa for that point on the contour line that is along the first of that horizontal row. The sum of all the terms of a so made double series shall still be equivalent to a double integral: only the limits of b will be functions of a, and the limits of a shall be the values of this variable[,] the difference of which is the maximum. Therefore, in this more general case it shall be sufficient to indicate the symbols of integral of the expression (30) by writing

$\Sigma\Delta a\ \Sigma\Delta b$, e intendendo che i limiti debbano essere opportunamente determinati all' oggetto di comprendere tutti i punti fisici del sistema.

Operata una tale sostituzione di segni integrali nella espressione (30), faremo un altro passo corrispondente al già fatto per passare dalla espressione (16) alla (18) . L' applicazione del teorema (17) replicata due volte di seguito, avvertendo di scomporre il fattore σ^2 per dare un σ semplice a ciascuno dei due integrali, ci fa conoscere che la prima parte dell' equazione generale (1) si trasforma quando trattasi di un sistema superficiale , nella quantità seguente

$$\int da \int db \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} + \sigma\Psi \qquad (31)$$

intendendo compresi nell' aggiunta $\sigma\Psi$ tutti i termini che poi si debbono ommettere, e ritenendo che il doppio integrale continuo va definito secondo i limiti assegnati alle variabili dalle linee circoscriventi la materia nella precedente disposizione. Potrei qui pure immaginare una condizione estensibile a tutti i punti del sistema e far vedere com' essa ci porga un altro integrale duplicato simile al precedente e da sommarsi con esso, in corrispondenza a quanto dissi quando mostrai che l' espressione (23) si sommava colla (18) per darci l' equazione (24). Ma ormai il lettore deve aver capito l 'andamento da tenersi. A me basta aver dimostrato che il segno S della equazione generale (1) si cambia pei sistemi superficiali in un duplicato integrale continuo definito, come cambiavasi in un integrale definito semplice pei sistemi lineari; con quel di più che parevami opportuno onde condurci passo passo a penetrare nelle varie sue parti quel metodo ammirabile del quale mi sono fatto propugnatore.

$\Sigma\Delta a\ \Sigma\Delta b$, and by meaning that the limits should be properly determined for the purpose of considering all the physical points of the system.

Since such a substitution of integral symbols into the expression (30) has been performed, we will make another step corresponding to that already made to go from expression (16) to (18). The application of the theorem (17) replicated twice in a row, warning to decompose the factor σ^2 to give a single σ to each of the two integrals, tells us that the first part of the general equation (1) is transformed in the case of superficial systems, in the following quantity

$$\int da \int db \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} + \sigma\Psi \qquad (31)$$

including in the added $\sigma\Psi$ all the terms that you then must omit, and considering that the double continuous integral must be defined within the limits assigned to the variables by the lines which bound the matter in the precedent arrangement. I could well imagine a condition here which can be extended to all points of the system and show how it will give us an other double integral similar to the preceding one and to be added to it, in correspondence to what I said when I showed that the expression (23) was added with the (18) to give us the equation (24). But by now the reader must have realized the procedure to be adopted. It is sufficient [in my opinion] to have demonstrated that the symbol S of the general equation (1) changes for the superficial systems in a double continuous definite integral, as it changed in a single definite integral for the linear systems; adding something extra that I thought should lead us step by step in order to penetrate into the various parts of that admirable method which I advocate.

§. 3.

SISTEMI A TRE DIMENSIONI.

31. Passando a dire dei sistemi a tre dimensioni, anche le equazioni generali dell' equilibrio e del moto per essi, possono dedursi dalla solita (1) pei sistemi discreti : solamente in questo caso quelle somme si tramutano in integrali triplicati, il che resta a vedere. Limiteremo dapprima le nostre considerazioni ad un aggregato di molecole le quali nella disposizione antecedente ideale presentassero la figura di un parallelepipedo rettangolo. In tale supposizione le molte x appartenenti a quelle molecole trasportate allo stato reale potranno distribuirsi in una serie tripla che indicheremo mediante un succedersi di serie doppie, primieramente con indici al piede, come segue

$$x_{1,1,1};\ x_{2,1,,1};\ x_{3,1,1};\text{ec.} \qquad (32)$$

$$x_{1,2,,1};\ x_{2,2,1};\ x_{3,2,1};\ ec$$

$$x_{1,3,1};\ x_{2,3,1};\ x_{3,3,1};\text{ec.}$$

.....

———————————

$$x_{1,1,2};\ x_{2,1,,2};\ x_{3,1,2};\text{ec.}$$

$$x_{1,2,,2};\ x_{2,2,2};\ x_{3,2,2};\ ec$$

$$x_{1,3,2};\ x_{2,3,2};\ x_{3,3,2};\text{ec.}$$

.....

———————————

$$x_{1,1,3};\ x_{2,1,,3};\ x_{3,1,3};\text{ec.}$$

$$x_{1,2,,3};\ x_{2,2,3};\ x_{3,2,3};\ ec$$

$$x_{1,3,3};\ x_{2,3,3};\ x_{3,3,3};\text{ec.}$$

.....

———————————

ec. ec. ec.

§. 3.

Three-Dimensional Systems

31. Also when dealing with the three-dimensional systems it is possible to deduce, as already done, the general equations for equilibrium and motion from the equation (1) which is the one valid for discrete systems: it remains to be seen that only in this case those sums [appearing in (1)] are transformed into triple integrals. We will limit initially our considerations to an aggregate of molecules which in the ideal antecedent configuration are placed to form a rectangular parallelepiped. Under this assumption the many xs, which belong to those molecules when they are placed in the real state, can be distributed in a triple series which we will indicate by means of a sequence of double series, whose order is established by means of subscripts as follows:

$$x_{1,1,1};\ x_{2,1,,1};\ x_{3,1,1};\text{etc.} \qquad (32)$$

$$x_{1,2,,1};\ x_{2,2,1};\ x_{3,2,1};\ ec$$

$$x_{1,3,1};\ x_{2,3,1};\ x_{3,3,1};\text{etc.}$$

.....

———————————

$$x_{1,1,2};\ x_{2,1,,2};\ x_{3,1,2};\text{etc.}$$

$$x_{1,2,,2};\ x_{2,2,2};\ x_{3,2,2};\ ec$$

$$x_{1,3,2};\ x_{2,3,2};\ x_{3,3,2};\text{etc.}$$

.....

———————————

$$x_{1,1,3};\ x_{2,1,,3};\ x_{3,1,3};\text{etc.}$$

$$x_{1,2,,3};\ x_{2,2,3};\ x_{3,2,3};\ ec$$

$$x_{1,3,3};\ x_{2,3,3};\ x_{3,3,3};\text{etc.}$$

.....

———————————

etc. etc. etc.

e poi mutando opportunamente i valori delle a, b, c in una stessa funzione $f(a,b,c)$, ritenendo che la variabile a cominci da $a = l$, e proceda per aumenti costanti σ fino ad $a = k$, la b prenda valori fra i limiti $b = h$, $b = i$, e la c fra i limiti $c = n$, $c = j$.

Quest' altra serie tripla i cui termini debbono intendersi uno ad uno eguagliati a termini corrispondenti della precedente (32), è la seguente

$$\begin{array}{l} f(l,h,n);\ f(l+\sigma,h,n);\ .....f(k,h,n) \\ f(l,h+\sigma,n); f(l+\sigma,h+\sigma,n); .....f(k,h+\sigma,n) \\ ..... \\ f(l,i,n);\ f(l+\sigma,i,n); .....f(k,i,n). \end{array} \qquad (33)$$

———————————————————————————

$$\begin{array}{l} f(l,h,n+\sigma);\ f(l+\sigma,h,n+\sigma);\ .....f(k,h,n+\sigma) \\ f(l,h+\sigma,n+\sigma); f(l+\sigma,h+\sigma,n+\sigma); .....f(k,h+\sigma,n+\sigma) \\ ..... \\ f(l,i,n+\sigma);\ f(l+\sigma,i,n+\sigma); .....f(k,i,n+\sigma). \end{array}$$

———————————————————————————

essendo l 'ultima delle serie doppie di cui una tripla è composta

$$\begin{array}{l} f(l,h,j);\ f(l+\sigma,h,j);\ .....f(k,h,j) \\ f(l,h+\sigma,j); f(l+\sigma,h+\sigma,j); .....f(k,h+\sigma,j) \\ ..... \\ f(l,i,j);\ f(l+\sigma,i,j); .....f(k,i,j). \end{array}$$

E quanto qui si è detto dei valori delle diverse x, potremo ripeterlo pei valori delle diverse y, indicandoli prima, come nella (32), per mezzo d' indici al piede, poi deducendoli tutti, come nella (33) da una stessa funzione $\phi(a,b,c)$; così dei valori delle diverse z, deducendoli tutti nel secondo quadro da una stessa funzione $\psi(a,b,c)$.

and then [the same x will be distributed] by suitably changing the values of a, b, c in the same function $f(a,b,c)$, assuming that the variable a begins from the value $a = l$, and increases with a constant amount σ until it reaches the value $a = k$, that the variable b assumes its values between the limit $b = h$, $b = i$, and the varianle c between the limits $c = n$, $c = j$.

This second triple series, whose terms have been conceived to be equated respectively to each of the corresponding terms of the precedent (32), is the following

$$\begin{array}{l} f(l,h,n);\ f(l+\sigma,h,n);\ .....f(k,h,n) \\ f(l,h+\sigma,n); f(l+\sigma,h+\sigma,n); .....f(k,h+\sigma,n) \\ ..... \\ f(l,i,n);\ f(l+\sigma,i,n); .....f(k,i,n). \end{array} \qquad (33)$$

———————————————————————————

$$\begin{array}{l} f(l,h,n+\sigma);\ f(l+\sigma,h,n+\sigma);\ .....f(k,h,n+\sigma) \\ f(l,h+\sigma,n+\sigma); f(l+\sigma,h+\sigma,n+\sigma); .....f(k,h+\sigma,n+\sigma) \\ ..... \\ f(l,i,n+\sigma);\ f(l+\sigma,i,n+\sigma); .....f(k,i,n+\sigma). \end{array}$$

———————————————————————————

being the last double series which constitutes the considered triple series given by

$$\begin{array}{l} f(l,h,j);\ f(l+\sigma,h,j);\ .....f(k,h,j) \\ f(l,h+\sigma,j); f(l+\sigma,h+\sigma,j); .....f(k,h+\sigma,j) \\ ..... \\ f(l,i,j);\ f(l+\sigma,i,j); .....f(k,i,j). \end{array}$$

Moreover what said for the values of the different xs, could be repeated for the values of the different ys, which will be indicated at first, as done in the (32), by means of subscripts and will be deduced then, as done in (33) by one and the same function $\phi(a,b,c)$; and in the same way for the values of the different zs, which will be deduced in the second table from one and the same function $\psi(a,b,c)$

Soggiungeremo, come nei casi simili degli altri due sistemi, che dovendo le forme f, ϕ, ψ non mutarsi per tutto il corpo, si hanno tante equazioni di condizione, quante sono le coordinate dei diversi punti, meno tre : e che quindi le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ cambiano da un punto all' altro alla stessa maniera che i valori delle coordinate nella serie tripla (33) e nelle due analoghe per le y, e per le z.

A veder chiaro quello che qui abbiamo asserito, immaginiamo che delle tre equazioni

$$x_{1,1,1} = f(l,h,n); \quad y_{1,1,1} = \phi(l,h,n); \quad z_{1,1,1} = \psi(l,h,n)$$

siano stati dedotti i valori inversi

$$\begin{aligned} l &= p\,(x_{1,1,1},\ y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \\ h &= q\,(x_{1,1,1},\ y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \\ n &= r\,(x_{1,1,1},\ y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \end{aligned} \tag{34}$$

e sostituiti nelle espressioni di tutti i termini della (33). Allora il confronto delle (32), (33), termine per termine, ci darà tante equazioni fra varie coordinate di diversi punti, quanti sono tutti i punti fisici del sistema : una di tali equazioni sarà identica, e le altre saranno equazioni di condizione. Prendendone le variate e ponendo per abbreviare

$$\begin{aligned} \xi &= p'\,(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + p'\,(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + p'\,(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \\ \eta &= q'\,(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + q'\,(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + q'\,(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \\ \zeta &= r'\,(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + r'\,(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + r'\,(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \end{aligned}$$

otteremo

$$\begin{aligned} \delta x_{1,1,1} &= f\prime(p,q,r)\xi + f_{|}(p,q,r)\eta +' f(p,q,r)\zeta \\ \delta x_{2,1,1} &= f\prime(p+\sigma,q,r)\xi + f_{|}(p+\sigma,q,r)\eta +' f(p+\sigma,q,r)\zeta \\ \delta x_{3,1,1} &= f\prime(p+2\sigma,q,r)\xi + f_{|}(p+2\sigma,q,r)\eta +' f(p+2\sigma,q,r)\zeta \end{aligned} \tag{35}$$

ec. ec. ec.

We will add that, like in the similar cases of the other kinds of systems previously treated, as the forms of the functions f, ϕ, ψ have not to alter for the whole [considered] body, one will get as many equations of condition as many are the coordinates of the different points minus three: and therefore that the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ change from one point to another in the same way as the values of the coordinates in the triple series (33) and in the analogous series for y and z variables.

To see clearly what we have stated here, let us imagine that from the three equations

$$x_{1,1,1} = f(l,h,n); \quad y_{1,1,1} = \phi(l,h,n); \quad z_{1,1,1} = \psi(l,h,n)$$

the inverse values were deduced

$$\begin{aligned} l &= p\,(x_{1,1,1},\ y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \\ h &= q\,(x_{1,1,1},\ y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \\ n &= r\,(x_{1,1,1},\ y_{1,1,1}, z_{1,1,1}) \end{aligned} \tag{34}$$

and that [the obtained values] are replaced in the expressions of all terms of the equation (33). Then the comparison of equations (32), (33), term by term, will give us as many equations among the various coordinates of the different [considered] points as many are all physical points of the system: [however] one of these equations [in the table concerning x variables] will be identically verified while the others will be equations of condition. Taking the first variations of the aforementioned equalities and using the shortcut notation

$$\begin{aligned} \xi &= p'\,(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + p'\,(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + p'\,(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \\ \eta &= q'\,(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + q'\,(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + q'\,(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \\ \zeta &= r'\,(x_{1,1,1})\,\delta x_{1,1,1} + r'\,(y_{1,1,1})\,\delta y_{1,1,1} + r'\,(z_{1,1,1})\,\delta z_{1,1,1} \end{aligned}$$

we will get

$$\begin{aligned} \delta x_{1,1,1} &= f\prime(p,q,r)\xi + f_{|}(p,q,r)\eta +' f(p,q,r)\zeta \\ \delta x_{2,1,1} &= f\prime(p+\sigma,q,r)\xi + f_{|}(p+\sigma,q,r)\eta +' f(p+\sigma,q,r)\zeta \\ \delta x_{3,1,1} &= f\prime(p+2\sigma,q,r)\xi + f_{|}(p+2\sigma,q,r)\eta +' f(p+2\sigma,q,r)\zeta \end{aligned} \tag{35}$$

etc. etc. etc.

dove gli apici f', $f_{|}$, $'f$ indicano derivate parziali per p, q, r rispettivamente.

In questi valori (35) delle variazioni $\delta x_{1,1,1}, \delta x_{2,1,1}$, ec. intendiamo risostituiti alle p, q, r i valori l, h, n che le uguagliano (equazioni (34) : vedremo che i secondi membri di dette equazioni (35) muteranno precisamente come i diversi valori delle x nelle espressioni (33). Lo stesso potremo dire delle variazioni delle y e delle variazioni delle z .

In conseguenza del fin qui detto tutti i trinomj che nella equazione generale (1) sono abbracciati dal primo segno sommatorio S , comporranno visibilmente una serie tripla, la quale potrà esprimersi mediante una tripla sommatoria o un integrale finito triplicato, come segue

$$\sum_l^{k+\sigma} \Delta a \sum_h^{i+\sigma} \Delta b \sum_n^{j+\sigma} \Delta c \cdot \sigma^3 \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \quad (36)$$

dove vedesi introdotto il fattore σ^3 in luogo della lettera m, di conformità al già dimostrato nei numeri 18, 21.

32. Diventa ora facile l'argomentare, in correlazione con quanto si disse al num.°30 pei sistemi superficiali, che se la configurazione delle molecole nello stato antecedente ideale non sarà più quella di una sola porzione della materia foggiata in parallelepipedo rettangolo, ma presenterà un volume conterminato da superficie qualsivogliono, sussisterà ancora il ragionamento diretto a provare che la somma dei trinomj colle forze applicate a tutte le molecole, si può compendiare mediante un triplo integrale finito definito ; però i limiti di tale integrale triplicato, invece di essere fra di loro indipendenti, come nella precedente espressione (36), saranno funzioni delle variabili che ancora restano dipendentemente dalla equazione della superficie che terminava il volume occupato dalla materia nello stato precedente. In tale supposizione converrà surrogare alla espressione (36) quest'altra

$$\sum \Delta a \sum \Delta b \sum \Delta c \cdot \sigma^3 \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \quad (37)$$

intendendo i limiti opportunamente determinati, come si è detto.

where the superscripts f', $f_{|}$, $'f$ indicate partial derivatives wth respect to p, q, r respectively.

In these values (35) of the variations $\delta x_{1,1,1}, \delta x_{2,1,1}$, etc. we will assume that the values l, h, n which verify the equations (34) are replacing the [variables] p, q, r: we will see that the right-hand sides of said equations (35) will vary exactly as are varying the different values of the x variables in the expressions (33). The same we will be able to say for the variations of the y and z variables.

As a consequence of what said up to now, all the trinomials which in the general equation (1) are included in the first summation sign S will evidently compose a triple series, which one will be able to express by means of a triple summation or a triple finite integral, as follows

$$\sum_l^{k+\sigma} \Delta a \sum_h^{i+\sigma} \Delta b \sum_n^{j+\sigma} \Delta c \cdot \sigma^3 \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \quad (36)$$

where the factor σ^3 is introduced in place of the letter m, according to what previously demonstrated in the sections 18, 21.

32. It becomes now easy to reproduce the argument already presented in the sect. 30 for the superficial systems: that if the configuration of the molecules in the antecedent ideal state will not be anymore that of a single portion of the material shaped in a rectangular parallelepiped, but will present itself as a volume bounded by a whatsoever surface, [then] it will be still valid the reasoning aimed to prove that the summation of the trinomials representing the forces applied to all molecules can be regarded as a finite definite integral: however the limits of integration of such triple integral instead of being independent, as in the precedent expression (36), will be functions of the variables which still remain, in dependence on the equation of the surface which was the boundary of the volume occupied by the material in the precedent state. In this case it will be convenient to replace the expression (36) with the following one

$$\sum \Delta a \sum \Delta b \sum \Delta c \cdot \sigma^3 \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \quad (37)$$

where the suitably determined integration limits are to be intended as previously said.

Ora conviene fare il passo per tradurre l' integrale triplicato finito in un simile integrale continuo, applicando tre volte di seguito il teorema scritto nella equazione (17) e avvertendo di scomporre il fattore σ^3 in maniera da dare un σ semplice a ciascuno dei tre integrali. Giungiamo per tal guisa all' espressione

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} + \sigma\Psi \qquad (38)$$

conscj al solito di dover trascurare l' aggiunta $\sigma\Psi$, e di dover prendere i limiti dell' integrale triplicato quali li assegna la superficie circoscrivente la materia nella precedente disposizione.

Visto così come deve interpretarsi il segno S nella prima parte della equazione generale (1) quando il sistema è continuo a tre dimensioni, potrei aggiungere altri integrali triplicati provenienti da equazioni di condizione che si estendessero a tutti i punti del sistema : ed anche integrali duplicati che venissero introdotti nell' equazione generale del moto e dell' equilibrio da pressioni esercitate alla superficie del corpo. L' andamento da tenersi per simili aggiunte parmi abbastanza dichiarato dopo l'esposto nei paragrafi di questo Capo. Credo poi più conveniente trattare a parte alcune delle questioni per le quali si verifica quanto ora si è accennato.

CAPO III

Del moto e dell' equilibrio di un corpo qualunque rigido.

Mi propongo di dare in questo Capo quelle equazioni spettanti al moto di un punto qualunque di un corpo rigido, che Lagrange ha omesse, e delle quali dissi nel preambolo della Memoria, che se il nostro Autore le avesse date, come gli era facile usando de' suoi metodi, avrebbe prevenuto il meglio di quanto è stato trovato di poi. Per avviarci in tale ricerca seguendo l' andamento che io ho preso a difendere e raccomandare, ci è prima necessario esprimere per mezzo di equazioni di condizione la rigidità del corpo.

It is now suitable to proceed by tranforming the triple finite integral into a similar continuous integral, by applying three times in a row the theorem stated in the equation (17) and recalling that the factor σ^3 has to be decomposed in such a way that a simple σ has to be given to each of the three integrals. We are thus lead to the expression

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} + \sigma\Psi \qquad (38)$$

in which, as usual, we are conscious that the additive term $\sigma\Psi$ must be neglected and that the limits of the triple integral are those which are assigned by the surface which bounds the body in the considered precedent configuration.

After having seen how the sign S has to be interpreted in the first part of the general equation (1) when the system is a three-dimensional continuum, I could add those other triple integrals deriving from the equations of condition which may involve all points of the system: and also double integrals which must be introduced in the general equation of motion and equilibrium because of the pressures exerted at the body surface. It seems to me that the procedure to be followed for dealing with such additions is clear enough once one considers the arguments presented in the paragraphs of this Capo. I believe then that it will be more convenient to treat separately some of the questions for which it is verified what has been outlined just now.

CAPO III

On the motion and equilibrium of a rigid body whatsoever

I propose to present in this Capo those equations which describe the motion of a point whatsoever of a rigid body, which Lagrange omitted and about which I said in the preamble of this Memoir that if our Author had given them, as it was easy by means of his methods, then he would have anticipated the best results among those found after him. To direct ourselves in this research, following the method which I have decided to support and reccommend, we need to start by expressing by means of equations of conditions the rigidity of the body.

.

33. Chiarissima è l'idea della rigidità in un corpo : si suppone che per l' effetto di essa le distanze rispettive di tutti i punti fisici del corpo siano invariabili durante qualunque movimento. Questa idea si può associare mentalmente con quella di una qualunque distribuzione della materia, sia a densità costante, sia a densità variabile : assumeremo la seconda supposizione per maggiore generalità.

Immaginiamo tre assi rettangolari connessi invariabilmente col corpo per modo che l' accompagnino in tutti i suoi movimenti ulteriori; dette allora

$$p\,(a,b,c)\,; \qquad q\,(a,b,c)\,; \qquad r\,(a,b,c)$$

le coordinate di una molecola qualunque del corpo relativamente a tali assi, queste p,q,r saranno (precisamente come le x,y,z del num.°3.) quelle funzioni delle a,b,c che esprimono la struttura del corpo nello stato reale ; e le coordinate x,y,z della stessa molecola dopo un tempo t relativamente ai tre assi fissi nello spazio, saranno funzioni lineari delle p,q,r date dalle equazioni

$$\begin{aligned} x &= f + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ y &= g + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\ z &= h + \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r \end{aligned} \tag{1}$$

essendo f,g,h; $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\alpha_2,\beta_2,\gamma_2;\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$ dodici quantità funzioni del solo tempo t senza le a,b,c; cioè f,g,h le coordinate che alla fine del tempo t corrispondono al punto d' origine degli assi fissi nel corpo e mobili con esso, e $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\alpha_2,\beta_2,\gamma_2;\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$ nove quantità angolari di cui ecco la significazione

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\,(p\cdot x)\,; \quad \beta_1 = \cos\,(q\cdot x)\,; \quad \gamma_1 = \cos\,(r\cdot x) \\ \alpha_2 &= \cos\,(p\cdot y)\,; \quad \beta_2 = \cos\,(q\cdot y)\,; \quad \gamma_2 = \cos\,(r\cdot y) \\ \alpha_3 &= \cos\,(p\cdot z)\,; \quad \beta_3 = \cos\,(q\cdot z)\,; \quad \gamma_3 = \cos\,(r\cdot z) \end{aligned} \tag{2}$$

Fra queste nove quantità si hanno le ventuna equazioni

33. Very clear is the idea of a rigid body: it is assumed that, because of this assumption, the mutual distances of all physical points of the body are invariable during any motion whatsoever. This idea can be associated, in our mind, to the other one which conceives a generic distribution of mass, either having constant density or having variable density: we will assume this second hypothesis for greater generality.

Let us imagine three rectangular axes invariably connected with the body, in such a way that they accompany it in all its further movements; once called

$$p\,(a,b,c)\,; \qquad q\,(a,b,c)\,; \qquad r\,(a,b,c)$$

the coordinates of a generic molecule of the body relatively to such axes, these p,q,r will be (exactly as the x,y,z of the sect. 3) those functions of the variables a,b,c which express the structure of the body in the real state; and the coordinates x,y,z of the same molecule, after a time t relatively to the three axes fixed in the space, will be linear functions of the p,q,r given by the equations

$$\begin{aligned} x &= f + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ y &= g + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\ z &= h + \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r \end{aligned} \tag{1}$$

being f,g,h; $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\alpha_2,\beta_2,\gamma_2;\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$ twelve quantities which are functions of the time variable t only and which are independent of the variables a,b,c; and more precisely the coordinates f,g,h correspond at the time t to the point which is the origin of the axes which are fixed in the body and move with it and $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\alpha_2,\beta_2,\gamma_2;\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$ are nine angular quantities of which here is the meaning

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\,(p\cdot x)\,; \quad \beta_1 = \cos\,(q\cdot x)\,; \quad \gamma_1 = \cos\,(r\cdot x) \\ \alpha_2 &= \cos\,(p\cdot y)\,; \quad \beta_2 = \cos\,(q\cdot y)\,; \quad \gamma_2 = \cos\,(r\cdot y) \\ \alpha_3 &= \cos\,(p\cdot z)\,; \quad \beta_3 = \cos\,(q\cdot z)\,; \quad \gamma_3 = \cos\,(r\cdot z) \end{aligned} \tag{2}$$

Among these nine quantities we have the following twenty-one equations

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1; \quad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0\\
&\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1; \quad \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0\\
&\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1; \quad \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1; \quad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0\\
&\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1; \quad \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0\\
&\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1; \quad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2; \quad \alpha_2=\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3; \quad \alpha_3=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1;\\
&\beta_1=\alpha_3\gamma_2-\alpha_2\gamma_3; \quad \beta_2=\alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1; \quad \beta_3=\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2;\\
&\gamma_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2; \quad \gamma_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3; \quad \gamma_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1;
\end{aligned} \tag{5}$$

le quali però sono sostanzialmente soltanto sei, cioè le (3), o le (4), cavandosi tutte le altre da combinazioni delle medesime. Ciò è notissimo, ed anche è noto che la deduzione delle (4), (5) dalle (3) può farsi per solo processo analitico, come può vedersi nella prima Nota ch' io posi alla Memoria dell'anno 1832, citata nel preambolo di questa, e in una Memoria del Sig. Cavaliere Gaetano Giorgini inserita nel Tomo XXI degli Atti di questa Società.

34. Assumiamo per comodo le seguenti denominazioni

$$\begin{aligned}
t_1&=\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2\\
t_2&=\left(\frac{dx}{db}\right)^2+\left(\frac{dy}{db}\right)^2+\left(\frac{dz}{db}\right)^2\\
t_3&=\left(\frac{dx}{dc}\right)^2+\left(\frac{dy}{dc}\right)^2+\left(\frac{dz}{dc}\right)^2\\
t_4&=\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{db}\\
t_4&=\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{dc}\\
t_6&=\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc}+\frac{dy}{db}\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{db}\frac{dz}{dc}
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1; \quad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0\\
&\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1; \quad \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0\\
&\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1; \quad \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1; \quad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0\\
&\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1; \quad \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0\\
&\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1; \quad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2; \quad \alpha_2=\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3; \quad \alpha_3=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1;\\
&\beta_1=\alpha_3\gamma_2-\alpha_2\gamma_3; \quad \beta_2=\alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1; \quad \beta_3=\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2;\\
&\gamma_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2; \quad \gamma_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3; \quad \gamma_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1;
\end{aligned} \tag{5}$$

which, however, are substantially only six, that is the equations (3), or the equations (4), as all the others can be obtained by means of combinations of the chosen six. This is very well-known and it is also known that the deduction of the equations (4), (5) from the equations (3) can also be obtained by using a purely analytical procedure, as can be seen in the first Note which I posed to the Memoir of the year 1832, cited in the preamble of the present Memoir and in another Memoir by the Sig. Cavaliere Gaetano Giorgini inserted in the Tome XXI of the Proceedings of this Society.

34. Let us assume for convenience the following definitions

$$\begin{aligned}
t_1&=\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2\\
t_2&=\left(\frac{dx}{db}\right)^2+\left(\frac{dy}{db}\right)^2+\left(\frac{dz}{db}\right)^2\\
t_3&=\left(\frac{dx}{dc}\right)^2+\left(\frac{dy}{dc}\right)^2+\left(\frac{dz}{dc}\right)^2\\
t_4&=\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{db}\\
t_4&=\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{dc}\\
t_6&=\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc}+\frac{dy}{db}\frac{dy}{dc}+\frac{dz}{db}\frac{dz}{dc}
\end{aligned} \tag{6}$$

le quali fanno un gran giuoco, come apparirà dall' attuale Capo e dai successivi.

Dalle equazioni (1) derivate per a, b, c otteniamo le nove

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{da} &= \alpha_1 \frac{dp}{da} + \beta_1 \frac{dq}{da} + \gamma_1 \frac{dr}{da} \\
\frac{dy}{da} &= \alpha_2 \frac{dp}{da} + \beta_2 \frac{dq}{da} + \gamma_2 \frac{dr}{da} \\
\frac{dz}{da} &= \alpha_3 \frac{dp}{da} + \beta_3 \frac{dq}{da} + \gamma_3 \frac{dr}{da} \\
\frac{dx}{db} &= \alpha_1 \frac{dp}{db} + \beta_1 \frac{dq}{db} + \gamma_1 \frac{dr}{db} \\
\frac{dy}{db} &= \alpha_2 \frac{dp}{db} + \beta_2 \frac{dq}{db} + \gamma_2 \frac{dr}{db} \\
\frac{dz}{db} &= \alpha_3 \frac{dp}{db} + \beta_3 \frac{dq}{db} + \gamma_3 \frac{dr}{db} \\
\frac{dx}{dc} &= \alpha_1 \frac{dp}{dc} + \beta_1 \frac{dq}{dc} + \gamma_1 \frac{dr}{dc} \\
\frac{dy}{dc} &= \alpha_2 \frac{dp}{dc} + \beta_2 \frac{dq}{dc} + \gamma_2 \frac{dr}{dc} \\
\frac{dz}{dc} &= \alpha_3 \frac{dp}{dc} + \beta_3 \frac{dq}{dc} + \gamma_3 \frac{dr}{dc}.
\end{aligned} \tag{7}$$

La sostituzione di questi valori nei secondi membri delle (6) può sembrare sulle prime operazione alquanto prolissa, ma viene facilitata dalla simmetria, e si scorge senza difficoltà, che in virtù delle equazioni (3) risultano le sei

$$\begin{aligned}
t_1 &= \left(\frac{dp}{da}\right)^2 + \left(\frac{dq}{da}\right)^2 + \left(\frac{dr}{da}\right)^2 \\
t_2 &= \left(\frac{dp}{db}\right)^2 + \left(\frac{dq}{db}\right)^2 + \left(\frac{dr}{db}\right)^2 \\
t_3 &= \left(\frac{dp}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dc}\right)^2 \\
t_4 &= \frac{dp}{da}\frac{dp}{db} + \frac{dq}{da}\frac{dq}{db} + \frac{dr}{da}\frac{dr}{db} \\
t_5 &= \frac{dp}{da}\frac{dp}{dc} + \frac{dq}{da}\frac{dq}{dc} + \frac{dr}{da}\frac{dr}{dc} \\
t_6 &= \frac{dp}{db}\frac{dp}{dc} + \frac{dq}{db}\frac{dq}{dc} + \frac{dr}{db}\frac{dr}{dc}
\end{aligned} \tag{8}$$

which shall be really useful, as it will appear in the present Capo and in the following ones.

From the equations (1) once derived with respect to the variables a, b, c we get the nine equations

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{da} &= \alpha_1 \frac{dp}{da} + \beta_1 \frac{dq}{da} + \gamma_1 \frac{dr}{da} \\
\frac{dy}{da} &= \alpha_2 \frac{dp}{da} + \beta_2 \frac{dq}{da} + \gamma_2 \frac{dr}{da} \\
\frac{dz}{da} &= \alpha_3 \frac{dp}{da} + \beta_3 \frac{dq}{da} + \gamma_3 \frac{dr}{da} \\
\frac{dx}{db} &= \alpha_1 \frac{dp}{db} + \beta_1 \frac{dq}{db} + \gamma_1 \frac{dr}{db} \\
\frac{dy}{db} &= \alpha_2 \frac{dp}{db} + \beta_2 \frac{dq}{db} + \gamma_2 \frac{dr}{db} \\
\frac{dz}{db} &= \alpha_3 \frac{dp}{db} + \beta_3 \frac{dq}{db} + \gamma_3 \frac{dr}{db} \\
\frac{dx}{dc} &= \alpha_1 \frac{dp}{dc} + \beta_1 \frac{dq}{dc} + \gamma_1 \frac{dr}{dc} \\
\frac{dy}{dc} &= \alpha_2 \frac{dp}{dc} + \beta_2 \frac{dq}{dc} + \gamma_2 \frac{dr}{dc} \\
\frac{dz}{dc} &= \alpha_3 \frac{dp}{dc} + \beta_3 \frac{dq}{dc} + \gamma_3 \frac{dr}{dc}.
\end{aligned} \tag{7}$$

The substitution of these values in the right-hand sides of the equations (6), which may seem at first to be an operation rather involved, is however facilitated by the simmetry and one can see without any difficulty that, because of the equations (3), we get the [following] six equalities

$$\begin{aligned}
t_1 &= \left(\frac{dp}{da}\right)^2 + \left(\frac{dq}{da}\right)^2 + \left(\frac{dr}{da}\right)^2 \\
t_2 &= \left(\frac{dp}{db}\right)^2 + \left(\frac{dq}{db}\right)^2 + \left(\frac{dr}{db}\right)^2 \\
t_3 &= \left(\frac{dp}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dc}\right)^2 \\
t_4 &= \frac{dp}{da}\frac{dp}{db} + \frac{dq}{da}\frac{dq}{db} + \frac{dr}{da}\frac{dr}{db} \\
t_5 &= \frac{dp}{da}\frac{dp}{dc} + \frac{dq}{da}\frac{dq}{dc} + \frac{dr}{da}\frac{dr}{dc} \\
t_6 &= \frac{dp}{db}\frac{dp}{dc} + \frac{dq}{db}\frac{dq}{dc} + \frac{dr}{db}\frac{dr}{dc}
\end{aligned} \tag{8}$$

Queste equazioni, se ben si considerano, meritano molta attenzione. Esse c' insegnano primieramente che i sei trinomj $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ sono sei quantità indipendenti dal tempo, cioè tali che la variabile t entrando nelle singole loro parti, esce nondimeno di per se stessa dal complesso di tutte. Ma ciò che più importa si è che *esse sono le cercate equazioni di condizione esprimenti la rigidità del corpo.* Basta infatti riflettere che i secondi loro membri (per essere p, q, r coordinate relative ad assi fissi nel corpo) sono quantità invariabili in qualunque ipotesi di movimento, e che perciò, prendendo le variate di tali equazioni, si ottengono le sei

$$\begin{aligned} &\delta t_1 = 0; \quad \delta t_2 = 0 \quad \delta t_3 = 0 \\ &\delta t_4 = 0; \quad \delta t_5 = 0 \quad \delta t_6 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

le quali sussistono per ogni punto fisico del corpo. Può notarsi che le equazioni (8) ovvero (9) sono veramente le equazioni di condizione significanti la rigidità del corpo, in quanto non contengono le dodici quantità f, g, h; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ visibili nelle equazioni (1). Queste dodici quantità (che in virtù delle equazioni (3) si riducono a sei) possono avere valori arbitrarj, essendo noi liberi di piantare diversamente in mille modi gli assi fissi nel corpo : il che equivale a dire esservi infinite terne di assi fissi nel corpo rimpetto ai quali le coordinate p, q, r sono invariabili per una stessa molecola. Ma questo concetto che ci dà propriamente l'idea della rigidità, è un concetto il quale, con sott'occhio le equazioni (1), rimane nella nostra mente senza trasfondersi allo scritto, essendo quelle dodici lettere per se stesse mute e incapaci a ridircelo. Si trasfonde esso veramente allo scritto quando si hanno equazioni come le (8), (9) tra espressioni differenziali, le quali - dice Lagrange (Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806 in 8°.pag. 162-163)- sono più generali delle equazioni primitive o integrali, ed equivalgono a tutte insieme tali equazioni primitive che non differirebbero fra loro se non pel valore delle costanti sparite nelle equazioni differenziali.

These equations, if one carefully considers them, deserve a great attention. Firstly they teach us that the six trinomials $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ are six quantities which are independent of the time, that is they are such that the variable t while indeed appearing in their single parts, actually disappears when considering each trinomial as a whole. However what is more important is that *they are the desired equations of condition which express the rigidity of the body.* Indeed it is enough to consider that their right-hand sides (being the variables p, q, r the coordinates [of a physical point] relative to axes fixed in the body) are invariable quantities for any possible movement, and that, therefore, considering the first variations of these equations, we get the following other six ones

$$\begin{aligned} &\delta t_1 = 0; \quad \delta t_2 = 0 \quad \delta t_3 = 0 \\ &\delta t_4 = 0; \quad \delta t_5 = 0 \quad \delta t_6 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

which hold for every physical point of the body. One can remark that the equations (8) or the equations (9) are really the equations of condition meaning the rigidity of the body, as they do not contain the twelwe quantities f, g, h; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ which appear in the equations (1). These twelwe quantities (which because of the equations (3) can be reduced to six) can have arbitrary values, as we are free to choose in many different ways the axes fixed in the body: which is equivalent to say that there are infinite triples of axes fixed in the body with respect to which the coordinates p, q, r are invariable for the same molecules. But this concept which gives us exactly the idea of rigidity is exactly a concept which, when looking at the equations (1), remains in our mind without transfusing into the written formulas, being those twelwe letters by themselves mute, and actually unable to repeat it for us. [This concept] is transfused really in a written form when one has equations similar to the equations (8), (9) among differential expressions, which -as stated by Lagrange (Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806 in 8°.pag. 162-163)- are more general than the primitive or integral equations and are equivalent to all together those primitive equations which do not differ one from another except for the value of the constants which disappear in the differential equations.

35. Le equazioni di condizione (9) sono della stessa natura di quelle (rivedi l' equazione (19) del Capo precedente numeri 27. 28) per le quali cercammo di stabilire un principio generale circa al modo d' introdurne la significazione nell' equazione generale della meccanica per mezzo di sommatorie che nel caso attuale si traducono in integrali triplicati. Riletti i citati numeri, e riassunto l' esposto nel §. 3. del Capo precedente, non si avrà alcuna difficoltà ad ammettere, che chiamando A, B, C, D, E, F sei coefficienti indeterminati funzioni delle a, b, c o delle x, y, z (rivedi le equazioni (7) e (8) del num. °9.), l' equazione generale (1) nel caso del moto de' corpi rigidi si trasformerà nella seguente

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \qquad (10)$$

$$+ \int da \int db \int dc \cdot [A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6] + \Omega = 0$$

dove ho inteso di comprendere nella lettera Ω quei termini che venissero introdotti nell' equazione generale da forze applicate solamente a superficie esterne, o a linee, o a punti determinati del sistema : termini però i quali non potrebbero avere alcuna loro parte affetta da un segno d' integrale triplicato, come la parte scritta.

36. Prendasi per $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ i valori dati dai secondi membri delle equazioni (6), e il polinomio sottoposto al secondo segno integrale della precedente equazione generale (10) si troverà equivalente alla quantità che segue

35. The equations of condition (9) have the same nature as those (see the equation (19) of the precedent Capo sections 27. 28) for which we tried to establish a general principle about the way of introducing them by means of suitable symbolic summation notation in the general equation of mechanics which in the present case can be transformed into triple integrals. Once one will have read again the cited sections and recapitulate what presented in the §. 3. of the precedent Capo, we will admit, without any difficulty, that calling A, B, C, D, E, F six undetermined coefficients [which can be regarded as] functions either of the variables a, b, c or of the variables x, y, z (see the equations (7) and (8) of the sect. 9), the (1) in the case of the motion of rigid bodies will be transformed in the following

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\} \qquad (10)$$

$$+ \int da \int db \int dc \cdot [A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6] + \Omega = 0$$

where I intended to include in the letter Ω those terms which may be introduced in the general equation because of forces applied exclusively to external surfaces or to lines or to points well-determined in the system, terms, however, which cannot include in any of their parts any sign of triple integral analogous to the written ones.

36. Let us take for $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ the values given by the right-hand sides of the equations (6): as a consequence the polynomial appearing in the second integral sign in the precedent general equation (10) will be found to be equal to the following expression

$$
\begin{aligned}
&2A\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+2B\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{db}\right)\\
&+2C\left(\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{dc}\right)\\
&+D\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{db}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+E\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{dc}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+F\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{dc}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{db}\right).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

I ventisette termini dei quali questa quantità è composta, possono tutti subire una trasformazione analoga a quelle usate nel calcolo delle variazioni e diretta a ridurre la quantità (11) siccome risultante di due parti, la prima delle quali contenga le $\delta x, \delta y, \delta z$ non affette da alcuna operazione di derivazione, e la seconda consti di derivate esatte o per a o per b o per c . Le trasformazioni possono eseguirsi tutte sui due modelli

$$
\begin{aligned}
2A\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} &= -\frac{d\cdot\left(2A\frac{dx}{da}\right)}{da}\cdot\delta x+\frac{d\cdot\left(2A\frac{dx}{da}\delta x\right)}{da}\\
D\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db} &= -\frac{d\cdot\left(D\frac{dx}{da}\right)}{db}\cdot\delta x+\frac{d\cdot\left(D\frac{dx}{da}\delta x\right)}{db}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

dopo di che la quantità (11) prende la forma

$$
\begin{aligned}
&2A\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+2B\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{db}\right)\\
&+2C\left(\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{dc}\right)\\
&+D\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{db}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+E\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{dc}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&+F\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{dc}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{dc}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{dc}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dc}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{dc}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{dc}\frac{d\delta z}{db}\right).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

All the twenty-seven terms of which this expression is composed can undergo a transformation which is analogus to those used in the calculus of variations and aimed to reduce the quantity (11) as constituted by two parts, the first of which contains the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ on which is not performed any operation of differentiation, while the second one comprises the exact derivative with respect to a or b or c. These transformations can all be accomplished in accordance with the following two schemes

$$
\begin{aligned}
2A\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} &= -\frac{d\cdot\left(2A\frac{dx}{da}\right)}{da}\cdot\delta x+\frac{d\cdot\left(2A\frac{dx}{da}\delta x\right)}{da}\\
D\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db} &= -\frac{d\cdot\left(D\frac{dx}{da}\right)}{db}\cdot\delta x+\frac{d\cdot\left(D\frac{dx}{da}\delta x\right)}{db}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

so that the quantity (11) takes the form

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dL_1}{da}+\frac{dM_1}{db}+\frac{dN_1}{dc}\right)\delta x\\+&\left(\frac{dL_2}{da}+\frac{dM_2}{db}+\frac{dN_2}{dc}\right)\delta y\\+&\left(\frac{dL_3}{da}+\frac{dM_3}{db}+\frac{dN_3}{dc}\right)\delta z+T\end{aligned}\qquad(13)$$

essendo

$$\begin{aligned}L_1&=-2A\frac{dx}{da}-D\frac{dx}{db}-E\frac{dx}{dc}\\M_1&=-D\frac{dx}{da}-2B\frac{dx}{db}-F\frac{dx}{dc}\\N_1&=-E\frac{dx}{da}-F\frac{dx}{db}-2C\frac{dx}{dc}\\L_2&=-2A\frac{dy}{da}-D\frac{dy}{db}-E\frac{dy}{dc}\\M_2&=-D\frac{dy}{da}-2B\frac{dy}{db}-F\frac{dy}{dc}\\N_2&=-E\frac{dy}{da}-F\frac{dy}{db}-2C\frac{dy}{dc}\\L_3&=-2A\frac{dz}{da}-D\frac{dz}{db}-E\frac{dz}{dc}\\M_3&=-D\frac{dz}{da}-2B\frac{dz}{db}-F\frac{dz}{dc}\\N_3&=-E\frac{dz}{da}-F\frac{dz}{db}-2C\frac{dz}{dc}\end{aligned}\qquad(14)$$

$$\begin{aligned}T=&-\frac{d\cdot(L_1\delta x+L_2\delta y+L_3\delta z)}{da}\\&-\frac{d\cdot(M_1\delta x+M_2\delta y+M_3\delta z)}{db}\\&-\frac{d\cdot(N_1\delta x+N_2\delta y+N_3\delta z)}{dc}.\end{aligned}\qquad(15)$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dL_1}{da}+\frac{dM_1}{db}+\frac{dN_1}{dc}\right)\delta x\\+&\left(\frac{dL_2}{da}+\frac{dM_2}{db}+\frac{dN_2}{dc}\right)\delta y\\+&\left(\frac{dL_3}{da}+\frac{dM_3}{db}+\frac{dN_3}{dc}\right)\delta z+T\end{aligned}\qquad(13)$$

being

$$\begin{aligned}L_1&=-2A\frac{dx}{da}-D\frac{dx}{db}-E\frac{dx}{dc}\\M_1&=-D\frac{dx}{da}-2B\frac{dx}{db}-F\frac{dx}{dc}\\N_1&=-E\frac{dx}{da}-F\frac{dx}{db}-2C\frac{dx}{dc}\\L_2&=-2A\frac{dy}{da}-D\frac{dy}{db}-E\frac{dy}{dc}\\M_2&=-D\frac{dy}{da}-2B\frac{dy}{db}-F\frac{dy}{dc}\\N_2&=-E\frac{dy}{da}-F\frac{dy}{db}-2C\frac{dy}{dc}\\L_3&=-2A\frac{dz}{da}-D\frac{dz}{db}-E\frac{dz}{dc}\\M_3&=-D\frac{dz}{da}-2B\frac{dz}{db}-F\frac{dz}{dc}\\N_3&=-E\frac{dz}{da}-F\frac{dz}{db}-2C\frac{dz}{dc}\end{aligned}\qquad(14)$$

$$\begin{aligned}T=&-\frac{d\cdot(L_1\delta x+L_2\delta y+L_3\delta z)}{da}\\&-\frac{d\cdot(M_1\delta x+M_2\delta y+M_3\delta z)}{db}\\&-\frac{d\cdot(N_1\delta x+N_2\delta y+N_3\delta z)}{dc}.\end{aligned}\qquad(15)$$

Sostituita la quantità (13) sotto il secondo segno integrale della equazione generale (10) , e compenetrati i due integrali triplicati in uno solo, è manifesto che sulle tre parti di cui è formata la quantità T (equazione (15)) può eseguirsi alcuna delle integrazioni per a, o per b, o per c, e che quindi queste parti vanno a mettersi sotto integrali duplicati. Esse allora vengono ad unirsi colle simili comprese (se pur vi sono) nella quantità Ω della equazione (10) sottoposte a segni d' integrali duplicati e provenienti da forze applicate a soli punti di una superficie. Quanto alla quantità che rimane sotto l' integrale triplicato, vi si debbono, secondo c' insegna il calcolo delle variazioni, annullare i tre coefficienti totali delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$; così si hanno le tre equazioni pel moto del punto generico che sono

$$\begin{aligned} X - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dL_1}{da} + \frac{dM_1}{db} + \frac{dN_1}{dc} &= 0 \\ Y - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dL_2}{da} + \frac{dM_2}{db} + \frac{dN_2}{dc} &= 0 \\ Z - \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dL_3}{da} + \frac{dM_3}{db} + \frac{dN_3}{dc} &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

37. Ora si vorrebbero tramutare queste equazioni (16) in altre che non contenessero traccia delle a, b, c , e non constassero che di quantità spettanti allo stato reale del corpo. A questo oggetto mi è necessaria una breve digressione per dimostrare un principio analitico già messo a pag. 205 del Tomo XXI di questi Atti. Ora ne darò una dimostrazione un poco diversa, tanto più volentieri in quanto è legata coll' altra di tre equazioni identiche che rassomigliano a quella della continuità, e possono venir utili anche altrimenti. Ecco in che consiste.

Se si ha un trinomio come

$$\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} + \frac{dN}{dc}$$

dove L, M, N sono funzioni qualunque delle a, b, c; esso può tradursi in un altro trinomio nel quale le derivate siano prese per le x, y, z: si ha cioè

Once the quantity (13) is replaced in the second integral sign of the general equation (10), and the two triple integrals summed up into a single one, it is manifest that for each of the three parts which constitute the quantity T (equation (15)) it is possible to perform an integration with respect to one of the variables a, or b or c and therefore [it is possible to conclude that] these parts can be transformed into double integrals. Then these parts produce terms which can be gathered with similar double integrals (if it occurs that they are present) appearing in the quantity Ω of the equation (10) and [which] are relative to forces applied to the points of a surface only. For what concerns the quantity which remains in the triple integral, following what is taught to us by the calculus of variations, one has to equate to zero each of the three total coefficients of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$; so that he gets the three equations for the motion of the generic point, which are

$$\begin{aligned} X - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dL_1}{da} + \frac{dM_1}{db} + \frac{dN_1}{dc} &= 0 \\ Y - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dL_2}{da} + \frac{dM_2}{db} + \frac{dN_2}{dc} &= 0 \\ Z - \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dL_3}{da} + \frac{dM_3}{db} + \frac{dN_3}{dc} &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

37. Now one would desire to transform these equations (16) into others in which no trace of the variables a, b, c are contained and in which only quantities relative to the real state of the body actually appear. To this aim I need a brief digression for proving an analytical result which already appear at the pag. 205 of the Tome XXI of these Proceedings. I will give now a proof of this result which is a little bit different, and I will do so willingly as the presented demonstration is related to the proof of three identical equations which resemble the equation of continuity and [which] can be useful in many other circumstances. Here is the statement of the announced result.

If one has a trinomial as the following

$$\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} + \frac{dN}{dc}$$

where L, M, N are generic functions of the variables a, b, c, then it can be transformed into another trinomial in which the derivatives are calculated with respect to the variables x, y, z : more precisely [the following formula holds]

$$\frac{dL}{da}+\frac{dM}{db}+\frac{dN}{dc}=\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dK_1}{dx}+\frac{dK_2}{dy}+\frac{dK_3}{dz}\right) \tag{17}$$

essendo le K_1, K_2, K_3 date per le L, M, N mediante le formole

$$\begin{aligned} K_1&=\Gamma\left(L\frac{dx}{da}+M\frac{dx}{db}+N\frac{dx}{dc}\right)\\ K_2&=\Gamma\left(L\frac{dy}{da}+M\frac{dy}{db}+N\frac{dy}{dc}\right)\\ K_3&=\Gamma\left(L\frac{dz}{da}+M\frac{dz}{db}+N\frac{dz}{dc}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Per vedere la verità di questo principio, cominceremo a designare con lettere particolari le derivate parziali delle x, y, z per le a, b, c, come abbiamo fatto (n.14. equazioni (30)) delle derivate parziali pel tempo : scrivendo

$$\begin{aligned} \varepsilon_1&=\frac{dx}{da};\quad \vartheta_1=\frac{dy}{da};\quad \tau_1=\frac{dz}{da}\\ \varepsilon_2&=\frac{dx}{db};\quad \vartheta_2=\frac{dy}{db};\quad \tau_2=\frac{dz}{db}\\ \varepsilon_3&=\frac{dx}{dc};\quad \vartheta_3=\frac{dy}{dc};\quad \tau_3=\frac{dz}{dc}; \end{aligned} \tag{19}$$

e intendendo queste quantità ridotte (mediante l' uso delle equazioni (8) num.° 9) funzioni di x, y, z, t. Dopo ciò seguendo un andamento affatto analogo a quello tenuto al num. ° 14. , troveremo primieramente l' equazione

$$\begin{aligned} \frac{dH}{da}&=l_1\frac{d^2x}{da^2}+m_1\frac{d^2x}{dadb}+n_1\frac{d^2x}{dadc}\\ &+l_2\frac{d^2y}{da^2}+m_2\frac{d^2y}{dadb}+n_2\frac{d^2y}{dadc}\\ &+l_3\frac{d^2z}{da^2}+m_3\frac{d^2z}{dadb}+n_3\frac{d^2z}{dadc} \end{aligned}$$

poi, sostituendo le denominazioni assunte nella prima fila delle precedenti equazioni (19), ci verranno per esprimere i valori

$$\frac{dL}{da}+\frac{dM}{db}+\frac{dN}{dc}=\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dK_1}{dx}+\frac{dK_2}{dy}+\frac{dK_3}{dz}\right) \tag{17}$$

where the quantities K_1, K_2, K_3 are given in terms of the quantities L, M, N by means of the formulas

$$\begin{aligned} K_1&=\Gamma\left(L\frac{dx}{da}+M\frac{dx}{db}+N\frac{dx}{dc}\right)\\ K_2&=\Gamma\left(L\frac{dy}{da}+M\frac{dy}{db}+N\frac{dy}{dc}\right)\\ K_3&=\Gamma\left(L\frac{dz}{da}+M\frac{dz}{db}+N\frac{dz}{dc}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

To prove this statement, we will start by denoting with particular letters the partial derivatives of the variables x, y, z with respect to the variables a, b, c, as we did earlier (n.14 equations (30)) with the partial derivatives with respect to time by writing

$$\begin{aligned} \varepsilon_1&=\frac{dx}{da};\quad \vartheta_1=\frac{dy}{da};\quad \tau_1=\frac{dz}{da}\\ \varepsilon_2&=\frac{dx}{db};\quad \vartheta_2=\frac{dy}{db};\quad \tau_2=\frac{dz}{db}\\ \varepsilon_3&=\frac{dx}{dc};\quad \vartheta_3=\frac{dy}{dc};\quad \tau_3=\frac{dz}{dc}; \end{aligned} \tag{19}$$

and we will regard these quantities as functions of the variables x, y, z, t (by means of the equations (8) sect. 9). After this, by following a procedure completely analogous to the one used in the sect. 14, we will find firstly the equation

$$\begin{aligned} \frac{dH}{da}&=l_1\frac{d^2x}{da^2}+m_1\frac{d^2x}{dadb}+n_1\frac{d^2x}{dadc}\\ &+l_2\frac{d^2y}{da^2}+m_2\frac{d^2y}{dadb}+n_2\frac{d^2y}{dadc}\\ &+l_3\frac{d^2z}{da^2}+m_3\frac{d^2z}{dadb}+n_3\frac{d^2z}{dadc} \end{aligned}$$

and then by substituting the definitions introduced in the first row of the precedent equations (19), we will get -by expressing the values

delle derivate seconde $\frac{d^2x}{da^2}, \frac{d^2x}{dadb}$, ec., come in quel luogo per le derivate simili, nove equazioni le quali non differiranno nei secondi membri da quelle ivi scritte se non per esservi le lettere $\varepsilon_1, \vartheta_1, \tau_1$ invece di u, v, w . Arriveremo quindi all' equazione analoga alla colà ottenuta,

$$\frac{dH}{da} = H\left(\frac{d\varepsilon_{_1}}{dx} + \frac{d_{\vartheta_{_1}}}{dy} + \frac{d\tau_{_1}}{dz}\right)$$

la quale per effetto della (6) num.°9 si muta nella

$$\frac{d\Gamma}{da} = -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_{_1}}{dx} + \frac{d_{\vartheta_1}}{dy} + \frac{d\tau_{_1}}{dz}\right). \tag{20}$$

Con processo analitico in tutto somigliante troveremo le altre due equazioni

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{db} &= -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_{_2}}{dx} + \frac{d_{\vartheta_2}}{dy} + \frac{d\tau_{_2}}{dz}\right)\\ \frac{d\Gamma}{dc} &= -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_{_3}}{dx} + \frac{d_{\vartheta_3}}{dy} + \frac{d\tau_{_3}}{dz}\right).\end{aligned} \tag{21}$$

Avendo poi altrimenti manifestamente

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{da} &= \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_{_1} + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_{_1} + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_{_1}\\ \frac{d\Gamma}{db} &= \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_{_2} + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_{_2} + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_{_2}\\ \frac{d\Gamma}{dc} &= \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_{_3} + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_{_3} + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_{_3}\end{aligned}$$

la sostituzione di questi valori nelle (20) , (21) le riduce alle tre somiglianti all' equazione della continuità:

$$\begin{aligned}\frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_{_1}}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma\vartheta_{_1}}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma\tau_{_1}}{dz} &= 0\\ \frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_{_2}}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma\vartheta_{_2}}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma\tau_{_2}}{dz} &= 0\\ \frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_{_3}}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma\vartheta_{_3}}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma\tau_{_3}}{dz} &= 0.\end{aligned} \tag{22}$$

of the second order derivatives $\frac{d^2x}{da^2}, \frac{d^2x}{dadb}$, etc., exactly as done in the cited section - nine equations which will differ from the right-hand sides of those there written only because in the place of the letters u, v, w there will be the letters $\varepsilon_1, \vartheta_1, \tau_1$. We will therefore arrive at the following equation which is analogous to the one obtained in that section

$$\frac{dH}{da} = H\left(\frac{d\varepsilon_{_1}}{dx} + \frac{d_{\vartheta_{_1}}}{dy} + \frac{d\tau_{_1}}{dz}\right)$$

which because of the equation (6) sect. 9 becomes

$$\frac{d\Gamma}{da} = -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_{_1}}{dx} + \frac{d_{\vartheta_1}}{dy} + \frac{d\tau_{_1}}{dz}\right). \tag{20}$$

With a completely similar analytical process we will find the two other equations

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{db} &= -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_{_2}}{dx} + \frac{d_{\vartheta_2}}{dy} + \frac{d\tau_{_2}}{dz}\right)\\ \frac{d\Gamma}{dc} &= -\Gamma\left(\frac{d\varepsilon_{_3}}{dx} + \frac{d_{\vartheta_3}}{dy} + \frac{d\tau_{_3}}{dz}\right).\end{aligned} \tag{21}$$

As we manifestly can prove also that

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{da} &= \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_{_1} + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_{_1} + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_{_1}\\ \frac{d\Gamma}{db} &= \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_{_2} + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_{_2} + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_{_2}\\ \frac{d\Gamma}{dc} &= \frac{d\Gamma}{dx}\varepsilon_{_3} + \frac{d\Gamma}{dy}\vartheta_{_3} + \frac{d\Gamma}{dz}\tau_{_3}\end{aligned}$$

substituting these values in the equations (20) , (21) leads to the following three, which resembles to the equation of continuity,

$$\begin{aligned}\frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_{_1}}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma\vartheta_{_1}}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma\tau_{_1}}{dz} &= 0\\ \frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_{_2}}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma\vartheta_{_2}}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma\tau_{_2}}{dz} &= 0\\ \frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_{_3}}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma\vartheta_{_3}}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma\tau_{_3}}{dz} &= 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Ora prendasi una funzione qualunque L di a, b, c, che per la sostituzione dei valori (8) num.°9 può anche intendersi ridotta funzione di x, y, z : avremo

$$\frac{dL}{da} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dL}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dL}{dz}\frac{dz}{da}.$$

A motivo delle denominazioni (19) (prima fila), non sarà alterata la precedente equazione scrivendola

$$\frac{dL}{da} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dL}{dx}\cdot\Gamma\varepsilon_{_1} + \frac{dL}{dy}\cdot\Gamma\vartheta_{_1} + \frac{dL}{dz}\cdot\Gamma\tau_{_1}\right).$$

Di più : se prendiamo la prima delle equazioni (22), moltiplicandola per $\frac{L}{\Gamma}$, non avremo difficoltà a capire che non si altera l' equazione precedente aggiungendo al suo secondo membro l' espressione

$$\frac{1}{\Gamma}\left(L\frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_{_1}}{dx} + L\frac{d\cdot\Gamma\vartheta_{_1}}{dy} + L\frac{d\cdot\Gamma\tau_{_1}}{dz}\right).$$

Così vedremo risultare

$$\frac{dL}{da} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Gamma L\varepsilon_{_1}}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma L\vartheta_{_1}}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma L\tau_{_1}}{dz}\right). \tag{23}$$

Chiamate M, N due altre funzioni di a, b, c, come la L, in maniera affatto simile, facendo uso delle altre denominazioni (19) e delle altre due equazioni (22) , troveremo

$$\begin{aligned}\frac{dM}{db} &= \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Gamma M\varepsilon_{_2}}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma M\vartheta_{_2}}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma M\tau_{_2}}{dz}\right)\\ \frac{dN}{dc} &= \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Gamma N\varepsilon_{_3}}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma N\vartheta_{_3}}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma N\tau_{_3}}{dz}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Sommando le equazioni (23), (24), compenetrando nel secondo membro le derivate relative alla stessa variabile, risostituendo alle $\varepsilon_1, \vartheta_1, \tau_1, \varepsilon_2$, ec. le derivate equivalenti (equazioni (19)), e adottando per compendio le espressioni (18), si vedrà risultare l' equazione (17) in cui si legge il principio analitico enunciato.

Let us consider now a generic function L depending on the variables a, b,c, which because of the replacement of the values (8) sect. 9 can be regarded as a function of the variables x, y, z: we will have

$$\frac{dL}{da} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dL}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dL}{dz}\frac{dz}{da}.$$

Because of the definitions introduced in the first row of the (19), the precedent equation shall not be altered when written as follows

$$\frac{dL}{da} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dL}{dx}\cdot\Gamma\varepsilon_{_1} + \frac{dL}{dy}\cdot\Gamma\vartheta_{_1} + \frac{dL}{dz}\cdot\Gamma\tau_{_1}\right).$$

Furthermore: if we take the first among the equations (22), by multiplying it by $\frac{L}{\Gamma}$, we will not have difficulty to understand that the precedent equation is not altered if we add to its right-hand side the expression

$$\frac{1}{\Gamma}\left(L\frac{d\cdot\Gamma\varepsilon_{_1}}{dx} + L\frac{d\cdot\Gamma\vartheta_{_1}}{dy} + L\frac{d\cdot\Gamma\tau_{_1}}{dz}\right).$$

In this way we will see that it results

$$\frac{dL}{da} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Gamma L\varepsilon_{_1}}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma L\vartheta_{_1}}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma L\tau_{_1}}{dz}\right). \tag{23}$$

Once called M, N two other functions of the variables a, b, c, similarly to what done for the function L, by means of the other definitions (19) and of the other two equations (22) , we will get

$$\begin{aligned}\frac{dM}{db} &= \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Gamma M\varepsilon_{_2}}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma M\vartheta_{_2}}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma M\tau_{_2}}{dz}\right)\\ \frac{dN}{dc} &= \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Gamma N\varepsilon_{_3}}{dx} + \frac{d\cdot\Gamma N\vartheta_{_3}}{dy} + \frac{d\cdot\Gamma N\tau_{_3}}{dz}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Summing up the equations (23), (24), combining in the right-hand side the derivatives relative to the same variable and substituting to the $\varepsilon_1, \vartheta_1, \tau_1, \varepsilon_2$, etc. the equivalent derivatives (equations (19)), and adopting the compendium given by the expressions (18), it will be seen as final result the equation (17) in which it is possible to read the formulated analytical result.

38. Ora , mediante l'uso del principio espresso nelle equazioni (17), (18) , vedesi a colpo d'occhio che ponendo

$$\begin{aligned}
P_1 &= \Gamma\left(L_1\frac{dx}{da}+M_1\frac{dx}{db}+N_1\frac{dx}{dc}\right)\\
P_2 &= \Gamma\left(L_1\frac{dy}{da}+M_1\frac{dy}{db}+N_1\frac{dy}{dc}\right)\\
P_3 &= \Gamma\left(L_1\frac{dz}{da}+M_1\frac{dz}{db}+N_1\frac{dz}{dc}\right)\\
Q_1 &= \Gamma\left(L_2\frac{dx}{da}+M_2\frac{dx}{db}+N_2\frac{dx}{dc}\right)\\
Q_2 &= \Gamma\left(L_2\frac{dy}{da}+M_2\frac{dy}{db}+N_2\frac{dy}{dc}\right)\\
Q_3 &= \Gamma\left(L_2\frac{dz}{da}+M_2\frac{dz}{db}+N_2\frac{dz}{dc}\right)\\
R_1 &= \Gamma\left(L_3\frac{dx}{da}+M_3\frac{dx}{db}+N_3\frac{dx}{dc}\right)\\
R_2 &= \Gamma\left(L_3\frac{dy}{da}+M_3\frac{dy}{db}+N_3\frac{dy}{dc}\right)\\
R_3 &= \Gamma\left(L_3\frac{dz}{da}+M_3\frac{dz}{db}+N_3\frac{dz}{dc}\right)
\end{aligned}\tag{25}$$

le equazioni (16) si mutano nelle seguenti

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{dP_1}{dx}+\frac{dP_2}{dy}+\frac{dP_3}{dz}&=0\\
\Gamma\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{dQ_1}{dx}+\frac{dQ_2}{dy}+\frac{dQ_3}{dz}&=0\\
\Gamma\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{dR_1}{dx}+\frac{dR_2}{dy}+\frac{dR_3}{dz}&=0
\end{aligned}\tag{26}$$

le quali sono quelle che si cercavano colle derivate espresse relativamente alle coordinate x, y, z dello stato reale.

Potremo poi avere immediatamente i valori delle nove quantità P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3; R_1, R_2, R_3 dati per le sei A, B, C, D, E, F, sostituendo nelle equazioni (25) alle nove quantità $L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2; L_3, M_3, N_3$ i valori somministratici dalle equazioni (14). Chiaminsi per abbreviare $(I), (II), (III), (IV), (V), (VI)$, sei quantità di cui scrivo i valori

38. Now, by means of the result expressed in the equations (17), (18) , one can see at a glance that, by introducing the notation

$$\begin{aligned}
P_1 &= \Gamma\left(L_1\frac{dx}{da}+M_1\frac{dx}{db}+N_1\frac{dx}{dc}\right)\\
P_2 &= \Gamma\left(L_1\frac{dy}{da}+M_1\frac{dy}{db}+N_1\frac{dy}{dc}\right)\\
P_3 &= \Gamma\left(L_1\frac{dz}{da}+M_1\frac{dz}{db}+N_1\frac{dz}{dc}\right)\\
Q_1 &= \Gamma\left(L_2\frac{dx}{da}+M_2\frac{dx}{db}+N_2\frac{dx}{dc}\right)\\
Q_2 &= \Gamma\left(L_2\frac{dy}{da}+M_2\frac{dy}{db}+N_2\frac{dy}{dc}\right)\\
Q_3 &= \Gamma\left(L_2\frac{dz}{da}+M_2\frac{dz}{db}+N_2\frac{dz}{dc}\right)\\
R_1 &= \Gamma\left(L_3\frac{dx}{da}+M_3\frac{dx}{db}+N_3\frac{dx}{dc}\right)\\
R_2 &= \Gamma\left(L_3\frac{dy}{da}+M_3\frac{dy}{db}+N_3\frac{dy}{dc}\right)\\
R_3 &= \Gamma\left(L_3\frac{dz}{da}+M_3\frac{dz}{db}+N_3\frac{dz}{dc}\right)
\end{aligned}\tag{25}$$

the equations (16) become the following ones

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{dP_1}{dx}+\frac{dP_2}{dy}+\frac{dP_3}{dz}&=0\\
\Gamma\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{dQ_1}{dx}+\frac{dQ_2}{dy}+\frac{dQ_3}{dz}&=0\\
\Gamma\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{dR_1}{dx}+\frac{dR_2}{dy}+\frac{dR_3}{dz}&=0
\end{aligned}\tag{26}$$

which are those which we were looking for, [those] in which the derivatives are expressed with respect to the coordinates x, y, z relative to the real state.

Then we will be able to get immediately the values of the nine quantities P_1, P_2, P_3; Q_1, Q_2, Q_3; R_1, R_2, R_3 in terms of the six quantities A, B, C, D, E, F, by substituting in the equations (25) to the nine quantities $L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2; L_3, M_3, N_3$ the values given to us by the equations (14). To introduce an abbreviation, let us call $(I), (II), (III), (IV), (V), (VI)$, the six quantities of which I write the values

$$
\begin{aligned}
(I) = &-2A\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 \\
&- 2D\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} - 2E\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc} - 2F\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc} \\
(II) = &-2A\left(\frac{dy}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dy}{dc}\right)^2 \\
&- 2D\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} - 2E\frac{dy}{da}\frac{dy}{dc} - 2F\frac{dy}{db}\frac{dy}{dc} \\
(III) = &-2A\left(\frac{dz}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dz}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dz}{dc}\right)^2 \\
&- 2D\frac{dz}{da}\frac{dz}{db} - 2E\frac{dz}{da}\frac{dz}{dc} - 2F\frac{dz}{db}\frac{dz}{dc} \\
(IV) = &-2A\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} - 2B\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} - 2C\frac{dx}{dc}\frac{dy}{dc} \\
&- D\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right) \\
&- E\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\right) \\
&- F\left(\frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\right) \\
(V) = &-2A\frac{dx}{da}\frac{dz}{da} - 2B\frac{dx}{db}\frac{dz}{db} - 2C\frac{dx}{dc}\frac{dz}{dc} \\
&- D\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dz}{da}\right) \\
&- E\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dz}{da}\right) \\
&- F\left(\frac{dx}{db}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dz}{db}\right) \\
(VI) = &-2A\frac{dy}{da}\frac{dz}{da} - 2B\frac{dy}{db}\frac{dz}{db} - 2C\frac{dy}{dc}\frac{dz}{dc} \\
&- D\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} + \frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right) \\
&- E\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dy}{dc}\frac{dz}{da}\right) \\
&- F\left(\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} + \frac{dy}{dc}\frac{dz}{db}\right)
\end{aligned}
\qquad (27)
$$

$$
\begin{aligned}
(I) = &-2A\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 \\
&- 2D\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} - 2E\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc} - 2F\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc} \\
(II) = &-2A\left(\frac{dy}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dy}{dc}\right)^2 \\
&- 2D\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} - 2E\frac{dy}{da}\frac{dy}{dc} - 2F\frac{dy}{db}\frac{dy}{dc} \\
(III) = &-2A\left(\frac{dz}{da}\right)^2 - 2B\left(\frac{dz}{db}\right)^2 - 2C\left(\frac{dz}{dc}\right)^2 \\
&- 2D\frac{dz}{da}\frac{dz}{db} - 2E\frac{dz}{da}\frac{dz}{dc} - 2F\frac{dz}{db}\frac{dz}{dc} \\
(IV) = &-2A\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} - 2B\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} - 2C\frac{dx}{dc}\frac{dy}{dc} \\
&- D\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right) \\
&- E\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\right) \\
&- F\left(\frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\right) \\
(V) = &-2A\frac{dx}{da}\frac{dz}{da} - 2B\frac{dx}{db}\frac{dz}{db} - 2C\frac{dx}{dc}\frac{dz}{dc} \\
&- D\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dz}{da}\right) \\
&- E\left(\frac{dx}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dz}{da}\right) \\
&- F\left(\frac{dx}{db}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dz}{db}\right) \\
(VI) = &-2A\frac{dy}{da}\frac{dz}{da} - 2B\frac{dy}{db}\frac{dz}{db} - 2C\frac{dy}{dc}\frac{dz}{dc} \\
&- D\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} + \frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right) \\
&- E\left(\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dy}{dc}\frac{dz}{da}\right) \\
&- F\left(\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} + \frac{dy}{dc}\frac{dz}{db}\right)
\end{aligned}
\qquad (27)
$$

e le indicate sostituzioni ci porgeranno

$$\begin{aligned} P_1 &= \Gamma(I); \quad P_2 = \Gamma(IV); \quad P_3 = \Gamma(V) \\ Q_1 &= \Gamma(IV); \quad Q_2 = \Gamma(II); \quad Q_3 = \Gamma(VI) \\ R_1 &= \Gamma(V); \quad R_2 = \Gamma(VI); \quad R_3 = \Gamma(III) \end{aligned} \tag{28}$$

dalle quali ci viene insegnato sussistere fra le nove quantità P_1, P_2, P_3, Q_1, ec. le tre relazioni

$$P_2 = Q_1; \quad P_3 = R_1; \quad Q_3 = R_2. \tag{29}$$

Chi confronterà le ottenute equazioni (26), (29) coi risultati datici dai moderni geometri (*)[1], troverà che per vie diversissime siamo giunti alle medesime conseguenze. Taluno forse mi obbjetterà che queste equazioni essendo qui dimostrate pel solo caso de' corpi rigidi, hanno una estensione assai minore di quella loro concessa dai sullodati Geometri francesi. Ad una tal obbjezione risponderà il Capo seguente, ove si vedrà da che parte stia la maggiore generalità.

39. Non tacerò che questa nostra analisi supponendo in numero di sei le equazioni di condizione fra le coordinate x, y, z del punto generico, non sembra accordarsi con quel passo della Meccanica Analitica (T.I. pag. 86) ove si restringe in generale a tre il numero di sì fatte equazioni. Io tengo per fermo però che Lagrange in quel luogo non ebbe di mira il caso nel quale le equazioni di condizione sono alle derivate parziali per variabili di cui le x, y, z si considerino funzioni : potendo allora benissimo dette equazioni essere più di tre, senza che le ultime siano conseguenze necessarie delle tre prime. L' ufficio delle ultime è in tal caso di determinare le funzioni arbitrarie introdotte dall' integrazione delle prime, di far cioè cosa a cui le prime non bastano e perciò quelle non possono essere mere combinazioni di queste. Ammesso ciò, non è nemmeno

[1](*) *Cauchy.* Exercises de Mathématique T.II. pag.111; Tom. III. pag. 166.
Poisson. Mémoires de l' Institut de France. T. VIII. pag. 387; T.X.p. 578. Journal de l' Ecole Polyt. Cahier XX. pag. 54, ec.

and the indicated substitutions will give us

$$\begin{aligned} P_1 &= \Gamma(I); \quad P_2 = \Gamma(IV); \quad P_3 = \Gamma(V) \\ Q_1 &= \Gamma(IV); \quad Q_2 = \Gamma(II); \quad Q_3 = \Gamma(VI) \\ R_1 &= \Gamma(V); \quad R_2 = \Gamma(VI); \quad R_3 = \Gamma(III) \end{aligned} \tag{28}$$

from which we learn that among the nine quantities P_1, P_2, P_3, Q_1, etc. the following three relations hold

$$P_2 = Q_1; \quad P_3 = R_1; \quad Q_3 = R_2. \tag{29}$$

Whoever will compare the so obtained equations (26), (29) with the results obtained for us by the modern geometers (*)[1], will find that -using very different ways- we reached the same consequences. Maybe somebody will object to me that being these equation demonstrated here only in the case of rigid bodies they will have an extension much reduced when compared to the one attributed to them by the French geometers which we have praised before. To such an objection will answer the following Capo, where it will be seen in which treatment one can find the greater generality.

39. I will not omit to say that this our analysis, by assuming that the equations of condition among the coordinates x, y, z of the generic point amount to six, does not seem to be in agreement with that excerpt of the Analytical Mechanics (T.I. page 86) where it is restricted to three the number of such equations. I claim nonetheless that Lagrange in that excerpt did not aim the case in which the equations of condition involve the partial derivatives with respect to the variables of which the x, y, z are assumed to be functions: it is then well possible that these equations be more than three, being excluded that the others be a necessary consequence of the first three. The role of the aforementioned additional equations will thus be that of determining the arbitrary functions introduced by the integration of the first ones, more precisely [their role will be that] of doing something for which the first ones are not sufficient and indeed the added equations cannot be simple combination of them.Once this is admitted it is not

[1](*) *Cauchy.* Exercises de Mathématique T.II. pag.111; Tom. III. pag. 166.
Poisson. Mémoires de l' Institut de France. T. VIII. pag. 387; T.X.p. 578. Journal de l' Ecole Polyt. Cahier XX. pag. 54, etc.

più in tal caso applicabile il corollario che si abbiano sempre tante equazioni quante ne abbisognano per determinare i valori delle coordinate generiche x, y, z, e di tutti i coefficienti indeterminati introdotti secondo il metodo. Del resto tengo poi in serbo una risposta atta a guadagnarmi il suffragio anche di chi credesse sussistere sempre senza alcuna eccezione l' addotta sentenza del nostro Autore. Se nell' impianto di un problema meccanico secondo i metodi del nostro testo, si ommettono alcune delle essenziali equazioni di condizione, non si esprimono tutti i dati della questione, e si viene a conseguenze erronee. Non è di eguale importanza il guardarsi dall' usare qualche equazione di condizione di più del bisogno, la quale sia conseguenza di altre parimenti adoperate. Lagrange ha provato per via d' esempj (M. A.T.I. pag. 135 e altrove) che in tal caso nella pratica del metodo (il quale è poi quello che si segue anche nel calcolo delle variazioni) non ne risulta errore a motivo del compenetrarsi che fanno, pel giuoco de' coefficienti indeterminati i termini superflui cogli altri esistenti in forza delle equazioni necessarie. Ciò intendasi detto unicamente a sempre maggior guarentigia della verità delle precedenti deduzioni: la mia opinione è che nel caso attuale tutte e sei le equazioni di condizione dovevano essere contemplate.

40. Aggiungerò per ragioni che il lettore comprenderà da se stesso fra poco, una maniera di dimostrare speditamente tre formole note e di grande effetto nella trattazione del moto di un corpo solido per quella parte che il Signor Giorgini (nella Memoria più sopra citata) chiama geometrica sull' esempio di alcuni illustri francesi. Derivando pel tempo le equazioni (1) num.° 33. abbiamo, giusta l' adottata massima di scrivere cogli apici le derivate totali prese riguardo al tempo;

$$\begin{aligned} u &= f' + \alpha'_1 p + \beta'_1 q + \gamma'_1 r \\ v &= g' + \alpha'_2 p + \beta'_2 q + \gamma'_2 r \\ w &= h' + \alpha'_3 p + \beta'_3 q + \gamma'_3 r. \end{aligned} \tag{30}$$

anymore applicable -in considered instance- the corollary stating that one has as many equations as many are needed to determine the values of the generic coordinates x, y, z and of all the undetermined coefficients introduced by following the method. On the other hand I then have ready the answer which will induce to agree with me also those who may believe that -without any exception- the quoted statement of our Author is always true. If in the formulation of a mechanical problem -when following the methods of our textbook- one omits some among the equations of condition those which are really essential, he will not express all data of that problem and therefore he will be led to erroneous consequences. It is not equally important to avoid to use any equation of condition which, while not being strictly necessary, is however a consequence of the other -already used- equations of condition. Lagrange has proven -by means of suitable examples- (M. A.T.I. pag. 135 and also elsewhere) that in such case when applying the method (which is exactly the same used in the calculus of variations) there is no resulting mistake as the undetermined [Lagrangian] multiplier relative to the redundant equation of condition results to combine with those multipliers which are relative to the really-necessary equation of condition. What I have stated in the previous sentences is intended to be a further garantee of the truth of precedent deductions: it is my opinion that in the case which I consider here all six equations had to be contemplated.

40. I will add here -for reasons which the reader will understand by himself at once- a method for demonstrating withou difficulties three formulas already known and very useful in the study of the motion of a solid body, in that part which Mr. Giorgini (in the already cited Memoir) calls geometrical by following the example of some illustrious frenchmen. By deriving with respect to time the equations (1) sect. 33 we get, by using the adopted notation of indicating with primes the total derivatives with respect to time,

$$\begin{aligned} u &= f' + \alpha'_1 p + \beta'_1 q + \gamma'_1 r \\ v &= g' + \alpha'_2 p + \beta'_2 q + \gamma'_2 r \\ w &= h' + \alpha'_3 p + \beta'_3 q + \gamma'_3 r. \end{aligned} \tag{30}$$

Dalle stesse equazioni (1) moltiplicate rispettivamente e successivamente prima per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, poi per $\beta_1, \beta_2, \beta_3$,da ultimo per $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e ogni volta sommate, si ottengono in virtù delle (3) le equazioni inverse che sono

$$\begin{aligned} p &= \alpha_1 (x-f) + \alpha_2 (y-g) + \alpha_3 (z-h) \\ q &= \beta_1 (x-f) + \beta_2 (y-g) + \beta_3 (z-h) \\ r &= \gamma_1 (x-f) + \gamma_2 (y-g) + \gamma_3 (z-h) . \end{aligned} \tag{31}$$

Poniamo questi valori di p, q, r nelle precedenti (30) ed otterremo

$$\begin{aligned} u = f' &+ \left(\alpha_1\alpha_1' + \beta_1\beta_1' + \gamma_1\gamma_1'\right)(x-f) \\ &+ \left(\alpha_2\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \gamma_2\gamma_1'\right)(y-g) \\ &+ \left(\alpha_3\alpha_1' + \beta_3\beta_1' + \gamma_3\gamma_1'\right)(z-h) \\ v = g' &+ \left(\alpha_1\alpha_2' + \beta_1\beta_2' + \gamma_1\gamma_2'\right)(x-f) \\ &+ \left(\alpha_2\alpha_2' + \beta_2\beta_2' + \gamma_2\gamma_2'\right)(y-g) \\ &+ \left(\alpha_3\alpha_2' + \beta_3\beta_2' + \gamma_3\gamma_2'\right)(z-h) \\ w = h' &+ \left(\alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3'\right)(x-f) \\ &+ \left(\alpha_2\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \gamma_2\gamma_3'\right)(y-g) \\ &+ \left(\alpha_3\alpha_3' + \beta_3\beta_3' + \gamma_3\gamma_3'\right)(z-h) . \end{aligned} \tag{32}$$

Queste equazioni ci danno a dirittura le tre velocità u, v, w espresse per le coordinate x, y, z e per quantità funzioni del solo tempo che non cambiano passando da un punto all' altro del corpo. Volendo ridurre alle forme conosciute, poniamo per abbreviazione

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= \alpha_2\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \gamma_2\gamma_3' \\ \varsigma_2 &= \alpha_3\alpha_1' + \beta_3\beta_1' + \gamma_3\gamma_1' \\ \varsigma_3 &= \alpha_1\alpha_2' + \beta_1\beta_2' + \gamma_1\gamma_2'. \end{aligned} \tag{33}$$

Derivando ora per t le equazioni (4) num. ° 33, otterremo

By multiplying the same equations (1) respectively and successively times $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, then times $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, and finally times $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ and every time adding the obtained relations one gets, because of the (3) the inverse equations, which are:

$$\begin{aligned} p &= \alpha_1 (x-f) + \alpha_2 (y-g) + \alpha_3 (z-h) \\ q &= \beta_1 (x-f) + \beta_2 (y-g) + \beta_3 (z-h) \\ r &= \gamma_1 (x-f) + \gamma_2 (y-g) + \gamma_3 (z-h) . \end{aligned} \tag{31}$$

Let us replace these values of p, q, r in the precedent (30) to get

$$\begin{aligned} u = f' &+ \left(\alpha_1\alpha_1' + \beta_1\beta_1' + \gamma_1\gamma_1'\right)(x-f) \\ &+ \left(\alpha_2\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \gamma_2\gamma_1'\right)(y-g) \\ &+ \left(\alpha_3\alpha_1' + \beta_3\beta_1' + \gamma_3\gamma_1'\right)(z-h) \\ v = g' &+ \left(\alpha_1\alpha_2' + \beta_1\beta_2' + \gamma_1\gamma_2'\right)(x-f) \\ &+ \left(\alpha_2\alpha_2' + \beta_2\beta_2' + \gamma_2\gamma_2'\right)(y-g) \\ &+ \left(\alpha_3\alpha_2' + \beta_3\beta_2' + \gamma_3\gamma_2'\right)(z-h) \\ w = h' &+ \left(\alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3'\right)(x-f) \\ &+ \left(\alpha_2\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \gamma_2\gamma_3'\right)(y-g) \\ &+ \left(\alpha_3\alpha_3' + \beta_3\beta_3' + \gamma_3\gamma_3'\right)(z-h) . \end{aligned} \tag{32}$$

These equations will give us immediately the three velocities u, v, w in terms of the coordinates x, y, z and [in terms of] quantities which depending only on time do not vary by passing from a point to another point in the body. As one wants to reduce them to a known form, we introduce the shortening notation

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= \alpha_2\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \gamma_2\gamma_3' \\ \varsigma_2 &= \alpha_3\alpha_1' + \beta_3\beta_1' + \gamma_3\gamma_1' \\ \varsigma_3 &= \alpha_1\alpha_2' + \beta_1\beta_2' + \gamma_1\gamma_2'. \end{aligned} \tag{33}$$

By deriving now with respect to the variable t the equations (4) sect.. 33, we will get

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\alpha_1' + \beta_1\beta_1' + \gamma_1\gamma_1' = 0\\
&\alpha_2\alpha_2' + \beta_2\beta_2' + \gamma_2\gamma_2' = 0\\
&\alpha_3\alpha_3' + \beta_3\beta_3' + \gamma_3\gamma_3' = 0\\
&\alpha_2\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \gamma_2\gamma_1' = -\varsigma_3\\
&\alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3' = -\varsigma_2\\
&\alpha_3\alpha_2' + \beta_3\beta_2' + \gamma_3\gamma_2' = -\varsigma_1.
\end{aligned} \tag{34}$$

Col mezzo di queste ultime nove equazioni le (32) si riducono a colpo d'occhio

$$\begin{aligned}
u &= f' + \varsigma_2(z-h) - \varsigma_3(y-g)\\
v &= g' + \varsigma_3(x-f) - \varsigma_1(z-h)\\
w &= h' + \varsigma_1(y-g) - \varsigma_2(x-f)
\end{aligned} \tag{35}$$

e diverrebbero ancora assai più sempici se le f, g, h fossero zero, cioè se il punto d' origine delle x, y, z fosse un punto fisso del corpo intorno a cui esso potesse volgersi liberamente. Sogliono i meccanici chiamare le $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$ velocità angolari intorno agli assi delle x, y, z: importa ritenere (come si fa manifesto pei valori (33)) che queste velocità angolari non dipendono dalle coordinate dei diversi punti del corpo per rapporto agli assi mobili con esso.

41. Le equazioni (35) che danno le tre velocità del punto generico cognite per quanto spetta alla loro composizione in x, y, z, e soltanto incognite per rapporto a funzioni del solo tempo, sono poi quelle che combinate colle equazioni meccaniche porgono l' intera soluzione del problema. Ognun vede però quanto la soluzione anzidetta sia avanzata in virtù delle sole equazioni (35) indipendenti da qualunque principio meccanico, e come le equazioni meccaniche non facciano che portarvi un compimento, il quale viene facilitato dall' uso di altre nove eleganti equazioni che si trovano (oltre le equazioni di posizione (33)) fra le velocità angolari $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$, e i nove coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. Non è mia intenzione ritessere qui una tale

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\alpha_1' + \beta_1\beta_1' + \gamma_1\gamma_1' = 0\\
&\alpha_2\alpha_2' + \beta_2\beta_2' + \gamma_2\gamma_2' = 0\\
&\alpha_3\alpha_3' + \beta_3\beta_3' + \gamma_3\gamma_3' = 0\\
&\alpha_2\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \gamma_2\gamma_1' = -\varsigma_3\\
&\alpha_1\alpha_3' + \beta_1\beta_3' + \gamma_1\gamma_3' = -\varsigma_2\\
&\alpha_3\alpha_2' + \beta_3\beta_2' + \gamma_3\gamma_2' = -\varsigma_1.
\end{aligned} \tag{34}$$

By means of these last nine equations the (32) reduce at a glance to

$$\begin{aligned}
u &= f' + \varsigma_2(z-h) - \varsigma_3(y-g)\\
v &= g' + \varsigma_3(x-f) - \varsigma_1(z-h)\\
w &= h' + \varsigma_1(y-g) - \varsigma_2(x-f)
\end{aligned} \tag{35}$$

and would become even much simpler if the f, g, h were vanishing, that is if the point [which is the] origin of the coordinate system x, y, z were a fixed point of the body, around which it could freely rotate. Usually the mechanicians call the quantities $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$ angular velocities about the axies of the variables x, y, z: it is important to recall that (as it is made manifest by the values given in equation (33)) that these angular velocities do not depend on the coordinates of the different points of the body with respect to the axes which move with it.

41. The equations (35), which give the three velocities of the generic point explicitly in their dependence on the variables x, y, z and implicitly in terms of functions depending only on the time variable, are those which, once combined with the mechanical equations, will supply the complete solution of the problem. Everyone can, indeed, see that the found solution is obtained by using only the equations (35) which are independent of any mechanical principle and that the mechanical equations are simply their completion, which is made easier by the use of other nine elegant equations which can be found (beyond the defining equations (33)) among the angular velocities $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$, and the nine cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, *etc.* It is not my intention to repeat here such a

trattazione del moto di un corpo solido, già condotta a fine da insigni autori. II lettore conosce lo scopo ch' io mi sono proposto. Soltanto, vedendole in qualche relazione collo scopo medesimo, soggiungerò tre equazioni che si deducono dalle (35) derivandole ancora pel tempo, e sostituendo alle u, v, w che si generano durante l' operazione, gli stessi valori (35). Dopo varie riduzioni che si presentano senza difficoltà, si giunge alle tre

$$\begin{aligned} u' &= f'' - \left(\varsigma_2^2 + \varsigma_3^2\right)(x-f) - \left(\varsigma_3' - \varsigma_1\varsigma_2\right)(y-g) + \left(\varsigma_2' - \varsigma_1\varsigma_3\right)(z-h) \\ v' &= g'' + \left(\varsigma_3' + \varsigma_1\varsigma_2\right)(x-f) - \left(\varsigma_1^2 + \varsigma_3^2\right)(y-g) - \left(\varsigma_1' - \varsigma_2\varsigma_3\right)(z-h) \\ w' &= h'' - \left(\varsigma_2' - \varsigma_1\varsigma_3\right)(x-f) + \left(\varsigma_1' + \varsigma_2\varsigma_3\right)(y-g) - \left(\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2\right)(z-h)\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Siccome le u', v', w' equivalgono rispettivamente alle $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, i trovati valori potranno sostituirsi nelle equazioni meccaniche (26), e così (richiamate anche le (29)) contribuire alla determinazione delle quantità P_1, P_2, P_3, Q_1, ec. Conviene però che il lettore attenda quanto siamo per dire in generale nel Capo seguente intorno a quantità che tengono il posto delle nove anzidette.

42. Terminerò il Capo attuale col mostrare che lo stesso andamento tenuto qui sopra al num.°40. vale all'oggetto di trovare il valore delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ attribuibili alle coordinate x, y, z di ciascun punto del corpo in forza di una circostanza particolare degnissima di osservazione e che produce notabili effetti, come vedremo nel Capo seguente. Qualunque sia il sistema, invariabile o variabile, non c'è in generale una ragione per cui, avendone riferito il moto a tre assi ortogonali presi a piacere, non potessimo riferirlo anche a tre altri assi ortgonali comunque posti nello spazio rimpetto ai primi. Supponiamo di aver fatto il primo riferimento, e che allora le coordinate del punto generico fossero p, q, r (funzioni poi queste di a, b, c, t secondo le idee del Capo primo) ; facendo il secondo riferimento, le coordinate, che denomineremo x, y, z, possono essere date per le p, q, r mediante le equazioni (1) num.°33. Suppo-

treatment of the motion of a solid body, already completed by eminent authors. The reader knows the aim which I intend to pursue. I will limit myself here, seeing them in relation with the aforementioned aim, to add to my presentation three equations which can be deduced from (35) by deriving them again with respect to the time variable and replacing to the u, v, w which are generated by such operation exactly the values given by the equation (35). After various reductions which do not present any difficulty one arrives at the following three equations:

$$\begin{aligned} u' &= f'' - \left(\varsigma_2^2 + \varsigma_3^2\right)(x-f) - \left(\varsigma_3' - \varsigma_1\varsigma_2\right)(y-g) + \left(\varsigma_2' - \varsigma_1\varsigma_3\right)(z-h) \\ v' &= g'' + \left(\varsigma_3' + \varsigma_1\varsigma_2\right)(x-f) - \left(\varsigma_1^2 + \varsigma_3^2\right)(y-g) - \left(\varsigma_1' - \varsigma_2\varsigma_3\right)(z-h) \\ w' &= h'' - \left(\varsigma_2' - \varsigma_1\varsigma_3\right)(x-f) + \left(\varsigma_1' + \varsigma_2\varsigma_3\right)(y-g) - \left(\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2\right)(z-h)\,. \end{aligned} \tag{36}$$

As the u', v', w' respectively are equal to the $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, one will be able to replace the so found values in the mechanical equations (26), and in this way (once the equations (29) are also recalled) the resulting equations will contribute to the determinations of the quantities P_1, P_2, P_3, Q_1, etc. It is however suitable that the reader waits what we will say in general in the following Capo about some quantities which will replace the aforementioned nine.

42. I will conclude the present Capo by showing that the same procedure used in the previous sect. 40 can be applied in order to find the value of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ which may be attributed to the coordinates x, y, z of each point of the body because of a particular circumstance which deserves to be particularly considered and produces remarkable effects, as we will see in the following Capo. Whichever be the system, variable or invariable, there is not any reason -in general- for which after having referred its motion to three orthogonal axes arbitrarily chosen, we cannot refer the same motion to three other orthogonal axes, in whatever way placed in the space with respect to the first ones. Let us assume to have chosen the first frame of reference, and let the coordinates of the generic point be [in this frame] p, q, r (which in their turn are functions of the variables a, b, c, t following the ideas of the first Capo); let us choose a second frame of reference, then the coordinates [of the same point] which we will denominate x, y, z, can be given -in terms of the coordinates p, q, r by means of the equations (1) sect. 33. Let us assume

niamo di più che le anzidette coordinate x, y, z prendano aumenti indeterminati $i\delta x, i\delta y, i\delta z$ (i è il coefficiente indeterminato che si riduce piccolo quanto si vuole secondo lo spirito del calcolo delle variazioni) in conseguenza di uno spostarsi arbitrario dei secondi assi rispetto ai primi, il che torna lo stesso che dire, ammettendo che crescano degli aumenti indeterminati $i\delta f, i\delta\alpha_1,$ ec. tutte le dodici quantità $f, g, h, \alpha_1,$ ec. delle quazioni (1), tra le quali regnano le sei equazioni di condizione (3) ovvero (4) num.° 33. Possiamo cercare i valori delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ per un sistema qualunque in maniera analoga a quella con cui cercammo i valori delle velocità u, v, w per un corpo solido. Pertanto invece delle (30) avremo le tre

$$\begin{aligned}\delta x &= \delta f + \delta\alpha_1 p + \delta\beta_1 q + \delta\gamma_1 r\\ \delta y &= \delta g + \delta\alpha_2 p + \delta\beta_2 q + \delta\gamma_2 r\\ \delta z &= \delta h + \delta\alpha_3 p + \delta\beta_3 q + \delta\gamma_3 r\end{aligned}$$

le quali, dopo avervi sostituiti i valori di p, q, r datici dalle (31) ci diventeranno, in corrispondenza colle (32),

$$\begin{aligned}\delta x = \delta f &+ \left(\alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1\right)(x-f)\\ &+ \left(\alpha_2\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\gamma_1\right)(y-g)\\ &+ \left(\alpha_3\delta\alpha_1 + \beta_3\delta\beta_1 + \gamma_3\delta\gamma_1\right)(z-h)\\ \delta y = \delta g &+ \left(\alpha_1\delta\alpha_2 + \beta_1\delta\beta_2 + \gamma_1\delta\gamma_2\right)(x-f)\\ &+ \left(\alpha_2\delta\alpha_2 + \beta_2\delta\beta_2 + \gamma_2\delta\gamma_2\right)(y-g)\\ &+ \left(\alpha_3\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\gamma_2\right)(z-h)\\ \delta z = \delta h &+ \left(\alpha_1\delta\alpha_3 + \beta_1\delta\beta_3 + \gamma_1\delta\gamma_3\right)(x-f)\\ &+ \left(\alpha_2\delta\alpha_3 + \beta_2\delta\beta_3 + \gamma_2\delta\gamma_3\right)(y-g)\\ &+ \left(\alpha_3\delta\alpha_3 + \beta_3\delta\beta_3 + \gamma_3\delta\gamma_3\right)(z-h)\,.\end{aligned} \tag{37}$$

Poscia in riscontro delle (33) stabiliremo le denominazioni

moreover that the aforementioned coordinates x, y, z are incremented by the indetermined quantities $i\delta x, i\delta y, i\delta z$ (where i is an indeterminate coefficient which - following the spirit of calculus of variations - may be considered arbitrarily small) as a consequence of an arbitrary displacement of the second frame with respect to the first, which is equivalent to say that one increments by the indetermined quantities $i\delta f, i\delta\alpha_1,$ *etc.* all twelve quantities $f, g, h, \alpha_1,$ *etc.* which appear in the equations (1) and among which the six equations of condition (3) or (4) sect. 33 must hold. We can look for the values of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ for a system whatsover in a completely analogous way as we looked for the values of the velocities u, v, w for a solid body. Therefore instead of the (30) we will have the following three

$$\begin{aligned}\delta x &= \delta f + \delta\alpha_1 p + \delta\beta_1 q + \delta\gamma_1 r\\ \delta y &= \delta g + \delta\alpha_2 p + \delta\beta_2 q + \delta\gamma_2 r\\ \delta z &= \delta h + \delta\alpha_3 p + \delta\beta_3 q + \delta\gamma_3 r\end{aligned}$$

which, after having replaced the values of p, q, r as given by the (31) will become, correspondingly to the [equations] (32),

$$\begin{aligned}\delta x = \delta f &+ \left(\alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1\right)(x-f)\\ &+ \left(\alpha_2\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\gamma_1\right)(y-g)\\ &+ \left(\alpha_3\delta\alpha_1 + \beta_3\delta\beta_1 + \gamma_3\delta\gamma_1\right)(z-h)\\ \delta y = \delta g &+ \left(\alpha_1\delta\alpha_2 + \beta_1\delta\beta_2 + \gamma_1\delta\gamma_2\right)(x-f)\\ &+ \left(\alpha_2\delta\alpha_2 + \beta_2\delta\beta_2 + \gamma_2\delta\gamma_2\right)(y-g)\\ &+ \left(\alpha_3\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\gamma_2\right)(z-h)\\ \delta z = \delta h &+ \left(\alpha_1\delta\alpha_3 + \beta_1\delta\beta_3 + \gamma_1\delta\gamma_3\right)(x-f)\\ &+ \left(\alpha_2\delta\alpha_3 + \beta_2\delta\beta_3 + \gamma_2\delta\gamma_3\right)(y-g)\\ &+ \left(\alpha_3\delta\alpha_3 + \beta_3\delta\beta_3 + \gamma_3\delta\gamma_3\right)(z-h)\,.\end{aligned} \tag{37}$$

Subsequently, paralleling the [equations] (33) we will establish the definitions

$$\begin{aligned}\varsigma_1 &= (\alpha_2\delta\alpha_3 + \beta_2\delta\beta_3 + \gamma_2\delta\gamma_3)\\ \varsigma_2 &= (\alpha_3\delta\alpha_1 + \beta_3\delta\beta_1 + \gamma_3\delta\gamma_1)\\ \varsigma_3 &= (\alpha_1\delta\alpha_2 + \beta_1\delta\beta_2 + \gamma_1\delta\gamma_2)\,.\end{aligned}$$

In appresso le variate delle equazioni (4) ci daranno

$$\begin{aligned}&\alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1 = 0\\ &\alpha_2\delta\alpha_2 + \beta_2\delta\beta_2 + \gamma_2\delta\gamma_2 = 0\\ &\alpha_3\delta\alpha_3 + \beta_3\delta\beta_3 + \gamma_{_3}\delta\gamma_3 = 0\\ &\alpha_2\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\gamma_1 = -\varsigma_3\\ &\alpha_1\delta\alpha_3 + \beta_1\delta\beta_3 + \gamma_1\delta\gamma_3 = -\varsigma_2\\ &\alpha_3\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\gamma_2 = -\varsigma_1.\end{aligned}$$

Ora in virtù di queste ultime nove equazioni, adottando anche di mettere

$$\omega_1 = \delta f - \varsigma_2 h + \varsigma_3 g;\quad \omega_2 = \delta g - \varsigma_3 f + \varsigma_1 h;\quad \omega_3 = \delta h - \varsigma_1 g + \varsigma_2 f \tag{38}$$

le precedenti (37) si muteranno nelle

$$\begin{aligned}\delta x &= \omega_1 + \varsigma_2 z - \varsigma_3 y\\ \delta y &= \omega_2 + \varsigma_3 x - \varsigma_1 z\\ \delta z &= \omega_3 + \varsigma_1 y - \varsigma_2 x;\end{aligned} \tag{39}$$

che sono quelle che ci eravamo proposto di trovare, e che ci verranno utili nel Capo seguente. Si osservi sui valori delle sei quantità $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$, ch'esse non dipendono dalle coordinate variabili del sistema, ma solo dalle dodici quantità esprimenti l' arbitrio della posizione dei secondi assi rispetto ai primi. Sicome poi fra tali dodici quantità sei rimangono assolutamente arbitrarie, potremo ritenere arbitrarie e indipendenti fra loro le stesse sei $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$.

$$\begin{aligned}\varsigma_1 &= (\alpha_2\delta\alpha_3 + \beta_2\delta\beta_3 + \gamma_2\delta\gamma_3)\\ \varsigma_2 &= (\alpha_3\delta\alpha_1 + \beta_3\delta\beta_1 + \gamma_3\delta\gamma_1)\\ \varsigma_3 &= (\alpha_1\delta\alpha_2 + \beta_1\delta\beta_2 + \gamma_1\delta\gamma_2)\,.\end{aligned}$$

Then the variations of equations (4) will give us

$$\begin{aligned}&\alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1 = 0\\ &\alpha_2\delta\alpha_2 + \beta_2\delta\beta_2 + \gamma_2\delta\gamma_2 = 0\\ &\alpha_3\delta\alpha_3 + \beta_3\delta\beta_3 + \gamma_{_3}\delta\gamma_3 = 0\\ &\alpha_2\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\gamma_1 = -\varsigma_3\\ &\alpha_1\delta\alpha_3 + \beta_1\delta\beta_3 + \gamma_1\delta\gamma_3 = -\varsigma_2\\ &\alpha_3\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\gamma_2 = -\varsigma_1.\end{aligned}$$

Now, because of these last equations, by adopting also the following notations

$$\omega_1 = \delta f - \varsigma_2 h + \varsigma_3 g;\quad \omega_2 = \delta g - \varsigma_3 f + \varsigma_1 h;\quad \omega_3 = \delta h - \varsigma_1 g + \varsigma_2 f \tag{38}$$

the precedent (37) will become

$$\begin{aligned}\delta x &= \omega_1 + \varsigma_2 z - \varsigma_3 y\\ \delta y &= \omega_2 + \varsigma_3 x - \varsigma_1 z\\ \delta z &= \omega_3 + \varsigma_1 y - \varsigma_2 x;\end{aligned} \tag{39}$$

which are those which we intended to find and which will be very useful in the following Capo. One has to remark that the values of the six quantities $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$, do not depend on the variable coordinates of the system, but only on the twelve quantities which express the arbitrariness of the position of the second frame with respect to the first. As, indeed, among these twelve quantities only six remain absolutely arbitrary, we will be able to assume that exactly the six quantities $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$. are arbitrary and independent.

CAPO IV.

Del moto e dell' equilibrio di un corpo qualunque.

43. Dico qualunque quel corpo che può mutare di forma, cangiandosi per effetto di moti intestini le posizioni relative delle sue molecole. Lagrange trattò nella sua M.A. varie questioni che si riferivano a sistemi variabili di simil natura: trattò dell' equilibrio di fili e di superficie estensibili e contrattili, trattò dell' equilibrio e del moto de' liquidi e de' fluidi elastici. A tal fine egli adottò un principio generale (§.9. della Sez. II ^{a}, e 6. della IV^a), mediante il quale l'espressione analitica dell' effetto di forze interne attive riesce affatto analoga a quella che risulta per le forze passive quando si hanno equazioni di condizione: il che si ottiene assumendo dei coefficienti indeterminati e moltiplicando con essi le variate di quelle stesse funzioni che rimangono costanti per corpi rigidi, o inestensibili, o liquidi. Se ci conformassimo ad un tal metodo, potremmo a dirittura generalizzare i risultamenti ai quali siamo giunti nel capitolo precedente: io però preferisco di astenermene, giacchè la mia ammirazione pel grande Geometra non m'impedisce di riconoscere come in quel principio rimanga tuttavia alcun che di oscuro e di non dimostrato. Cerchiamo quindi di conseguire lo stesso intento altrimenti, anche a motivo dell'impegno in cui siamo entrati di voler dedurre tutte le equazioni meccaniche per qualunque corpo dall' equazione generalissima (I) num.°16. spettante ai sistemi discreti. E qui ci si presentano due vie. La prima di rinvenire, anche pel caso di corpi qualunque, estensibili, elastici, fluidi, equazioni di condizione che ne esprimano la natura, in quella guisa che le equazioni (8) del num.°34. esprimevano quella de' corpi rigidi, e quindi trattare ogni sorta di forze interne al modo delle passive, ossia mediante la terza parte della anzidetta equazione generale (I) num.°16. L'altra strada che potrebbe seguirsi sarebbe di studiare i termini

CAPO IV.

On the motion and equilibrium of a body whatsoever

43. I call "whatsoever" that body which can change its shape, because of the modification of the relative positions of its molecules. Lagrange treated in his Analytical Mechanics various questions which were relative to variable systems having this nature: he treated the equilibrium of extensible and contractible strings and surfaces, he treated the equilibrium and the motion of liquids and elastic fluids. To this aim he adopted a general principle (§.9. in Sect. II^a, and 6. in Sect. IV^a), by means of which the analytical expression of the effect of internal active forces results to be completely analogous to the expression which one obtains in presence of equations of condition: this is obtained by introducing some indeterminate coefficients and multiplying them by those functions which remain constant for rigid or inextensible or liquid bodies. If we were to adopt such a method we could immediately generalize the results to which we arrived in the precedent chapter: I however prefer to abstain from this procedure, as my admiration for that great Geometer does not impede me to recognize that in aforementioned principle still remains something obscure and not completely demonstrated. We therefore try to get the same result otherwise, also because of the engagement which we intend to fulfill, which consists in wanting to deduce all mechanical equations for a body whatsoever starting from the most general equation (1) sect. 16 which appertains to discrete systems. Here two different ways of proceeding arise. The first one consists in finding, also in the case of a body whatsoever [which may be] extensible, elastic [or] fluid some equations of condition which may express their nature [(of the bodies)], exactly as in that manner as the equations (8) in sect. 34 expressed the nature of rigid bodies, and therefore in treating any sort of internal forces as done for passive ones, that is by means of the third part of the aforementioned general equation (1) sect. 16. The other way which could be followed should [consist] in studying the terms

introdotti dalle forze interne attive usando della seconda parte della mentovata equazione generale. Mi attenni a quest' ultima nella Memoria inserita nel Tomo XXI dei volumi Sociali, ed ora farò vedere nel Capitolo VI, che un tale andamento si può di molto abbreviare, rendendolo insieme più sicuro. Per le ragioni poi addotte nel preambolo dell' attuale Memoria credo più filosofico il primo dei descritti andamenti, il quale però presenta alcune non lievi difficoltà.

Queste difficoltà vengono dal dover trovare in generale equazioni di condizione per esprimere i legami interni fra le molecole dei corpi, di qualunque natura essi siano. Dopo lunghe ricerche credo di aver ottenuto l'intento mercè le seguenti considerazioni. Vi ha nella Meccanica un fatto che ben merita l' attenzione del geometra, ed è che le stesse sei equazioni le quali sussistono per l'equilibrio e pel moto di un corpo solido libero (cioè non avente punti fissi od obbligati a stare sopra linee o superficie determinate) (M. A. Tom. I. pag. 170.) si estendono altresì ai corpi liberi non solidi (M. A. T. I. p. 257., e seguenti) , essendo quelle che contengono i due principj generali della conservazione del moto del centro di gravità , e della conservazione delle aree . Io avea bisogno di una generalizzazione simile per estendere le equazioni (26) , (29) del Capo precedente, dimostrate pei corpi solidi, anche ad altri corpi qualsivogliono. Mi posi quindi ad analizzare sottilmente il metodo per mezzo del quale si arriva alle equazioni generali contenenti i detti due principj , ed a cercare la ragione per cui in tal caso quello che vale pei corpi solidi, vale anche pei non solidi. Ora credo di non poter far meglio che dimostrare al lettore essere le medesime le considerazioni che conducono all'anzidetto risultamento già ammesso dai geometri, e all'altro ch' io ho di mira.

44. Supponiamo di essere giunti a trovare le accennate equazioni di condizione generali che esprimano la natura del corpo, qualunque esso sia, e che valgano per ogni punto del medesimo ; si capisce che invece dell' equazione (10) num.° 35. particolare pe' corpi rigidi avremo

introduced by internal active forces by using the second part of the mentioned general equation. I followed this last way in the Memoir inserted in the Tome XXI of the Volumi Sociali and now I will show in the Chapter VI that such a procedure can be greatly shortened, rendering it, at the same time, safer. For the reasons then adduced in the preamble of the present Memoir I believe that the first between the described ways of proceeding is more philosophical, even if it actually presents some difficulties which are not easy to confront.

These difficulties arise because of the necessity of finding -in general- the equations of condition which express the internal constraints among the molecules of the bodies, whatsoever may be their nature. After long researches I believe to have obtained the intended solution by means of the following considerations. There is in Mechanics a fact which well deserves the attention of the Geometer and it can be stated as follows: the same six equations which hold for the equilibrium and the motion of a solid [i.e. rigid] body which is free (i.e. a body not having points fixed or constrained to move on well-determined lines or surfaces) (M. A. Tom. I. pp. 170.) can be equally extended to free bodies which are not solid [i.e. which are not rigid] (M. A. T. I. pp. 257, and following), and these equations are those which express the two general principles of conservation of the motion of the gravity center and the conservation of the areas. I needed a similar generalization for extending the equations (26) , (29) of the precedent Capo, which were shown for solid bodies, also to other bodies whatsoever. Then I started to analyze subtly the methods by means of which one manages to arrive at the general equations containing the said two principles, and [I started also] to look for the reason for which in such case what is valid for solid bodies is still valid for those bodies which are not solid. Now I believe that the best thing which I can do is to demonstrate to the reader that, actually, the considerations which lead to the aforementioned result already admitted by the Geometers can be reduced to be exactly the same which [lead to] the other [new] one which I have targeted.

44. Let us assume that we managed to find the mentioned general equations of condition which do express the nature of the body, whatever it may be, and that [these equations] hold for every point of that body; it is easily understood that -instead of equation (10) sect. 35 which holds in particular for rigid bodies, we will have

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + ... \right\} + \int da \int db \int dc \cdot G + \Omega = 0 \qquad (1)$$

indicando con G il complesso dei termini introdotti dalle equazioni di condizione che non conosciamo, e che nel luogo citato era significato dal sestinomio

$$A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6.$$

Ma queste equazioni di condizione che non conosciamo, possono risultarci note cambiando le variabili a cui si riferiscono gli integrali alla maniera che son per dire.

Non immaginiamo le x, y, z funzioni immediatamente delle a, b, c, t, ma prima funzioni di tre altre p, q, r a motivo di un riferimento successivo del corpo a due diverse terne di assi ortogonali, come sopra si è insinuato al num.°42. L'artificio che ottiene l' intento sta nell'usare di queste coordinate intermedie p, q, r, ed eseguire in due volte la trasformazione degli integrali. La prima volta invece di trasformare gl' integrali presi per a, b, c in altri presi per x, y, z (come al num. °10,Capo I°.), li trasformeremo in integrali presi per p, q, r : e passeremo poscia dalle p, q, r alle x, y, z.

45. A tal fine ci conviene premettere un principio analitico che nel caso attuale ed anche in altri apre l'adito a serie ed utili speculazioni intorno ai diversi gradi di composizione nei quali è duopo considerare le quantità per ottener ciò che altrimenti non si potrebbe.

Se le x, y, z si riguardano funzioni di a, b, c in quanto sono prima funzioni delle p, q, r le quali sono poi funzioni delle a, b, c, il sestinomio H (equazione (1) num. 9. Capo I°.) composto colle derivate delle x, y, z prese immediatamente per le a, b, c (saltata la considerazione intermedia delle p, q, r) eguaglia il prodotto di due simili sestinomj H_1, H_2 , il primo dei quali è fatto colle x, y, z derivate per le p, q, r, e il secondo colle p, q, r derivate per le a, b, c : abbiamo cioè l'equazione

$$H = H_1 \, H_2 \qquad (2)$$

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + ... \right\} + \int da \int db \int dc \cdot G + \Omega = 0 \qquad (1)$$

where we have indicated by G the whole set of terms introduced by the equations of condition which we still do not know and which in the cited equation was recognized to be equal to the sextinomial

$$A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6.$$

However these equations of condition, which we do not know, may become known when one changes the variables to be used in the calculation of the integrals following the procedure which I am going to present.

We will not imagine the variables x, y, z as functions immediately of the variables a, b, c, t, but [we will assume that they are] first functions of the three other variables p, q, r because we have chosen to refer the body under consideration subsequently to two reference frames, as already stated in the previous sect. 42. The artifice which produces the intended result consists in the use of these intermediate coordinates p, q, r, and in performing in two steps transformation of the integrals. The first time, instead of transforming the integrals calculated in the variables a, b, c into integrals calculated in the variables x, y, z (as done in sect. 10, Capo I), we will choose as transformation variables the variable p, q, r: and only subsequently we will pass from the variables p, q, r to the variables x, y, z.

45. To this aim it is convenient to state beforehand an analytical principle which in the present case, but also in others, will allow a series of speculations about the different degrees of composition in which it is suitable to consider the quantities in order to get what which otherwise could not be obtained.

If the variables x, y, z can be regarded as functions of the variables a, b, c as they are first functions of the p, q, r which in turn are then functions of the variables a, b, c, the sextinomial H (equation (1) sect. 9. Capo I) as composed with the derivatives of the variables x, y, z with respect to the variables a, b, c (when ignoring the intermediate variables p, q, r) equals the product of two similar sextinomials H_1, H_2 , the first of which is calculated by deriving the variables x, y, z with respect to the variables p, q, r while the second one is calculated by deriving the variables p, q, r with respect to the variables a, b, c : in other words we have the equations

$$H = H_1 \, H_2 \qquad (2)$$

essendo

$$\begin{aligned} H_1 = & \frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dr} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dr} \\ & + \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dp} - \frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dp} \\ & + \frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dq} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} H_2 = & \frac{dp}{da}\frac{dq}{db}\frac{dr}{dc} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da}\frac{dr}{dc} \\ & + \frac{dp}{db}\frac{dq}{dc}\frac{dr}{da} - \frac{dp}{dc}\frac{dq}{db}\frac{dr}{da} \\ & + \frac{dp}{dc}\frac{dq}{da}\frac{dr}{db} - \frac{dp}{da}\frac{dq}{dc}\frac{dr}{db}. \end{aligned} \tag{4}$$

La dimostrazione del principio esposto si conseguisce sostituendo nell' espressione del sestinomio H i valori desunti da nove equazioni, delle quali le prime tre sono

$$\begin{aligned} \frac{dx}{da} &= \frac{dx}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dx}{dr}\frac{dr}{da} \\ \frac{dy}{da} &= \frac{dy}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dy}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dy}{dr}\frac{dr}{da} \\ \frac{dz}{da} &= \frac{dz}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dz}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dz}{dr}\frac{dr}{da} \end{aligned} \tag{5}$$

e poi seguono altre tre colle derivate per b, ed altre tre colle derivate per c, ad ottener le quali basta cambiare nelle precedenti (5) prima la lettera a colla b, poi la stessa a colla c. Siccome però le operazioni sono prolisse , descriverò un andamento buono a tenersi per non deviare in lungaggini le quali potrebbero togliere la lena di arrivare fino alla fine.

Primieramente si osserva che il valore di H datoci dalla equazione (4) num° 9., può scriversi senza alterazione

$$\begin{aligned} H = & \frac{dz}{da}\left(\frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\right) \\ & + \frac{dz}{db}\left(\frac{dx}{dc}\frac{dy}{da} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\right) \\ & + \frac{dz}{dc}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

being

$$\begin{aligned} H_1 = & \frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dr} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dr} \\ & + \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dp} - \frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dp} \\ & + \frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dq} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} H_2 = & \frac{dp}{da}\frac{dq}{db}\frac{dr}{dc} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da}\frac{dr}{dc} \\ & + \frac{dp}{db}\frac{dq}{dc}\frac{dr}{da} - \frac{dp}{dc}\frac{dq}{db}\frac{dr}{da} \\ & + \frac{dp}{dc}\frac{dq}{da}\frac{dr}{db} - \frac{dp}{da}\frac{dq}{dc}\frac{dr}{db}. \end{aligned} \tag{4}$$

The demonstration of the enunciated principle can be obtained by replacing in the expression of the sextinomial H the values deduced from the nine equations, of which the first three are

$$\begin{aligned} \frac{dx}{da} &= \frac{dx}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dx}{dr}\frac{dr}{da} \\ \frac{dy}{da} &= \frac{dy}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dy}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dy}{dr}\frac{dr}{da} \\ \frac{dz}{da} &= \frac{dz}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dz}{dq}\frac{dq}{da} + \frac{dz}{dr}\frac{dr}{da} \end{aligned} \tag{5}$$

while the subsequent three are those involving the derivatives with respect to the variable b, and the last three involving the derivatives with respect to the variable c, to obtain which it is enough to replace in the precedent (5) at first the letter a with the letter b and then the same letter a with the letter c. However, as the calculations are cumbersome, I will describe a procedure to be followed in order not to be deviated in lengthinesses which may discourage to arrive at their completion.

First of all let one observes that the value of H given by the equation (4) sect. 9, can be equivalently written as

$$\begin{aligned} H = & \frac{dz}{da}\left(\frac{dx}{db}\frac{dy}{dc} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\right) \\ & + \frac{dz}{db}\left(\frac{dx}{dc}\frac{dy}{da} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\right) \\ & + \frac{dz}{dc}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Ora mediante le equazioni (5) e le sei seguenti ommesse per brevità, ma che il lettore farà bene a costruirsi secondo l' indicazione, convien trovare i valori dei tre binomj

$$\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}-\frac{dx}{db}\frac{dy}{da};\qquad \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}-\frac{dx}{da}\frac{dy}{dc};\qquad \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}-\frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}. \tag{7}$$

Basterà però cercare colla materiale sostituzione soltanto il primo, e così ottenere mercè riduzioni che si presentano da se stesse

$$\begin{aligned}\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}-\frac{dx}{db}\frac{dy}{da}=&\\ &\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db}-\frac{dp}{db}\frac{dq}{da}\right)\\ &+\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dp}{db}\frac{dr}{da}-\frac{dp}{da}\frac{dr}{db}\right)\\ &+\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}-\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\right)\left(\frac{dq}{da}\frac{dr}{db}-\frac{dq}{db}\frac{dr}{da}\right);\end{aligned} \tag{8}$$

il valore del binomio successivo si avrà dal precedente mettendo c per b nei secondi fattori e cambiando loro i segni: e parimenti si dedurrà il valore del terzo de' binomj (7) ponendo c per a nell' ultima equazione (8) e cambiando i segni ai due membri.

Avendo così sott'occhio queste tre equazioni (quanto alla seconda e alla terza il lettore se le scriva), si passi a moltiplicarle rispettivamente per le tre seguenti

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dc}&=\frac{dz}{dp}\frac{dp}{dc}+\frac{dz}{dq}\frac{dq}{dc}+\frac{dz}{dr}\frac{dr}{dc}\\ \frac{dz}{db}&=\frac{dz}{dp}\frac{dp}{db}+\frac{dz}{dq}\frac{dq}{db}+\frac{dz}{dr}\frac{dr}{db}\\ \frac{dz}{da}&=\frac{dz}{dp}\frac{dp}{da}+\frac{dz}{dq}\frac{dq}{da}+\frac{dz}{dr}\frac{dr}{da}\end{aligned} \tag{9}$$

e poscia sommarle : vedremo prodursi per tal modo nel primo membro di valore H quale è scritto nella antecedente (6).

La moltiplicazione dei secondi membri facciasi in tre volte, cioè primieramente come se nelle equazioni (9) non vi fossero

Now by means of the equations (5) and the other six which we omitted for seek of brevity, which the reader should construct following the given indication, it is convenient to find the values of the three binomials

$$\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}-\frac{dx}{db}\frac{dy}{da};\qquad \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}-\frac{dx}{da}\frac{dy}{dc};\qquad \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}-\frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}. \tag{7}$$

It will however be necessary to look for -calculating by substitution- only the first one and thus one will obtain by means of obvious reductions

$$\begin{aligned}\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}-\frac{dx}{db}\frac{dy}{da}=&\\ &\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db}-\frac{dp}{db}\frac{dq}{da}\right)\\ &+\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dp}{db}\frac{dr}{da}-\frac{dp}{da}\frac{dr}{db}\right)\\ &+\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}-\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\right)\left(\frac{dq}{da}\frac{dr}{db}-\frac{dq}{db}\frac{dr}{da}\right);\end{aligned} \tag{8}$$

while the value of the subsequent binomial will be obtained by substituting in the precedent binomial the variable b with the variable c in the second factors and changing their signs: and similarly one will deduce the value of the third of the binomials (7) substituting the variable a with the variable c in the last equation (8) and changing the signs of the two terms.

Looking at these three equations (the reader will need to write the second and the third ones) one can proceed to multiply them respectively times the three following ones

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dc}&=\frac{dz}{dp}\frac{dp}{dc}+\frac{dz}{dq}\frac{dq}{dc}+\frac{dz}{dr}\frac{dr}{dc}\\ \frac{dz}{db}&=\frac{dz}{dp}\frac{dp}{db}+\frac{dz}{dq}\frac{dq}{db}+\frac{dz}{dr}\frac{dr}{db}\\ \frac{dz}{da}&=\frac{dz}{dp}\frac{dp}{da}+\frac{dz}{dq}\frac{dq}{da}+\frac{dz}{dr}\frac{dr}{da}\end{aligned} \tag{9}$$

and then to sum them: we will see in this way that at the right-hand side the quantity H will appear, exactly as written in the previous equation (6).

The multiplication of the right-hand sides has to be performed in three steps, that is at first as if in the equations (9) there were only

che i primi termini dei trinomj : si troverà che i coefficienti totali dei termini

$$\frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right);\quad \frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)$$

si riducono identicamente zero, e che quello del termine $\frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}-\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\right)$ equivale al sestinomio H_2. Progredendo nella moltiplicazione, facciasi come se le equazioni (9) avessero nei secondi membri i soli secondi termini dei trinomj : troveremo anche qui che due coefficienti totali riescono zero, e che in quello del termine $\frac{dz}{dq}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)$ ritorna il sestinomio H_2 . Finalmente l'operare cogli ultimi termini delle equazioni (9) ci mostrerà nulli due altri coefficienti totali, ed eguale al sestinomio H_2 il coefficiente totale di $\frac{dz}{dr}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)$. Dopo ciò raccogliendo i tre fattori di H_2 nei tre termini rimasti, si vedrà che la loro somma riproduce il sestinomio H_1 (equazione (3)), e che per tal guisa resta dimostrata l'equazione (2).

Il principio analitico espresso nella equazione (2) può essere generalizzato. Se le x, y, z si considerassero funzioni di a, b, c, in quanto prima lo fossero delle ξ, η, ζ, le quali fossero funzioni delle p, q, r, che da ultimo lo fossero delle a, b, c ; il sestinomio fatto delle x, y, z colle derivate prese direttamente per a, b, c, si proverebbe eguale al prodotto di tre simili sestinomj, dei quali il primo tra le x, y, z colle derivate per ξ, η, ζ, il secondo tra le ξ, η, ζ colle derivate per p, q, r, e il terzo tra le p, q, r colle derivate per a, b, c. Basta per la dimostrazione sopprimere da prima la considerazione delle ξ, η, ζ servendosi della equazione (2), poi in virtù della stessa equazione mostrare che al sestinomio H_1 può sostituirsi il prodotto di quello tra le x, y, z colle derivate per ξ, η, ζ, e di quello tra le ξ, η, ζ colle derivate per p, q, r. Così si progredirebbe se si volesse immaginare un più inoltrato comprendimento di funzioni entro funzioni. Questo principio ci fa conoscere la possibilità di considerare le coordinate x, y, z come quantità

the first terms of the trinomials: one will find that the total coefficients of the terms

$$\frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right);\quad \frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)$$

identically vanish and that the coefficient of the term $\frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}-\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dq}\right)$ equals the sextinomial H_2. Proceeding in the multiplication the calculation has to proceed as if in the equations (9) the right-hand sides were including only the second terms of the trinomials: we will find also here that two total coefficients are vanishing and that the coefficient of the term $\frac{dz}{dq}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dp}-\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}\right)$ is again the sextinomial H_2 . Finally the manipulation of the last terms of the equations (9) will show that the other two total coefficients are again vanishing and that the total coefficient of the term $\frac{dz}{dr}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right)$ is equal to the sextinomial H_2. After that, by gathering the three factors of H_2 in the three remaining terms, one will see that their sum reproduces the sextinomial H_1 (equation (3)), and that in this way the equation (2) is proven .

The analytical principle expressed by the equation (2) can be generalized. If the variables x, y, z were considered to result as functions of the variables a, b, c because they were functions first of the variables ξ, η, ζ, which, in turn, were functions of the variables p, q, r, which finally were functions of the variables a, b, c ; the sextinomial constructed with the variables x, y, z calculating directly their derivatives with respect to the variables a, b, c can be proven to be equal to the product of three similar sextinomials, of which the first one is constructed with the variables x, y, z derived with respect to the variables ξ, η, ζ, the second one by deriving the variables ξ, η, ζ with respect to the variables p, q, r, and the third one deriving the p, q, r with respect to the a, b, c. In order to get the demonstration it is enough to suppress at first the consideration of the variables ξ, η, ζ by using the equation (2), then by using the same equation to show that to the sextinomial H_1 can be substituted by the product of that [sextinomial] obtained from the x, y, z deriving with respect to the ξ, η, ζ, and of that [other sextinomial] obtained from the ξ, η, ζ deriving with respect to the p, q, r. In this way one could proceed if one would like to imagine further repetitions of compositions of functions one after the other. This principle allows us to conceive the possibility of considering the coordinates x, y, z as quantities

fatte di altre, e queste di altre, e via via, spingendo innanzi a piacere il grado di composizione. E sta qui, se io non fallo, il mezzo per isciogliere il nodo della questione. Havvi tal grado di composizione delle dette quantità nel quale riescono riconoscibili quelle equazioni di condizione, che più non lo sono in tal altro: conviene coglierle dove sono e adattarvi le rimanenti quantità. Ciò abbiamo già accennato superiormente, e si farà più manifesto per quel che segue.

46. Premetteremo che nel caso in cui tra le x, y, z e le p, q, r sianvi le equazioni (1) num.°33, abbiamo

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dp} = \alpha_1; \frac{dx}{dq} = \beta_1; \frac{dx}{dr} = \gamma_1 \\ &\frac{dy}{dp} = \alpha_2; \frac{dy}{dq} = \beta_2; \frac{dy}{dr} = \gamma_2 \\ &\frac{dz}{dp} = \alpha_3; \frac{dz}{dq} = \beta_3; \frac{dz}{dr} = \gamma_3 \end{aligned} \tag{10}$$

e che quindi il sestinomio H_1 (equazione(3)) diventa tale che può scriversi

$$\alpha_1 (\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) + \beta_1 (\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3) + \gamma_1 (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3),$$

la quale espressione a motivo di tre fra le nove equazioni (5) del num.°33. si può mutare in quella del trinomio $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2$, che è equivalente all' unità per la prima delle (4) num.°33.

Pertanto l'equazione (2) ci dà nel caso attuale $H = H_2$, e l'equazione (6) num.°9. del Capo 1°ci fornisce

$$H_2\Gamma = 1. \tag{11}$$

In vista di quest' ultima possiamo scrivere senza alterazione l' equazione generale (1) del presente Capo al modo che segue

$$\begin{aligned} &\int da \int db \int dc \cdot H_2\Gamma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + ... \right\} \\ &+ \int da \int db \int dc \cdot H_2\Gamma G + \Omega = 0; \end{aligned} \tag{12}$$

e adesso, osservato il valore H_2 (equazione(4)) e rammentato il teorema per la trasformazione degli integrali triplicati

obtained in term of other quantities, and these last in terms of new other ones and so on, increasing at will the degree of function composition. If I am not wrong, it is exactly the analysis of that degree of composition to supply the means by which the question I have targeted will be solved. There is a suitable degree of composition of the said quantities in which the searched equations of condition become recognizable while they are not so in another one: it is convenient to recognize them where they are so and to adapt consequently the remaining quantities. We already mentioned previously this [circumstance] and it will become even more manifest in what follows.

46. We premise that in the case where the equations (1) sect. 33 hold between the variables x, y, z and the variables p, q, r, then we have

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dp} = \alpha_1; \frac{dx}{dq} = \beta_1; \frac{dx}{dr} = \gamma_1 \\ &\frac{dy}{dp} = \alpha_2; \frac{dy}{dq} = \beta_2; \frac{dy}{dr} = \gamma_2 \\ &\frac{dz}{dp} = \alpha_3; \frac{dz}{dq} = \beta_3; \frac{dz}{dr} = \gamma_3 \end{aligned} \tag{10}$$

and therefore the sextinomial H_1 (equation (3)) reduces so that it can be written

$$\alpha_1 (\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) + \beta_1 (\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3) + \gamma_1 (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3),$$

and this expression -because of three of the nine equations (5) in the sect. 33 can be seen to equal the trinomial $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2$, which is, in turn, equal to one, due to the first equation in formula (4) sect. 33.

As a consequence the equation (2) will produce in the considered instance $H = H_2$, and the equation (6) sect. 9 in the Capo I will give us

$$H_2\Gamma = 1. \tag{11}$$

Taking into account this last equation we can write without alteration the general equation (1) of the present Capo in the way which follows:

$$\int da \int db \int dc \cdot H_2\Gamma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + ... \right\} + \int da \int db \int dc \cdot H_2\Gamma G + \Omega = 0; \tag{12}$$

so that, once having recalled the value of H_2 (equation (4)) and the theorem for the transformation of triple integrals

di cui abbiamo fatto cenno più volte (per es. al num.°10. del Capo I°.), potremo nella precedente (12) passare dagli integrali per a, b, c a quelli per p, q, r, cambiandola colla seguente

$$\int dp \int dq \int dr \cdot \Gamma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + ... \right\} + \int dp \int dq \int dr \cdot \Gamma G + \Omega = 0 \qquad (13)$$

dove bisogna intendere che anche per entro alle espressioni indicate colle lettere Γ, G, Ω sia eliminata ogni traccia delle a, b, c, sostituendo mentalmente a queste i loro valori in p, q, r per effetto delle equazioni inverse indicate al num.°9. del Capo I°, e segnate (8); fatta riflessione che nel caso attuale le p, q, r tengono il luogo colà tenuto dalle x, y, z.

47. Nella testè scritta equazione generale (13), la seconda parte esprime il complesso dei termini introdotti dalle equazioni di condizione, non più tra le x, y, z e le a, b, c, ma tra le x, y, z e le p, q, r. Ma quest' ultime equazioni ci sono note, giacchè in vista delle precedenti (10)e delle equazioni (3) num.°33, abbiamo

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 &= 1 \\
\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2 &= 1 \\
\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 &= 1 \\
\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} &= 0 \\
\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dr} &= 0 \\
\frac{dx}{dq}\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dq}\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dq}\frac{dz}{dr} &= 0;
\end{aligned} \qquad (14)$$

equazioni a derivate parziali che non contenendo le dodici quantità f, g, h, α_1, ec., sono più generali delle loro integrali (le (1) del num.°33.), come si disse in un caso analogo al

which we mentioned several times (for instance in the sect. 10 of the Capo I), we will be able -in the precedent equation (12)- transform the integrals with respect to the variables a, b, c into the integrals with respect to the variables p, q, r, so that the last mentioned equation will become the following one

$$\int dp \int dq \int dr \cdot \Gamma \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + ... \right\} + \int dp \int dq \int dr \cdot \Gamma G + \Omega = 0 \qquad (13)$$

where one must intend that also in the expressions indicated with the letters Γ, G, Ω all traces of the variables a, b, c are eliminated substituting to them, in our mind, their values as functions of the variables p, q, r by means of the inverse equations indicated in the sect. 9 of the Capo I with the label (8); having remarked that -in the considered instance- the variables p, q, r play the role of the variables there played by the variables x, y, z.

47. In the general equation (13) which we have just written, the second part is expressing the whole set of terms introduced by the equations of condition not anymore between the variables x, y, z and the variables a, b, c, but instead between the variables x, y, z and the variables p, q, r. Now remark that these last equations are known to us, as once considering the precedent equations (10) and the equations (3) sect. 33, we have the following

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 &= 1 \\
\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2 &= 1 \\
\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 &= 1 \\
\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} &= 0 \\
\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dr} &= 0 \\
\frac{dx}{dq}\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dq}\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dq}\frac{dz}{dr} &= 0;
\end{aligned} \qquad (14)$$

partial differential equations, which -as not containing the twelve quantities f, g, h, α_1, etc. - are more general than the corresponding primitive equations (i.e. the equations (1) in the sect. 33) as it was already stated in an analogous case in the

num.°34.: appartengono a tutti i possibii sistemi di assi da prendersi per le x, y, z, ed esprimono veramente l'arbitrio in cui siamo nel collocarli relativamente ai primi delle p, q, r. Si può sempre più ribadire la stessa massima con altre parole dicendo che nelle equazioni (1) del num.°33. è lecito supporre che le dodici quantità f, g, h, α_1, ec. mutino di valore quante volte ci aggrada, ma che tutti i differenti valori delle x, y, z originati da tali cambiamenti debbono sempre soddisfare alle medesime (14).

Assumeremo pertanto le (14) come le equazioni di condizione da usarsi per formare la seconda parte dell'equazione generale (13), e circa l' essere in un numero che pare soverchio, ci riporteremo alle osservazioni fatte più sopra al num.°39. Quella seconda parte presenterà così sotto il segno d' integrale triplicato una espressione analoga alla (11) del Capo precedente, cioè

$$\begin{aligned}
&2A\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+2B\left(\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dq}\right)\\
&+2C\left(\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dr}\right)\\
&+D\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dq}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+E\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dr}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+F\left(\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dr}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dq}\right);
\end{aligned}\qquad(15)$$

sect. 34: [these equations] are relative to all possible systems of axes which can be chosen for defining the variables x, y, z, and express really the arbitrariness which we have in placing them with respect to the first system of axes which refers to the variables p, q, r. One can always repeat the same statement with other words by saying that in equation (1) in the sect. 33 it is licit to suppose that the twelve quantities f, g, h, α_1, etc. can have changed their values as we like, but [it is also true] that all different values of the variables x, y, z which are produced by these changes must always satisfy the same equations (14).

We will therefore assume that the (14) are the equations of condition to be used to construct the second part of the general equation (13), and for rebutting the objection about their being in a superabundant number we will refer again to the observations expounded in the previous sect. 39. That second part will thus include under the triple integral sign an expression analogous to the (11) of the precedent Capo, that is

$$\begin{aligned}
&2A\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+2B\left(\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dq}\right)\\
&+2C\left(\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dr}\right)\\
&+D\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dq}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+E\left(\frac{dx}{dp}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{d\delta z}{dr}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dp}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dp}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dp}\right)\\
&+F\left(\frac{dx}{dq}\frac{d\delta x}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{d\delta y}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{d\delta z}{dr}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{dx}{dr}\frac{d\delta x}{dq}+\frac{dy}{dr}\frac{d\delta y}{dq}+\frac{dz}{dr}\frac{d\delta z}{dq}\right);
\end{aligned}\qquad(15)$$

avendo preso, secondo il metodo, sei coefficienti indeterminati A, B, C, D, E, F, e moltiplicato con essi le variate delle equazioni (14), intendendovi compenetrato (appunto perchè sono arbitrarj) il fattore Γ visibile nella seconda parte della (13). Per quest' ultima ragione e anche per altre che lo studioso potrà desumere dalle cose che seguono, riterremo che le A, B, C, D, E, F qui adottate, supposto pure che si ritornasse dalla considerazione di un corpo qualunque a quella di un corpo rigido, tengono bensì il posto delle simili quantità indicate nell' espressione (11) del num.°36, ma non sono identicamente le medesime.

48. Ora possono percorrersi due strade analogamente a quanto si è detto al num.°17. : possono assumersi per le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ tali valori particolari che soddisfacciano alle variate di tutte le equazioni di condizione (14), nel qual caso la parte (15) introdotta da tali equazioni dovrà sparire da per se stessa; e può ritenersi la parte (15), lasciando alle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ l'intera e piena loro generalità. Seguasi il primo andamento, prendendo per le $\delta x, \delta y, \delta z$ i valori (39) scritti alla fine del Capo precedente, valori nati appunto dalla considerazione dell'arbitrio in cui siamo nel porre i secondi assi rimpetto ai primi, che ci condusse alle equazioni (14) : tutta la quantità (15) dovrà sparire da per se stessa . Che veramente la sostituzione dei valori (39) num.°42. renda identicamente nulli i trinomj e sestinomj per cui nella espressione (15) sono moltiplicate le quantità $2A, 2B, 2C, D, E, F$,è un fatto analitico che può facilmente verificarsi : basta rammentarsi che le sei arbitrarie $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$ sono indipendenti dalle p, q, r, e che quindi nelle derivazioni le prime tre svaniscono, e le seguenti vanno trattate come costanti.

Se di più supponiamo che il corpo sia libero, talchè nella equazione generale (13) manchi l' ultima parte espressa dalla lettera Ω , si vede che quando le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ prendono gli anzidetti valori, nella equazione generale non rimane che la prima parte. Vedesi inoltre che una tal prima parte può

having introduced, following the method, six indeterminate coefficients A, B, C, D, E, F, and having multiplied them times the variations of the equations (14), and assuming included in them (which is licit as they are arbitrary) the factor Γ appearing in the second part of the equation (13). For this last reason, and also for other reasons which the student will be able to deduce from the arguments which will follow, we will assume that the quantities A, B, C, D, E, F here adopted, even when assuming that one particularizes from the consideration of a body whatsoever to the consideration of a rigid body, are actually in the same position as the similar quantities indicated in the expression (11) of sect. 36 but cannot be identified with them.

48. Now it is possible to proceed in two different ways, analogously to what said in sect. 17: one can assume for the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ those particular values which satisfy the variations of all the equations of condition (14), in which case the terms exhibited in (15) due to these equations of condition must identically vanish; otherwise one can maintain the terms in (15) by leaving to the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ their complete and whole generality. If one follows the first way, by taking for the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ the values (39) written at the end of the precedent Capo, values which arise when considering the arbitrariness which we have in choosing the second system of axes with respect to the first system of axes and which lead us to the equations (14), then the whole quantity (15) will vanish by it-self. Actually it is an analytical fact which is easily verified that the substitution of the values (39) sect. 42 renders identically vanishing all the trinomial and sextinomials which are multiplied, in the expression (15), times the quantities $2A, 2B, 2C, D, E, F$: it is enough to recall that the six arbitrary quantities $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$ are independent of the variables p, q, r, and that therefore when calculating the derivatives the first three vanish and the following are to be treated as constants.

If we add the assumption that the body is free, as in the general equation (13) is lacking the last part which is expressed by the letter Ω, one can see that, when the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ take the aforementioned values, the first part does remain in the general equation only.

One has then to remark that such first part can

scomporsi in sei termini tutti moltiplicati per alcuna delle sei indeterminate $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$, le quali essendo costanti per riguardo alle p, q, r, escono dai segni integrali. L'assoluto arbitrio poi di queste sei indeterminate fa sì che l'equazione qual fu ridotta si scomponga in altre sei, ponendo eguale a zero ciascuno dei coefficienti di dette sei indeterminate. I primi membri di tali sei equazioni sono affetti da segni integrali presi per le variabili p, q, r, ma facilmente si traducono ad essere integrali presi per le x, y, z; bastando a questo fine introdurre in ciascuno come coefficiente della Γ il sestinomio H_1 (equazione (3)) che al cominciare del num.°46. dimostrammo eguale all'unità, e richiamare il principio analitico più volte usato per simili trasformazioni, principio che già ci fece fare il primo passo per ridurci dalla (12) alla (13), cioè dalle a, b, c alle p, q, r, e che ora ci fa fare il secondo, come si è accennato alla fine del num.°44. Abbiamo pertanto le sei

$$\begin{aligned}
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= 0 \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= 0 \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= 0 \qquad (16) \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left\{ x \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) - y \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \right\} &= 0 \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left\{ z \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) - x \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \right\} &= 0 \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left\{ y \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) - z \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \right\} &= 0.
\end{aligned}$$

Sono queste le sei equazioni che contengono i due principj della conservazione del moto del centro di gravità, e delle aree. La precedente dimostrazione fa vedere ch' esse sussistono veramente non solo pe' corpi solidi, ma per ogni sorta di corpi, elastici ed anche fluidi, purchè liberi (*)[1] In fatti essa è dedotta

[1](*)Poisson. Traité de Méchanique. T.2. pag.447.
Laplace. Système du Monde. Liv.4. Chap.X, Liv.5. Chap.VI.

be decomposed into six terms each multiplied times one of the six indeterminate quantities $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$, which, being constant with respect to the variables p, q, r, can be factorized out of the integral sign. Then the absolute arbitrariness of these six indeterminate quantities makes it so that the already reduced equation can be decomposed into other six [equations], which are obtained by equalling to zero each coefficient of said six indeterminate quantities. The left-hand sides of such six equations include some integral signs in which the variables p, q, r, do appear and which easily can be transformed into integrals with respect to the variables x, y, z; as it is sufficient to this aim to introduce in each of them as coefficient of the quantity Γ the sextinomial H_1 (equation (3)), which at the beginning of the sect. 46 we have shown to be equal to the unit, and then to recall the analytical principle used several times for similar transformations, exactly that principle which allowed for our first step to reduce equation (12) into equation (13), that is [the step leading] from the variables a, b, c to the variables p, q, r, and which now allows us [to do] the second planned step, as mentioned at the end of sect. 44. We have therefore the six equations

$$\begin{aligned}
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= 0 \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= 0 \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= 0 \qquad (16) \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left\{ x \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) - y \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \right\} &= 0 \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left\{ z \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) - x \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \right\} &= 0 \\
\int dx \int dy \int dz \cdot \Gamma \left\{ y \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) - z \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \right\} &= 0.
\end{aligned}$$

These are the six equations which contain the two principles of conservation of the motion of the center of gravity and of the areas. The precedent demonstration proves that they are true in reality not only for rigid bodies but also for every kind of elastic and also fluid bodies, under the condition that they are free (*)[1]. Indeed it is deduced

[1](*)Poisson. Traité de Méchanique. Tome 2, pp.447.
Laplace. Système du Monde. Liv.4. Chap.X, Liv.5. Chap.VI.

unicamente dal riferimento del corpo a due diversi sistemi di assi ortogonali: e l'arbitrio nel porre i secondi assi relativamente ai primi, sta sempre lo stesso qualunque sia il corpo.

49. Ma potevasi tenere anche il secondo degli andamenti menzionati al principio del numero precedente, conservando tutta la quantità (15) e lasciando alle $\delta x, \delta y, \delta z$ tutta la generalità loro propria. Allora si ha ad operare molto similmente a quanto si è praticato al num.°36. : anzi e per le trasformazioni indicate nelle equazioni (12) di quel numero, e per la susseguente espressione (13) che ne raccoglie i risultati, non si ha a fare che uno scambio di lettere. Solamente nelle nove equazioni a riscontro di quelle (14), invece delle derivate $\frac{dx}{dp}, \frac{dx}{dq}, \frac{dx}{dr}, \frac{dy}{dp}$, ec. metteremo i valori angolari somministratici dalle (10) del precedente num.°46. Per tal modo ci persuaderemo che la quantità (15) num.°47. si trasforma senza alterazione di valore nella seguente

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dL_1}{dp}+\frac{dM_1}{dq}+\frac{dN_1}{dr}\right)\ \delta x\\&+\left(\frac{dL_2}{dp}+\frac{dM_2}{dq}+\frac{dN_2}{dr}\right)\ \delta y\\&+\left(\frac{dL_3}{dp}+\frac{dM_3}{dq}+\frac{dN_3}{dr}\right)\ \delta z+T\end{aligned}\tag{17}$$

essendo state adottate nuove denominazione di quantità di cui si espongono i valori

$$\begin{aligned}L_1&=-2A\alpha_1-D\beta_1-E\gamma_1\\M_1&=-D\alpha_1-2B\beta_1-F\gamma_1\\N_1&=-E\alpha_1-F\beta_1-2C\gamma_1\\L_2&=-2A\alpha_2-D\beta_2-E\gamma_2\\M_2&=-D\alpha_2-2B\beta_2-F\gamma_2\\N_2&=-E\alpha_2-F\beta_2-2C\gamma_2\\L_3&=-2A\alpha_3-D\beta_3-E\gamma_3\\M_3&=-D\alpha_3-2B\beta_3-F\gamma_3\\N_3&=-E\alpha_3-F\beta_3-2C\gamma_3\end{aligned}\tag{18}$$

uniquely from the choice of referring the body to two different systems of orthogonal axes: and [from the assumption that] for whatsoever body it is possible always to arbitrarily choose the second reference frame with respect to the first.

49. However it was possible to follow the second way to proceed which was mentioned at the beginning of the precedent section, by keeping under consideration the whole quantity (15) and leaving to the $\delta x, \delta y, \delta z$ all the generality which must be attributed to them. Then one has to proceed in a very similar way as done in sect. 36: in fact for both the transformations indicated in the equations (12) in that section and for the subsequent expression (13) which is gathering its results, one has simply to operate a change of letters. The only difference will involve the nine equations which will parallel the equations (14): it will consist in substituting the derivatives $\frac{dx}{dp}, \frac{dx}{dq}, \frac{dx}{dr}, \frac{dy}{dp}$, etc. with the angular values given to us by the equations (10) of the precedent sect. 46. In this way we will be persuaded that the quantity (15) sect. 47 will be transformed without any alteration of its value into the following one:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dL_1}{dp}+\frac{dM_1}{dq}+\frac{dN_1}{dr}\right)\ \delta x\\&+\left(\frac{dL_2}{dp}+\frac{dM_2}{dq}+\frac{dN_2}{dr}\right)\ \delta y\\&+\left(\frac{dL_3}{dp}+\frac{dM_3}{dq}+\frac{dN_3}{dr}\right)\ \delta z+T\end{aligned}\tag{17}$$

having been adopted the new notations, the expressions of which are exhibited here

$$\begin{aligned}L_1&=-2A\alpha_1-D\beta_1-E\gamma_1\\M_1&=-D\alpha_1-2B\beta_1-F\gamma_1\\N_1&=-E\alpha_1-F\beta_1-2C\gamma_1\\L_2&=-2A\alpha_2-D\beta_2-E\gamma_2\\M_2&=-D\alpha_2-2B\beta_2-F\gamma_2\\N_2&=-E\alpha_2-F\beta_2-2C\gamma_2\\L_3&=-2A\alpha_3-D\beta_3-E\gamma_3\\M_3&=-D\alpha_3-2B\beta_3-F\gamma_3\\N_3&=-E\alpha_3-F\beta_3-2C\gamma_3\end{aligned}\tag{18}$$

$$T = -\frac{d\cdot(L_1\delta x + L_2\delta y + L_3\delta z)}{dp} - \frac{d\cdot(M_1\delta x + M_2\delta y + M_3\delta z)}{dq} - \frac{d\cdot(N_1\delta x + N_2\delta y + N_3\delta z)}{dr}. \tag{19}$$

In appresso col medesimo ragionamento scritto verso il fine del num.°36. proveremo, che prescindendo sulle prime dall' esaminare le conseguenze derivanti dalla quantità (19) influente solo ai limiti del corpo, si hanno intanto le equazioni relative al moto di un punto qualunque interno, che sono

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{dL_1}{dp} + \frac{dM_1}{dq} + \frac{dN_1}{dr} = 0\\
&\Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dL_2}{dp} + \frac{dM_2}{dq} + \frac{dN_2}{dr} = 0\\
&\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{dL_3}{dp} + \frac{dM_3}{dq} + \frac{dN_3}{dr} = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

50. Ora restano a tradursi le derivate differenziali per p, q, r in differenziali per x, y, z, in corrispondenza al già fatto per le equazioni (16) del num.°36. Qui però bisogna osservare che il principio analitico per sì fatta trasformazione esposto nelle equazioni (17), (18) del num.°37., riceve nel caso attuale una semplificazione. Conviene da prima scrivere di nuovo quelle equazioni mettendo H, $\frac{1}{H}$ in luogo di $\frac{1}{\Gamma}, \Gamma$ (equazione (6) num.°9. Capo I°.), poi notare che il sestinomio H fra le x, y, z derivate per a, b, c si cambia nell' H_1 fra le x, y, z derivate per p, q, r (equazione (3) di questo Capo), il quale H_1 al cominciare del num.°46. fu dimostrato eguale all' unità. Messi inoltre in luogo delle derivate $\frac{dx}{dp}, \frac{dx}{dq}$, ec. i valori angolari datici dalle equazioni (10) num.°46., conchiuderemo che il principio analitico del num.°37. adattato al caso attuale, viene espresso mediante la formola

$$T = -\frac{d\cdot(L_1\delta x + L_2\delta y + L_3\delta z)}{dp} - \frac{d\cdot(M_1\delta x + M_2\delta y + M_3\delta z)}{dq} - \frac{d\cdot(N_1\delta x + N_2\delta y + N_3\delta z)}{dr}. \tag{19}$$

Subsequently, exactly with the same reasoning written at the end of the sect. 36 we will prove that, if one refrains at first to examine the consequences deriving by the quantity (19) which is relevant only at the boundaries of the body, one gets immediately the equations relative to the motion of any internal point whatsoever, which are

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{dL_1}{dp} + \frac{dM_1}{dq} + \frac{dN_1}{dr} = 0\\
&\Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dL_2}{dp} + \frac{dM_2}{dq} + \frac{dN_2}{dr} = 0\\
&\Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{dL_3}{dp} + \frac{dM_3}{dq} + \frac{dN_3}{dr} = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

50. Now it remains to transform the derivatives calculated with respect to the variables p, q, r into derivatives caclulated with respect to the variables x, y, z, correspondingly to what done already for the equations (16) of sect. 36. It has to be remarked here, however, that the analytical principle for such a transformation, which was expounded in the equations (17), (18) in sect. 37, in the present case is subjected to a simplification. At first it is convenient to write again those equations by substituting H, $\frac{1}{H}$ at the place of $\frac{1}{\Gamma}, \Gamma$ (equation (6) sect. 9 Capo I), then it has to be remarked that the sextinomial H relative to the variables x, y, z when derived with respect to the variables a, b, c is transformed into the sextinomial H_1 relative to the x, y, z when derived with respect to the p, q, r (equation (3) of this Capo), and that the same H_1 at the beginning of sect. 46 was shown to be equal to the unit. Once we will have substituted at the place of the derivatives $\frac{dx}{dp}, \frac{dx}{dq}$, etc. the angular values given by the equations (10) sect. 46, we will conclude that the analytical principle expounded in sect. 37 adapted to the present case, will be expressed by means of the formula

$$\frac{dL}{dp}+\frac{dM}{dq}+\frac{dN}{dr}=\frac{dK_1}{dx}+\frac{dK_2}{dy}+\frac{dK_3}{dz} \tag{21}$$

essendo

$$\begin{aligned} K_1 &= L\alpha_1+M\beta_1+N\gamma_1 \\ K_2 &= L\alpha_2+M\beta_2+N\gamma_2 \\ K_3 &= L\alpha_3+M\beta_3+N\gamma_3. \end{aligned} \tag{22}$$

L' applicazione tre volte ripetuta di questa formola alle equazioni (20) le cangia nelle

$$\begin{aligned} \Gamma\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{d\Sigma}{dy}+\frac{d\Phi}{dz}=0 \\ \Gamma\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{d\Sigma}{dx}+\frac{d\Xi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}=0 \\ \Gamma\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}+\frac{d\Pi}{dz}=0 \end{aligned} \tag{23}$$

avendo assunte per abbreviare le denominazioni

$$\begin{aligned} \Lambda &= -2\alpha_1^2A-2\beta_1^2B-2\gamma_1^2C-2\alpha_1\beta_1D-2\alpha_1\gamma_1E-2\beta_1\gamma_1F \\ \Xi &= -2\alpha_2^2A-2\beta_2^2B-2\gamma_2^2C-2\alpha_2\beta_2D-2\alpha_2\gamma_2E-2\beta_2\gamma_2F \\ \Pi &= -2\alpha_3^2A-2\beta_3^2B-2\gamma_3^2C-2\alpha_3\beta_3D-2\alpha_3\gamma_3E-2\beta_3\gamma_3F \\ \Sigma &= -2\alpha_1\alpha_2A-2\beta_1\beta_2B-2\gamma_1\gamma_2C \\ &\quad -(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)D-(\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2)E-(\beta_1\gamma_2+\gamma_1\beta_2)F \\ \Phi &= -2\alpha_1\alpha_3A-2\beta_1\beta_3B-2\gamma_1\gamma_3C \\ &\quad -(\alpha_1\beta_3+\beta_1\alpha_3)D-(\alpha_1\gamma_3+\gamma_1\alpha_3)E-(\beta_1\gamma_3+\gamma_1\beta_3)F \\ \Psi &= -2\alpha_2\alpha_3A-2\beta_2\beta_3B-2\gamma_2\gamma_3C \\ &\quad -(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3)D-(\alpha_2\gamma_3+\gamma_2\alpha_3)E-(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3)F. \end{aligned} \tag{24}$$

Il sistema di queste equazioni (23), (24) è d' una generalità ed importanza quale meglio che con parole prevenienti è provata dalle applicazioni.

$$\frac{dL}{dp}+\frac{dM}{dq}+\frac{dN}{dr}=\frac{dK_1}{dx}+\frac{dK_2}{dy}+\frac{dK_3}{dz} \tag{21}$$

being

$$\begin{aligned} K_1 &= L\alpha_1+M\beta_1+N\gamma_1 \\ K_2 &= L\alpha_2+M\beta_2+N\gamma_2 \\ K_3 &= L\alpha_3+M\beta_3+N\gamma_3. \end{aligned} \tag{22}$$

By applying three times this formula to the equations (20) one will transform them into the following ones

$$\begin{aligned} \Gamma\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{d\Sigma}{dy}+\frac{d\Phi}{dz}=0 \\ \Gamma\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{d\Sigma}{dx}+\frac{d\Xi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}=0 \\ \Gamma\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}+\frac{d\Pi}{dz}=0 \end{aligned} \tag{23}$$

having assumed the abbreviating definitions

$$\begin{aligned} \Lambda &= -2\alpha_1^2A-2\beta_1^2B-2\gamma_1^2C-2\alpha_1\beta_1D-2\alpha_1\gamma_1E-2\beta_1\gamma_1F \\ \Xi &= -2\alpha_2^2A-2\beta_2^2B-2\gamma_2^2C-2\alpha_2\beta_2D-2\alpha_2\gamma_2E-2\beta_2\gamma_2F \\ \Pi &= -2\alpha_3^2A-2\beta_3^2B-2\gamma_3^2C-2\alpha_3\beta_3D-2\alpha_3\gamma_3E-2\beta_3\gamma_3F \\ \Sigma &= -2\alpha_1\alpha_2A-2\beta_1\beta_2B-2\gamma_1\gamma_2C \\ &\quad -(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)D-(\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2)E-(\beta_1\gamma_2+\gamma_1\beta_2)F \\ \Phi &= -2\alpha_1\alpha_3A-2\beta_1\beta_3B-2\gamma_1\gamma_3C \\ &\quad -(\alpha_1\beta_3+\beta_1\alpha_3)D-(\alpha_1\gamma_3+\gamma_1\alpha_3)E-(\beta_1\gamma_3+\gamma_1\beta_3)F \\ \Psi &= -2\alpha_2\alpha_3A-2\beta_2\beta_3B-2\gamma_2\gamma_3C \\ &\quad -(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3)D-(\alpha_2\gamma_3+\gamma_2\alpha_3)E-(\beta_2\gamma_3+\gamma_2\beta_3)F. \end{aligned} \tag{24}$$

The importance and generality of the system of equations (23), (24) is much better proven by means of its possible applications than by the use of anticipatory words.

51. Il secondo passo delle coordinate intermedie p, q, r alle attuali x, y, z, invece di farlo sulle equazioni (20) possiamo effettuarlo a dirittura nella equazione generale (13): anzi ci è necessario di far così quando vi sono anche forze particolari applicate alla superficie del corpo. A questo fine osserveremo che l' espressione (17) equivalente alla (15) la quale fu dimostrata rappresentare tutta la quantità sottoposta al secondo integrale nella (13), può ridursi fra derivate per le x, y, z mediante il principio analitico scritto nelle equazioni (21), (22).

Per la parte che riguarda i tre coefficienti delle $\delta x, \delta y, \delta z$, la riduzione si pratica come più sopra per venire alle (23), ed essa si cangia nella

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{d\Sigma}{dy}+\frac{d\Phi}{dz}\right)\delta x\\&+\left(\frac{d\Sigma}{dx}+\frac{d\Xi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}\right)\delta y\\&+\left(\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}+\frac{d\Pi}{dz}\right)\delta z\end{aligned}\tag{25}$$

avendo le Λ, Ξ, ec. i valori (24). Quanto alla parte residua nella espressione (17), cioè alla T, si noti (equazione (19)) ch' essa è ancora un trinomio di cui può effettuarsi la trasformazione per mezzo della formola (21). Facciasi, e raccogliendo i coefficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$, e sostituendo i valori (18), si troverà a motivo delle denominazioni (24) essere

$$\begin{aligned}T=&-\frac{d.\left(\Lambda\delta x+\Sigma\delta y+\Phi\delta z\right)}{dx}\\&-\frac{d.\left(\Sigma\delta x+\Xi\delta y+\Psi\delta z\right)}{dy}\\&-\frac{d.\left(\Phi\delta x+\Psi\delta y+\Pi\delta z\right)}{dz}.\end{aligned}\tag{26}$$

La somma delle due espressioni (25), (26) è quella che va posta sotto il secondo integrale della (13). Cambieremo poi gli integrali per p, q, r in quelli per x, y, z come al num.°48. introducendo sotto i segni il fattore H_1 che non altera i valori per essere eguale alla unità, e facendo uso del solito teorema.

51. The second step from the intermediate coordinates p, q, r to the actual ones x, y, z, instead of being performed relatively to the equations (20) can be directly operated relatively to the general equation (13): rather it is necessary to proceed in this way when there are applied to the body those external forces which are concentrated on its surface. To treat this case we will observe that the expression (17) equivalent to the expression (15) which in turn was proven to represent the whole quantity under the second integral sign in the (13), can be reduced to an expression involving only derivatives with respect to the variables x, y, z by means of the analytical principle written in the equations (21), (22).

For the part of the aforementioned expression which concerns the three coefficients of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$, the reduction can be performed as it was done before for arriving at the equations (23), so that it becomes

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{d\Sigma}{dy}+\frac{d\Phi}{dz}\right)\delta x\\&+\left(\frac{d\Sigma}{dx}+\frac{d\Xi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}\right)\delta y\\&+\left(\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}+\frac{d\Pi}{dz}\right)\delta z\end{aligned}\tag{25}$$

having the symbols Λ, Ξ, etc. the values given in the equation (24). For what concerns the residual part of the expression (17), that is for what concerns the quantity T, one has to remark (equation (19)) that it still is a trinomial which can be transformed by means of formula (21). Once these operations are performed, by gathering the total coefficients of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$, and substituting the values (18), one will find, because of the definitions (24), that the following equation holds

$$\begin{aligned}T=&-\frac{d.\left(\Lambda\delta x+\Sigma\delta y+\Phi\delta z\right)}{dx}\\&-\frac{d.\left(\Sigma\delta x+\Xi\delta y+\Psi\delta z\right)}{dy}\\&-\frac{d.\left(\Phi\delta x+\Psi\delta y+\Pi\delta z\right)}{dz}.\end{aligned}\tag{26}$$

The sum of the two expressions (25), (26) is to be considered under the second integral sign in the equation (13). We will then change the integrals with respect to the variables p, q, r into integrals with respect to the variables x, y, z as done in sect. 48 by introducing under the integral sign the factor H_1 -operation which does not alter the value of considered quantities as it equals the unit- and by means of the usual theorem

Riuniti i due primi termini della (13) mediante un solo segno di integrale triplicato, se si annullano i coefficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$, esclusa la quantità T , veggonsi ritornare le equazioni (23) . Ma v'è la quantità T ridotta all' espressione (26) fatta di tre parti, sopra ciascuna delle quali può eseguirsi alcuna delle integrazioni per x o per y o per z . Eseguiscansi tali integrazioni, e si avranno nella equazione generale (13) i termini

$$\begin{aligned} &-\int dx \int dy \cdot (\Phi\delta x + \Psi\delta y + \Pi\delta z) \\ &-\int dx \int dz \cdot (\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z) \\ &-\int dy \int dz \cdot (\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z) \end{aligned} \tag{27}$$

intorno ai quali vi è bisogno di qualche spiegazione. Veramente stando a quanto praticò Lagrange in un caso simile (M.A.T.i.° pag. 212.) i precedenti integrali duplicati invece di tre dovrebbero essere sei, avendosene due di segno contrario per ogni integrazione effettuata, espressi mediante la convenzione di marcare con uno o due tratti le quantità spettanti a limiti opposti. Ma Lagrange stesso nel luogo citato ha fatto conoscere che tali integrali a due a due possono concentrarsi in un solo, intendendo che la terza variabile, oltre le due per le quali è indicata l'integrazione (nel primo dei precedenti sarebbe la z) prenda tutti i valori somministrati dalla equazione della superficie conterminante il corpo, cioè tanto quelli rispondenti ad un limite, come quelli rispondenti al limite opposto. Allora i segni si aggiustano da se stessi a motivo di un' altra supposizione sottintesa che apparirà più chiara per ciò che ora soggiungeremo.

Oltre la parte (27) venutaci in conseguenza di integrazioni eseguite, può esservene nell' equazione generale (13) un' altra affetta da segno d' integrale duplicato, compresa nell' ultimo termine Ω, proveniente da una forza applicata ai punti della superficie del corpo, e che ora è bene mettere in evidenza. Chiamate λ, μ, ν le tre componenti di questa forza parallele ai tre assi per un punto qualunque (x, y, z) della superficie, raccoglieremo tutti i trinomj

Once one gathers the first two terms of the equation (13) under the sign of a unique triple integral, if one excludes the quantity T and equals to zero the total coefficients of the variations $\delta x, \delta y, \delta z, ,$ he will see that the equations (23) are obtained. On the other hand the quantity T, once reduced to the expression (26) is recognized to be the sum of three parts and for each of these parts one can perform an integration with respect to one among the variables x, y, z. Once these integrations are performed in the general equation (13) one will get the terms

$$\begin{aligned} &-\int dx \int dy \cdot (\Phi\delta x + \Psi\delta y + \Pi\delta z) \\ &-\int dx \int dz \cdot (\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z) \\ &-\int dy \int dz \cdot (\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z) \end{aligned} \tag{27}$$

about which it is necessary to give some explications. Actually, referring to what done by Lagrange in a similar circumstance (M.A.T.i.° pp. 212) the previous double integrals instead of three should be six, as every performed integration is producing two integrals of opposite sign, to be expressed [following the notation by Lagrange] by means of the convention of labelling with one bar or two bars the quantities relative to opposite integration limits. However in the cited excerpt Lagrange himself recognized that these integrals, two by two, can be concentrated into one only, by intending that the third variable, i.e. the remaining one when considering those two variables with respect to which the integration is performed (in the first of the precedently indicated integral this third one is the z variable), actually assumes all the values given by the equation of the surface which forms the boundary of the body, that is both the value relative to one integration limit and the one relative to the opposite limit. Then the signs will be by themselves the right ones because of another assumption up to now implicit which will become clearer one it will be understood what we are going to add in our exposition. Beyond the terms appearing in (27) which are consequence of the performed integrations, in the general equation (13) one can find another double integral which is included in the last term Ω, which is relative to external forces applied to the points of the surface of the body and which it is suitable to signalize. Once called λ, μ, ν the three components of this force which are parallel to the three reference axes in a generic point (x, y, z) of the surface, we will gather all the trinomials

$$\lambda\delta x + \mu\delta y + \nu\delta z$$

spettanti ai diversi punti della superficie stessa mediante un integrale duplicato preso per rapporto a due variabili semplici di cui le x, y, z si considerino funzioni (equazione (31) num.°30.) , indi passeremo ad un integrale duplicato per le x, y, come già praticammo altrove (equazione (26) num.°12.). Ci risulterà allora l' espressione

$$\int dx \int dy \cdot (\Gamma) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \ (\lambda\delta x + \mu\delta y + \nu\delta z) \tag{28}$$

dove ho indicato con (Γ) la densità che regna fra le molecole alla superficie. Qui però convien fare una osservazione, ed è che siccome una pressione sulla superficie del corpo opera sempre dal di fuori verso il di dentro, girando tutt' all' intorno di esso corpo, ad ogni pressione diretta per un verso ne corrisponde una di segno contrario. Per questa circostanza la precedente espressione integrale (28) dovrebbe essere scomposta in due parti simili di cui l' una si assumesse positiva, l'altra negativa : il che si tralascia di fare, tenendo la cosa per sottintesa. È per la ragione analoga che i due integrali duplicati i quali, come sopra dicemmo, avrebbero dovuto prendere il posto di ciascuno degli espressi nella quantità (27), hanno potuto compendiarsi in un solo; di guisa che devesi ritenere che la parte espressa nella (27) , corrisponde alla parte espressa nella (28), e la negativa sottintesa di quella corrisponderebbe alla negativa sottintesa di questa. Pertanto dopo una tale dichiarazione tutta la parte dell'equazione generale (13) affetta da segni d' integrali duplicati può ritenersi rappresentata dalla somma delle due quantità (27), (28).

52. Ma ciò non basta ancora per dedurre le equazioni che si verificano soltanto alla superficie del corpo. Nella quanità (27) si veggono tre integrali duplicati dove le variabili semplici non sono sempre le stesse: il primo suppone che la terza variabile z diventi quella funzione di x, y che risulta sciogliendo per essa l'equazione della superficie, il secondo suppone invece

$$\lambda\delta x + \mu\delta y + \nu\delta z$$

relative to the different points of this same surface by means of a double integral calculated in terms of two simple variables of which the three variables x, y, z are assumed to be functions (equation (31) sect. 30), we will then pass to a double integral in terms of the variables x, y, as we already did elsewhere (equation (26) sect. 12). As a consequence we will get then the expression

$$\int dx \int dy \cdot (\Gamma) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \ (\lambda\delta x + \mu\delta y + \nu\delta z) \tag{28}$$

where I have indicated with (Γ) the molecular density at the surface. It is however now convenient to observe that, as the pressure on the surface of a body is always intended as applied from the exterior onto the interior [of the said body] when perambulating the same body, for every pressure directed in a direction there is always a corresponding one in the opposite direction. For this circumstance the precedent integral expression (28) should be decomposed into two similar parts, one of which is assumed positive, the other one negative, passage which is omitted and left as understood. It is for an analogous reason that the two double integrals which, as we said before, should have substituted each of those integrals appearing in the quantity (27), were gathered into only one integral sign, so that one must retain that the part which is expressed in the formula (27) , corresponds to the part which is expressed in the formula (28), and the omitted negative part in the first equation corresponds to the omitted negative part of the second equation. Therefore after such a clarification all the terms in the general equation (13) in which the signs of double integrals appear can be represented by the sum of the two quantities (27), (28).

52. What has been discussed up to now is not yet sufficient to deduce the equations which hold at the surface of the body. In the quantity (27) one can find three double integrals where the simple variables are not always the same ones: in the first double integral one assumes that the third variable z becomes that function of the variables x, y which expresses the equation of the surface, in the second [double integral] one assumes instead

dedotta dalla stessa equazione la y in funzione di x, z, ed il terzo suppone funzione delle altre due la x. Conviene adunque trasformare i due integrali secondo e terzo per modo che siano anch'essi presi considerando le x, y variabili semplici, il che io ho già fatto altrove in un caso più particolare (Vedi Giornale dell' I.R. Istituto Lombardo. T.VI, pag. 337.) . Richiamiamo la teorica per la trasformazione di un integrale duplicato

$$\int dp \int dq \cdot P(p,q) \tag{29}$$

quando si vogliono mutare le variabili p, q in altre r, s in virtù di due equazioni

$$p = p(r,s); \quad q = q(r,s). \tag{30}$$

L' integrale trasformato equivalente al precedente (29) è

$$\int dr \int ds \cdot P(p(r,s), \quad q(r,s)) \left(\frac{dp}{dr}\frac{dq}{ds} - \frac{dp}{ds}\frac{dq}{dr} \right). \tag{31}$$

Il teorema è dimostrato da tutti i Trattatisti, e noi pure ne facemmo in questa Memoria replicatamente uso dove parlammo dei sistemi continui superficiali.

Cominciamo pertanto a trasformare il terzo degli integrali (27), prendendo nelle formole (29), (31)

$$p = y, \quad q = z; \quad r = x, \quad s = y,$$

e adottando in luogo delle (30) le due equazioni

$$y = y; \quad z = z(x,y)$$

delle quali la prima è identica. Vedremo facilmente che ci viene

$$\int dy \int dz \cdot (\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z) = -\int dx \int dy \cdot \frac{dz}{dx}(\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z). \tag{32}$$

Similmente per trasformare il secondo degli integrali (27), prenderemo nelle formole (29),(31)

$$p = x, \quad q = z; \quad r = y, \quad s = x,$$

that the variable y is deduced from the same equation as a function of the variables x, z, and in the third [double integral] one assumes that the x is a function of the remaining two [variables]. It is therefore convenient to transform the second and third integral in such a way that in them the variables x, y are the integration ones, which transformation I have shown elsewhere in a more particular case.(See the Giornale of the I.R. Istituto Lombardo. Tome VI, pp. 337). Let us recall the theory of the transformation of a double integral

$$\int dp \int dq \cdot P(p,q) \tag{29}$$

when one wants to transform the variables p, q into new variables r, s which are given by means of the relations

$$p = p(r,s); \quad q = q(r,s). \tag{30}$$

The transformed integral which is equivalent to the one appearing in the precedent equation (29) is given by

$$\int dr \int ds \cdot P(p(r,s), \quad q(r,s)) \left(\frac{dp}{dr}\frac{dq}{ds} - \frac{dp}{ds}\frac{dq}{dr} \right). \tag{31}$$

The theorem is shown in all textbooks and we also used it in this Memoir many times when we spoke about superficial continuous systems.

We therefore start by transforming the third of the integrals (27), assuming that in the formulas (29), (31) the following identifications hold

$$p = y, \quad q = z; \quad r = x, \quad s = y,$$

and adopting at the place of the equations (30) the other two equations

$$y = y; \quad z = z(x,y)$$

of which the first one represents the identity. We will see that we easily get

$$\int dy \int dz \cdot (\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z) = -\int dx \int dy \cdot \frac{dz}{dx}(\Lambda\delta x + \Sigma\delta y + \Phi\delta z). \tag{32}$$

In a similar way, in order to transform the second of the integrals (27), we will use the formulas (29),(31) with the other identifications

$$p = x, \quad q = z; \quad r = y, \quad s = x,$$

surrogando alle equazioni (30) le seguenti

$$x = x; \qquad z = z(x, y)$$

e così otterremo

$$\int dx \int dz \cdot (\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z) = -\int dx \int dy \cdot \frac{dz}{dy}(\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z). \tag{33}$$

Adesso per effetto delle equazioni (32), (33) tutti i quattro integrali duplicati di cui consta la somma delle quantità (27), (28) vengono ridotti colle stesse variabili semplici; e quindi quella somma può portare un solo segno d' integrale duplicato, e scriversi

$$\begin{aligned}\int dx \int dy \cdot \Bigg\{ &\left(\lambda(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} - \Phi + \frac{dz}{dx}\Lambda + \frac{dz}{dy}\Sigma\right)\delta x \\ &+ \left(\mu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} - \Psi + \frac{dz}{dx}\Sigma + \frac{dz}{dy}\Xi\right)\delta y \\ &+ \left(\upsilon(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} - \Pi + \frac{dz}{dx}\Phi + \frac{dz}{dy}\Psi\right)\delta z \Bigg\}.\end{aligned} \tag{34}$$

Non essendovi da estrarre altro integrale duplicato dall' ultima parte Ω dell' equazione generale (13), i coefficienti totali delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ nella precedente espressione (34), giusta i principj del calcolo delle variazioni, debbono essere zero. Di qui tre equazioni che si verificano alla superficie del corpo, e dalle quali possono dedursi importanti teoremi. Ne vedremo uno nel Capo seguente pel caso particolare che il corpo sia un fluido.

53. Prima di lasciare queste considerazioni sulle quantità ai limiti, dirò che da esse può facilmente cavarsi tutta quella dottrina che diede argomento a varie Memorie del Sig. Cauchy inserite ne' suoi primi *Esercizj di Matematica.* Ci è lecito in fatti immaginare per entro alla massa del corpo e per la durata di un solo istante di tempo (quando trattasi di moto) un parallelepipedo rettangolo grande o piccolo come più piace, e

by replacing the equations (30) with the following

$$x = x; \qquad z = z(x, y)$$

and we will consequently get

$$\int dx \int dz \cdot (\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z) = -\int dx \int dy \cdot \frac{dz}{dy}(\Sigma\delta x + \Xi\delta y + \Psi\delta z). \tag{33}$$

Now, because of the equations (32), (33), all the four double integrals which are appearing in the sum of the quantities (27), (28) are reduced into integrals with respect the same independent variables, and therefore that said sum can be represented in terms of a single double integral and can be written as

$$\begin{aligned}\int dx \int dy \cdot \Bigg\{ &\left(\lambda(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} - \Phi + \frac{dz}{dx}\Lambda + \frac{dz}{dy}\Sigma\right)\delta x \\ &+ \left(\mu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} - \Psi + \frac{dz}{dx}\Sigma + \frac{dz}{dy}\Xi\right)\delta y \\ &+ \left(\upsilon(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} - \Pi + \frac{dz}{dx}\Phi + \frac{dz}{dy}\Psi\right)\delta z \Bigg\}.\end{aligned} \tag{34}$$

As it is not possible to extract any other double integral from the last part Ω of the general equation (13), the total coefficients of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ in the precedent expression (34), when are correctly the principles of the calculus of variations applied must vanish. It is seen thus how to deduce the three equations which are verified at the surface of the body and from which it is possible to deduce many important theorems. We will see one of these theorems in the following Capo, in the particular case of a fluid body.

53. Before leaving these considerations about the boundary conditions, I will say that from them it is possible to easily deduce all the doctrine which was the subject of many Memoirs by Mr. Cauchy inserted in his first Exercises of Mathematics. It is indeed licit to imagine inside the mass of a body and for only a given time instant (when dealing with its motion) a rectangular parallelepiped, whose sides have an arbitrary length and

restringerci a riguardare il moto o l'equilibrio di esso solo, astraendolo col pensiero dall' equilibrio o dal moto di tutto il resto del corpo, e intendendo supplito l' effetto di tutta la materia circostante col mezzo di pressioni esercitate sulle sei facce di quel parallelepipedo. Allora in virtù delle tre equazioni che sul fine del num.° precedente insegnammo a dedurre e che in tale particolare supposizione diventano assai più semplici, troveremo tre equazioni fra le componenti λ, μ, υ, parallele agli assi, della pressione per un punto qualunque di una faccia, e le sei quantità $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ nelle quali le variabili x, y, z abbiano assunti i valori proprj delle coordinate di quel punto. Ma se per detto punto prendasi quello di un angolo del parallelepipedo, appartenendo esso contemporaneamente a tre facce, le equazioni anzidette cresceranno a maggior numero. Oltre le tre componenti λ, μ, υ della pressione per quel punto considerato siccome appartenente ad una faccia, avremo tre simili componenti di un'altra pressione, considerando il punto come appartenente ad un'altra faccia, e così tre altre per la terza faccia. Le sei quantità però Λ, Ξ, ec. saranno sempre le stesse, giacchè esse non dipendono che dai valori delle coordinate del punto, le quali non mutano in qualunque faccia il punto si consideri. Eliminando quindi queste sei quantità fra le nove equazioni che risultano, si giunge a tre relazioni fra le dette componenti. Di più : può immaginarsi un altro parallelepipedo rettangolo diverso dal precedente, ma avente comune con esso il vertice di un angolo, cioè il punto (x, y, z): allora si ottengono altre nove equazioni, considerando lo stesso punto come appartenente a tre facce del nuovo parallelepipedo: ma le sei quantità Λ, Ξ, ec. rimangono sempre immutate. Di qui altre relazioni fra le pressioni sulle facce del nuovo parallelepipedo e quelle sulle facce dell' antico. Questi teoremi hanno qualche merito: noterò il vantaggio di potere per mezzo delle ideate pressioni fissare un significato, cioè dare una rappresentazione meccanica (sebbene con un pò di stento) a ciascuna delle sei quantità Λ, Ξ, ec. La nostra analisi però cammina indipenden-

limit ourself to consider the motion or the equilibrium of this parallelepiped only, by isolating it, with our imagination, from the equilibrium or the motion of the remaining part of the body and by assuming that the effect of all surrounding matter can be regarded as equivalent to pressures exerted on the six faces of that parallelepiped. Then because of the three equations which, at the end of the precedent sect., we have taught to deduce and which in the considered particular instance become much more simple, we will find three equations among the components λ, μ, υ, parallel to the axes of the pressure at a generic point of one face and the six functions $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ calculated in the values of the variables x, y, z specifying the coordinates of that point. If the aforementioned point is chosen in the corner of the parallelepiped, as this point belongs simultaneously to three faces, the said equations will increase in number. Together with the three components λ, μ, υ of the pressure in that point regarded as a point of one of these three faces, we will have similar components of another pressure, when considering this point as belonging to another face, and in a similar way we will have three other components for external pressure when considering the third, last face. The six quantities Λ, Ξ, etc. however will be always the same ones as they depend only on the values of the coordinates of the point, which coordinates are always the same, whatsoever is the face to which the point is assumed to belong. By eliminating then these six quantities among the nine resulting equations one gets three relations among said [pressure] components. Moreover one can imagine another rectangular parallelepiped different from the precedent one, but having in common with it the vertex of an angle, that is the point having coordinates (x, y, z): then one obtains other nine equations when considering the same point as belonging to the three faces of the new parallelepiped: but the six quantities Λ, Ξ, etc. remain always the same. In this way we get other relations among the pressures on the faces of the new parallelepiped and those on the faces of the old one. These theorems have some merits: I will, in particular, note the advantage consisting in being able, by means of them, to give a meaning to the conceived pressures, that is to give a mechanical representation (although with some difficulties) to each of the six quantities Λ, Ξ, etc. Our analysis however proceeds independently

temente dai mentovati teoremi, e quindi essi riescono per noi di molto minore importanza che pel ricordato Geometra. Mi dispenserò pertanto dal farne l'esposizione che mi condurrebbe un pò in lungo, e mi basterà aver indicato il principio da cui dedurli per via piana e diretta; essendo mio proposito, come dissi più volte, far vedere che i metodi di Lagrange arrivano (e meglio che gli altri) a tutto, e solo si rifiutano di dar ciò che altrimeni si può provare non esssere esattamente vero. Intanto prego il lettore a voler por mente che il verificarsi dei teoremi fra le pressioni alla superficie dei corpi nel moto del pari che nell' equilibrio , è verità non chiaramente dimostrabile se non col nostro metodo. Qui infatti si vede subito che l'espressione (34) rimane la stessa in ambi i casi: il passaggio dall' equilibrio al moto introduce mutazione nelle sole quantità sottoposte all' intgrale triplicato, cioè in luogo delle X, Y, Z, introduce i binomj

$$X - \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - \frac{d^2z}{dt^2} :$$

quindi le equazioni che si verificano a parte, perchè desunte dall' integrale duplicato (34), rimangono le medesime.

54. Ripigliamo ora le equazioni (23), (24) estensibili a tutta la massa del corpo, e troveremo che ci diranno importanti verità, se sapremo opportunamente interrogarle. Prima però ci conviene spingere più innanzi le considerazioni intorno alle molecole dei corpi, che al num.°4. lasciammo imperfette, e intorno al modo con cui esse agiscono le une sulle altre. Tali azioni possono essere di due sorte: alcune provenienti da forze interne attive che produrrebbero un effetto quand' anche non vi fossero forze esterne applicate, per esempio, da attrazioni od elasticità: alcune provenienti da queste forze esterne le quali, applicate a certe molecole, si propagano eziandio alle altre, come pressioni sopra superficie ed anche forze simili alla gravità, essendo evidente nel maggior numero dei casi, che ciascuna molecola non risente della sola gravità propria, ma altresì di quella propria delle altre. Di qualunque natura siano

of the mentioned theorems and therefore they are for us of much less importance than for the cited Geometer. I will therefore omit to expose them, as this will need longer time and I will be satisfied to have indicated the method by which it is possible to deduce them by a direct and plane way, as it is my purpose, as I said many times, to show how the methods proposed by Lagrange are able (and in a better way than the others) to arrive to all correct results and they refuse to deduce only what otherwise can be proven not to be exactly true. In the meanwhile I beg the reader to be willing to consider that the truth of the theorems among the pressures at the surfaces of the bodies (both during their motion and at equilibrium) are truths which can be clearly shown only by means of our method. Indeed here we can immediately see that the expression (34) remains the same in both cases: the passage from the consideration of equilibrium to the consideration of motion introduces the change of only the quantities under the triple integral, indeed [this passage] replaces the quantities X, Y, Z, with the binomials

$$X - \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - \frac{d^2z}{dt^2} :$$

and therefore the equations which are deduced from the double integral (34) [without involving the said triple integrals], remain the same.

54. Let us now consider again the equations (23), (24) which can be extended to the whole mass of the body, and we will find that they will tell us important truths if we will be able to suitably interrogate them. Before doing so it will be convenient to develop further the considerations about the molecules of the bodies, which at the sect. 4 we left to be perfected, and in particular [some considerations] about the ways in which these molecules act one on the others. These actions can be distinguished to be of two kinds: some [actions] which are produced by internal active forces and which would produce their effects also when there were no externally applied forces (for instance actions being produced by attractions or elasticity) and other actions which are caused by these same external forces which when applied to certain molecules may have propagated their effects also to other molecules, and examples of these forces are the pressures applied on surfaces or also forces similar to gravity, as it is clear that, in the great majority of cases, each molecule is affected not only by its own gravity, but also by the gravity of the other molecules. Whatever will be the nature of

sì fatte azioni è facile capire, per le cose che ora diremo, dipendere esse principalmente dalla posizione rispettiva delle molecole, poi anche dalla loro figura. Stando alla nostra maniera di vedere esposta nel preambolo della Memoria, non dobbiamo fare ipotesi sulla natura delle forze molecolari. Però abbiamo ammesso le molecole disgiunte, e quel solo che di esse disse Newton (*)[1], cioè che quantunque di una piccolezza immensamente al di sotto della portata de' nostri sensi, pure sono nei diversi corpi di differenti figure, e inalterabili da forze meccaniche. Ciò premesso, distinguiamo con diligenza le azioni reciproche delle molecole dipendentemente soltanto dalla collocazione delle une rispetto alle altre, e le azioni che dipendono inoltre dalle figure individuali: il che può anche dirsi più brevemente, distinguiamo ciò che deriva dalle molecole considerate *fra loro* da ciò che deriva dalle molecole considerate in *se stesse* . Una così fatta distinzione è fondamentale. A ravvisare le azioni della prima specie, immaginiamo le molecole omogenee e di figura sferica, e comprenderemo senza difficoltà che quelle azioni non possono essere alterate voltando ogni molecola per guisa che la parte di sopra venga di sotto, o la parte a sinistra passi a destra, purchè i centri delle sfere rimangano agli stessi posti. A ravvisare le azioni della seconda specie, immaginiamo le molecole di figura diversa dalla sferica, per esempio, prismatica o piramidale: e ci si farà manifesto, che quand' anche fossero eguali le distanze del centro di gravità di una molecola dai centri simili di due vicine, l'azione della prima sopra quella delle seconde cui rivolgesse una base o la punta, sarebbe diversa dall'azione sopra l'altra cui presentasse invece una faccia.

Se le azioni molecolari sono della sola prima specie, cioè non dipendenti dalla figura, le loro espressioni analitiche avranno questa proprietà, che date in funzioni delle coordinate delle diverse molecole riferite a tre assi rettangolari, e poi in funzione

[1](*) Optica. Lib. III. Quaestio XXXI.

such actions it is easy to understand, because of the arguments which we will present, that they depend mainly on the relative position of the molecules and also on their particular form. As we have chosen the point of view expounded in the Preamble of this Memoir, we do not have to conjecture any hypothesis about the nature of the molecular forces. However we have admitted that the molecules are disjoint and only what was assumed about them by Newton (*)[1], i.e. that although they are so small to be immensely beyond any possibility of being perceived by our senses they have different forms in different bodies and these forms cannot be altered by mechanical forces. Having premised all that, we carefully distinguish the reciprocal actions of the molecules which depend only on the placement of one with respect to the other and the actions which depend also on their individual forms: this can be said also more shortly, we distinguish what depends on the molecules considered in their reciprocal placement from what depends on the true nature of the molecules themselves. Such a distinction is fundamental. To conceive the actions of the first kind we imagine homogeneous molecules having spherical form, and we will easily understand that these actions cannot be altered by rotating each molecule in such a way that its upper part becomes its lower part or that its left side becomes its right side under the condition that the centers of all spheres remain in the same position. To conceive the actions of the second kind let us imagine molecules having a form different from the spherical one, for instance a prismatic or pyramidal form: and it will be for us manifest that even when the distances of a center of gravity of one molecule from the centers of gravity of two close molecules were equal, the action of the first one on the second molecules will be different depending on if it directs towards them a basis, or a wedge or a face.

If the molecular actions are of the first kind only, i.e. if they do not depend on the shape, their analytical expressions will have the following property, that given as functions of the coordinates of the different molecules when referred to three coordinate axes and then as functions

[1](*) Optica. Lib. III. Quaestio XXXI.

delle coordinate delle stesse molecole riferite a tre altri assi rettangolari, saranno nei due casi di eguale struttura, e non differiranno se non per la diversità delle lettere adoperate ad esprimere le coordinate. La cosa è per se stessa evidente, considerato l'arbitrio nostro nel dare le denominazioni alle quantità, ma può anche vedersi partitamente negli elementi analitici dai quali conosciamo dover essere composte quelle espressioni. Di fatto le distanze ρ, ρ_1, ρ_2 ec. di una molecola(p,q,r) dalle molecole $(p_1,q_1,r_1),(p_2,q_2,r_2)$, ec. quando il riferimento è agli assi dellep,q,r, sono date dai radicali

$$\rho=\sqrt{(p_1-p)^2+(q_1-q)^2+(r_1-r)^2};\ \rho_1=\sqrt{(p_2-p)^2+(q_2-q)^2+(r_2-r)^2};\text{ec.} \tag{35}$$

e lo sono dai radicali

$$\rho=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2};\ \rho_1=\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2+(z_2-z)^2};\text{ec.} \tag{36}$$

quando il riferimento è agli assi delle x,y,z. I coseni degli angoli che la direzione di ciascuna delle ρ, ρ_1, ρ_2 ec. fa coi tre assi ortogonali, hanno i valori

$$\frac{p_1-p}{\rho},\frac{q_1-q}{\rho},\frac{r_1-r}{\rho};\frac{p_2-p}{\rho_1},\text{ec.} \tag{37}$$

nel primo caso, mettendo per ρ,ρ_1, ec. i radicali (35); e i valori

$$\frac{x_1-x}{\rho},\frac{y_1-y}{\rho},\frac{z_1-z}{\rho};\frac{x_2-x}{\rho_1},\text{ec.}$$

nel secondo caso, mettendo per ρ,ρ_1, ec. i radicali (36). A motivo poi di un teorema notissimo, anche i coseni degli angoli fatti dalle rette ρ,ρ_1,ρ_2, ec. fra loro, che nel primo caso sono espressi dalle formole

$$\cos\cdot\rho\cdot\rho_1=\frac{(p_1-p)(p_2-p)+(q_1-q)(q_2-q)+(r_1-r)(r_2-r)}{\rho\rho_1};\text{ec.} \tag{38}$$

lo sono nel secondo mediante formole costrutte affatto similmente colle x,y,z.

Se poi sussistono fra le molecole azioni della seconda specie, azioni cioè alle quali prende parte la figura delle molecole

of the coordinates of the same molecules as referred to three other rectangular axes, they will be in both cases of equal structure and will differ only for the diversity of the letters used to express the coordinates. This statement is by itself evident when considering the arbitrariness by which we can define the introduced quantities, but it can also be seen separately in the analytical elements which we know are composing these expressions. Indeed the distances ρ,ρ_1,ρ_2, etc. of one molecule (p,q,r) from the molecules $(p_1,q_1,r_1),(p_2,q_2,r_2)$, etc. when referring their positions to the axes of the variables p,q,r, are given by the radicals

$$\rho=\sqrt{(p_1-p)^2+(q_1-q)^2+(r_1-r)^2};\quad \rho_1=\sqrt{(p_2-p)^2+(q_2-q)^2+(r_2-r)^2};\text{etc.} \tag{35}$$

while they are given by the radicals

$$\rho=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2};\quad \rho_1=\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2+(z_2-z)^2};\text{ec.} \tag{36}$$

when using the reference frame given by the axes of the variables x,y,z. The cosines of the angles formed by the direction of each distance ρ,ρ_1,ρ_2, etc. with the three orthogonal axes have the values

$$\frac{p_1-p}{\rho},\frac{q_1-q}{\rho},\frac{r_1-r}{\rho};\frac{p_2-p}{\rho_1},\text{etc.} \tag{37}$$

in the first case, replacing for ρ,ρ_1, etc. the radicals (35); and the values

$$\frac{x_1-x}{\rho},\frac{y_1-y}{\rho},\frac{z_1-z}{\rho};\frac{x_2-x}{\rho_1},\ \text{etc.}$$

in the second case, replacing for ρ,ρ_1, etc. the radicals (36). Finally, because of a very well-know theorem also the cosines of the angles formed by the straight lines ρ,ρ_1,ρ_2, ec. one with the other, which in the first case are expressed by the formulas

$$\cos\cdot\rho\cdot\rho_1=\frac{(p_1-p)(p_2-p)+(q_1-q)(q_2-q)+(r_1-r)(r_2-r)}{\rho\rho_1};\text{etc.} \tag{38}$$

are similarly expressed, when using the second reference frame by means of formulas having the same structure in terms of the variables x,y,z.

If then actions of the second kind are present among the molecules, that are actions for which the shape of considered molecules plays a role,

stesse, allora non è più vero che per cambiare le loro espressioni analitiche riferite agli assi delle p, q, r in quelle riferite agli assi delle x, y, z, basti sostituire in esse le x, y, z alle p, q, r : conviene cambiare altri elementi analitici. Per veder ciò chiaramente, immaginiamo anche una sola molecola di figura prismatica, della quale uno spigolo faccia cogli assi delle p, q, r angoli di coseni a_1, a_2, a_3: questi coseni entreranno nell'espressione dell'azione ch' essa molecola fa o riceve dalle circostanti: ed è manifesto, perchè se stando al loro posto tutte le molecole circostanti, essa mutasse la direzione di quello spigolo, l'azione vicendevole muterebbe. Adunque nelle espressioni delle azioni reciproche molecolari debbono entrare tante quantità a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ec. pei valori delle quali venga fissata interamente la posizione di ciascuna molecola relativamente ai tre assi: il loro intervento in termini che si suppongono non trascurabili, significa che si è tenuto conto di quella parte di azione che è dovuta alla figura delle molecole diversa dalla sferica. Tali coseni a_1, a_2, a_3, a_4, ec. sono per natura affatto diversi da quelli sopra marcati colle formole (37) : non si possono tradurre in espressioni fatte colle sole coordinate delle diverse molecole: possono essere differenti e di numero grandissimo, se le molecole entrano a comporre il corpo alla rinfusa sotto qualsivoglia direzione dei loro spigoli od assi, ma possono essere anche in pochissimo numero, se s'immagina che le molecole siano tutte disposte uniformemente, cioè abbiano i loro spigoli od assi fra loro paralleli, come credesi che avvenga ne' corpi cristallizzati. In conseguenza del fin qui detto si capisce che quando si passa a riferire il corpo agli assi delle x, y, z, nelle formole esprimenti le azioni delle molecole i coseni $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dovranno essere cambiati con altri $b_1, b_2, b_3, \ldots$. di diverso valore; giacchè è evidente che le direzioni degli spigoli od assi delle molecole prismatiche, piramidali, ellissoidali, ec., faranno cogli assi delle x, y, z angoli diversi da quelli che facevano cogli assi delle p, q, r. Ecco il di più da aggiungersi al cambiamento delle coordinate, che bastava nel

then it is no longer true that for changing their analytical expressions valid when using the axes of the variables p, q, r into those expression which are valid when using the axes of the variables x, y, z, it is sufficient to substitute in them the variables x, y, z with the variables p, q, r: indeed it is needed to change also other analytical elements. To see this more clearly let us imagine also only one molecule having a prismatic form, and let us assume that the edge of such form is a side of an angle constituted also by the axes of the variables p, q, r whose cosines are a_1, a_2, a_3: these cosines will appear in the expression of the action exerted by this molecule on (or which is exerted on this molecule by) all the surrounding ones: and it is manifest that the mutual action would change if -being fixed all the surrounding molecules- the direction of such edge is changed. Therefore in the expressions of the mutual molecular actions must appear all the quantities a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, etc. whose values are needed for fixing completely the position of each molecule with respect to the three reference axes: their role in terms which are assumed not to be negligible means that one takes into account that part of action which is due to the form of the molecules, when it is not spherical. Such cosines a_1, a_2, a_3, a_4, etc. have a nature which is indeed different from those which are appearing in the formulas labelled with the symbol (37) : indeed they cannot be expressed by means of expressions in which only the coordinates of different molecules appear: [the aforementioned cosines] can be different in different places and be in very large number, if the molecules which compose the body have their edges or axes oriented randomly, but they can be also very few, if one imagines that the molecules are all uniformly disposed, i.e. if they have their edges or axes which remain parallel, as it is believed to occur in the bodies constituted by crystal lattices. As a consequence of what said up to now one understands that when refers the body to the axes of the variables x, y, z, in the formulas expressing the interactions among molecules the cosines $a_1, a_2, a_3, \ldots$ shall have to be changed with the cosines $b_1, b_2, b_3, \ldots$. which have different values, as it is evident that the edges and axes of the molecules having prismatic, pyramidal, ellipsoidal etc.. shapes have relative directions with respect to the axes x, y, z whose angles are different from the corresponding ones with respect to the axes of the variables p, q, r. It is therefore clear what has to be added in the procedure of reference change to what was sufficient

primo caso. Per altro ai coseni $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ possono poi intendersi sostituiti valori equivalenti fatti dei primi coseni $a_1, a_2, a_3, \ldots$ e dei nove coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. che fissano la posizione dei secondi assi rispetto ai primi: ciò in virtù del teorema di geometria analitica più sopra ricordato.

55. Ora vogliamo provare che le sei quantità $2A, 2B, 2C, D, E, F$ significano rapporto agli assi delle p, q, r ciò stesso che le sei $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ significano rapporto agli assi delle x, y, z; però prescindendo dal segno, il che non fa difetto, essendo sempre in nostro arbitrio supporre originariamente cambiato il segno a quelle prime, con che renderemo positivi anche i secondi membri delle (24). A tale intendimento partiremo dalle equazioni (20) le quali partecipano d' entrambi i riferimenti alle due terne di assi, giacchè i trinomj che terminano i primi membri di quelle equazioni sono fatti di derivate per le p, q, r, e i primi termini, oltre le derivate seconde delle x, y, z pel tempo, contengono le X, Y, Z componenti della forza esterna parallele agli assi di queste coordinate. Quando siamo passati dalle (20) alle (23) abbiamo nelle prime trasformati que' trinomj, adesso convien trasformarne i primi termini. Chiamate P, Q, R, le tre componenti della forza esterna parallele agli assi delle p, q, r, avremo dalla teorica della composizione delle forze e dalle denominazioni (2) del num.°33.

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 P + \beta_1 Q + \gamma_1 R \\ Y &= \alpha_2 P + \beta_2 Q + \gamma_2 R \\ Z &= \alpha_3 P + \beta_3 Q + \gamma_3 R. \end{aligned} \tag{39}$$

Avremo altresì dalle equazioni (1) del num.°33.

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha_1 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2r}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \alpha_2 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2r}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \alpha_3 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2r}{dt^2}. \end{aligned} \tag{40}$$

in the first case. Moreover to the cosines $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ it is possible to substitute the values of the first cosines $a_1, a_2, a_3, \ldots$ and of the nine cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc. which fix the position of the second axes with respect to the first: this being true because of the theorem from analytical geometry which has been already recalled.

55. We now want to prove that the six quantities $2A, 2B, 2C, D, E, F$ have the same meaning with respect to the axes of the variables p, q, r as the six quantities $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ have with respect to the axes of the variables x, y, z; however with a difference concerning their sign, circumstance which does not represent a difficulty, as it is for us always possible to assume that the sign is changed in the definition of the aforementioned first six quantities so that we will make positive the right-hand sides of the (24). To this aim we will start from the six equations (20) which establish a relationship between the two considered reference frames, as the trinomials which are at the end of the left-hand sides of these equations are constituted by derivatives with respect to the variables p, q, r, and the first terms include, together with the second order time derivatives of the variables x, y, z , also the quantities X, Y, Z which represent the components of the external forces parallel to the axes relative to these last variables. When we deduced from the equations (20) the equations (23) we started by transforming those trinomial at first, while now it is convenient to transform the said first terms. Let us denote by P, Q, R, the three components of the external forces parallel to the axes of the variables p, q, r, we will then have, by the theory of composition of forces and by the definitions (2) introduced in sect. 33

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 P + \beta_1 Q + \gamma_1 R \\ Y &= \alpha_2 P + \beta_2 Q + \gamma_2 R \\ Z &= \alpha_3 P + \beta_3 Q + \gamma_3 R. \end{aligned} \tag{39}$$

We will also deduce from the equations (1) of sect. 33

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha_1 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2r}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \alpha_2 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2r}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \alpha_3 \frac{d^2p}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2q}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2r}{dt^2}. \end{aligned} \tag{40}$$

Prendansi questi valori ultimamente ottenuti (39), (40), e si sostituiscano insieme coi (18) nelle equazioni (20) : operando con diligenza noteremo che si giunge a tre risultati i quali possono essere compendiati sotto le forme

$$\begin{aligned} \alpha_1 S + \beta_1 U + \gamma_1 W = 0 \\ \alpha_2 S + \beta_2 U + \gamma_2 W = 0 \\ \alpha_3 S + \beta_3 U + \gamma_3 W = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

dove le S, U, W hanno valori che dopo poche linee porremo per disteso. Si moltiplichino rispettivamente per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ le ultime equazioni (41), indi si sommino: si moltiplichino da capo rispettivamente per $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, e parimenti si sommino: e si operi una terza volta similmente moltiplicando per le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. In conseguenza delle equazioni (3) del num.°33. ci risulteranno le equazioni

$$S = 0; \quad U = 0; \quad W = 0$$

le quali, mettendo per S, U, W i valori testè accennati e che abbiamo sospeso di scrivere, saranno

$$\begin{aligned} \Gamma\left(P - \frac{d^2p}{dt^2}\right) - \frac{d \cdot 2A}{dp} - \frac{dD}{dq} - \frac{dE}{dr} = 0 \\ \Gamma\left(Q - \frac{d^2q}{dt^2}\right) - \frac{dD}{dp} - \frac{d \cdot 2B}{dq} - \frac{dF}{dr} = 0 \\ \Gamma\left(R - \frac{d^2r}{dt^2}\right) - \frac{dE}{dp} - \frac{dF}{dq} - \frac{d \cdot 2C}{dr} = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Ecco le equazioni che stanno a riscontro delle (23) e che si appoggiano unicamente agli assi delle p, q, r, come le (23) si appoggiano unicamente agli assi delle x, y, z. Vedesi dal confronto di queste (42) colle (23) l' asserita corrispondenza delle sei quantità, a meno della differenza dei segni.

56.Diciamo inoltre che le mentovate sei quantità in ambi i casi sono le espressioni analitiche contenenti l'effetto complessivo di tutte le azioni interne sopra il punto generico (p, q, r) ovvero (x, y, z). Qui potremmo giovarci di quanto è scritto in

Let us consider the relationships obtained in the last equations and substitute them, together with those obtained in equations (18), in the equations (20) : by careful calculations we will remark that one reaches three results which can be resumed by equations having the following form

$$\begin{aligned} \alpha_1 S + \beta_1 U + \gamma_1 W = 0 \\ \alpha_2 S + \beta_2 U + \gamma_2 W = 0 \\ \alpha_3 S + \beta_3 U + \gamma_3 W = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

where the S, U, W have values which we will explicit below, after few lines. Let us multiply respectively times $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ the last equations (41), then let us sum the obtained quantities: next multiply again times $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, and similarly sum the obtained results: repeat a third time the procedure in a similar way multiplying times $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. As a consequence of the equations (3) in sect. 33 we will get the equations

$$S = 0; \quad U = 0; \quad W = 0$$

which, by replacing for the quantities S, U, W those values previously mentioned but not explicitly written, will become

$$\begin{aligned} \Gamma\left(P - \frac{d^2p}{dt^2}\right) - \frac{d \cdot 2A}{dp} - \frac{dD}{dq} - \frac{dE}{dr} = 0 \\ \Gamma\left(Q - \frac{d^2q}{dt^2}\right) - \frac{dD}{dp} - \frac{d \cdot 2B}{dq} - \frac{dF}{dr} = 0 \\ \Gamma\left(R - \frac{d^2r}{dt^2}\right) - \frac{dE}{dp} - \frac{dF}{dq} - \frac{d \cdot 2C}{dr} = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Here we have those equations which correspond to the (23) and which exclusively refer to the axes of the variables p, q, r, exactly in the same way as the equations (23) exclusively refer to the axes of the variables x, y, z. One can check by comparing the equations (42) with the equations (23) the asserted correspondence between the six quantities considered, unless a difference of signs.

56. Let us further state that the mentioned six quantities in both cases are the analytical expressions which contain the whole effect of all internal actions exerted on the generic point (p, q, r) which is otherwise labelled [by changing frame] with the coordinates (x, y, z). Here we will be able to take advantage of what is written in

più luoghi della M.A. intorno ai coefficienti che moltiplicano le variate delle equazioni di condizione, che cioè può darsi loro una rappresentazione di forze: e veramente le sei quantità A, B, C, D, E, F (espressione (15) num.°47) furono coefficienti introdotti a questa maniera. Ma non mi pare che ciò sia necessario: ho già insinuato nel preambolo della Memoria che il grande vantaggio dei metodi lagrangiani sta appunto nel prestarsi ad esprimere analiticamente i fatti, senza esigere che si vada a scrutinare la struttura interna di quelle quantità che ne significherebbero le cause, struttura la quale ci resterà sempre occulta, come ci occorrerà di meglio dichiarare nel Capo VI; di guisa che non abbisognano se non di ciò a cui la mente umana arriva con sicurezza, e fanno senza di ciò intorno a cui non potremo mai dire niente di certo. Se le forze interne tra le molecole non sussistessero, queste sarebbero punti fisici affatto liberi, e le equazioni del loro moto si avrebbero dai soli primi termini delle equazioni (23) o (42), ommessi quei trinomj colle derivate parziali. Tali trinomj invece esistono (e lo abbiamo provato) quando vi sono le azioni vicendevoli molecolari : essi adunque raccolgono l'espressione dei loro effetti : il che ci basta, senza imbarazzarci del come.

Ammesso che le sei quantità $2A, 2B, 2C, D, E, F$ contengano le espressioni analitiche degli effetti delle forze interne, quando il corpo è riferito agli assi delle p, q, r : e che lo stesso debba dirsi delle sei $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$, quando il riferimento è agli assi delle x, y, z, potremo applicare ad esse tutto quanto al num.°54. dicemmo dovere avvenire di quelle espressioni; che cioè quando non esistono azioni dipendenti dalla figura delle molecole, le prime si muteranno nelle seconde col mutare delle p, q, r nelle x, y, z : e che quando vi hanno anche quelle azioni di seconda specie, bisognerà inoltre mutare certe quantità $a_1, a_2, a_3...$ particolari alle prime in altre $b_1, b_2, b_3, ...$ particolari alle seconde. Se non che, può qui sorgere una difficoltà che è bene di prevenire e di togliere, anche all'oggetto di formarci qualche idea un pò più adequata intorno alla natura

many excerptions of the M.A. dealing with the coefficients which multiply the variations of the equations of conditions, where it is stated that it is possible to give to these coefficients a representation as forces: and actually the six quantities A, B, C, D, E, F (see expression (15) sect. 47) were coefficients introduced in such a manner. However it does not seem to me that such a consideration is necessary: I have already suggested in the Preamble of the Memoir that the great advantage of the Lagragian Methods consists exactly in their capability of expressing in analytical way the [physical] evidences without demanding that one is obliged to investigate the internal structure of those quantities which would represent their causes, as this structure will remain for us always hidden, as we will be able to declare better in the Capo IV; indeed [the Lagrangian Methods] do not need anything else than those concepts to which the human mind can arrive surely and can avoid to consider what about which we will never be able to state anything certain. If the internal forces among molecules would not exist, these molecules would be physical points completely free and the equations of their motion would be deduced only from the first terms of the equations (23) or (42), by omitting those trinomials in which partial derivatives appear. Instead these trinomial do exist (and we have proven it) when there are molecular mutual actions: these trinomials therefore gather the expressions of their effects: which is for us sufficient, as we do not want to be embarrassed by the actual ways in which these mutual actions are exerted.

Once admitted that the six quantities $2A, 2B, 2C, D, E, F$ contain the analytical expressions for the effects of internal forces when the body is referred to the axes of the variables p, q, r : and that the same must be said for the six quantities $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$, when considering the reference frame relative to the variables x, y, z, we will be able to apply to them all the statements we established in sect. 54. i.e. that when there are not internal actions depending on the form of the molecules, then the first six quantities will be transformed into the second ones when transforming the variables p, q, r into the variables x, y, z : and that instead when also the internal actions of the second kind there described are present then it will be necessary to transform certain quantities $a_1, a_2, a_3...$ relative to the first six quantities into others $b_1, b_2, b_3, ...$ relative to the second ones. Now here a difficulty may arise which is suitable to prevent and remove, also in order to form in our mind some more adequate ideas about the nature

di dette sei quantità. Esse, quali appajono nelle equazioni (42), (23), sono funzioni delle sole coordinate p, q, r ovvero x, y, z del punto generico, mentre in quelle quantità (35),(38), che sopra dicemmo dover costituire come gli elementi analitici delle espressioni delle forze interne, entravano anche le coordinate $p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2, ec.$di altre molecole. Rispondo che deve appunto essere così per la ragione che le sei quantità $2A, 2B$, ec. rappresentano il complesso di tutte le azioni delle molecole circostanti su quella che ha per coordinate p, q, r. Se si trattasse di una sola espressione dell'azione elementare fra la molecola (p, q, r) e un'altra qualunque (ξ, η, ζ), certamente vi dovrebbero entrare tanto le prime che le seconde coordinate, ma trattandosi del complesso di tutte le azioni simili, le variabili ξ, η, ζ debbono (restando ferme le p, q, r) prendere successivamente i valori delle coordinate di tutte le molecole del corpo, ed esaurire per intero la loro variabilità, talchè più non compajano. Quelle sei quantità vestono il significato di veri integrali definiti triplicati presi per le variabili ξ, η, ζ, e aventi per limiti i valori di queste variabili ai limiti del corpo. Ciò apparirà più chiaro nel Capo VI. Può anche erigersi qualche altra difficoltà, di cui ci pare più opportuno riserbare l'esposizione al Capo seguente.

Dopo il fin qui detto avremo nozioni più chiare intorno alle quantità che compongono le equazioni (24), appunto come si richiede per poterne trarre profitto. Nei primi membri le Λ, Ξ, ec. sono funzioni delle x, y, z e di quei coseni $b_1, b_2, b_3...$ che intervengono nel solo caso che si tien conto della figura delle molecole: nei secondi membri le $2A, 2B, 2C, D, E, F$ sono funzioni dei coseni $a_1, a_2, a_3....$ corrispondenti ai $b_1, b_2, b_3...$ anzidetti, e delle p, q, r alle quali sono stati sostituiti (come risulta dal num.°50.) i loro valori (31) num.°40., fatti colle x, y, z. Sotto questo aspetto richiameremo la composizione delle quantità che entrano nelle equazioni (24), in un luogo del Capo seguente onde dedurne una importantissima conseguenza. Qui ci gioverà immaginare che nei primi membri, per entro alle

of said six quantities. Indeed they, as they appear in the equations (42), (23), are functions of the coordinates p, q, r or of the coordinates x, y, z of the generic point, while in those quantities (35),(38), which we recognized in our previous considerations as the analytical variables to be used in the expressions of internal forces, the coordinates $p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2, ec.$ of other molecules [of the body] also appeared. I answer that it has to be so because all the six quantities $2A, 2B$, etc. represent the complex of all the actions of the neighboring molecules on the molecule which has as coordinates [in the first frame] the variables p, q, r. If one were considering only the expression of the elementary action between the molecule (p, q, r) and another whatsoever molecule (ξ, η, ζ), surely in such an expression should appear both the first and the second coordinates, but as we are dealing with the complex of all such actions then the variables ξ, η, ζ must (by keeping fixed the variables p, q, r) assume in a sequence all the values of the coordinates of all the molecules of the body and thus completely run out all their variability so that they do not appear anymore [in the expressions for the six quantities $2A, 2B$, etc]. Those six quantities can indeed truly be meant to equal some triple definite integrals calculated with respect to the variables ξ, η, ζ, and having as limits for the values of such variables the limits which characterize the boundary of the body. This will appear clearer in the Capo VI. Some other difficulties may appear, which it will be suitable to present in the following Capo.

What said up to now will give us clearer ideas about the quantities which compose the equations (23), as it is suitable if one wants to exploit them. In their left-hand sides the quantities Λ, Ξ, etc. are functions of the variables x, y, z and of those cosines $b_1, b_2, b_3...$ which must be considered only in the case when the form of the molecules must be taken into account: in their right-hand sides the quantities $2A, 2B, 2C, D, E, F$ are functions of the cosines $a_1, a_2, a_3....$ corresponding to the aforementioned ones $b_1, b_2, b_3...$, and of the variables p, q, r to which one has substituted (as expounded in sect. 50) their values as given by the equations (31) sect. 40, in terms of the variables x, y, z. The discussed argument, which concerns the composition of functions which appear in the equations (24), will be recalled in the following Capo in order to deduce from it a very important consequence. Here it will be useful to imagine that, in the left-hand sides [of the aforementioned equations], in the independent variables of the

quantità Λ, Ξ, ec. siano stati sostituiti ai coseni b_1, b_2, b_3.... i loro valori equivalenti espressi cogli a_1, a_2, a_3.... e cogli altri $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec., siccome dicemmo alla fine del num.°54.: e che dappertutto lex, y, z abbiano ripresi i valori (1) del num.°33. fatti colle p, q, r. Vediamo allora mentalmente che nei secondi membri le sei quantità $2A, 2B$, ec. ritornano funzioni delle p, q, r e delle a_1, a_2, a_3.... quali ce le dà immediatamente il riferimento del corpo ai primi assi. Ed ecco il vero punto di vista di dove riconoscere il grande vantaggio che verremo a ritrarre dalle equazioni (24). Quelle nove quantità $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec., le quali, secondo l'ultimo concetto stanno dentro le Λ, Ξ, ec. mischiate colle a_1, a_2, a_3... e colle p, q, r, nei secondi membri sono esplicite, non entrando per niente a formare le espressioni $2A, 2B, 2C, D, E, F$.Possiamo quindi dar loro valori particolari a fine di modificare opportunamente le quantità dei primi membri, ossia (ciò che vale lo stesso) possiamo appoggiarci agli assi delle p, q, r per andare in cerca di altri assi delle x, y, z dotati di proprietà speciali.

57. Un'idea che suggerisce per la prima si è di determinare le $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. in maniera che una delle sei quantità formanti i primi membri delle equazioni (24), per esempio la Λ , riesca massima o minima. Rammentandoci che abbiamo l'equazione di condizione $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ (prima delle (4) num.°33.), la ridurremo col secondo membro zero, ne moltiplicheremo il primo membro per un coefficiente indeterminato λ , e aggiungendo il prodotto alla quantità Λ , tratteremo tal somma come se le $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ fossero fra di loro indipendenti; così arriveremo alle equazioni

$$\begin{aligned} 2A\alpha_1 + D\beta_1 + E\gamma_1 &= \lambda\alpha_1 \\ D\alpha_1 + 2B\beta_1 + F\gamma_1 &= \lambda\beta_1 \\ E\alpha_1 + F\beta_1 + 2C\gamma_1 &= \lambda\gamma_1. \end{aligned} \tag{43}$$

Dividendole tutte per uno dei coseni da determinarsi, per esempio per α_1, si possono dalle tre equazioni eliminare i due rapporti

quantities Λ, Ξ, etc. to the cosines b_1, b_2, b_3.... have been substituted their equivalent values expressed in terms of the cosines a_1, a_2, a_3.... and the cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc., as we said at the end of sect. 54: and that everywhere the variables x, y, z are replaced by the values (1) of sect.33 calculated in terms of the variables p, q, r. In our mind we will then see that in the right-hand sides the six quantities $2A, 2B$, etc. become again functions of the variables p, q, r and of the cosines a_1, a_2, a_3.... as the reference of the body to the first axes immediately allowed us to assess. Here is the correct point of view from which we will recognize the great advantage which we can obtain from equations (24). Those nine quantities $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ect., on which, following the last reasoning, depend the quantities Λ, Ξ, etc. mixed with the variables a_1, a_2, a_3... and p, q, r, in the right-hand sides are explicit while they do not concur at all to form the expressions for $2A, 2B, 2C, D, E, F$. We can therefore give to them some particular values in order to suitably modify the quantities in the left-hand sides, that is (what is the same) we can start from the axes of the variables p, q, r to look for other axes (having as variables the x, y, z) which are endowed with special properties.

57. The first idea which is evoked in the mind is to determine the $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. in such a way that one of the six quantities appearing in the left-hand sides of the equations (24), for instance the Λ , reaches a maximum or minimum value. Recalling that we have the equation of condition $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ (the first equation in (4) sect. 33), we will replace it with an equivalent one having vanishing right-hand side, we will multiply the left-hand side times an indetermined coefficient λ, and by adding the so formed product to the quantity Λ, we will treat such sum as if the variables $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ were independent one of the other; we will thus arrive at the equations

$$\begin{aligned} 2A\alpha_1 + D\beta_1 + E\gamma_1 &= \lambda\alpha_1 \\ D\alpha_1 + 2B\beta_1 + F\gamma_1 &= \lambda\beta_1 \\ E\alpha_1 + F\beta_1 + 2C\gamma_1 &= \lambda\gamma_1. \end{aligned} \tag{43}$$

By dividing all the last equations by one of the cosines to be determined, for instance by α_1, one can eliminate from the three equations the two ratios

$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$, e allora si ottiene per determinar λ l'equazione del terzo grado

$$\lambda^3 - 2(A+B+C)\lambda^2 + \left(4AB+4AC+4BC-D^2-E^2-F^2\right)\lambda$$
$$+2AF^2+2BE^2+2CD^2-8ABC-2DEF=0 \quad (*)^1 \tag{44}$$

già nota (quanto alla forma) in meccanica, e trattata da varj autori.

La stessa ricerca poteva istituirsi a fine di render massima o minima la Ξ , visto il suo valore datoci dalla seconda delle (24), avvertendo che fra le $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sussiste un' equazione di condizione che si legge nella seconda delle equazioni (4) num.°33. Saremmo per tal guisa giunti alle equazioni

$$\begin{aligned} 2A\alpha_2 + D\beta_2 + E\gamma_2 &= \mu\alpha_2 \\ D\alpha_2 + 2B\beta_2 + F\gamma_2 &= \mu\beta_2 \\ E\alpha_2 + F\beta_2 + 2C\gamma_2 &= \mu\gamma_2 \end{aligned} \tag{45}$$

essendo qui la μ il moltiplicatore introdotto dall'equazione di condizione. E la stessa ricerca istituita per rendere massima o minima la Π ci avrebbe porte le equazioni

$$\begin{aligned} 2A\alpha_3 + D\beta_3 + E\gamma_3 &= \nu\alpha_3 \\ D\alpha_3 + 2B\beta_3 + F\gamma_3 &= \nu\beta_3 \\ E\alpha_3 + F\beta_3 + 2C\gamma_3 &= \nu\gamma_3 \end{aligned} \tag{46}$$

in cui la ν fa le veci delle λ, μ nelle simili.

Siccome le (45) non diversificano dalle (43) se non per esservi le $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ in luogo delle $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, e la μ in luogo della λ , è evidente che, eliminate le $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, arriveremo alla stessa equazione di terzo grado (44), colla sola differenza

$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$, and then -in order to determine λ– we get the third order polynomial equation

$$\lambda^3 - 2(A+B+C)\lambda^2 + \left(4AB+4AC+4BC-D^2-E^2-F^2\right)\lambda$$
$$+2AF^2+2BE^2+2CD^2-8ABC-2DEF=0 \quad (*)^1 \tag{44}$$

which is already known (for what concerns its structure) in mechanics and was studied by various authors.

The same problem could have been posed by looking for the maximum or minimum value for the quantity Ξ , considered that its value is given by the second among the equations (24), and recalling that among the quantities $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ an equation of condition holds which can be read in the second of the equations (4) sect. 33. In such a way we would have got the equations

$$\begin{aligned} 2A\alpha_2 + D\beta_2 + E\gamma_2 &= \mu\alpha_2 \\ D\alpha_2 + 2B\beta_2 + F\gamma_2 &= \mu\beta_2 \\ E\alpha_2 + F\beta_2 + 2C\gamma_2 &= \mu\gamma_2 \end{aligned} \tag{45}$$

being here μ the multiplier to be introduced because of the equation of condition. And the similar problem posed to render maximum or minimum the value of Π would have produced the equations

$$\begin{aligned} 2A\alpha_3 + D\beta_3 + E\gamma_3 &= \nu\alpha_3 \\ D\alpha_3 + 2B\beta_3 + F\gamma_3 &= \nu\beta_3 \\ E\alpha_3 + F\beta_3 + 2C\gamma_3 &= \nu\gamma_3 \end{aligned} \tag{46}$$

where the multiplier ν replaces the multipliers λ, μ in the corresponding equations.

As the equations (45) are different from the equations (43) only because the quantities $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ appear in it instead of the quantities $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, and the multiplier μ replaces the multiplier λ , it is evident that, once eliminated the quantities $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, we will get the same equation of third order (44), with the only difference

che l'incognita sarà la μ invece della λ : e lo stesso accadrà eliminando le $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ dalle (46). Da ciò non dobbiamo conchiudere che le λ, μ, ν siano fra loro eguali, ma che corrispondono alle tre radici dell'equazione (44) . Per ogni terna di equazioni (43), (45), (46), aggiunta la relativa equazione di condizione, si possono ricavare i valori dei tre coseni, e quindi determinare tutte le nove quantità $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. in funzioni delle sei $2A, 2B, 2C, D, E, F$. Questo calcolo è già stato fatto da altri (si può consultare Cauchy, Leçons sur l'application du calcul infinitèsimal à la Gèometrie. T.I. pag. 241) : ed anche senza giovarsi di altri sussidj, si capisce subito come deve essere condotto. Dove parmi che il cammino possa essere di molto abbreviato, è quando si tratta di venire alla conseguenza che le tre rette determinanti gli angoli di coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. sono poi fra loro ad angolo retto, vale a dire costituiscono un sistema di assi ortogonali : il che analiticamente si riduce a provare che essendovi fra le dette nove quantità le prime tre equazioni delle (4) num.°33., nel nostro caso sussistono anche le seconde tre. Ecco una via facile per giungere a tal conclusione. Si moltiplichino rispettivamente per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ le equazioni (45), e quindi si sommino ; nel far la somma de' primi membri si raccolgano i coefficienti totali delle $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, e vi si sostituiscano i valori dati dalle equazioni (43) : avremo un'equazione che potremo scrivere

$$(\lambda - \mu)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0.$$

Facciasi la stessa operazione sulle equazioni (46), e conseguiremo l'altra equazione

$$(\nu - \lambda)(\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3) = 0.$$

Si moltiplichino poi rispettivamente le (46) non più per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, ma per $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, e sommandole e sostituendo ai coefficienti totali delle $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ i valori dati dalle equazioni (45), otterremo la terza

$$(\mu - \nu)(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3) = 0.$$

that the unknown variable will be the μ instead of the λ : and the same will happen by eliminating the variables $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ from the equations (46). These considerations do not imply that the multipliers λ, μ, ν are equal one to the other but instead that they correspond to the three roots of the equation (44). For each triple of equations (43), (45), (46), when one has added the corresponding equation of condition it is possible to calculate the values of the three cosines and therefore it is possible to determine all the nine quantities $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc. as functions of the six $2A, 2B, 2C, D, E, F$. This calculation has been already performed by others (one can consult Cauchy, Leçons sur l'application du calcul infinitèsimal à la Gèometrie. T.I. pp. 241): and also without adding more details, one immediately understands how to perform it. There is however a step which can be greatly abbreviated: it is when one has to deduce that the three straight lines which form the angles having as cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc. are orthogonal one to the others, that is equivalent to say that they form an orthogonal system of coordinates: analytically this last statement reduces to prove that if the said nine quantities verify the first three among the equations (4) sect. 33, then in our case also the second set of three [among equations (4) sect. 33] hold. Here an easy way for getting such a conclusion. Let us multiply respectively times the quantities $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ the equations (45), and then let us sum the obtained expression; in simplifying the sum of the left-hand sides let us factor the quantities $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, thus finding their total coefficients and then substitute the values given by the equations (43) : we will get an equation which we will be able to write

$$(\lambda - \mu)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0.$$

One can then repeat the same operation on the equations (46), and then get the following equation

$$(\nu - \lambda)(\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3) = 0.$$

If then one does not multiply the (46) times the cosines but -instead- times the cosines $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, and then sums all of them, factors the cosines $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ and substitutes in their coefficients the values given by the equations (45), we will get the third equation

$$(\mu - \nu)(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3) = 0.$$

Ora, se i valori delle tre radici λ, μ, ν dell'equazione (44) sono fra loro diversi (senza di che non avremo più tre rette distinte, ma una sola), i primi fattori nei primi membri delle tre ultime equazioni non possono essere zero : conviene pertanto che lo siano i secondi fattori : il che prova ciò che era in questione .

Osservisi che la somma dei primi membri delle (45) moltiplicati rispettivamente per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ riproduce (equazioni (24)) il valore della quantità $-\Sigma$: la somma simile dei primi membri delle (46) moltiplicati per gli stessi coseni, presenta quello della quantità $-\Phi$: e l'altra simile delle stesse (46) moltiplicate per $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, il valore della quantità $-\Psi$. E siccome abbiamo già provato che queste somme sono zero, emerge la bella proprietà dell'annullarsi le quantità Σ, Φ, Ψ per quei tre assi ortogonali pei quali le Λ, Ξ, Π hanno le proprietà analitiche spettanti al massimo o al minimo.

58. Abbiamo trovato, pel corpo qualunque che consideriamo, tre assi ortogonali dotati della descritta insigne proprietà, appoggiandoci ad assi delle p, q, r arbitrariamente posti nello spazio, e mediante i valori delle sei quantità $2A, 2B, 2C, D, E, F$ legate ai detti assi. Se fossimo partiti da assi presi nello spazio in posizione affatto diversa, saremmo arrivati agli stessi assi pel corpo, aventi quella proprietà? Rispondo che sì : e ciò è cosa degna di molta attenzione. C'è dell'arbitrario nel mezzo che si adopera per la determinazione degli anzidetti assi del corpo, ma l'arbitrario sparisce quando si ottiene il fine. Così si prova che gli assi ortogonali dotati di quella proprietà sono unici per ogni molecola nel corpo alla fine del tempo t, e inerenti alla natura del corpo stesso. Dissi alla fine del tempo t, il che torna come dire sono assi istantanei : giacchè le quantità $2A, 2B$, ec. da cui vedemmo dipendere gli angoli che ne fissano la posizione, sono, generalmente parlando, funzioni del tempo.

Descriverò e non esporrò il calcolo atto a dimostrare l'asserita proposizione : credo potermi prendere un tal comodo per due ragioni : la prima, che l'esposizione riescirebbe lunga, a

Now if the values of the three roots λ, μ, ν in the equation (44) are different one from the others (without such a condition we will no longer have three distinct straight lines, but one line only) the first three factors in the right-hand sides of the three last equations cannot be equal to zero: it is then necessary that the second factors must vanish: which proves what was intended.

One has also to observe that the sum of the right-hand sides of the equations (45) respectively multiplied times the quantities $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ reproduces (see the equations (24)) the value of the quantity $-\Sigma$: that the sum obtained similarly of the left-hand sides of the equations (46) multiplied times the same cosines gives the value of the quantity $-\Phi$: and the other similar sum of the same equations (46) multiplied times the cosines $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, gives the value of the quantity $-\Psi$. As we have already proven that these sums are vanishing, it emerges the beautiful property which consists in stating that the quantities Σ, Φ, Ψ are vanishing when are chosen those three orthogonal axes for which the quantities Λ, Ξ, Π have the analytical properties appertaining to the maxima or minima.

58. We have found, for the generic body which we are considering, three orthogonal axes which enjoy the described remarkable property, starting from the consideration of the axes of the variables p, q, r which were arbitrarily chosen in the space and of the six quantities $2A, 2B, 2C, D, E, F$ related to said axes. Had we started from axes chosen in the space in a completely different position, would we have obtained the same axes for the body, having the aforementioned property? I answer that: yes and this is a circumstance which deserves a great attention. The means by which one can get the aforementioned axes of the body are arbitrary, but when one gets the final result the arbitrariness disappears. In this way one proves that the orthogonal axes verifying that property are univocally determined for every molecules in the body at the end of the time t, and these axes are characteristic of the nature of the body itself. I said at the end of time t which is equivalent to say that they are time varying axes, as the quantities $2A, 2B$, etc. on which depend the angles which fix their position, are, in general, functions of the time.

I will describe and I will not expound the calculation needed to demonstrate the asserted proposition: I believe that I can allow myself this ease for two reasons: the first one is that the exposition would be necessarily so lenghty that

danno di quell'economia di spazio alla quale mi tengo obbligato in questa Memoria : la seconda, che malgrado la sua prolissità il calcolo è facile, ed il lettore intelligente non avrà bisogno che di pazienza se gli venga voglia di stenderlo.

Chiamo (I) il sistema arbitrariamente posto degli assi p, q, r ; e (III) il sistema degli assi trovati mediante le equazioni (43), (45),(46), dove converrà accentare tutte le nove quantità $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec., le quali non sono ora più le generali, avendo ricevuta la determinazione portata dalle stesse equazioni : queste $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, ec. significano le relazioni angolari fra (III) ed (I) . Chiamo (II) un altro sistema di assi ortogonali diverso da quello delle p, q, r, comunque posto nello spazio relativamente ad esso sistema (I) : e per rapporto a questo nuovo sistema (II) indico con $2A', 2B', 2C', D', E', F'$ le solite sei quantità. Chiamo altresì (IV) il sistema degli assi ortogonali ottenuto partendo da (II) col mezzo di equazioni fatte come le (43), (45),(46) : dove bisognerà esprimere con lettere diverse, per esempio con l'_1, m'_1, n'_1, l'_2, ec., i soliti nove coseni, che significheranno fra (IV) e (II) quello che $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, ec. significano fra (III) e (I) . Se vogliamo riferire anche il sistema (IV) direttamente al sistema (I), ci è necessario designare con nuove lettere $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, ec. i nove coseni portati da questa diretta relazione. Ma possiamo fare un tal riferimento in un'altra maniera : mettere nelle nove equazioni simili alle (43), (45),(46), fra (IV) e (II) per $2A', 2B', 2C', D', E', F'$ gli stessi valori delle $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ offertici dalle equazioni (24), giacchè sono valori per assi in qualsivoglia modo collocati rispetto a quelli delle p, q, r : e mettere per l'_1, m'_1, n'_1, l'_2,, ec. i valori equivalenti datici dalla Geometria analitica e formati cogli $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. fra (II) e (I) e cogli $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, ec. fra (IV) ed (I). Allora, mediante un processo di calcolo che è il medesimo praticato al num°.55. per passare dalle equazioni (41) alle tre seguenti, otterremo nove equazioni finali che non diversificheranno dalle (43), (45),(46) se non per esservi le $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, ec. in luogo delle $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, ec.

my engagement to keep the volume of this Memoir limited would be seriously harmed: the second reason is that -notwithstanding its verbiage- the calculation is easy and the intelligent reader will simply need patience if he will be willing to explicit it.

I call (I) the arbitrarily chosen system having axes with variables p, q, r and (III) the system of the axes found by means of the equations (43), (45),(46), where it will be convenient to label with an accent all the nine quantities $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc., which now have no longer the most general value, as they are determined by means of the aforementioned equations: these fixed parameters $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, etc. represent the angular relations between (III) and (I) . I call (II) another system of orthogonal axes different from the system of the variables p, q, r, placed in a generic way with respect to the system (I) : and with respect to this new system (II) I denote by $2A', 2B', 2C', D', E', F'$ the usual six quantities. I call also (IV) the system of the orthogonal axes obtained starting from (II) by means of equations having the same form as the equations (43), (45), (46): where it will be necessary to express with different letters, for instance with l'_1, m'_1, n'_1, l'_2, etc., the usual nine cosines, which will have -in the passage from (IV) to (II)- the same meaning which the quantities $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, etc. have in the passage from (III) to (I). If we want to refer also the system (IV) directly to the system (I) it is necessary to designate with the new letters $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, etc. the nine cosines related to this last direct transformation. However the determination of such transformation can be obtained in another way: one can replace in the nine equations similar to the equations (43), (45),(46), relating (IV) to (II) for the quantities $2A', 2B', 2C', D', E', F'$ the same values of the quantities $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ given to us by the equations (24), as such values are those relative to reference axes placed in a whatsoever manner with respect to the axes of variables p, q, r : and assume for the cosines l'_1, m'_1, n'_1, l'_2, etc. those equivalent values given to us by the Analytical Geometry and formed with the cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc. from (II) to (I) and with the cosines $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, etc. from (IV) to (I). Then, by means of a process of calculation which is the same of the one used in sect. 55 in order to get from equations (41) those three equations which follow them [in the same sect. 55], we will get nine final equations which will differ from equations (43), (45), (46) only because the cosines $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, etc. replace the cosines $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \alpha'_2$, etc.

Ma queste nove quantità ricevono appunto la determinazione dei loro valori dalle dette nove equazioni : dunque i valori sono i medesimi : dunque il sistema (IV) coincide col sistema (III).

59. Si può provare tenendo dietro a quanto ha scritto il Sig. Cauchy in un caso analogo nell'opera superiormente citata, che i tre assi del corpo contraddistinti dalla proprietà di cui parliamo, coincidono coi tre assi di una elissoide espressa dalla equazione

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + D\xi\eta + E\xi\zeta + F\eta\zeta = \frac{1}{2}.$$

È ben certo che secondo la diversa natura dei corpi presi ad esame, i suddetti assi debbono presentare altre proprietà speciali meccaniche e fisiche, diventando in qualche caso i medesimi per tutte le molecole : e che la strada per venirne in cognizione non può essere che quella d'insistere sull'analisi della quale si è cercato di mettere qui più in chiaro i principj.

60. Sul fine di questo Capo porrò due osservazioni generali.

La prima tende a sdebitarmi di una promessa incorsa fino dal num°.7. Cap.I., quando dissi potersi prendere la disposizione delle molecole di un liquido invece di quella delle molecole ai vertici di picciolissimi cubi, purchè la densità dei due ammassi resti costante ed eguale in entrambi. Si ha una riconferma di quanto là si è asserito, riguardando la composizione delle quantità analitiche rappresentanti le coordinate dei punti del sistema, sotto quel punto di vista che abbiamo cercato di indicare verso la fine del num°.45, dove sponemmo il principio analitico di que' sestinomj che si moltiplicano successivamente. Ivi dicemmo che quel grado di composizione può spingersi innanzi a piacimento, e si può anche da un grado più spinto retrocedere ad uno che lo sia meno. Se quindi ci accomoda pel meccanismo del calcolo assumere quale ultimo termine di confronto, non le coordinate spettanti alla distribuzione del liquido, ma quelle spettanti alla distribuzione dei cubi, possiamo farlo, come pure ci è lecito retrocedere mentalmente da questa a quella per fissare le idee sopra un fatto esistente

However the values of these nine quantities are determined by the said nine equations: therefore these values are the same: therefore the system (IV) coincides with the system (III).

59. Following what written by Mr. Cauchy in an analogous case in the work previously cited, one can prove that the three axes of the body, characterized by the property about which we are discussing, coincide with the three axes of the ellipsoid expressed by the equation,

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + D\xi\eta + E\xi\zeta + F\eta\zeta = \frac{1}{2}.$$

It is certain that, following the different nature of the bodies under our consideration, the said axes must present other particular mechanical and physical properties, becoming in some cases the same for all molecules: [it is also certain] that the way for determining them can be only that one which consists in insisting in performing the analysis whose principles I tried to make here clearer.

60. Before concluding this Capo, I will formulate two general observations.

The first one is intended in order to fulfill the promise which was formulated already in sect. 7. Cap.I, when I said that it was possible to assume that the configuration of the molecules in a liquid could be replaced by the configuration of the molecules placed at the vertices of very small cubes, under the condition that the density of the two clusters remains constant and equal in both cases. One gets a confirmation of what was there stated when he reconsiders the composition of the analytic quantities which represent the coordinates of the points of the system, assuming the point of view which we tried to indicate at the end of sect. 45, where we exposed the analytical principle of those sextinomials which are multiplied successively. We said there that such a degree of composition can be pushed forward as one likes and that it is possible also from a more advanced degree [of composition] to move back to a less advanced one. If therefore one adjusts the calculation procedure so that the last reference configuration does not involve the coordinates which are relative to the liquid distribution [of molecules] but actually involves the configuration based on the distribution of cubes, we can accept his procedure, as well as it is licit to us to mentally move back from one configuration to the other in order to fix our ideas about a phenomenon existing

in natura. Quantunque ci sia ignoto il modo con cui vengono espresse le une per le altre le coordinate spettanti a queste due composizioni, l'ignoranza non ci nuoce: andando su o giù di un grado per la scala di que' sestinomj, gl'integrali triplicati possono intendersi analogamente cambiati, e l'effetto rimane il medesimo. Si mediti sui trapassi da coordinate a coordinate praticati dopo quel num°.45, e si capirà la verità della nostra asserzione.

Passando alla seconda riflessione, inviterò il lettore a volgere un colpo d'occhio a quel principio uno, di dove emanano tutte le equazioni che comprendono innumerabili verità. Un tal principio sta nel riferimento simultaneo di un qualunque sistema a due terne di assi ortogonali : esso può adoperarsi in due maniere e in entrambe produce grandiosi effetti. Si adopera in una prima maniera per rischiarare quanto già dicevasi intorno ai moti minimi compatibili colle equazioni di condizione a fine di dimostrare il principio delle velocità virtuali, ed anche gli altri della conservazione del moto del centro di gravità, e delle aree. Invece di concepire in tal caso le $\delta x, \delta y, \delta z$ dei diversi punti del sistema come velocità virtuali o spazietti infinitesimi descritti in virtù di quel moto fittizio (il quale fu poi altresì detto dopo Carnot un moto geometrico), è assai più naturale e non ha nulla di misterioso il ravvisarle quali aumenti che prendono le coordinate degli anzidetti punti quando il sistema si riferisce ad altri tre assi ortogonali vicinissimi ai primi, come se questi si fossero di pochissimo spostati. Tutti sanno che noi acquistiamo l'idea del moto osservando relazioni di distanze : quelle coordinate tanto possono mutare per un movimento del sistema, stando fermi gli assi, come per un movimento degli assi, stando fermo il sistema. Intendendo la relazione al secondo modo, si viene a supplire ai così detti moti geometrici, e allora si capisce chiaro come gli aumenti delle coordinate abbiano luogo senza alterazioni nelle azioni reciproche delle parti del sistema le une sulle altre. Questa maniera di veder la cosa è indotta, senza alcuno sforzo, dal riflettere

in nature. Although it is for us unknown the particular way in which the coordinates relative to each of these two configurations can be expressed in terms of the coordinates relative to the other, this ignorance is not harmful for us: moving back and forth through one degree of composition in the ordered set of the aforementioned sextinomials the triple integrals can be assumed to change correspondingly and the final effect is the same. The reader will meditate about the changes of coordinates performed after the mentioned sect. 45, and the truth of our assertion will be understood.

Moving now to the second forethought, I will invite the reader to consider that fundamental principle from which are emanating all those equations which include innumerable truths. Such a principle consists in the simultaneous reference of a system whatsoever to two triples of orthogonal axes: it can be used in two manners and in both of them it produces grandiose effects. It can be used in a first manner to make clearer what was already said about the minimizing motions compatible with the equations of condition in order to demonstrate the Principle of Virtual Velocities together with the other ones i.e. the Conservation Principles of the motion of the centre of mass and of the areas. In this first manner, instead of conceiving the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ of the different points of the system as virtual velocities or very small infinitesimal displacements covered during that fictitious motion (which was called after Carnot also a geometric motion) it is much more natural, and there is noting of mysterious in doing so, to regard them as the variations which are imposed to the coordinates of the aforementioned points when the system is referred to three other orthogonal axes very close to the first reference axes, as if these last ones were undergoing a very small displacement. Everybody knows that we perceive the idea of motion when observing the relationships among distances: the said coordinates may vary either because of a motion of the system, remaining the axes fixed, or because of a motion of the axes, remaining fixed the system. When the relationship among distances is intended in this last second way, one can avoid the consideration of so-called geometric motions, and then it is possible to understand clearly as the variations of the coordinates take place without any alteration of reciprocal actions of one part of the system on the others. This way of reasoning is induced, without any effort, when one considers that

essere arbitraria nello spazio la posizione degli assi cui si riferisce un sistema, sia in moto, sia in equilibrio : che era giusto di fare attenzione anche a un sì fatto arbitrio, il quale, messo a calcolo, dovea pur condurre a qualche risultato diverso da quelli che si ottengono quando ad esso arbitrio non si bada. In virtù di un tal moto degli assi le $\delta x, \delta y, \delta z$ dei diversi punti assumono i valori dati dalle equazioni (39) num°.42. i quali sono quei valori particolari che soddisfanno a tutte le equazioni di condizione esprimenti gli effetti delle forze interne, siccome vedemmo al num°.48.

Il riferimento simultaneo del sistema a due terne di assi ortogonali giuoca poi efficacemente in un' altra maniera, essendo due i metodi con cui si possono trattare le equazioni di condizione, giusta l'esposto al num°.17. Cap. II. Qui s' intende parlare di quel metodo che lascia alle $\delta x, \delta y, \delta z$ tutta la loro generalità, e tratta le equazioni di condizione, introducendo moltiplicatori indeterminati. In tal caso la contemplazione delle due terne di assi giova per l'impianto delle dette equazioni di condizione, che altrimenti non si saprebbero assegnare in generale : in esse compajono per l'indicazione delle derivate parziali quelle variabili p, q, r, che ad operazioni finite, sono poi destinate ad uscir dal calcolo. Un tal punto di vista parmi sfuggito a Lagrange e ad altri Geometri : ad esso si riferisce quanto nella presente Memoria può essere più meritevole di attenzione. Circa poi al non comprendersi chiaramente come da dette sei equazioni di condizione vengano significati gli effetti delle forze interne, mi riporterò alle considerazioni generali poste nel prologo.

CAPO V.

Del moto e dell'equilibrio de' fluidi.

61. Abbiamo dato le equazioni generali del moto di un corpo qualunque : nessun dubbio adunque che in esse siano comprese anche le equazioni generali del moto de' fluidi. Vo-

it is arbitrary in the space the position of the axes to which one refers a system, which may be at rest or in motion: [I claim that] it was right to consider the consequences of such arbitrariness, which once transformed into calculations had necessarily to lead to some results which are different from those obtained when said arbitrariness is not considered. Because of such motion of the reference axes the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ of the different points assume the values given by the equations (39) sect. 42 which are those particular values which satisfy all the equations of condition which express the effects of internal forces as we have seen in sect. 48.

The simultaneous reference of the system to two triples of orthogonal axes can be also exploited in another manner, as there are actually two methods with which one can treat the equations of condition, exactly as shown in sect. 17 Cap. II. Here we refer to that method which leaves to the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ all their generality, and treats the equations of condition by introducing some indeterminate multipliers. In such case the consideration of the two triples of axes is very useful to establish the nature of said equations of conditions, which otherwise could not be assigned in general: in them -through the indication of partial derivatives- do appear those variables p, q, r, which, when the operations are concluded, will disappear from the calculations. Such point of view -in my opinion- seems to have been neglected by Lagrange and by other Geometers: Everything in this Memoir that can be more worthy of attention refers to this point of view. Finally I refer to the general considerations developed in the Prologue for clarifying how the aforementioned six equations of condition can describe the effects of internal forces.

CAPO V.

Motions and equilibrium of fluids

61. We gave the general equations of motion of a body whatsoever: no doubt, therefore, that they are also included in the general equations of fluid motion.

lendo però deciferare queste seconde, due cose si richieggono : la prima, una definizione che ben determini in che consista lo stato fluido di un corpo: la seconda, l'introduzione delle analoghe modificazioni nelle equazioni generali onde piegarle alla più particolare rappresentazione di cui ora ci viene il bisogno.

Di tutte le definizioni che si sono date dei fluidi parmi la più chiara quella dei fisici moderni, la quale inoltre è la sola che renda ragione del perché uno stesso corpo possa passare dallo stato solido al fluido, e ritornare dal secondo al primo. Presentemente si ritiene che lo stato fluido in un corpo provenga dalla distanza rispettiva che prendono le sue molecole maggiore che nello stato solido : in conseguenza cessa, o almeno non dà più effetto apprezzabile, l'azione secondaria delle molecole dovuta alla loro diversa figura, azione che nella minore lontananza di esse era in giuoco e produceva la solidità. Ecco le parole del Poisson « Dans les corps solides, cristallisés ou

« non, la cause particuliére qui retient les molécules sur les
« directions ou elles sont plus ou moins resserrées, ne peut
« être que la partie de leur action qui dépend de leur forme
« et de leur situation relatives. Si l' on écarte les molécules
« par une addition de calorique, cette force secondaire diminue
« en général plus rapedement que l'autre partie de leur action
« mutuelle: son effet peut devenir insesible: et les corps passe

« alors á l' état fluide » . (Journal de l' École Polyt. Cah. XX. pag. 93.) . Pertanto i corpi fluidi sono quelli in cui le molecole, quantunque non lo siano, possono riguardarsi come se fossero sferiche : infatti se fossero sferiche non avrebbe più luogo azione dovuta alla figura di esse (rivedi il già detto al num 54).

Adottata questa definizione, vediamo come debbano essere ora considerate le sei quantità $2A, 2B, 2C, D, E, F$, e le sei $\Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi$ componenti le generali equazioni (24) num.50. Nelle prime non debbono più entrare i coseni a_1, a_2, a_3..... e non più nelle seconde i coseni b_1, b_2, b_3.....: infatti, essi erano (num.54) soltanto introdotti quando sussistevano le azioni della seconda specie, che più non si danno nei fluidi.

Desire, however, to decipher these latter, two things are required: first, a definition that well determines in what consists the liquid state of a body: the second, the introduction of the analogous changes in the general equations in order to adapt them to the most special representation of which now there is a need.

Of all the definitions of fluids that have been given [up to now] the clearest one seems to me that of the modern physics, which is also the only one that makes reason why the same body can pass from the solid to the fluid, and return from the second to the first. At present it is believed that the fluid state in a body comes from the respective distance its molecules take [which is] greater than in the solid state: in consequence, the secondary action of the molecules due to their different shape cease, or at least no longer gives any significant effect, an action that in their shorter distance played a role and produced the solidity. Here are the words of Poisson. « Dans les corps solides, cristallisés ou

« non, la cause particuliére qui retient les molécules sur les
« directions ou elles sont plus ou moins resserrées, ne peut
« être que la partie de leur action qui dépend de leur forme
« et de leur situation relatives. Si l' on écarte les molécules
« par une addition de calorique, cette force secondaire diminue
« en général plus rapedement que l'autre partie de leur action
« mutuelle: son effet peut devenir insesible: et les corps passe

« alors á l' état fluide » . (Journal de l' École Polyt. Cah. XX. p. 93). Therefore the fluid bodies are those in which the molecules, although they are not, may be regarded as if they were spherical: in fact, if they were spherical the action due to their shape would no longer have place (review the already said at sect. 54).

Since this definition has been adopted, we see how the six quantities $2A$, $2B$, $2C$, D, E, F, and the six Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ components of the general equations (24) sect. 50 are to be considered now. The cosines a_1, a_2, a_3 ... no longer have to enter in the first ones and the cosines b_1, b_2, b_3... no longer in the second ones: in fact, they were (sect. 54) introduced only when the actions of the second species did exist, which no longer exist in fluids.

Così quelle sei prime quantità si mutano nelle seconde sei, unicamente col mutare le p, q, r nelle x, y, z. Il ch. Geometra Sig. Mossotti ha espressa efficacemente una tale proprietà colle seguenti parole : " i fluidi differiscono dai solidi in quanto che le forze di ciascuna molecola "spiega sulle altre, sono, probabilmente per causa di un maggiore scostamento, indipendenti "dall'orientazione degli assi della sua figura ". (Lezioni Elem. di fisica matematica. T.I. pag. 116.) Però quantunque le $2\Lambda, 2B$, ec. debbano essere fatte colle p, q, r come le Λ, Ξ, ec. colle x, y, z, e solo differirne in quanto contengono le prime lettere in luogo delle seconde : tuttavia non hanno precisamente questa idea nelle equazioni (24) num.50. Se ben si considera l' andamento analitico del num.50., le $2A, 2B, 2C, D, E, F$ in quelle equazioni (24) hanno ricevuto al posto delle p, q, r i loro valori dati dalle equazioni (31) num°.40. Veramente in una tale sostituzione spariscono le dodici quantità $f, g, h, \alpha_1, \beta_1$, ec., e l'effetto torna lo stesso come scrivendo le x, y, z in luogo delle p, q, r. Per altro l'identità di queste due proposizioni non è evidente, e si può essere d'accordo sull'una senza conceder di subito l'altra. Si arriva a convincersene richiamando le espressioni (35), (38) del num°.54, e verificando col fatto che la sostituzione dei valori (31) num°.40. muta le prime nelle (36) e le seconde in altre a loro simili, proprio come se si scrivessero le x, y, z al luogo delle p, q, r. L'effetto succede in forza delle equazioni (4) num°.33. Lagrange avea notata la singolarità di questo risultamento analitico nelle espressioni come le (35) (Vedi M.A.T.I. pag. 254) e ultimamente il Sig. Cauchy fece di questa proprietà in alcune funzioni delle coordinate soggetto di speciali ricerche (Exercices d' Analyse et de Physique Math. T.I. pag.107.).

Conviene ora riflettere che le azioni fra molecola e molecola, quando non è in giuoco la figura delle medesime, non possono dipendere che dalle reciproche distanze, e che per l'effetto complessivo di tutte queste azioni elementari sul punto (p, q, r) ovvero (x, y, z) possono anche influire gli angoli che

So those first six quantities are transformed in the second six, only by changing the p, q, r into the x, y, z. The respectable Geometer Mr. Mossotti has effectively expressed such a property with the following words: "Fluids differ from solids because the forces each molecule exerts on the others, are probably due to a larger offset, independent of the orientation of the axes of its shape." (Elem. Lectures of mathematical physics. T.I. p. 116.) But although the $2A$, $2B$, etc. should be done with the p, q, r as the Λ, Ξ,, etc. with the x, y, z, and only differ as they contain the first letters in place of the second ones: however, they [the 2A, 2B, etc] have not precisely this idea in the equations (24) sect. 50. If you carefully consider the analytical treatment [performed] in sect. 50, the $2A$, $2B$, $2C$, D, E, F in those equations (24) have received in place of the p, q, r their values given by equations (31) of sect. 40. The twelve quantities f, g, h, α_1, β_1, and etc. really disappear in such a substitution, and the effect turns to be the same as writing back the x, y, z in place of the p, q, r. Moreover the equivalence of these two propositions is not obvious, and one can agree with the first without necessarily being in agreement with the second one. You get to be convinced by invoking the expressions (35), (38) of sect. 54, and verifying with the fact that the substitution of the values (31) sect. 40 transforms the first ones in the (36) and the second ones in other similar to them, just as if the x, y, z were written in place of p, q, r. The effect happens by virtue of the equations (4) sect. 33. Lagrange had noticed the singularity of this analytical result in the expressions such as the (35) (see M. A. T. I. p. 254) and most recently Mr. Cauchy made of this property in some of the functions of the coordinates the subject of special studies (Exercices d'Analyse et de Physique Math. T. I. page 107.).

It is convenient now to reflect that the actions between molecule and molecule, when the shape of the same [molecules] is not considered, can not depend on the mutual distances, and that for the overall effect of all of these elementary actions on the point (p, q, r) or (x, y, z)

fanno fra loro le rette congiungenti le molecole. Siccome poi tanto negli uni che negli altri di detti elementi analitici (formole (35), (38)) l'indicata proprietà si verifica, saremo condotti ad ammettere ch' essa si verifica anche nelle sei quantità più volte ricordate. Adunque nelle equazioni (24) num°.50. le $2A, 2B$, ec. in cui le p, q, r hanno preso i valori (31) num°.40, vengono in sostanza ad aver ricevute le lettere x, y, z in luogo delle p, q, r, e con ciò si sono mutate nelle stesse Λ, Ξ, ec. dei primi membri.

Ma come va che nelle dette equazioni (24) veggonsi nei secondi membri i nove coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec., mentre, se ben si considerano le cose dette sul fine del num°.56, essi nel caso presente (stante l'assenza degli altri coseni $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ e dei corrispondenti $b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots$) non entrano né nelle $2A, 2B$, ec., né nelle Λ, Ξ, ec.? Sembra che in quelle equazioni (24) i secondi membri siano in contraddizione coi primi. Ciò è verissimo; ma è appunto dal non potere i nove coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. entrare nelle anzidette equazioni se non apparentemente, che emergono le proprietà per le quali le solite sei quantità vengono ad essere particolarizzate ed adattate al caso dei fluidi : il che passiamo a vedere.

62. Premettiamo che tra quei nove coseni essendovi sei equazioni sostanzialmente diverse (cioè le (3), o (4) del num°.33.), vi è modo di determinare sei di essi in funzione dei tre che rimangono, quando questi siano stati opportunamente scelti. Ecco le eleganti formole del Monge (*)[1]. Per le tre arbitrarie sono state scelte le tre quantità $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$, e avendo posto

$$\begin{aligned} M &= 1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 \\ N &= 1 + \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 \\ P &= 1 - \alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3 \\ Q &= 1 - \alpha_1 - \beta_2 + \gamma_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

[1](*) Lacroix. Traité de Calcul. T. I. pag. 533.

an influence can be exerted also by the angles which the straight lines joining the molecules make between them. Since then both in ones and in the others of these analytical elements (formulas (35), (38)) the indicated property occurs, we will be led to admit that it also occurs in the frequently recalled six quantities. Then in the equations (24) sect. 50. the $2A$, $2B$, etc., in which the p, q, r have taken the values (31) sect. 40, [the $2A$, $2B$, etc.] have substantially received the letters x, y, z in place of the p, q, r and in such a way they have been changed in the same Λ, Ξ, etc.. of the first members.

But how is it that in those equations (24) the nine cosines α_1, β_1, γ_1, α_2, etc.. are seen in the second members and, if well considering the things said on the end of sect. 56, they in this case (because of the absence of the other cosines a_1, a_2, a_3, ... and the corresponding b_1, b_2, b_3 ...) do not enter in $2A$, $2B$, etc. nor in Λ, Ξ, etc.? It seems that in those equations (24) the second members do conflict with the first ones. This is true; but it is just from the fact that the nine cosines α_1, β_1, γ_1, α_2, etc. can not enter into the above mentioned equations except apparently, that the properties emerge for which the usual six quantities are to be particularized and adapted to the case of fluids: which let us see.

62. Premise that between those nine cosines there being six substantially different equations (that is, the (3), or (4) of sect. 33), there is no way to determine six of them as a function of the remaining three, when these have been suitably chosen. Here are the elegant formulas by Monge (*)[1]. For the three arbitrary ones, the three quantities α_1, β_2, γ_3 have been chosen and having

$$\begin{aligned} M &= 1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 \\ N &= 1 + \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 \\ P &= 1 - \alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3 \\ Q &= 1 - \alpha_1 - \beta_2 + \gamma_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

[1](*) Lacroix. Traité de Calcul. T. I. p. 533.

il suddetto autore ha trovato essere

$$\begin{aligned}
\beta_{1} &= \frac{1}{2}\sqrt{NP} + \frac{1}{2}\sqrt{MQ} \\
\alpha_{2} &= \frac{1}{2}\sqrt{NP} - \frac{1}{2}\sqrt{MQ} \\
\alpha_{3} &= \frac{1}{2}\sqrt{NQ} + \frac{1}{2}\sqrt{MP} \\
\gamma_{1} &= \frac{1}{2}\sqrt{NQ} - \frac{1}{2}\sqrt{MP} \\
\gamma_{2} &= \frac{1}{2}\sqrt{PQ} + \frac{1}{2}\sqrt{MN} \\
\beta_{3} &= \frac{1}{2}\sqrt{PQ} - \frac{1}{2}\sqrt{MN}
\end{aligned} \tag{2}$$

formole che si possono non difficilmente verificare *a posteriori* sostituendo gli ottenuti valori (2) nelle equazioni (3) o (4) del num°.33. e riconoscendo come esse risultino identicamente soddisfatte.

Non è poi difficile dalle precedenti formole (2) dedurre gli sviluppi in serie secondo le potenze e i prodotti delle tre indeterminate $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$. Le operazioni si eseguiscono coi procedimenti ordinarj e ovvj , e fermandoci ai termini di due dimensioni, otteniamo :

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 1 - \frac{1}{2}\alpha_{1}^{2} - \frac{1}{2}\beta_2^2 + \text{ec.} \\
\alpha_3 &= 1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\gamma_3^2 + \text{ec.} \\
\gamma_2 &= 1 - \frac{1}{2}\beta_2^2 - \frac{1}{2}\gamma_3^2 + \text{ec.} \\
\alpha_2 &= -\gamma_3 + \alpha_1\beta_2 + \text{ec.} \\
\beta_3 &= -\alpha_1 + \beta_2\gamma_3 + \text{ec.} \\
\gamma_1 &= -\beta_2 + \alpha_1\gamma_3 + \text{ec.}
\end{aligned} \tag{3}$$

Ora sostituiscansi questi valori (3) nei secondi membri delle equazioni (24) num°.50., e ordinando per le potenze e i prodotti delle tre indeterminate $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$, avremo

the above mentioned author has found to be

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{NP} + \frac{1}{2}\sqrt{MQ} \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{NP} - \frac{1}{2}\sqrt{MQ} \\
\alpha_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{NQ} + \frac{1}{2}\sqrt{MP} \\
\gamma_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{NQ} - \frac{1}{2}\sqrt{MP} \\
\gamma_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{PQ} + \frac{1}{2}\sqrt{MN} \\
\beta_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{PQ} - \frac{1}{2}\sqrt{MN}
\end{aligned} \tag{2}$$

formulas that can be easily verified *a posteriori* by substituting the obtained values (2) into the equations (3) or (4) of sect. 33 and by recognizing how they [, the formulas,] are identically satisfied.

It is not then difficult to deduce by the above formulas (2) the series expansions in terms of the powers and the products of the three indeterminate [quantities] α_1, β_2, γ_3. The operations are carried out by means of the ordinary and obvious procedures, and considering the terms up to the second order, we get:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\beta_{2}^{2} + \text{etc.} \\
\alpha_3 &= 1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\gamma_{3}^{2} + \text{etc.} \\
\gamma_2 &= 1 - \frac{1}{2}\beta_2^2 - \frac{1}{2}\gamma_3^2 + \text{etc.} \\
\alpha_2 &= -\gamma_3 + \alpha_1\beta_2 + \text{etc.} \\
\beta_3 &= -\alpha_1 + \beta_2\gamma_3 + \text{etc.} \\
\gamma_1 &= -\beta_2 + \alpha_1\gamma_3 + \text{etc.}
\end{aligned} \tag{3}$$

Now we substitute these values (3) in the second members of the equations (24) sect. 50, and arranging for the powers and products of the three indeterminate [quantities] α_1, β_2, γ_3, we will have

$$\begin{aligned}
\Lambda &= -2B - 2D\alpha_1 + 2F\beta_2 + 2E\alpha_1\beta_2 - 2(A-B)\alpha_1^2 + 2(B-C)\beta_2^2 + \text{ec.}\\
\Xi &= -2C - 2F\beta_2 + 2E\gamma_3 + 2D\beta_2\gamma_3 - 2(B-C)\beta_2^2 + 2(C-A)\gamma_3^2 + \text{ec.}\\
\Pi &= -2A - 2E\gamma_3 + 2D\alpha_1 + 2F\alpha_1\gamma_3 - 2(C-A)\gamma_3^2 + 2(A-B)\alpha_1^2 + \text{ec.}\\
\Sigma &= -F - 2(B-C)\beta_2 - 2(C-A)\alpha_1\gamma_3 + D(\gamma_3 - 2\alpha_1\beta_2)\\
&\quad - E(\alpha_1 + \beta_2\gamma_3) + F\left(2\beta_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^2\right) + \text{ec.}\\
\Phi &= -D - 2(A-B)\alpha_1 - 2(B-C)\beta_2\gamma_3 + E(\beta_2 - 2\alpha_1\gamma_3)\\
&\quad - F(\gamma_3 + \alpha_1\beta_2) + D\left(2\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^2\right) + \text{ec.}\\
\Psi &= -E - 2(C-A)\gamma_3 - 2(A-B)\alpha_1\beta_2 + F(\alpha_1 - 2\beta_2\gamma_3)\\
&\quad - D(\beta_2 + \alpha_1\gamma_3) + E\left(2\gamma_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\right) + \text{ec.}
\end{aligned} \tag{4}$$

non ritenendo se non i termini nei quali le quantità angolari sono a due dimensioni.

Siccome queste equazioni debbono sussistere indipendentemente dalle tre indeterminate $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$, le quali restano assolutamente arbitrarie, è necessario che in esse siano eguali a zero tutti i coefficienti delle diverse potenze e dei diversi prodotti delle indeterminate stesse. Quindi primieramente si cavano le equazioni

$$\Lambda = -2B; \quad \Xi = -2C; \quad \Pi = -2A \tag{5}$$

$$\Sigma = -F; \quad \Phi = -D; \quad \Psi = -E; \tag{6}$$

poi dall'annullare i coefficienti anzidetti quest'altre, e unicamente queste :

$$\begin{aligned}
D = 0; \quad E = 0; \quad F = 0 \\
A - B = 0; \quad B - C = 0; \quad C - A = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Le tre ultime si riducono alle due

$$A = B = C \tag{8}$$

per le quali le (5) ci somministrano

$$\Lambda = \Xi = \Pi. \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda &= -2B - 2D\alpha_1 + 2F\beta_2 + 2E\alpha_1\beta_2 - 2(A-B)\alpha_1^2 + 2(B-C)\beta_2^2 + \text{etc.}\\
\Xi &= -2C - 2F\beta_2 + 2E\gamma_3 + 2D\beta_2\gamma_3 - 2(B-C)\beta_2^2 + 2(C-A)\gamma_3^2 + \text{etc.}\\
\Pi &= -2A - 2E\gamma_3 + 2D\alpha_1 + 2F\alpha_1\gamma_3 - 2(C-A)\gamma_3^2 + 2(A-B)\alpha_1^2 + \text{etc.}\\
\Sigma &= -F - 2(B-C)\beta_2 - 2(C-A)\alpha_1\gamma_3 + D(\gamma_3 - 2\alpha_1\beta_2)\\
&\quad - E(\alpha_1 + \beta_2\gamma_3) + F\left(2\beta_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^2\right) + \text{etc.}\\
\Phi &= -D - 2(A-B)\alpha_1 - 2(B-C)\beta_2\gamma_3 + E(\beta_2 - 2\alpha_1\gamma_3)\\
&\quad - F(\gamma_3 + \alpha_1\beta_2) + D\left(2\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^2\right) + \text{etc.}\\
\Psi &= -E - 2(C-A)\gamma_3 - 2(A-B)\alpha_1\beta_2 + F(\alpha_1 - 2\beta_2\gamma_3)\\
&\quad - D(\beta_2 + \alpha_1\gamma_3) + E\left(2\gamma_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\right) + \text{etc.}
\end{aligned} \tag{4}$$

considering only the terms in which the angular quantities are of power two.

Since these equations must exist independently of the three indeterminate [quantities] α_1, β_2, γ_3, which remain quite arbitrary, it is necessary that in all of them the coefficients of the different powers and of the different products of the indeterminate [quantities] themselves are equal to zero. So firstly the [following] equations are deduced

$$\Lambda = -2B; \quad \Xi = -2C; \quad \Pi = -2A \tag{5}$$

$$\Sigma = -F; \quad \Phi = -D; \quad \Psi = -E; \tag{6}$$

then by putting equal to zero the aforementioned coefficients, these other [equations] and only these ones [are deducted]

$$\begin{aligned}
D = 0; \quad E = 0; \quad F = 0 \\
A - B = 0; \quad B - C = 0; \quad C - A = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

The last three ones reduce to the [following] two [equations]

$$A = B = C \tag{8}$$

in virtue of which the (5) give us

$$\Lambda = \Xi = \Pi. \tag{9}$$

A motivo poi delle prime fra le (7), le (6) diventano

$$\Sigma = 0; \quad \Phi = 0; \quad \Psi = 0. \tag{10}$$

Se volessimo prendere ad esame le equazioni che si deducono dall'annullare i coefficienti nei termini ulteriori delle serie (4), non faremmo che sempre avere e riavere le stesse equazioni già ottenute (7), (8), le quali potevano dedursi dalle serie (4) ritenendovi anche soltanto i termini ove le indeterminate si trovano ad una dimensione. Può valere a riconferma l'osservare che, date le (7), (8), deduciamo subito dalle equazioni (24) num°.50. le equazioni (9),(10) in forza delle equazioni (4) num°.33.

Le equazioni (9),(10) sono quelle che esprimono la natura del fluido : per esse le equazioni generali (23) num°.50. spettanti al moto di un corpo qualunque, si particolarizzano e si adattano a significare il moto de' fluidi. Le equazioni modificate riescono

$$\begin{aligned} \Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dx} &= 0 \\ \Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dy} &= 0 \\ \Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dz} &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Queste sono le notissime equazioni del movimento de' fluidi, delle quali i Geometri sono in possesso da molto tempo, e la di cui esattezza in tutti i casi venne dal Poisson negata. Così la teorica analitica del moto de' fluidi dataci da Eulero, ridimostrata da Lagrange partendo da un principio diverso, si trova riconfermata anche dalle moderne teoriche fisiche quando si tengano entro i giusti limiti: del che diremo in appresso.

63. La precedente dimostrazione parmi tanto importante, che mi preme metterla in salvo da varie obbjezioni che possono presentarsi alla mente degli studiosi : sponendo le quali farò di comprendervi anche quelle a cui intendeva di alludere in un passo del num°.56. Prima obbiezione. Che la risultante

Besides, because of the first ones among the (7), the (6) become

$$\Sigma = 0; \quad \Phi = 0; \quad \Psi = 0. \tag{10}$$

If we wanted to consider the equations which are deduced from equaling to zero the coefficients in the higher order terms of the series (4), we would always have the same equations already obtained (7), (8), which could be deduced from the series (4) preserving there even only the terms where the indeterminate [quantities] are of the first order. It may be worth to be reconfirmed observing that, given the (7), (8), we immediately deduce from the equations (24) sect. 50 the equations (9), (10) by virtue of the equations (4) sect. 33.

The equations (9), (10) are those which express the nature of the fluid: through them the general equations (23) sect. 50 appertaining to the motion of a body whatsoever, are particularized and adapted to represent the motion of the fluids. The modified equations yield

$$\begin{aligned} \Gamma\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dx} &= 0 \\ \Gamma\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dy} &= 0 \\ \Gamma\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{d\Lambda}{dz} &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

These are the well-known equations of the motion of fluids, of which the Geometers are in possession for a long time, and the accuracy of which was denied by Poisson in all cases. Thus, the analytical theory of the motion of fluids given to us by Euler, once again demonstrated by Lagrange by starting from a different principle, is also confirmed by modern physical theories when applied within the[ir] proper limits: of what we will say below.

63. The precedent demonstration seems to me so important that I would put it in safe from various objections that may arise in the minds of scholars: exposing which, I will make sure to include those [theories] to which I wanted to allude in a passage of sect. 56. First objection.

di tutte le forze interne applicate al punto (p,q,r) ovvero (x,y,z) debba essere (quando le molecole sono o possono considerarsi sferiche) funzione delle sole distanze molecolari e degli angoli fatti dalle direzioni di esse (espressioni (35),(38) num°.54.), questo si può agevolmente comprendere : quindi nessun dubbio che detta risultante abbia la proprietà riscontrata nelle formole (35),(38) . Ma che la stessa proprietà debba sussistere in ciascuna delle sei $2A, 2B$, ec., ovvero Λ, Ξ, ec., ciò non pare abbastanza provato, potendo darsi che queste quantità vengano da quella risultante decomposta secondo direzioni vincolate cogli assi. Allora reggerebbe bensì la proprietà dell'essere le sei quantità fatte prima colle p,q,r affatto similmente come dopo colle x,y,z, senza che si avveri il passaggio dalla prima scrittura alla seconda per via della sostituzione dei valori (31) num°.40. Sta infatti la prima proprietà e non la seconda nei coseni espressi dalle formole (37) num°.54.— Questa obbjezione è forte, e tale che la risposta efficace a pienamente dissiparla ci convien rimetterla al Capo seguente, dove vedremo col fatto che le sei quantità dipendono interamente da elementi analitici, nei quali si verifica la seconda proprietà anzidetta del pari che nelle formole (35),(38) . Qui però possiamo dire in anticipazione che la quantità (15) num°.47. esprimente la totalità delle azioni interne, viene rappresentata altrimenti mediante una somma

$$S_1\delta s_1 + S_2\delta s_2 + S_3\delta s_3 + \text{ec.} \tag{12}$$

nella quale s_1, s_2, s_3, ec. essendo gli stessi radicali scritti nelle formole (35), godono la nota propietà, e ne godono anche i coefficienti S_1, S_2, S_3, ec. esprimenti le forze che operano secondo quelle direzioni, quando sono funzioni solamente delle anzidette distanze s_1, s_2, s_3, ec. L'operazione indicata dalla caratteristica δ si ferma dapprima sulle $\delta p, \delta q, \delta r$, indi passando ai nuovi assi, sulle $\delta x, \delta y, \delta z$, e le quantità che entrano a comporre le equazioni generali sono raccolte dai coefficienti di sì fatte variazioni. Non è possibile (badisi bene) che la seconda volta ricompajano quei coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. che

It can be easily understood that the resultant of internal forces applied to the point (p,q,r) or [to the point] (x,y,z) should be (when the molecules are or can be considered as spherical) a function only of the molecular distances and of the angles made by the directions of them (expressions (35), (38) sect. 54): therefore no doubt that said resultant has the property found in the formulas (35), (38). It does not seem to be sufficiently proven that the same property must hold in each of the six $2A$, $2B$, etc., or Λ, Ξ, etc., it could be that these quantities come from that resultant decomposed according to directions of the coordinate axes. Then there would hold the property of being the first six quantities calculated with the p, q, r at all similarly as afterwards with the x, y, z, without that it will be true the transition from the first to the second writing[,] through the substitution of the values (31) sect. 40. It is in fact the first property and not the second one in the cosines expressed by the formulas (37) sect. 54. This objection is strong, and such that it behooves us to postpone to the following Capo the effective response to fully dissipate [such an objection], where [in the following Cape] we will see the fact that the six quantities entirely depend on analytical elements, in which the second above-mentioned property occurs as well as in the formulas (35), (38). Here, however, we can say in advance that the quantity (15) sect. 47, expressing the totality of internal actions, is otherwise represented by a sum

$$S_1\delta s_1 + S_2\delta s_2 + S_3\delta s_3 + \text{etc.} \tag{12}$$

where s_1, s_2, s_3, etc. being the same radicals written in the formulas (35), enjoy the well-known property, which is enjoyed also by the coefficients S_1, S_2, S_3, etc. expressing the forces that operate according to those directions, when they are functions only of the abovementioned distances s_1, s_2, s_3, etc. The operation indicated by the characteristic δ stops first on the δp, δq, δr, then passing to the new axes, on the δx, δy, δz and the quantities that enter to compose the general equations are collected by the coefficients of such variations. It is not possible (mind you) that those cosines α_1, β_1, γ_1, α_2 reappear the second time, which

sono già svaniti sostituendo nei radicali s_1, s_2, s_3, etc. alle p, q, r i valori (31) num°.40. : di qualunque sorta siano le posteriori operazioni analitiche. Per maggiore intelligenza gioverà ricordare la distinzione fatta da Lagrange (M.A.T.I. pag. 31-32) delle forze interne ed esterne secondo che hanno per loro centri punti appartenenti o non appartenenti al sistema. È nel solo primo caso che i radicali s_1, s_2, s_3.... dell'espressione (12) godono della più volte proclamata proprietà d'indipendenza dagli assi : per le forze esterne il mutamento degli assi importa che si faccia la risoluzione e composizione praticata mediante le equazioni (39) num°.55. Ma di qui appunto può nascere una seconda difficoltà. Se per le forze esterne, mutando gli assi, fu trovata necessaria la decomposizione indicata nelle anzidette equazioni (39) , pare che dovrebbe farsi altrettanto sulle $2A, 2B$, ec. che pur sono forze o somme di forze. Comincerò a rispondere coll'osservazione generale, che quando una verità è ben dimostrata, non è necessario per conservarne la persuasione trattenerci a trovar la soluzione d'ogni dubbio che possa insorgere : si sa in prevenzione che una tale soluzione ci deve essere. Basterà in tali casi (e sarà un di più) a togliere quelle ubbie anche solo accennare di dove sarebbe possibile cavare la risposta diretta, senza veramente dedurla in modo perspicuo : giacché questa deduzione equivarrebbe ad una seconda dimostrazione, la quale non è necessaria quando se ne ha già un'altra. Nel caso attuale rifletteremo al modo con cui le sei quantità $2A, 2B$, ec. ovvero Λ, Ξ, ec. entrano nelle equazioni (42), (23) : vi entrano dopo che se ne sono prese le derivate parziali per le tre variabili p, q, r, ovvero x, y, z. Deve ritenersi che tale derivazione supplisca alla risoluzione e composizione indicate nelle (39) num°.55. ; quelle sei quantità che stanno senza alcun riferimento ad assi determinati, allorquando se ne prendono le derivate per p, q, r, si riferiscono agli assi delle p, q, r, e allorquando se ne prendono le derivate per x, y, z, si riferiscono agli assi delle x, y, z. Si scorge un chiaro indizio di ciò osservando le formole (21), (22) del num°.50. e notando che

have already vanished by substituting the values (31) sect. 40 to the p, q, r in the radicals s_1, s_2, s_3: being of any kind the successive analytical operations. In order to facilitate the understanding it will serve to recall the distinction made by Lagrange (MATI p. 31-32) between internal and external forces according to the fact that they have for their centers points belonging or not belonging to the system. It is only in the first case that the radicals s_1, s_2, s_3 ... of the expression (12) enjoy of the repeatedly proclaimed property of the independence of the axes: for the external forces the change the axes involves that the resolution and composition accomplished by means of the equations (39) sect. 55 are performed. But precisely here a second difficulty can occur. If for the external forces, changing the axes, it was found necessary the decomposition indicated in the above-mentioned equations (39), it seems that should be equally on $2A$, $2B$, etc. which are forces or sums of forces, too. I will begin to respond with the general observation that when a truth is well demonstrated, it is not necessary to hold us to find the solution of any doubt that may arise in order to preserve the conviction: it is well-known in prevention that such a solution there must be. It will be sufficient in such cases (and it will be a plus) in order to remove those whims even only to mention of where it would be possible to get a direct answer, without really deduct it clearly: since this deduction is tantamount to a second demonstration, which is not required when you it has already another. In the present case we will think about the way in which the six quantities 2A, 2B, etc. or Λ, Ξ, etc. enter into the equations (42), (23): [$2A$, $2B$, etc. or Λ, Ξ, etc.] enter into the [equations (42), (23)] after we have calculated the partial derivatives [with respect to] the three variables p, q, r, or x, y, z. It must be considered that such a derivation may remedy the resolution and composition indicated in the (39) sect. 55; the six quantities that are without any reference to determined axes, when the derivatives are calculated with respect to p, q, r, they are referred to the axes of the p, q, r, and when the derivatives are calculated with respect to the x, y, z, they are referred to the axes of the x, y, z. You can see a clear indication of this by looking at the formulas (21), (22) of sect. 50 and noting that

nel secondo caso entrano quei coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec., pei quali vien determinata la posizione dei secondi assi relativamente ai primi. — D'indole somigliante è la difficoltà che può occorrere a chi prende a considerare le sei quantità Λ, Ξ, ec., non più come somme, ma come veri integrali definiti, siccome si è detto al num°.56. Finché si riguardano come somme di termini dedotti dalla espressione (12), non si dura fatica ad ammettere ch'esse assumano lo stesso valore numerico, tanto mettendo i valori di tutte le p, q, r, quanto mettendo quelli di tutte le x, y, z : tali somme, per la più volte ricordata proprietà, non portano con se l'idea di un riferimento ad assi determinati. Ma gl'integrali definiti involgono naturalmente il concetto di limiti assegnati dalla figura del corpo, che debbono condurre a valori diversi quando gli assi ai quali la figura del corpo è riferita, non sono più i medesimi. Sia : nel caso peraltro di questi integrali definiti abbiamo la prima volta salvate le variabili p, q, r, coordinate del punto generico, e la seconda le variabili x, y, z. Accadrà (senza trattenerci a ridur la cosa ostensibile , non essendo necessario, come si disse di sopra) che quando alle p, q, r si sostituiscano i loro valori in x, y, z (formole (31) num°.40.) i coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, ec. vadano a combinarsi cogli altri simili elementi analitici in virtù dei quali gl'integrali definiti hanno la seconda volta valori diversi dagli avuti dapprima, sì che da tal combinazione risulti una eliminazione di essi elementi per effetto delle solite equazioni del num°.33., e si abbiano valori non vincolati ad assi. — Da ultimo alcuno potrebbe dire. Voi volete che nel caso dei fluidi le forze interne sieno funzioni soltanto delle distanze : ma è manifesto che a svolgere l'azione di queste forze cotribuiscono assaissimo le forze esterne X, Y, Z . Ponete che le espressioni analitiche delle forze interne abbiano per l'indicata ragione ad essere funzioni anche delle X, Y, Z : siccome queste esterne hanno centri stranieri al sistema, non regge più per esse la proprietà di mantenere gli stessi valori cambiando gli assi, ed ecco a terra tutto quanto si è dedotto appoggiandosi a tal

in the second case there appear those cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$, etc. for which the position of the second axes relatively to the first ones is determined. - Of a similar nature it is the difficulty that may occur to those who consider the six quantities Λ, Ξ, etc. not any longer as sums, but as real definite integrals, as explained in sect. 56. As long as you consider [those quantities Λ, Ξ, etc.] as sums of the terms deduced from the expression (12), it is not hard work to admit that they take the same numerical value, so putting the values of all the p, q, r as putting those of all the x, y, z: these sums, for the most often mentioned properties, do not carry with them the idea of a reference to determined axes. But the definite integrals involve of course the concept of limits assigned by the shape of the body, which should lead to different values when the axes to which the shape of the body is referred, are no longer the same. Let us assume: in the case however of these definite integrals we have assigned the first time the variables p, q, r, coordinates of the generic point, and the second time [we have assigned] the variables x, y, z. It will happen (without holding us to demonstrate the statement, being not necessary, as it was said above) that, when we substitute to the p, q, r their values in x, y, z (formulas (31) sect. 40), the cosines $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2$ etc. combine with other similar analytical elements by virtue of which the definite integrals have values different from those they have had initially, so that, by such a combination there results a deletion of those elements by virtue of the usual equations of sect. 33, and we have values invariant with respect to the axes. - Finally, someone might argue. You want that in the case of fluids the internal forces are functions only of distances: but it is clear that the external forces X, Y, Z greatly contribute to determine the action of these forces. Assume that the analytical expressions of the internal forces have, for the indicated reason, to be functions also of the X, Y, Z: since these external [forces] have centers outside the system, the property of keeping the same values changing axes no longer holds for them, and hence all that was deducted on the basis of such a property attributed

proprietà attribuita alle Λ, Ξ, ec. Rispondo non credere io che le espressioni delle forze interne abbiano a contenere le X, Y, Z ; senza dubbio queste seconde influiscono sulla attuazione di quelle, ma influiscono diminuendo o accrescendo le distanze fra le molecole, sia pure anche insensibilmente, come nei liquidi. Facendo dunque le forze interne funzioni delle distanze, vengono ad avere espresso implicitamente nella condizione alterata delle dette distanze l'effetto delle forze esterne, senza bisogno di farle altresì funzioni dei loro valori analitici. — Potrei aggiungere altre parole per meglio dissipare le difficoltà già esposte, e prevenirne delle nuove : più però di quanto potrei qui soggiungere varranno a tale intento le dottrine del Capo seguente.

64. È notissimo che nella teorica Euleriana si suole aggiungere alle tre equazioni (11) una quarta detta della continuità, che è la (33) o (34) num°.14. già dimostrata in generale nel Capo I . Qui inoltre chiameremo l'attenzione del lettore sopra un teorema sussistente fra le quantità alla superficie del fluido, il quale risulta dalle tre equazioni cavate dall'integrale duplicato (34) num°.52., siccome dicemmo sulla fine di quel numero. A motivo delle precedenti (9), (10) quelle tre equazioni diventano

$$\begin{aligned}
&\lambda(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}+\frac{dz}{dx}\Lambda=0\\
&\mu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}+\frac{dz}{dy}\Lambda=0\\
&\upsilon(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Lambda=0.
\end{aligned}\tag{13}$$

Se intendiamo espressa dalla

$$f(x,y,z,t)=0 \tag{14}$$

l'equazione della superficie del fluido, sappiamo che se ne ricavano le due

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{f'(x)}{f'(z)};\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{f'(y)}{f'(z)};$$

to the Λ, Ξ etc. is no longer valid. I would reply that I do not believe that the expressions of the internal forces have to contain the X, Y, Z; undoubtedly these second [external forces] affect the implementation of those [internal forces], but their influence is exercised in decreasing or increasing the distances between the molecules, albeit even insignificantly, as in liquids. Thus, by assuming the internal forces as functions of the distances, [these internal forces] have implicitly expressed the effect of the external forces is in the altered condition of the said distances, without the need to make them also functions of the[ir] analytical values. - I might add other words to better dissipate the difficulties set out above, and prevent new ones: but more than what I could add here, the doctrines of the following Capo will be valid for this purpose.

64. It is well-known that in the Eulerian theory it is customary to add to the three equations (11) a fourth one of the so-called continuity, which is the (33) or (34) sect. 14 already in general demonstrated in Capo I. Here also we will call the reader's attention about a theorem subsisting between the quantities at the surface of the fluid, which results from the three equations deduced from the double integral (34) sect. 52, as we said at the end of that section. By virtue of the preceding (9), (10) those three equations become

$$\begin{aligned}
&\lambda(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}+\frac{dz}{dx}\Lambda=0\\
&\mu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}+\frac{dz}{dy}\Lambda=0\\
&\upsilon(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Lambda=0.
\end{aligned}\tag{13}$$

If we want to express from the

$$f(x,y,z,t)=0 \tag{14}$$

the equation of the surface of the fluid, we know that we derive the two

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{f'(x)}{f'(z)};\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{f'(y)}{f'(z)};$$

quindi, ponendo per comodo

$$\Theta = \frac{\Lambda}{(\Gamma)}; \quad R = \sqrt{f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2} \tag{15}$$

otteniamo prontamente dalle precedenti (13)

$$\lambda = \Theta \cdot \frac{f'(x)}{R}; \quad \mu = \Theta \cdot \frac{f'(y)}{R}; \quad \nu = \Theta \cdot \frac{f'(z)}{R}; \tag{16}$$

formole dalle quali, in conseguenza di un teorema notissimo di Geometria analitica, veniamo a conchiudere che la direzione secondo cui opera la forza Θ, anche nello stato di moto, è normale alla superficie del fluido. Ognun vede che questo teorema è esclusivo ai fluidi, giacché non avrebbe luogo se non si verificassero le equazoni (9), (10). Se ne possono dedurre altre considerazioni sulle quali torneremo fra poco.

65. Conviene ora che ci tratteniamo a ragionare intorno alla divergenza fra le nostre deduzioni e quelle del Poisson. La nostra analisi, riconfermando la teorica Euleriana, abbraccerebbe tanto i fluidi in equilibrio che quelli in moto, tanto i liquidi come i fluidi aeriformi. Poisson invece trovò di dover aggiungere nuovi termini alle equazioni generali del moto de' fluidi : ed ecco, se io l'ho ben inteso, il filo de' suoi ragionamenti. Comincia a dire che le equazioni che già si avevano per esprimere il movimento de' fluidi, erano dedotte mediante il principio di D'Alembert da quelle dell'equilibrio, le quali suppongono il principio della pressione eguale in tutti i versi, principio riconosciuto vero sperimentalmente soltanto ne' fluidi in riposo. Prosegue e asserisce che la proprietà di premere egualmente in tutti i versi viene da un'altra proprietà che hanno i fluidi, di ricostruirsi sempre similmente a se stessi attorno di ciascun loro punto. Riflette poi giustamente che tale ricostruzione esige un po' di tempo per essere effettuata : e si trattasse anche di un intervallo brevissimo, quando il fluido è in moto non può quella ricostruzione essere ad ogni istante perfetta. Mancando la ricostruzione perfetta , manca, secondo lui, la pressione eguale in tutti i versi : quindi debbono essere

then, by placing for convenience

$$\Theta = \frac{\Lambda}{(\Gamma)}; \quad R = \sqrt{f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2} \tag{15}$$

we readily obtain from the preceding (13)

$$\lambda = \Theta \cdot \frac{f'(x)}{R}; \quad \mu = \Theta \cdot \frac{f'(y)}{R}; \quad \nu = \Theta \cdot \frac{f'(z)}{R}; \tag{16}$$

formulas from which, as a result of a well-known theorem of analytic geometry, we come to the conclusion that the direction in which the force Θ works, even in the state of motion, is normal to the surface of the fluid. Everyone can see that this theorem is exclusive to fluids, since it should not hold if the equations (9), (10) did not be verified. Other considerations can be inferred which we shall return to in a short time.

65. It is now convenient that we hold to think about the difference between our conclusions and those of Poisson. Our analysis, confirming the Eulerian theory, would embrace both the fluid in equilibrium and those in motion, so the liquid as the aeriform fluids. On the contrary, Poisson thought to add new terms to the general equations of fluid motion: and, here is, if I have well understood, the thread of his argument. [Poisson] Begins to say that the equations we already had to express the movement of fluids, were derived using the principle of D'Alembert from those ones of the equilibrium, which presuppose the principle of equal pressure in all directions, a principle experimentally recognized [to be] true only for fluids at rest. [Poisson] continues and asserts that the property to press equally in all directions comes from another property that the fluids fulfill, [that is] always to rebuild themselves similarly to themselves around each of their points. Then [Poisson] rightly reflects that this reconstruction requires a bit of time to be done: and even if the interval had very short duration, when the fluid is in motion, that reconstruction can not be at each instant perfect. In the absence of a perfect reconstruction, according to him, the pressure equal in all directions is missing: therefore those equations

in difetto nel caso del moto quelle equazioni che da un tale principio prendono origine. Citerò per maggiore cautela un passo dell'Autore: (Journal de l'École Polyt. Cah. XX. pag. 95. – Annales de Physique et de Chimie. Tom. 42, pag. 170.)

« Lorsque les molécules d' un fluide se déplacent, elles em-
« ploient un certain temps, quelque petit qu' on le suppose,
« pour parvenir autour de chaque point, á une disposition
« semblable á leur arrangement primitif, et pour exercer de
« nouveau une pression égale en tous sens. Pendant ce trés
« court intervalle de temps, qui peut être néanmoins trés-dif-
« férent puor les différents fluides, la pression n'est pas né-
« cessairement la même suivant toutes les directíons; toutefois
« il seraít impossible de s'en appercevoir dans l'état d'équi-
« libre qui ne s'observe qu' aprés que cet intervalle de temps
« est écoulé. Mais, dans le cas du mouvement, la position re-
« spective des molécules changeant sans cesse , on comprend
« que la considération du temps dont il s'agit peut donner
« lieu á une modification dans le principe de l'égalité de pres-
« sion en tous sens, et dans la forme des équations différen-
« tielles qui s'en déduisent. C'est ce qui arrive en effet : et
« c'est a cette circonstance que sont dus les nouveaux termes
« que j'ai introduits dans les équations générales du mouve-
« ment des fluides. »

La risposta, giacché l'oggetto della discussione è molto complesso, la divideremo in più parti. Essere o non essere vero che le note equazioni non avessero ai tempi di Poisson altra dimostrazione fuori di quella appoggiata al principio della pressione eguale in tutti i versi, è questa una questione incidentale sulla quale, per non abbracciar troppo in una volta, ritorneremo in altro numero. Qui mi fermerò a domandare di dove cava il Poisson quell'altra proprietà dei fluidi, ch'egli crede fondamentale per ottener la pressione eguale in tutti i versi

« de se reconstituer toujours semblablement á eux-même au-
« tour de chaque point » (Cah. XX . pag. 92) : per la quale anche dopo gli spostamenti delle molecole « un fluide se trouve

which originate from such a principle shall be in default. I will quote a passage of the Author to be more cautious (Journal de l'École Polyt. Cah. XX. p. 95. – Annales de Physique et de Chimie. Tome 42, p. 170.)

« Lorsque les molécules d' un fluide se déplacent, elles em-
« ploient un certain temps, quelque petit qu' on le suppose,
« pour parvenir autour de chaque point, á une disposition
« semblable á leur arrangement primitif, et pour exercer de
« nouveau une pression égale en tous sens. Pendant ce trés
« court intervalle de temps, qui peut être néanmoins trés-dif-
« férent puor les différents fluides, la pression n'est pas né-
« cessairement la même suivant toutes les directíons; toutefois
« il seraít impossible de s'en appercevoir dans l'état d'équi-
« libre qui ne s'observe qu' aprés que cet intervalle de temps
« est écoulé. Mais, dans le cas du mouvement, la position re-
« spective des molécules changeant sans cesse , on comprend
« que la considération du temps dont il s'agit peut donner
« lieu á une modification dans le principe de l'égalité de pres-
« sion en tous sens, et dans la forme des équations différen-
« tielles qui s'en déduisent. C'est ce qui arrive en effet : et
« c'est a cette circonstance que sont dus les nouveaux termes
« que j'ai introduits dans les équations générales du mouve-
« ment des fluides. »

We will divide the answer into several parts, because the object of discussion is very complex. To be or not to be true that the well-known equations had not, at the time of Poisson, another demonstration outside that based on the principle of equal pressure in all directions, this is an incidental question on which, to embrace not too much at once, we will come back in another section. Here I will stop to ask where Poisson obtained that other property of the fluids, which he believes essential to achieve equal pressure in all directions

« de se reconstituer toujours semblablement á eux-même au-
« tour de chaque point » (Cah. XX . pag. 92) : for which even after the displacements of the molecules « un fluide se trouve

« constitué autour de chaque point, comme il l'était aupara-
« vant..... comme un systéme qui reste semblable á lui- même,
« et qui est seulement construit sur une plus petite ou sur
« une plus grande échelle » (pag. 91). La vera definizione del fluido l'abbiamo presa più sopra dallo stesso Poisson (rileggi il passo riferito al principio di questo Capo) ed è di quel corpo in cui le molecole sono a tali distanze fra loro, che vi cessa l'azione secondaria dovuta alla figura; ma io non vedo un vincolo necessario fra questa definizione e la proprietà della ricostruzione sempre simile a se stessa intorno ad ogni punto. Prescindo dal ripetere ciò che ho dimostrato in altro luogo, cioè che una disposizione di molecole simmetrica tutt'all'intorno di ciascuna, se è possibile in un piano, è impossibile nello spazio (Vedi Giornale dell' I.R. Istituto Lombardo Tom. VI. pag. 328.) e chieggo soltanto : quand'anche le molecole in moto si allontanino fra loro più per un verso che per un altro, torna per questo in giuoco l'azione molecolare secondaria dovuta alla figura? Mainï¿ $\frac{1}{2}$: giacché suppor ciò sarebbe come supporre che il moto possa solidificare qualche parte del fluido. Ma se non torna in giuoco quell'azione, abbiamo ancora tutto ciò che si esige per condurci alle equazioni (11) : i ragionamenti stanno anche nella supposizione che aumentino le distanze molecolari più che non ve n'è bisogno per avere lo stato fluido : si scorge esservi per tali distanze un limite in meno, ma non in più. Si dice che nel moto non v'è tempo per la ricostruzione del fluido ad ogni istante come nel caso dell'equilibrio : sia : sono inclinato a crederlo anch'io ; ma non m'importa di ciò : c'è però sempre fra le molecole almeno la distanza necessaria a costituire la fluidità, e questo basta per la verità delle nostre equazioni. L'equivoco preso dal Poisson (se mi è lecita la parola trattandosi di un sì distinto Geometra) fu cagionato primieramente dall' aver compenetrate due cose le quali possono stare l'una senza l'altra : la distanza delle molecole necessaria alla cessazione della forza secondaria, e la di loro distribuzione uniforme intorno a ciascun punto; indi nell'aver

« constitué autour de chaque point, comme il l'était aupara-
« vant..... comme un systéme qui reste semblable á lui- même,
« et qui est seulement construit sur une plus petite ou sur
« une plus grande échelle » (p. 91). We took earlier from the same Poisson the true definition of the fluid (reread the passage reported at the beginning of this Capo) and [this definition] is of that body in which the molecules are at such distances from each other, that the secondary action due to its shape will cease; but I do not see any necessary link between this definition and the property of the reconstruction always like itself around each point. I abstract from repeating what I have shown in another place, that is a symmetric distribution of molecules all around each molecule, if it is possible in a plane, it is impossible in the space (See Journal of the IR Istituto Lombardo Tome VI. p. 328) and I ask only a question: even when the molecules in motion move apart more on one side than the other, does the secondary molecular action due to the shape come back to play a role? Never: because to suppose this would be like assuming that the motion can solidify some part of the fluid. But if that action does not come into play, we still have all that is required to lead to the equations (11): the arguments hold also under the assumption that the molecular distances increase to an extent longer than that is needed to have the fluid state: you can see that for such distances there is a lower bound but not an upper bound. It is said that in the motion there is no time for the reconstruction of the fluid at each instant as in the case of the balance: let us assume: I am inclined to believe it too, but I do not care about that: however there is always between the molecules at least the distance required to establish the flow, and that is enough for the truth of our equations. The misunderstanding (if I may be permitted this word since we are dealing with a so distinct Geometer) made by Poisson was caused in the first place by having confused two things which can be one without the other: the distance of the molecules necessary for the termination of the secondary force, and their uniform distribution around each point;

presa la seconda proprietà, che a lui parve di dover concedere ai fluidi, piuttosto che la prima a base delle sue ricerche analitiche. Invece bisogna piantar le equazioni sulla sola prima proprietà, che è una cosa indipendente da quell'aggiunta fittizia, e che è l'unica che costituisca la vera essenza dello stato fluido.

Eppure, si replicherà, coll'aggiunta di quei nuovi termini il Poisson dà o promette spiegazioni di fenomeni, le quali altrimenti non si ottengono. Dice in un luogo (pag. 2) doversi probabilmente alla differenza da lui avvertita tra lo stato di equilibrio di un fluido e quello di moto la cagione per cui nei fucili a vapore la pressione è enorme sul projettile , ed è lateralmente molto minore sulle pareti. Al qual proposito noterò parermi che il fatto possa avere una facile spiegazione mediante un ragionamento molto simile a quello col quale Galileo provava dover essere la forza della percossa infinita per rapporto alla pressione (Vedi : Lezioni Accademiche del Torricelli : Lezione seconda.). Gl'impulsi sul projettile, ripetuti a capo di tempuscoli estremamente piccoli, si accumulano in un tempo che è piccolissimo ma pur finito e contiene in conseguenza un numero stragrande di quei tempuscoli : mentre gl' impulsi contrastati dalla resistenza delle pareti vengono estinti di mano in mano che si producono. Quanto ai vantaggi che l'Autore dice dover derivare dai suoi nuovi termini per le teoriche del suono e della luce (pag. 3), egli si limita ad accennarli, anzi a presagirli. Non posso quindi metterli a disamina : solo dirò che questa materia delle vibrazioni vorrebbe essere trattata a parte e molto in lungo, costituendo un ordine di fenomeni singolari espressi per mezzo di equazioni loro proprie : ho qualche speranza di potermene occupare in altra occasione.

Il Sig. Mossotti dopo il passo più sopra citato al principio del Capo, viene anch'egli a parlare di molecole tutte uniformemente distribuite le une attorno alle altre. Né di ciò gli farò carico, avendo io stesso bisogno di maggiore indulgenza per essermi (Nella Memoria inserita nel T. XXI di questi Atti.

then in having taken the second property, which seemed to him having to grant to fluids, rather than the first as a basis of his analytical researches. On the contrary, we must rely the equations solely on the first property, which is something independent of that fictitious addition, and that is the only one that constitutes the essence of the fluid state.

Yet, someone will reply, with the addition of these new terms, Poisson gives or promises explanations of phenomena, which otherwise are not obtained. He says in a place (p. 2) that the cause for which in steam rifles pressure is enormous on the projectile, and is laterally much less on the walls has to be attributed probably to the difference perceived by him between the equilibrium state of a fluid and that of motion. To which purpose I will notice that it seems to me that the fact may have a simple explanation by means of a reasoning similar to that with which Galileo proved that the intensity of the impulsive force had to be infinite with respect to pressure (See: Academic lectures by Torricelli: second Lesson). The pulses on the projectile, repeated at extremely small intervals of time, accumulate in a time that is very small but yet finite and in consequence contains a very large number of those small intervals of time: whereas the pulses counteracted by the resistance of the walls are gradually extinct while they are occuring. As for the advantages which - the author says - must derive from his new terms by virtue of the theories of light and sound (p. 3), he merely mentions them, even predicts them. So I can not subject them to examination: I will tell only that this matter of vibrations would be treated separately and for a very long time, forming a class of singular phenomena expressed by means of their own equations: I have some hope of taking care of them on another occasion.

Mr. Mossotti too after the passage quoted above at the beginning of the Capo, is also talking about molecules all uniformly distributed around each other. I will not blame him for that, having myself need of more indulgence for having let convince myself (In Memoir inserted in Tome XXI of these Proceedings,

§. VII.) lasciato indurre dai citati passi del Poisson a stabilire un principio di simmetria, e a derivarne equazioni riconosciute poscia insussistenti (Vedi il già detto al principio di questa Memoria). Entrambi avremmo dovuto esigere dallo Scrittor francese che ci dimostrasse (giacché non è per nulla evidente) come dalla cessazione della forza secondaria scaturisse necessariamente pei fluidi la proprietà della distribuzione regolare delle molecole. Si sa per altro quanta efficacia abbia un'autorità per tanti titoli giustamente venerata, affinché c'induciamo ad adottarne le asserzioni senza far precedere l'esame voluto dall'importanza dell'argomento.

Ma è poi vero che il principio della pressione eguale in tutti i versi sia intimamente legato colla distribuzione regolare delle molecole, sì che non possa sussistere l'uno senza l'altra? (Poisson. Traité de Mécanique. T.II. pag. 506.). Io ne dubito assai, e credo che qui pure siasi corso un po' troppo avanti nelle deduzioni : e ciò perché non si sono ancora chiarite del tutto le idee intorno a quella quantità che noi chiamiamo pressione interna dei fluidi. È questo un argomento dilicato, dove è bene fare delle distinzioni, né è dato sbrigarsi in poche parole : quindi vi tornerà sopra in un numero a parte. Intanto osserverò che un altro illustre geometra francese il Sig. Cauchy dissente anch'egli dal Poisson su questo punto apertamente, avendo scritto nei suoi primi Esercizj di matematica (Tom. III. pag. 226.) « on voit par les détails dans lesquels nous venons
« d'entrer que, pour obtenir l'égalité de pression en tous sens,
« dans un systéme des molécules qui se repoussent, on n'a
« pas besoin d'admettre, come l'a fait M. Poisson, une distri-
« bution particuliére des molécules autour de l'une quelconque
« d'entre elles. » Il che sia detto senza intendere di pronunciarmi per intero assenziente a quelle considerazioni mercé le quali il Sig. Cauchy compone egli pure le equazioni generali del moto dei corpi. Rispetto la sua maniera di vedere, ma tengo la mia, o piuttosto non la mia, ma quella connessa colla filosofia dei metodi del mio Caposcuola, come ho dichiarato fin da principio.

section VII) by the above steps of Poisson to establish a principle of symmetry, and to derive equations recognized afterwards to be non-existent (See what has been already mentioned at the beginning of this Memoir). Both of us would have demand to the French writer that he would prove to us (as it is not at all clear) how the property of the regular distribution of the molecules for the fluid necessarily derived from the cessation of the secondary force. Moreover, we know how much it is more effective an authority for many titles rightly worshiped, so that we induce us to adopt its assertions without preceding the exam wanted by the importance of the topic.

But is it true that the principle of equal pressure in all directions is intimately linked with the regular distribution of the molecules, so that it can not exist one without the other? (Poisson. Traité de Mécanique. Tome II p. 506). I doubt it very much, and I think that here as well one has gone forward a bit too far into the deductions: and this because the ideas around that quantity which we call the internal pressure of the fluid have not yet completely clarified. And this is a delicate subject, where it is good to make distinctions, nor it is given to hurry in a few words: then I will come back to it in a separate section. Meanwhile, I will observe that also another eminent French geometer Mr. Cauchy openly disagrees with Poisson on this point, having written in his early Exercises of mathematics (Tome III. p. 226) « on voit par les détails dans lesquels nous venons
« d'entrer que, pour obtenir l'égalité de pression en tous sens,
« dans un systéme des molécules qui se repoussent, on n'a
« pas besoin d'admettre, come l'a fait M. Poisson, une distri-
« bution particuliére des molécules autour de l'une quelconque
« d'entre elles. » Which is said without intending to express my views entirely consenting to those considerations thanks to which Mr. Cauchy as well composes the general equations of motion of bodies. I respect his way of seeing, but I keep mine, or rather not mine, but the one connected with the philosophy of the methods of my Schoolmaster, as I have said from the beginning.

E qui, poiché torna in campo la questione sul modo di mettere insieme le equazioni generali del moto de' corpi, dovremo noi credere che la più volte citata opera del Poisson (Journal Polyt. Cah. XX) non possa andar soggetta ad altre osservazioni oltre le più sopra accennate? L'Autore dice (pag. 7) di non fare nella sua Memoria se non una sola ipotesi, quella di un numero estremamente grande di molecole comprese in uno spazio ancora insensibile : e questa è già molto. Ma dove dice (pag. 5 in fine) che dagli interstizj vuoti di materia ponderabile non parte alcuna forza per agire sulle molecole, quantunque conceda che in esse possano trovarsi gli imponderabili; quando ammette pel calorico (pag. 6) certe attrazioni al di fuori, e fa la forza elementare fra molecola e molecola funzione solamente della distanza ; quando (e questo è notabilissimo) avanza (pag. 8) che le forze secondarie provenienti dalla figura, purché i corpi non siano cristallizzati, debbono compensarsi e non produrre effetto ; allorché (pag. 35-36) asserisce che nei corpi solidi , anche dopo un mutamento di forma, le molecole già dimoranti sopra una stessa linea retta, vi perseverano; allorché lega (pag. 61) il principio della pressione eguale in tutti i versi a quello della dilatazione o contrazione lineare eguale in tutte le direzioni ; quando intende (pag. 91-92) che nei fluidi la pressione varj colle coordinate, ma resti costante tutt'all'ingiro fin dove si estende quella lunghezza ch'egli chiama l'intervallo medio; in tutti questi passi e negli altri in gran numero (pag. 13, 23, 24, 141, ec., ec.) dove si rigettano, supponendoli insensibili, parecchi elementi che riuscirebbero incomodi : in questi passi, dico, non entra egli molto d'ipotetico? Non nego che varie di tali supposizioni sono accompagnate da ragionamenti che ne dimostrano, se non la realtà, almeno la convenienza; ma non sono ragionamenti che valgano a produrre una piena persuasione, e che tanto più non accontentano, in quanto tien loro dietro un linguaggio di asseveranza quale appena sarebbe lecito di assumere dopo le dimostrazioni più vittoriose.

And here, because the question on how to put together the general equations of motion of bodies backs on the field, shall we believe that the most frequently cited work by Poisson (Journal Polyt. Cah. XX) can not be subject to any further comments over the above mentioned ones? The author says (p. 7) not to do in his Memoir if not a unique hypothesis, that of an extremely large number of molecules included in an even insensitive [(so small that the senses can not appreciate)] space: and this is a lot. But where he says (at the end of p. 5) that from the empty interstices of ponderable matter no force starts to act on the molecules, although he grants that the imponderables may be found in them; when he admits as for the caloric (p. 6) [that there are] some attractions outside, and makes the elemental force between molecule and molecule function only of the distance; when (and this is noteworthy) he advances the hypothesis (p. 8) that the secondary forces coming from the shape, provided that the bodies are not crystallized, must compensate and produce no effect; when (pp. 35-36) he asserts that in solid bodies, even after a change of shape, the molecules already aligned along a same straight line, they [the molecules] persevere therein; when he links (p. 61) the principle of equal pressure in all the directions to that of linear expansion or contraction equal in all directions; when he intends (pp. 91-92) that in the fluid pressure varies with the coordinates, but remains constant all around as far as extending the length [that] he calls the average interval; in all these passages and others in great numbers (pp. 13, 23, 24, 141, etc.., etc..) where one rejects, supposing them to be insensitive, several elements that would be cumbersome: in these passages, I say, does not he [Poisson] enter in the field of conjecture? I do not deny that many of these assumptions are accompanied by the arguments that prove, if not the reality, at least the convenience; but they are not arguments that apply to produce a full persuasion, and that [arguments] as much do not satisfy as they are followed by a language of affirmation which just would be admissible to use after the most successful demonstrations.

66. Dissi più sopra (num.°62) che le equazioni (11) furono ridimostrate da Lagrange partendo da un altro principio : e lo dissi appositamente, perché ci si volle far credere ch'esse non avessero finora se non un appoggio nell' analogìa , trasportando ai fluidi in moto il principio della pressione eguale in tutti i versi riconosciuto vero nei fluidi in equilibrio. Lagrange quando trattò del moto de' liquidi (M. A. T. H. pag. 287.) non assunse altra condizione fuori di quella del dovere la densità rimanere costante in qualunque ipotesi di movimento, e quando passò al moto de' fluidi elastici, si servì di quel suo principio un po'troppo astratto di cui facemmo parola al cominciare del Capo precedente. Ora ciò è ben altra cosa che ammettere il solito principio idrostatico. Per verità fu detto anche questo : fu detto che assumere la condizione della costanza della densità equivaleva ad assumere il principio della pressione eguale in tutti i versi : ma non bastava dirlo, bisognava provarlo : invece si può provare il contrario. Noi possiamo immaginare benissimo dei solidi nei quali la densità sia e debba sempre rimanere costante : eppure a tutti è noto che nei solidi non si verifica il principio della pressione eguale in tutti i versi. Che se nel moto dei solidi a densità costante non si commette errore col non tener conto della condizione anzidetta, come si fa pei fluidi, mostreremo fra poco il perché ciò avvenga. Badisi ch'io non pretendo sostenere che la definizione dei fluidi quale ci risultava dalla maniera con cui Lagrange ne scrisse i movimenti, fosse la più chiara : convengo che seguendo le idee che i moderni esposte al principio di questo Capo, abbiamo guadagnato una definizione assai migliore. Quella maniera però di considerare i fluidi era esatta : Lagrange derivò anzi da essa come corollario il principio della pressione eguale in tutti i versi : né egli era uomo da cadere in una petizione di principio. Per maggiormente illustrare questo argomento non riuscirà discaro ch'io qui metta la dimostrazione delle equazioni generali del moto dei liquidi appoggiandola ai medesimi fondamenti che le furono dati nella Meccanica Analitica, ma però modificata in correlazione ai precedenti di questa Memoria.

66. I said above (sect. 62) that the equations (11) were demonstrated once again from Lagrange starting from another principle: and I said it specifically, because someone wanted to let us believe that they [equations (11)] had a support only in the analogy, applying to the fluids in motion the principle of equal pressure in all directions recognized [to be] true in the statics of fluids. Lagrange, when he treated the motion of liquids (M.A.T.H. p. 287), assumed only the condition that the density must remain constant in any case of movement, and when he passed to the motion of elastic fluids, he made use of his principle a little bit too abstract which we referred to at the beginning of the precedent Capo. Now it is quite a different matter to admit [that] the usual hydrostatic principle [is true]. Indeed, it was said, too: it was said that assuming the condition of constancy of density was equivalent to assume the principle of equal pressure in all directions: but it was not enough to say it, you had to try it: instead you can prove the contrary. We can well imagine some solids in which the density is and must always remain constant: and yet everyone knows that the principle of equal pressure in all directions does not hold in solids. We will show shortly why it happens that, if in the motion of solids at constant density no account is taken of the aforesaid condition, such as [instead] it is made for fluids, no error is made. Mind you that I do not pretend to argue that the definition of the fluids, which appeared to us from the manner Lagrange described their movements, was the clearest: I agree that following the ideas that the modern [researchers] exposed at the beginning of this Capo, we have gained a much better definition. That way, however, to consider the fluids was correct: Lagrange derived from it in fact as a corollary the principle of equal pressure in all directions: neither he was a man to fall into a statement of principle. To better illustrate this argument it will not disagreeable that I put here the proof of the general equations of motion of the liquids founding it on the same basis that was given to it in analytical mechanics, but, however, changed in relation to the preceding sections of this Memoir.

La condizione dell'invariabilità della densità porta con se (rivedi l'equazione (6) num.°9. del Capo I) l'equazione

$$H = costante$$

essendo H il sestinomio espresso nella equazione (4) num.°9.

E appunto perché la densità deve essere invariabile in ogni ipotesi di movimento, possiamo dedurre dalla precedente l'equazione variata

$$\delta H = 0. \tag{17}$$

Richiamate le cose dette ai numeri 31,32 sulle espressioni colà segnate (36), (37) : visto anche quanto si è praticato al num.°35., allorché si è stabilita l'equazione generale pel moto de' corpi solidi, sarà manifesto che nel caso attuale all'integrale triplicato che comprende le forze esterne

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \ \delta x + \text{ec.} \right\} \tag{18}$$

dovremo per formare il primo membro dell'equazione generale spettante al moto de' liquidi aggiungere l'integrale triplicato

$$\int da \int db \int dc \cdot \Lambda \delta H$$

essendo Λ un coefficiente indeterminato.

Considerato il valore del sestinomio H (equazione (4) num.°9.) e l'operazione già fatta al num.°14. per arrivare a quella espressione (32) del valore di H′, non incontreremo alcuna difficoltà a capire che il prodotto $\Lambda\delta H$ equivale alla quantità seguente

$$\begin{aligned} &\Lambda l_1 \frac{d\delta x}{da} + \Lambda m_1 \frac{d\delta x}{db} + \Lambda n_1 \frac{d\delta x}{dc} \\ &+ \Lambda l_2 \frac{d\delta y}{da} + \Lambda m_2 \frac{d\delta y}{db} + \Lambda n_2 \frac{d\delta y}{dc} \\ &+ \Lambda l_3 \frac{d\delta z}{da} + \Lambda m_3 \frac{d\delta z}{db} + \Lambda n_3 \frac{d\delta z}{dc}; \end{aligned} \tag{19}$$

la quale deve subire trasformazioni analoghe alle praticate, quando trattavasi dei corpi solidi, sulla quantità (11) del num.°36. Essa pertanto deve essere messa sotto la forma seguente

The condition of the invariability of the density carries with it (review equation (6) sect. 9. Capo I) the equation

$$H = constant$$

H being the sextinomium expressed in equation (4) sect. 9.

It is precisely because the density must be invariant in all cases of movement, we can deduce from the precedent equation the varied equation

$$\delta H = 0. \tag{17}$$

Since what has been said at sections 31, 32 on the expressions therein marked (36), (37) has been recalled: since it has been seen what has been accomplished in sect. 35, when the general equation for the motion of solid bodies has been established, it will be manifested that in the current case to the triple integral that includes the external forces

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \ \delta x + \text{etc.} \right\} \tag{18}$$

we will have, to form the first member of the general equation relevant to the motion of liquids, add the triple integral

$$\int da \int db \int dc \cdot \Lambda \delta H$$

Λ being be an indeterminate coefficient.

Since the value of the sextinomium H (equation (4) sect. 9) and the operation already done at sect. 14 have been considered in order to arrive at the expression (32) of the value of H', we will not encounter any difficulty in understanding that the product $\Lambda\delta H$ is equivalent to the following quantity

$$\begin{aligned} &\Lambda l_1 \frac{d\delta x}{da} + \Lambda m_1 \frac{d\delta x}{db} + \Lambda n_1 \frac{d\delta x}{dc} \\ &+ \Lambda l_2 \frac{d\delta y}{da} + \Lambda m_2 \frac{d\delta y}{db} + \Lambda n_2 \frac{d\delta y}{dc} \\ &+ \Lambda l_3 \frac{d\delta z}{da} + \Lambda m_3 \frac{d\delta z}{db} + \Lambda n_3 \frac{d\delta z}{dc}; \end{aligned} \tag{19}$$

which must undergo transformations similar to those accomplished, when solid bodies were dealt with, on the quantity (11) of sect. 36. It must therefore be put in the form below.

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{d\cdot\Lambda l_1}{da}+\frac{d\cdot\Lambda m_1}{db}+\frac{d\cdot\Lambda n_1}{dc}\right)\delta x\\
&-\left(\frac{d\cdot\Lambda l_2}{da}+\frac{d\cdot\Lambda m_2}{db}+\frac{d\cdot\Lambda n_2}{dc}\right)\delta y\\
&-\left(\frac{d\cdot\Lambda l_3}{da}+\frac{d\cdot\Lambda m_3}{db}+\frac{d\cdot\Lambda n_3}{dc}\right)\delta z\\
&+\frac{dL}{da}+\frac{dM}{db}+\frac{dN}{dc}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

essendosi poste per brevità

$$
\begin{aligned}
L&=\Lambda\left(l_1\delta x+l_2\delta y+l_3\delta z\right)\\
M&=\Lambda\left(m_1\delta x+m_2\delta y+m_3\delta z\right)\\
N&=\Lambda\left(n_1\delta x+n_2\delta y+n_3\delta z\right).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Introducendo la quantità (20) sotto il secondo segno d'integrale triplicato, che va sommato e compenetrato col precedente (18), si vede come sulle tre ultime parti di detta quantità può eseguirsi alcuna delle integrazioni per a o per b o per c, la quale trasporta quelle parti sotto integrali duplicati. Rimane sotto l'integrale triplicato una quantità dove si debbono annullare separatamente i coefficienti totali delle tre variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ ivi non affette da alcuna derivazione per a, b, c. Così si ottengono le tre equazioni

$$
\begin{aligned}
X-\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d\cdot\Lambda l_1}{da}-\frac{d\cdot\Lambda m_1}{db}-\frac{d\cdot\Lambda n_1}{dc}&=0\\
Y-\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d\cdot\Lambda l_2}{da}-\frac{d\cdot\Lambda m_2}{db}-\frac{d\cdot\Lambda n_2}{dc}&=0\\
Z-\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{d\cdot\Lambda l_3}{da}-\frac{d\cdot\Lambda m_3}{db}-\frac{d\cdot\Lambda n_3}{dc}&=0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Sui tre trinomj a derivate parziali in ciascuna di queste tre convien praticare le trasformazioni indicate generalmente per mezzo delle equazioni (17), (18) del num.°37. Esse equazioni (22) allora riduconsi

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{d\cdot\Lambda l_1}{da}+\frac{d\cdot\Lambda m_1}{db}+\frac{d\cdot\Lambda n_1}{dc}\right)\delta x\\
&-\left(\frac{d\cdot\Lambda l_2}{da}+\frac{d\cdot\Lambda m_2}{db}+\frac{d\cdot\Lambda n_2}{dc}\right)\delta y\\
&-\left(\frac{d\cdot\Lambda l_3}{da}+\frac{d\cdot\Lambda m_3}{db}+\frac{d\cdot\Lambda n_3}{dc}\right)\delta z\\
&+\frac{dL}{da}+\frac{dM}{db}+\frac{dN}{dc}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

having defined for brevity

$$
\begin{aligned}
L&=\Lambda\left(l_1\delta x+l_2\delta y+l_3\delta z\right)\\
M&=\Lambda\left(m_1\delta x+m_2\delta y+m_3\delta z\right)\\
N&=\Lambda\left(n_1\delta x+n_2\delta y+n_3\delta z\right).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Introducing the quantity (20) under the second sign of the triple integral, that must be added and merged with the precedent (18), it is seen how on the last three parts of the aforementioned quantity may be done any of the integration for a for b or for c, which carries those parts under double integrals. Under the triple integral a quantity remains where the total coefficient of the three total variation δx, δy, δz therein not affected by any derivation for a, b, c must be separately cancelled. Thus, the [following] three equations are obtained

$$
\begin{aligned}
X-\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d\cdot\Lambda l_1}{da}-\frac{d\cdot\Lambda m_1}{db}-\frac{d\cdot\Lambda n_1}{dc}&=0\\
Y-\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d\cdot\Lambda l_2}{da}-\frac{d\cdot\Lambda m_2}{db}-\frac{d\cdot\Lambda n_2}{dc}&=0\\
Z-\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{d\cdot\Lambda l_3}{da}-\frac{d\cdot\Lambda m_3}{db}-\frac{d\cdot\Lambda n_3}{dc}&=0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

On the three trinomials in partial derivatives in each of these three it is convenient performing the transformations indicated generally by means of the equations (17), (18) of sect. 37. Those equations (22) then are reduced

$$\begin{aligned} X - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz}\right) &= 0 \\ Y - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dz}\right) &= 0 \\ Z - \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

essendo

$$\begin{aligned} P_1 &= \Gamma\Lambda\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right) \\ P_2 &= \Gamma\Lambda\left(l_1\frac{dy}{da} + m_1\frac{dy}{db} + n_1\frac{dy}{dc}\right) \\ P_3 &= \Gamma\Lambda\left(l_1\frac{dz}{da} + m_1\frac{dz}{db} + n_1\frac{dz}{dc}\right) \\ Q_1 &= \Gamma\Lambda\left(l_2\frac{dx}{da} + m_2\frac{dx}{db} + n_2\frac{dx}{dc}\right) \\ Q_2 &= \Gamma\Lambda\left(l_2\frac{dy}{da} + m_2\frac{dy}{db} + n_2\frac{dy}{dc}\right) \\ Q_3 &= \Gamma\Lambda\left(l_2\frac{dz}{da} + m_2\frac{dz}{db} + n_2\frac{dz}{dc}\right) \\ R_1 &= \Gamma\Lambda\left(l_3\frac{dx}{da} + m_3\frac{dx}{db} + n_3\frac{dx}{dc}\right) \\ R_2 &= \Gamma\Lambda\left(l_3\frac{dy}{da} + m_3\frac{dy}{db} + n_3\frac{dy}{dc}\right) \\ R_3 &= \Gamma\Lambda\left(l_3\frac{dz}{da} + m_3\frac{dz}{db} + n_3\frac{dz}{dc}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Presentemente osservando le nove equazioni identiche (28) del num.°14. e la (6) del num.°9.,vedia a colpo d'occhio risultare

$$\begin{aligned} P_1 = \Lambda; \quad P_2 = 0; \quad P_3 = 0 \\ Q_1 = 0; \quad Q_2 = \Lambda; \quad Q_3 = 0 \\ R_1 = 0; \quad R_2 = 0; \quad R_3 = \Lambda \end{aligned} \tag{25}$$

e quindi le (23) mutarsi nelle (11) di questo Capo, a meno del segno della quantità Λ, che non fa difetto, essendo questa quantità stata introdotta come un coefficiente indeterminato.

$$\begin{aligned} X - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dz}\right) &= 0 \\ Y - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dz}\right) &= 0 \\ Z - \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{dR_1}{dx} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dz}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

being

$$\begin{aligned} P_1 &= \Gamma\Lambda\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right) \\ P_2 &= \Gamma\Lambda\left(l_1\frac{dy}{da} + m_1\frac{dy}{db} + n_1\frac{dy}{dc}\right) \\ P_3 &= \Gamma\Lambda\left(l_1\frac{dz}{da} + m_1\frac{dz}{db} + n_1\frac{dz}{dc}\right) \\ Q_1 &= \Gamma\Lambda\left(l_2\frac{dx}{da} + m_2\frac{dx}{db} + n_2\frac{dx}{dc}\right) \\ Q_2 &= \Gamma\Lambda\left(l_2\frac{dy}{da} + m_2\frac{dy}{db} + n_2\frac{dy}{dc}\right) \\ Q_3 &= \Gamma\Lambda\left(l_2\frac{dz}{da} + m_2\frac{dz}{db} + n_2\frac{dz}{dc}\right) \\ R_1 &= \Gamma\Lambda\left(l_3\frac{dx}{da} + m_3\frac{dx}{db} + n_3\frac{dx}{dc}\right) \\ R_2 &= \Gamma\Lambda\left(l_3\frac{dy}{da} + m_3\frac{dy}{db} + n_3\frac{dy}{dc}\right) \\ R_3 &= \Gamma\Lambda\left(l_3\frac{dz}{da} + m_3\frac{dz}{db} + n_3\frac{dz}{dc}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Presently observing the nine identical equations (28) sect. 14 and [equations] (6) of sect. 9, we see at a glance to be

$$\begin{aligned} P_1 = \Lambda; \quad P_2 = 0; \quad P_3 = 0 \\ Q_1 = 0; \quad Q_2 = \Lambda; \quad Q_3 = 0 \\ R_1 = 0; \quad R_2 = 0; \quad R_3 = \Lambda \end{aligned} \tag{25}$$

and then the (23) transform in the (11) of this Capo, unless the sign of the quantity Λ, that does not fault, since this quantity was introduced as an undetermined coefficient.

Per vedere uscire anche le equazioni (13) num.°64. spettanti ai limiti del fluido, conviene, in corrispondenza a quanto si è fatto al num.°51., trasformare il precedente integrale triplicato (18), e l'altro simile portato dall'equazione di condizione, coll'introdurre sotto il segno il fattore $H\Gamma$ che non produce alterazione per essere eguale all'unitá, e quindi passare dalle integrazioni prese per a, b, c a quelle prese per x, y, z. Inoltre bisogna praticare a dirittura sulla quantità (20) prima di collocarla sotto il secondo integrale le trasformazioni precedentemente descritte. Per la prima parte di essa quantità (20) abbiamo già veduto come si riducono i trinomj coefficienti delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$; gli ultimi tre termini della espressione (20), visti i valori (21), ricordato il principio esposto nelle equazioni (17), (18) del num.°37., e richiamate novellamente le equazioni identiche (28) del num.°14., cangiansi per via di riduzioni che si presentano da per se stesse, nel trinomio

$$\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Lambda\delta x}{dx}+\frac{d\cdot\Lambda\delta y}{dy}+\frac{d\cdot\Lambda\delta z}{dz}\right).$$

così che la quantità (20) risulta equivalente a quest'altra

$$-\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\Lambda}{dx}\delta x+\frac{d\Lambda}{dy}\delta y+\frac{d\Lambda}{dz}\delta z\right)+\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Lambda\delta x}{dx}+\frac{d\cdot\Lambda\delta y}{dy}+\frac{d\cdot\Lambda\delta z}{dz}\right). \tag{26}$$

Se ne faccia la sostituzione sotto l'integrale triplicato risultante dall'unione dei due che nel caso attuale costituiscono il primo membro dell'equazione generale. Annullando, come si sa doversi fare, i coefficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$, ritornano le solite tre equazioni come sopra ; ma vi è di più la parte che si colloca sotto integrali duplicati, la quale riesce

$$\int dy\int dz\cdot\Lambda\delta x+\int dx\int dz\cdot\Lambda\delta y+\int dx\int dy\cdot\Lambda\delta z. \tag{27}$$

Essa va trattata come la quantità (27) del num.°51.: va cioè, mediante le trasformazioni indicate al num.°52., ridotta ad un solo integrale duplicato che risulta

$$\int dx\int dy\cdot\Lambda\left(\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x-\frac{dz}{dy}\delta y\right); \tag{28}$$

In order to obtain the equations (13) sect. 64 pertaining to the limits of the fluid, it is advisable, in the same way as we did sect. 51, to transform the precedent triple integral (18), and the other similar brought by the equation of state, by introducing under the [integral] sign the factor $H\Gamma$ that produces no alteration because it is equal to the unit value, and then to switch from integrations in terms of a, b, c to those in terms of x, y, z. We also have to apply even to the quantity (20) before placing it under the second integral, the transformations described above. As for the first part of that quantity (20), we have already seen how the trinomials coefficients of the variation δx, δy, δz reduce; the last three terms of the expression (20), since the values (21) have been seen and the principle stated in equations (17), (18) of sect. 37 has been remembered, and the identical equations (28) of sect. 14 have been recalled once again, [the last three terms] are changed because of reductions that arise by themselves, in the trinomial

$$\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Lambda\delta x}{dx}+\frac{d\cdot\Lambda\delta y}{dy}+\frac{d\cdot\Lambda\delta z}{dz}\right).$$

so that the amount (20) is equivalent to this other

$$-\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\Lambda}{dx}\delta x+\frac{d\Lambda}{dy}\delta y+\frac{d\Lambda}{dz}\delta z\right)+\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{d\cdot\Lambda\delta x}{dx}+\frac{d\cdot\Lambda\delta y}{dy}+\frac{d\cdot\Lambda\delta z}{dz}\right). \tag{26}$$

Let us substitute it [(26)] under the triple integral resulting from the union of the two that in the present case are the first member of the general equation. Equating to zero, as we know we should do, the total coefficients of the δx, δy, δz, the same three equations as above return, but there is more that part which can be placed under double integrals, which becomes

$$\int dy\int dz\cdot\Lambda\delta x+\int dx\int dz\cdot\Lambda\delta y+\int dx\int dy\cdot\Lambda\delta z. \tag{27}$$

It should be treated as the quantity (27) of sect. 51: that is, through the processing referred to the sect. 52, it must be reduced to a single double integral which is

$$\int dx\int dy\cdot\Lambda\left(\delta z-\frac{dz}{dx}\delta x-\frac{dz}{dy}\delta y\right); \tag{28}$$

poi sommata e fusa in un solo integrale insieme a quello della quantità segnata (28) al num.°51. Allora debbono eguagliarsi separatamente a zero i coefficienti delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$: il che restituisce le equazioni (13) colla sola diversità del segno per la Λ , come sopra.

Si può osservare che la precedente analisi si piega anche ai fluidi elastici quando si adotta per essi l'equazione di condizione $H_1 = 1$, dove H_1 abbia il valore (3) del num.°45.,equazione dimostrata al principio del num.°46. In tal caso bisogna prima trasformare il precedente integrale (18) delle forze in un altro preso per le p, q, r, come si è fatto allo stesso num.°46.

67. La dimostrazione riferita nell'antecedente numero, dopo stabilita l'equazione di condizione (17) può prendere un altro andamento che per più titoli mi giova di esporre. Primieramente mi verrò per tal modo preparando alcune formole che avranno utili applicazioni nel Capo seguente : secondariamente otterremo una nuova riconferma delle fondamentali equazioni (11) : in terzo luogo potrò con questo mezzo provare una proposizione più sopra semplicemente annunziata.

Conviene premettere la ricerca di una nuova espressione pel valore del sestinomio H .

Richiaminsi le nove equazioni identiche (28) del num.° 14., e le sei denominazioni (equazioni (6)) del num.° 34. Di quelle nove si quadrino la prima, la quarta e la settima, indi si sommino : avremo per le (6) num.° 34

$$l_1^2 t_1 + m_1^2 t_2 + n_1^2 t_3 + 2l_1 m_1 t_4 + 2l_1 n_1 t_5 + 2m_1 n_1 t_6 = H^2.$$

Quadrando invece la seconda, la quinta e l'ottava di quelle (28) num.° 14., e sommandole troveremo

$$l_2^2 t_1 + m_2^2 t_2 + n_2^2 t_3 + 2l_2 m_2 t_4 + 2l_2 n_2 t_5 + 2m_2 n_2 t_6 = H^2.$$

E similmente dalla terza, sesta e nona

$$l_3^2 t_1 + m_3^2 t_2 + n_3^2 t_3 + 2l_3 m_3 t_4 + 2l_3 n_3 t_5 + 2m_3 n_3 t_6 = H^2.$$

Si sommino ancora queste equazioni che ora ci siamo formate, ed otterremo

then added and merged into a single integral with that of the quantity marked (28) at sect. 51. Then the coefficients of variations δx, δy, δz must be separately equated to zero: this returns the equations (13) with only the diversity of the sign for the Λ, as above.

It may be noted that the above analysis also applies to the elastic fluids when the equation of condition $H_1 = 1$ is adopted for them, where H_1 has the value (3) of sect. 45, equation demonstrated the principle of sect. 46. In this case we must first transform the precedent integral (18) of the forces in another in terms of the p, q, r, as it was done at the same sect. 46.

67. The demonstration reported in the antecedent section, after the equation of condition (17) has been established, can take another trend that It is convenient for me to exhibit in the following steps. In the first I will come to thereby preparing some formulas that will have useful applications in following Capo; in the second step, we will get a new reconfirmation of the fundamental equations (11); in the third step I can prove a proposition above simply announced by this means.

It is convenient to prepend the search for a new expression for the value of the sestinomium H.

Let us recall the nine identical equations (28) of sect. 14, and the six definitions (equations (6)) of sect. 34. Of those nine [equations] we square the first, the fourth and the seventh [equations], and then we sum them: we will have for the (6) sect. 34

$$l_1^2 t_1 + m_1^2 t_2 + n_1^2 t_3 + 2l_1 m_1 t_4 + 2l_1 n_1 t_5 + 2m_1 n_1 t_6 = H^2.$$

On the other hand, by squaring the second, the fifth and the eighth [equations] of those (28) sect. 14, and by adding them, we will find

$$l_2^2 t_1 + m_2^2 t_2 + n_2^2 t_3 + 2l_2 m_2 t_4 + 2l_2 n_2 t_5 + 2m_2 n_2 t_6 = H^2.$$

And likewise from the third, the sixth and the ninth [equations]

$$l_3^2 t_1 + m_3^2 t_2 + n_3^2 t_3 + 2l_3 m_3 t_4 + 2l_3 n_3 t_5 + 2m_3 n_3 t_6 = H^2.$$

We will sum again these equations, which we have now formed, and we will get

$$3H^2 = \left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\right) t_1 + 2\left(l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3\right) t_4 + \left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right) t_2 + 2\left(l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3\right) t_5 + \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) t_3 + 2\left(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3\right) t_6. \quad (29)$$

Presentemente si noti l'equazione identica

$$(AM - BL)^2 + (CL - AN)^2 + (BN - CM)^2 = \left(A^2 + B^2 + C^2\right)\left(L^2 + M^2 + N^2\right) - (AL + BM + CN)^2 \quad (30)$$

facilmente verificabile mediante lo svolgimento delle operazioni indicate nei due membri : e su questo tipo, richiamate le denominazioni (27) num.°14., riconosceremo vere le tre equazioni

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= t_2 t_3 - t_6^2 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= t_1 t_3 - t_5^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= t_1 t_2 - t_4^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Si noti altresì questa seconda equazione identica

$$\begin{aligned} &(AM - BL)(BP - AQ) + (CL - AN)(AR - CP) + (BN - CM)(CQ - BR) \\ &= (AP + BQ + CR)(AL + BM + CN) - \left(A^2 + B^2 + C^2\right)(LP + MQ + NR) \end{aligned} \quad (32)$$

verificabile alla stessa maniera della (30); e su quest'altro tipo, mediante le denominazioni (27) num.°14., ci persuaderemo della verità delle tre nuove equazioni

$$\begin{aligned} l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 &= t_5 t_6 - t_3 t_4 \\ l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 &= t_4 t_6 - t_2 t_5 \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 &= t_4 t_5 - t_1 t_6. \end{aligned} \quad (33)$$

Se i valori dei sei trinomj datici dalle equazioni (31), (33) si sostituiscono nella equazione (29), se ne cava dopo facili riduzioni

$$H = \sqrt{t_1 t_2 t_3 + 2 t_4 t_5 t_6 - t_1 t_6^2 - t_2 t_5^2 - t_3 t_4^2}; \quad (34)$$

cioè il sestinomio H dato per le sei quantità t_1, t_2, ec., che è la nuova espressione di cui andavamo in cerca.

$$3H^2 = \left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\right) t_1 + 2\left(l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3\right) t_4 + \left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right) t_2 + 2\left(l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3\right) t_5 + \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) t_3 + 2\left(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3\right) t_6. \quad (29)$$

Now, let us consider the equation

$$(AM - BL)^2 + (CL - AN)^2 + (BN - CM)^2 = \left(A^2 + B^2 + C^2\right)\left(L^2 + M^2 + N^2\right) - (AL + BM + CN)^2 \quad (30)$$

which can be easily verified by carrying out the operations indicated in the two members [of the equations]: and on this type [of equation], since the definitions (27) sect. 14 have been recalled, we will recognize that the [following] three equations hold true

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= t_2 t_3 - t_6^2 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= t_1 t_3 - t_5^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= t_1 t_2 - t_4^2. \end{aligned} \quad (31)$$

It should also be considered this second equation

$$\begin{aligned} &(AM - BL)(BP - AQ) + (CL - AN)(AR - CP) + (BN - CM)(CQ - BR) \\ &= (AP + BQ + CR)(AL + BM + CN) - \left(A^2 + B^2 + C^2\right)(LP + MQ + NR) \end{aligned} \quad (32)$$

ascertainable in the same manner as the (30), and on this other kind [of equation], by using the definitions (27) sect. 14, we will persuade us of the truth of the three new equations

$$\begin{aligned} l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 &= t_5 t_6 - t_3 t_4 \\ l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 &= t_4 t_6 - t_2 t_5 \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 &= t_4 t_5 - t_1 t_6. \end{aligned} \quad (33)$$

If the values of the six trinomials given to us by the equations (31), (33) are substituted in the equation (29), one obtains after easy reductions

$$H = \sqrt{t_1 t_2 t_3 + 2 t_4 t_5 t_6 - t_1 t_6^2 - t_2 t_5^2 - t_3 t_4^2}; \quad (34)$$

that is the sextimonium H given in terms of the six quantities t_1, t_2 etc., which is the new expression we were looking for.

Quindi anche la densità Γ in virtù dell'equazione (6) num.° 9. riceve un valore fatto con quelle sei quantità t_1, t_2, t_3, t_4, ec., riuscendo eguale all'unità divisa pel precedente radicale (34). E può avere qualche significazione il mostrare un punto di ravvicinamento fra le espressioni analitiche delle densità proprie delle tre sorte di sistemi, notando che se si adottano le denominazioni (6) del num.° 34., vengono le densità pei sistemi lineare e superficiale rispettivamente eguali all'unità divisa pei radicali $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1 t_2 - t_4^2}$ (rivedi le equazioni (16) num.° 11., e (24) num.° 12.).

Pertanto se prendiamo l'ottenuto valore (34) di H per adoperarlo nello svolgimento della equazione (17), troveremo che questa equazione variata, introdottovi un moltiplicatore indeterminato Λ, prende la forma

$$A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6 = 0 \tag{35}$$

essendo

$$A = \frac{\Lambda}{2H}\left(t_2 t_3 - t_6^2\right);\ B = \frac{\Lambda}{2H}\left(t_1 t_3 - t_5^2\right);\ C = \frac{\Lambda}{2H}\left(t_1 t_2 - t_4^2\right)$$
$$D = \frac{\Lambda}{H}\left(t_5 t_6 - t_3 t_4\right);\ E = \frac{\Lambda}{H}\left(t_4 t_6 - t_2 t_5\right);\ F = \frac{\Lambda}{H}\left(t_4 t_5 - t_1 t_6\right). \tag{36}$$

Ponendo il primo membro dell'equazione (35) sotto un integrale triplicato per a, b, c, e aggiungendolo all'altro integrale triplicato (18) numero precedente, avremo precisamente la stessa equazione (10) num.° 35. che trovammo pei sistemi rigidi : quindi arriveremo alle stesse equazioni (26) num.° 38. Se non che in tal caso nelle susseguenti equazioni (27) (le quali per le altre susseguenti (28) conducono ad assegnare i valori delle P_1, P_2, ec.) dovremo mettere per A, B, C, D, E, F i valori (36) ora trovati . Qui sta la differenza nella scrittura analitica pei due casi dei corpi rigidi e dei fluidi; nei rigidi le sei quantità $A, B, C, ec.$ sono tutte e sei indeterminate : nei fluidi dipendono da una sola indeterminata Λ in forza delle precedenti equazioni (36) .

L'indicata sostituzione dei valori (36) nelle (27) num.° 38. ci riduce le successive (28) di quel numero alle seguenti

Thus, also the density Γ by virtue of the equation (6) sect. 9 receives a value done with those six quantities t_1, t_2, t_3, t_4 etc., becoming equal to the unit value divided by the precedent radical (34). It may have some meaning to show a point of rapprochement between the analytical expressions of the densities belonging to the three types of systems, noting that if we take the definitions (6) of sect. 34, the densities for linear and superficial systems come out equal to the unit value divided by the radicals $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1 t_2 - t_4^2}$ (see the equations (16) sect. 11, and (24) sect. 12), respectively.

Therefore if we take the obtained value (34) of H to use it in the development of the equation (17), we will find that the variation of this equation, after that there has been introduced an undetermined multiplier Λ, takes the form

$$A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6 = 0 \tag{35}$$

being

$$A = \frac{\Lambda}{2H}\left(t_2 t_3 - t_6^2\right);\ B = \frac{\Lambda}{2H}\left(t_1 t_3 - t_5^2\right);\ C = \frac{\Lambda}{2H}\left(t_1 t_2 - t_4^2\right)$$
$$D = \frac{\Lambda}{H}\left(t_5 t_6 - t_3 t_4\right);\ E = \frac{\Lambda}{H}\left(t_4 t_6 - t_2 t_5\right);\ F = \frac{\Lambda}{H}\left(t_4 t_5 - t_1 t_6\right). \tag{36}$$

By placing the first member of equation (35) under a triple integral in terms of a, b, c, and by adding it to another triple integral (18) of the precedent section, we will have precisely the same equation (10) sect. 35 which we found for rigid systems: then we will arrive at the same equations (26) sect. 38. On the other hand in this case in the subsequent equations (27) (which for other subsequent [equation] (28) lead to assign the values of the P_1, P_2 etc.) we shall replace instead of A, B, C, D, E, F the values (36) now found. Herein lies the difference in analytical writing for the two cases of rigid bodies and of fluids; in the rigid bodies the six quantities A, B, C, ecc. are all six indeterminate: in the fluids they depend on a single indeterminate Λ by virtue of the above equations (36).

The indicated substitutions of the values (36) in the (27) sect. 38 reduces the subsequent [equation] (28) of that section to the following ones

$$\begin{aligned} P_1 &= -\Lambda;\ P_2 = 0;\ P_3 = 0 \\ Q_1 &= 0;\ Q_2 = -\Lambda;\ Q_3 = 0 \\ R_1 &= 0;\ R_2 = 0;\ R_3 = -\Lambda. \end{aligned} \tag{37}$$

Per dimostrare questo importante risultamento, conviene prima scrivere da capo i valori (36) sostituendo ai fattori binomiali le quantità trinomiali equivalenti (equazioni (31) e (33)), indi porli nelle (27) num.° 38. Cominciamo dalla prima di quelle equazioni : essa diventa

$$\begin{aligned} \frac{H}{\Lambda}(I) = &-\left(l_1^2+l_2^2+l_3^2\right)\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2\left(l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} \\ &-\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2\right)\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2\left(l_1n_1+l_2n_2+l_3n_3\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc} \\ &-\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 - 2\left(m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3\right)\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc} \end{aligned}$$

e può ridursi all'espressione

$$\begin{aligned} \frac{H}{\Lambda}(I) = &-\left(l_1\frac{dx}{da}+m_1\frac{dx}{db}+n_1\frac{dx}{dc}\right)^2 \\ &-\left(l_2\frac{dx}{da}+m_2\frac{dx}{db}+n_2\frac{dx}{dc}\right)^2 - \left(l_3\frac{dx}{da}+m_3\frac{dx}{db}+n_3\frac{dx}{dc}\right)^2 \end{aligned}$$

la quale per le (28) del num° 14. si semplifica fino a dare

$$(I) = -\Lambda H. \tag{38}$$

Le due seguenti equazioni (27) num.° 38. ci somministrano per le quantità (II) , (III) lo stesso valore ora trovato per la (I) : e a persuadercene non fa bisogno rifare il calcolo, basta sostituire, o immaginare sostituita prima la lettera y, poi la z alla x, e ricordarsi le altre equazioni identiche (28) num° 14.

Venendo alla quarta delle (27) num.° 38., la sostituzione come sopra dei valori delle A, B, ec. ci dà un risultato che può essere messo sotto la forma

$$\begin{aligned} \frac{H}{\Lambda}(IV) = &-\left(l_1\frac{dx}{da}+m_1\frac{dx}{db}+n_1\frac{dx}{dc}\right)\left(l_1\frac{dy}{da}+m_1\frac{dy}{db}+n_1\frac{dy}{dc}\right) \\ &-\left(l_2\frac{dx}{da}+m_2\frac{dx}{db}+n_2\frac{dx}{dc}\right)\left(l_2\frac{dy}{da}+m_2\frac{dy}{db}+n_2\frac{dy}{dc}\right) \\ &-\left(l_3\frac{dx}{da}+m_3\frac{dx}{db}+n_3\frac{dx}{dc}\right)\left(l_3\frac{dy}{da}+m_3\frac{dy}{db}+n_3\frac{dy}{dc}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= -\Lambda;\ P_2 = 0;\ P_3 = 0 \\ Q_1 &= 0;\ Q_2 = -\Lambda;\ Q_3 = 0 \\ R_1 &= 0;\ R_2 = 0;\ R_3 = -\Lambda. \end{aligned} \tag{37}$$

To demonstrate this important result, it is convenient firstly to write again the values (36) by substituting to the binomial factors the equivalent trinomial quantities (equations (31) and (33)), then to place them in the (27) sect. 38. Let us start with the first of those equations: it becomes

$$\begin{aligned} \frac{H}{\Lambda}(I) = &-\left(l_1^2+l_2^2+l_3^2\right)\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2\left(l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} \\ &-\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2\right)\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2\left(l_1n_1+l_2n_2+l_3n_3\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{dc} \\ &-\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)^2 - 2\left(m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3\right)\frac{dx}{db}\frac{dx}{dc} \end{aligned}$$

and it can be reduced to the expression

$$\begin{aligned} \frac{H}{\Lambda}(I) = &-\left(l_1\frac{dx}{da}+m_1\frac{dx}{db}+n_1\frac{dx}{dc}\right)^2 \\ &-\left(l_2\frac{dx}{da}+m_2\frac{dx}{db}+n_2\frac{dx}{dc}\right)^2 - \left(l_3\frac{dx}{da}+m_3\frac{dx}{db}+n_3\frac{dx}{dc}\right)^2 \end{aligned}$$

which for the (28) of sect. 14 is simplified up to give

$$(I) = -\Lambda H. \tag{38}$$

The two following equations (27) sect. 38 give us for the quantities (II), (III) the same value now been found for the (I): and to persuade us of this there is no need to redo the calculation, just substitute, or imagine substituted first the letter y, then the z to the x, and remember the other identical equations (28) sect. 14.

Coming to the fourth of (27) sect. 38, the substitution as above of the values of the A, B etc. gives us a result that can be placed under the form

$$\begin{aligned} \frac{H}{\Lambda}(IV) = &-\left(l_1\frac{dx}{da}+m_1\frac{dx}{db}+n_1\frac{dx}{dc}\right)\left(l_1\frac{dy}{da}+m_1\frac{dy}{db}+n_1\frac{dy}{dc}\right) \\ &-\left(l_2\frac{dx}{da}+m_2\frac{dx}{db}+n_2\frac{dx}{dc}\right)\left(l_2\frac{dy}{da}+m_2\frac{dy}{db}+n_2\frac{dy}{dc}\right) \\ &-\left(l_3\frac{dx}{da}+m_3\frac{dx}{db}+n_3\frac{dx}{dc}\right)\left(l_3\frac{dy}{da}+m_3\frac{dy}{db}+n_3\frac{dy}{dc}\right) \end{aligned}$$

dopo di che, in vista delle solite equazioni identiche (28) num.° 14., riconosciamo essere $(IV) = 0$. In simil modo le ultime due di quelle equazioni ci dimostrano nulle anche le quantità (V), (VI), e per convincercene subito appoggiandoci all'ultima riduzione, basta la prima volta cambiare la lettera y colla z, e la seconda la lettera x colla y.

Sono dunque ben provate in forza delle (28) num.° 38. le precedenti equazioni (37) , stanti le quali, le (26) num.° 38. ci porgono dimostrate per la terza volta le equazioni (11) di questo Capo senza ricorrere al principio della pressione eguale in tutti versi .

Facciasi una speciale attenzione a quel passo della precedente analisi dove abbiamo veduto che la condizione della densità costante porta di dover aggiungere all'equazione generale un integrale triplicato formato col primo membro dell'equazione (35). Quando il corpo è rigido (equazione (10) num.° 35.) v'è di già nella equazione generale una quantità di questa forma, talchè l'aggiunta della quantità proveniente dalla (35) non fa che rendere binomiali i coefficienti delle variate $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3$, ec.; e siccome i primi termini di tali binomj sono indeterminati , possono abbracciare anche i secondi, e i coefficienti tenersi monomj senza alterazione. Ecco il perchè nel moto de' corpi rigidi a densità costante (come accennai al num.° 66.) si può prescindere dal considerare la condizione scritta nella equazione (17).

68. Ho inoltre detto al num.° 65. che non si hanno ancora idee abbastanza chiare intorno alla pressione nei fluidi. Si suole chiamare pressione una forza interna $\Lambda(x, y, z)$ funzione delle coordinate, quale apparisce nelle equazioni (11) ; si ritiene a ragione che questa pressione, appunto perchè funzione delle coordinate, varia nelle diverse parti della massa fluida; è ben chiaro, per esempio, che in un'acqua tranquilla la pressione verso il fondo del recipiente è maggiore che non verso la superficie superiore del liquido. Ma se , quando si dice che nei fluidi la pressione è eguale in tutti i versi, tiensi solamente

after that, in view of the usual identical equations (28) sect. 14, we recognize to be $(IV) = 0$. In a similar manner the last two of those equations show us also to be zero also the quantities (V), (VI), and to convince us of this immediately relying on the last reduction, just change the first time the letter y with the z, and the second [time] the letter x with the y.

Thus, they are therefore well proven by virtue of the (28) sect. 38 the precedent equations (37), which being valid, the (26) sect. 38 take to us the demonstration for the third time of the equations (11) of this Capo without resorting to the principle of equal pressure in all directions.

A special attention should be paid to that passage of the precedent analysis where we have seen that the condition of the constant density leads to the need of adding to the general equation a triple integral formed with the first member of the equation (35). When the body is rigid (equation (10) sect. 35) there is already in the general equation a quantity of this form, so that the addition of the quantity obtained from the (35) only makes binomial the coefficients of variations $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3$, etc.; and since the first terms of these binomia are indeterminate, they can also embrace the second [members], and the coefficients can be maintained monomials without alteration. That's why in the motion of rigid bodies with constant density (as I mentioned at sect. 66) one can avoid considering the condition written in equation (17).

68. I also told at the sect. 65 that there are not yet quite clear ideas about the pressure in fluids. Pressure is usually called an inner force $\Lambda(x, y, z)$ function of the coordinates, which appears in equations (11); it is expected, reasonably, that this pressure, precisely because function of the coordinates, varies in different parts of the fluid mass; it is well clear, for example, that in the water in the static case the pressure towards the bottom of the container is greater than [pressure] towards the upper surface of the liquid. But if, when we say that in the fluids the pressure is the same in all directions, is considered only

di mira l'anzidetta forza interna, non è difficile venir condotti a deduzioni false. Sapendosi che l'azione è sempre eguale alla reazione, si può credere che la pressione con cui una molecola più bassa agisce sull'altra che le sta sopra immediatamente, uguagli quella con cui questa reagisce e avvenga lo stesso per la molecola che le sta di sotto : e così passando da molecola a molecola venire alla conseguenza assurda che la pressione sia la stessa per tutti i punti del fluido. — Per togliersi a un tale imbarazzo convien riflettere che a produrre la pressione eguale in tutti i versi concorrono eziandio le forze esterne X, Y, Z, anch'esse, generalmente parlando, variabili di punto in punto. È dal conflitto di queste colla forza interna $\Lambda(x, y, z)$ (attuata fra le molecole, parte per forze attive molecolari, parte, ed è il più, per forze passive provenienti dall'applicazione delle forze esterne) che nasce la pressione eguale in tutti i versi: nasce una costanza di mezzo a quantità mutabili. Vuolsi pertanto sapere perchè incontriamo qui oscurità di idee? è perchè la stessa parola non ha sempre un significato egualmente determinato. Spesso chiamiamo pressione la forza interna $\Lambda(x, y, z)$ senza badare alle forze esterne : invece quando enunciamo il principio della pressione eguale in tutti i versi, sottointendiamo che la pressione oltre la forza interna Λ comprenda in certe direzioni anche le forze esterne : nel primo caso la parola non esprime che una parte di ciò che esprime nel secondo caso. Vi ha di più : a produrre l'oscurità d'idee di cui dicemmo, contribuisce forse maggiormente un cambiamento sottinteso che si fa nel concetto della pressione Λ , la quale è riguardata talvolta come forza di prima specie, talvolta come di seconda specie (rivedi i numeri 18, 19, 20, 21.). Finchè la consideriamo come una forza interna che agisce su tutte le molecole della massa fluida, essa è della stessa natura delle X, Y, Z, è cioè forza di prima specie, di quelle che vanno moltiplicate per σ^3; quando invece parliamo della pressione eguale in tutti i versi, essa si cambia in una forza di seconda specie, di quelle che vanno moltiplicate per σ^2. Infatti il concetto è che pel punto

the aforesaid internal force, it is not difficult to be conducted in false deductions. Since it is known that the action is always equal to the reaction, it may be believed that the pressure with which a molecule [positioned] lower acts on the other that is immediately [positioned] above [the previous molecule], is equal to that with which it reacts and the same occurs for the molecule that is below: and so passing from molecule to molecule it may come to the absurd result that the pressure is the same for all points of the fluid. — In order to remove such embarrassment it is convenient to reflect that also the external forces X, Y, Z contribute to produce equal pressure in all directions, they, generally speaking, varying from point to point, too. It is from the conflict with these [external forces] with the internal force $\Lambda(x, y, z)$ (exerted between the molecules, partially by the active molecular forces, partially, and this is the most, by passive forces coming from the application of the external forces) that comes the pressure equal in all directions: a constant quantity is born among mutable quantities. Therefore, one wants to know why we meet here darkness of ideas? it is because the same word does not always have a meaning equally determined. Often we call pressure the internal force $\Lambda(x, y, z)$ regardless of the external forces: on the contrary when we state the principle of equal pressure in all directions, we imply that the pressure besides the internal force Λ includes in certain directions also the external forces: in the first case the word does not express only a portion of what it expresses in the second case. There is more: to produce the darkness of the ideas that we have said, perhaps it contributes mostly an implied change that is made in the concept of the pressure Λ, which is sometimes regarded as a force of the first kind, sometimes as [a force] of second kind (review the sections 18, 19, 20, 21). As long as we consider it as an internal force that acts on all the molecules of the fluid mass, it is of the same nature of the X, Y, Z, i.e. it is a force of the first kind, of those [forces] which must be multiplied by σ^3; on the contrary, when we talk of equal pressure in all directions, it is changed into a force of the second kind, of those [forces] which must be multiplied by σ^2. In fact, the concept is that by passing

(x, y, z) facendo passare in qualunque verso una superficie, ivi la forza proveniente dall'azione del fluido è perpendicolare a tal superficie, e sempre la stessa comunque si volti la superficie che passa per quel punto. Si esamini bene anche ciò che facciamo quando vogliamo stabilire sperimentalmente il principio idrostatico di cui parliamo, e si vedrà che per pressione intendiamo sempre una forza applicata ad una superficie, e trasmessa poi ad una massa estesa secondo tutte e tre le dimensioni. Ciò premesso, assumendo un linguaggio simile all'usato dai nostri maggiori, possiamo ragionare così. Nell'equilibrio una molecola preme quella che le è contigua secondo l'asse delle x colla forza esterna $\sigma^3 X$ più colla pressione $\sigma^2\Lambda$, e detta molecola contigua reagisce sulla prima colla $\sigma^2\left(\Lambda + \sigma\frac{d\Lambda}{dx} + \text{ec.}\right)$, aumentando la Λ per l'aumento molecolare che prende la x. Queste due pressioni opposte dovendo essere eguali, ci somministrano un'equazione dove, eliminato nei due membri il termine comune $\sigma^2\Lambda$, poi fatta la divisione per σ^3 , e trascurati i termini ulteriori si vede risultare la $X = \frac{d\Lambda}{dx}$. Allo stesso modo si provano le altre due $Y = \frac{d\Lambda}{dy}, Z = \frac{d\Lambda}{dz}$, cioè le equazioni (11) pel caso dell'equilibrio e della densità costante : nelle quali è bene avvertire che la Λ ripiglia adesso il concetto di forza di prima specie : passaggio pari ad altri che si effettuano solo mentalmente, senza che di solito vi si presti attenzione. Ecco poi (in conformità a quanto si è detto più sopra) che se badiamo alla sola Λ, dimenticando le forze sterne, non vi è eguaglianza di pressione, giacchè la prima molecola agisce sulla seconda mediante la $\sigma^2\Lambda$, e la seconda reagice colla $\sigma^2\Lambda + \sigma^3\frac{d\Lambda}{dx}$; l'eguaglianza è ristabilita perchè alla $\sigma^2\Lambda$ della prima molecola va aggiunta la forza esterna $\sigma^3 X$. L'uguaglianza di pressione intesa a questo modo, può, per quanto mi sembra, sostenersi e un tal poco concepirsi anche nel moto. Si sa che in tal caso la forza esterna $\sigma^3 X$ è surrogata dal binomio $\sigma^3\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$

in any directions a surface through the point (x, y, z), therein the force coming from the action of the fluid is perpendicular to such a surface, and always the same, however the surface that passes through that point is oriented. Let us examine well also what we do when we want to establish experimentally the hydrostatic principle of which we speak, and we will see that we always mean pressure as a force applied to a surface, and then transmitted to a mass extending in all three dimensions. Having said this, taking a language similar to that used by our forefathers, we can reason as well. In the equilibrium a molecule presses that one which is contiguous along the axis of the [abscissa] x with the external force $\sigma^3 X$ incremented by the pressure $\sigma^2\Lambda$, and said contiguous molecule reacts on the first with $\sigma^2\left(\Lambda + \sigma\frac{d\Lambda}{dx} + \text{etc.}\right)$, increasing the Λ for the molecular increase taken the x. These two opposing pressures, having to be equal, give us an equation where, since the common term $\sigma^2\Lambda$ has been eliminated in the two members, and then the division for σ^3 has been made, and the further terms have been neglected, we see the result $X = \frac{d\Lambda}{dx}$. Similarly the other two $Y = \frac{d\Lambda}{dy}$, $Z = \frac{d\Lambda}{dz}$ are proved, that is the equations (11) for the case of the equilibrium and of the constant density: where it should be pointed out that the Λ now takes again the concept of force of the first kind: passage similar to others which will be performed only mentally, usually without paying attention to them. On the other hand (in accordance to what has been said above) if we take care only to the Λ, forgetting the external forces, there is no equality of pressure, since the first molecule acts on the second by $\sigma^2\Lambda$, and the second reacts with $\sigma^2\Lambda + \sigma^3\frac{d\Lambda}{dx}$; the equality is restored because the external force $\sigma^3 X$ must be added to the $\sigma^2\Lambda$ of the first molecule. The equality of pressure meant in this way can, as it seems to me, hold and even be conceived also in the motion.

It is known that in this case the external force $\sigma^3 X$ is subrogated by the binomium $\sigma^3\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$

nel quale la differenza dei due termini può diventare assai piccola per le grandi accelerazioni ; ma dove il fluido si accelerà di più, pare che le molecole debbano essere più discoste fra loro (s'intromettano poi o non s'intromettano altre molecole) e quindi minore debba essere anche la forza interna che dipende dalla distanza molecolare. Che che ne sia però di ciò, riteniamo che le equazioni (11) sono stabilite indipendentemente dal principio controverso, e che in esse la Λ venne introdotta per processo analitico, senza bisogno d'idee intorbidate da que' salti e da quelle tacite convenzioni che qui sopra abbiamo cercato di notare e descrivere. E ciò perchè si è potuto evincere che il costituente della fluidità non istà già (giova il ripeterlo) nella disposizione regolare delle molecole intorno ciascuna, ma in una paricolare condizione cui vengono ridotte le forze interne per la cessazione di quella parte di azione che è dovuta alla figura delle molecole.

69. A questo punto io credo di aver raggiunto lo scopo che mi era proposto e che ho indicato fin dal principio della presente Memoria, quello di sostenere contro ogni tentativo d'innovazione la teorica Euleriana del moto de' fluidi contenuta nelle equazioni (11) , aggiuntavi la quarta detta della continuità. La quale apologìa a me particolarmente importava, avendo io assunta detta teorica a base delle mie ricerche in idrodinamica. Non mi starò qui a ripetere ciò che forma il soggetto di quelle Memorie che ricordai sul fine del preambolo di questa ; darò soltanto un'idea del principio generale mediante il quale la trattazione delle quattro equazioni summentovate viene ad essere giovata del soccorso di altre equazioni, che quantunque desunte da considerazioni particolari alle superficie conterminanti il fluido, si dimostrano dover valere anche nell'interno della massa fluida.

Nella seconda di dette Memorie provai dapprima che quando il moto è permanente, e a due sole coordinate, cioè in un piano, tutte le molecole del liquido vanno per trajettorie che sono curve di una stessa famiglia, rappresentate tutte da un'unica equazione

in which the difference of the two terms can become very small for large accelerations; but where the fluid is more accelerated, it seems that the molecules must be more distant from each other (other molecules interpose or not) and therefore also the internal force, which depends on the molecular distance, must be smaller. Whatever it is, however, of this, we believe that the equations (11) are established independently of the controversial principle, and that in them the Λ was introduced through the analytical process, without the need for ideas muddied by those jumps and by those tacit conventions which we have tried to note and describe above. And this is because it has been inferred that the constituent of the fluidity is not already (it is worth repeating) in the regular arrangement of the molecules around each other, but in a particular condition where the internal forces are reduced for the termination of that part of the action that is due the shape of the molecules.

69. At this point I think I have reached the goal that I had proposed and which I have indicated from the beginning of this Memoir, to support, against any attempt at innovation, the Eulerian theory of fluid motion contained in equations (11), since the fourth [equation], called of the continuity, has been added. I particularly cared this apology, because I assumed that theory as a basis of my researches in hydrodynamics. I do not stand here to repeat what form the subject of those Memoirs that I remembered at the end of the preamble of this; I will give only an idea of the general principle by which the treatment of the four equations mentioned above is to be benefited from the aid of other equations, that, although taken from considerations specialized to the surface bounding the fluid, are proved also to apply in the interior of the fluid mass.

In the second of these Memoirs I proved first that when the motion is permanent, and only with two coordinates, that is in a plane, all the molecules of the liquid move along trajectories which are curves of a same family, all represented by a single equation,

$$\alpha = f(x, y); \tag{39}$$

e che non diversificano fra loro se non a motivo del parametro α il quale, costante in ciascuna trajettoria, varia dall'una all'altra. La stessa conseguenza può dedursi più in generale, anche per quando il moto non è permanente, dalla equazione (9) Capo I. della Memoria prima (Memorie dell' I.R. Istituto Lombardo. Vol. I°. pag. 222.) dove il secondo membro essendo una costante per riguardo al tempo, la quale muta per diversi luoghi della massa, ha la stessa idea della precedente α : e siccome il primo membro è funzione delle x, y, t, che rimane la medesima per tutti i punti del fluido, quella equazione è insomma l'equazione generale delle trajettorie , come la poc'anzi scritta (39). Vi è solamente la differenza del provarsi a questo modo che anche quando vi è il tempo esplicito, le trajettorie variano soltanto pel mutare di una costante in una equazione che tutte le comprende, come quando il moto è permanente. Osservazione quest'ultima fatta dopo la pubblicazione delle ricordate Memorie, e che parmi importante.

Avendo una equazione come la precedente (39), ove è isolata la costante che muta di trajettoria in trajettoria, col derivarla totalmente pel tempo (operazione che fa sparire quella costante), si cava l'importantissima conseguenza che l'equazione derivata

$$f'(x)\, u + f'(y)\, v = 0, \tag{40}$$

nella quale alle u, v s'intendano sostituiti i loro valori generici $u(x, y), v(x, y)$, deve verificarsi anche considerando x, y fra di loro indipendenti. Se così non fosse, se ne potrebbe dedurre y in funzione di x senza la costante α, il che ripugna alla natura della questione. Quindi l'ottenuta equazione (40) si verifica per tutti i punti della massa, come le altre della teorica Euleriana, e può ad esse associarsi per facilitare la ricerca delle funzioni incognite di x, y cui sono eguali le velocità u, v. Ciò è appunto che mi riuscì di fare nel caso del moto permanente e nella supposizione che, quando il liquido è chiuso da

$$\alpha = f(x, y); \tag{39}$$

and that are not different from each other if not because of the parameter α which, constant in each trajectory, varies from one to another. The same result can be deduced more generally, even when the motion is not permanent, from the equation (9) Capo I of the first Memoir (Memoirs of the I.R. Istituto Lombardo. Vol. I p. 222), where the second member being a constant with respect to time, which changes in different parts of the body, is analogous to the precedent α: and as the first member is a function of the x, y, t, which remains the same for all the points of the fluid, that equation is indeed the general equation of the trajectories, such as the just before written (39). There is only the difference of proving in this way that even when there is the explicit time, the trajectories vary only for the changing of a constant in an equation that includes all of them, such as when the motion is permanent. The latter observation was made after the publication of the recalled Memoirs, and it seemed to me being important.

Having an equation as the precedent one (39), where the constant is isolated that changes from trajectory to trajectory, by totally deriving it with respect to time (operation which gets rid of that constant), we obtain the very important result that the derived equation

$$f'(x)\, u + f'(y)\, v = 0, \tag{40}$$

in which the u, v are meant to be substituted by their generic values $u(x, y)$, $v(x, y)$, must occur also by considering x, y independent of each other. If not, y might be deducted in terms of x without the constant α, which is repugnant to the nature of question. Then the obtained equation (40) occurs for all points of the body, as the others of the Eulerian theory, and can be associated to them to facilitate the search of the unknown functions of x, y to which are equals the velocity u, v. This is precisely what I was able to do in the case of permanent motion and under the assumption that, when the liquid is enclosed by

pareti, venga da una parete di forma nota assegnata l'equazione generale delle trajettorie : e quando il liquido è superiormente libero, tale equazione generale siaci somministrata eguagliando ad una costante la pressione $\Lambda(x, y)$.

Analoghe considerazioni hanno luogo pel moto a tre coordinate, riuscendo in tal caso due le equazioni come la (39) spettanti alla trajettoria generica. Dette equazioni possono anche riguardarsi come due equazioni di superficie percorse da veli fluidi formati di tante trajettorie : e così veniamo a sapere che a due sole famiglie si riducono tali superficie. Anche qui derivando totalmente pel tempo si ottengono due equazioni simili alla precedente (40) , che con ragionamenti della stessa indole si provano sussistenti per tutti i punti dell'interno della massa, e possono associarsi alle quattro della teorica generale per la ricerca delle tre velocità u, v, w. La determinazione di tali velocità mi riuscì nel caso del moto permanente anche libero, con supposizioni corrispondenti alle già espresse pel moto a due coordinate.

70. Che dovremo in ultimo dire della legge della permanenza delle molecole de' liquidi alle pareti o alle superficie libere durante il movimento? Scrissi già (Giornale dell' I.R. Istituto Lombardo, T. 6°. pag. 324.) che una tal legge potea provarsi vera quando il moto è permanente. Pel caso generale io non asserii che non sussistesse (come taluno mi fece dire) , notai solo che più non valeva la recata dimostrazione : il che è ben diverso, potendo molte cose esser vere, quantunque non per anco dimostrate. Ora, ben considerato il teorema del num.° 64, inclino a credere che l'anzidetta permanenza si estenda ad altri casi. È manifesto che noi possiamo astrarre col pensiero dalla massa fluida in moto la parte di fluido sovraincombente a qualunque dei veli formati di tante trajettorie, di cui sopra dicemmo, e considerare il moto della sola porzione di fluido sottostante a tal superficie ; allora la prima porzione di fluido entra in considerazione unicamente come quella che fa una pressione sul fluido che scorre al di sotto . Vedemmo che una

by walls, the general equation of the trajectories is assigned by a wall having a known shape: and when the liquid has an upper free surface, this general equation is given to us by equating to a constant the pressure $\Lambda(x, y)$.

Similar considerations hold for the motion in three coordinates, yielding in this case, two equations like the (39) pertinent to the generic trajectory. These equations can also be regarded as two equations of surface covered by fluidic veils formed of many trajectories: and so we learn that such surfaces are reduced to only two families. Also here by totally deriving with respect to time two equations similar to the precedent (40) are obtained, which by similarly reasoning are proved to subsist for all points of the interior of the body, and may be associated with the four [equations] of the general theory for the research of the three velocity components u, v, w. I was able to determine these components in the case of, also free, permanent motion, under assumptions corresponding to those already expressed for the motion in two coordinates.

70. What shall al least we say about the law of the permanence of the molecules of the liquids at the walls or at the free surfaces during the motion? I already wrote (Journal of the I.R. Istituto Lombardo, Tome 6 p. 324) that such a law could be proved to hold when the motion is permanent. For the general case I did not assert that it did not hold (as someone would I did say), I just noticed that the accomplished demonstration did not hold any longer: that is quite different, being many things be true, although not yet proven. Now, having well considered the theorem of sect. 64, I am inclined to believe that the aforesaid permanence [of the fluid motion] extends to other cases. It is clear that we can abstract with the thought from the fluid medium in motion that part of the fluid overlying to any of the veils formed of many trajectories, of which we said above, and consider the motion only of that portion of the fluid below that surface; then the first portion of fluid enters into consideration only as that which exerts a pressure on the fluid flowing below. We saw that

tal pressione è perpendicolare alla trajettoria in ogni punto : dunque una pressione perpendicolare ad una trajettoria in ogni punto non disturba lo scorrimento delle molecole in essa. Ma in quali condizioni sono le molecole del fluido alle pareti ed alle superficie libere? sono appunto sotto pressioni che si esercitano (e l'abbiamo dimostrato) perpendicolarmente a quelle superficie conterminanti il fluido : potranno dunque scorrere lungo tali superficie. Ben è vero che qui si inverte una proposizione ; la proposizione provata è : data una trajettoria, la pressione esercitata dal fluido sovraincombente è normale alla curva in ogni punto ; la proposizione che si vuole insinuare è : data una pressione che si esercita normalmente ad un velo o ad una linea fluida, in un tal velo, in una tal linea può esistere una trajettoria. Ora una tal trajettoria può anche non esistere, come vediamo nell'equilibrio : ed ecco il perchè nella mia Memoria ho creduto di dover ammettere che qualche volta il fluido non lambisce la parete solida, ma si crea esso stesso la sponda o il fondo sul quale scorrere, depositandosi una porzione di fluido che rimane ferma o prende movimenti staccati dal moto della massa principale.

Si fanno due obbjezioni alla legge della permanenza delle molecole alle pareti ed alle superficie libere : è bene prenderle a disamina. Colla prima si dice : nelle correnti la superficie libera alle vote si allarga, alle volte si restringe : se la densità del liquido ivi come dappertutto deve rimanere costante, bisogna che quando la superficie si allarga, accorrano nuove molecole, e quando si restringe, alcune di quelle che vi si trovano, vadano sotto. Anche l'accelerazione maggiore in qualche luogo della superficie, minore in qualche altro, non può conciliarsi colla densità costante senza molecole che sopraggiungano nel primo caso e partano nel secondo.— La risposta a tutte queste difficoltà parmi debba cercarsi nel primo concetto che ci siamo formati al num.° 7., e che abbiamo richiamato in varj altri luoghi, circa al potersi trascurare termini moltiplicati per la distanza molecolare σ, in confronto di quelli che non hanno

such a pressure is perpendicular to the trajectory in every point: therefore a pressure perpendicular to a trajectory in every point does not disturb the flow of molecules in it. But under what conditions are the molecules of the fluid at the walls and at the free surfaces? [The molecules] are just under pressures which exerts (and we have shown that) perpendicularly to those surfaces which confine the fluid: [the molecules] can then flow along these surfaces. It is true that a proposition is inverted here, and the proved proposition is [as follows]: given a trajectory, the pressure exerted by the over incumbent fluid is normal to the curve at each point; the proposition that we want to suggest is [as follows]: given a pressure exerted normally to a veil or to a fluid line, in such a veil, in such a line a trajectory can exist. Now such a trajectory may not exist, as we see at the equilibrium: and that is why in my Memoir I thought I have to admit that sometimes the fluid does not graze the solid wall, but it creates by itself the side or the bottom on which it can slide, since a portion of the fluid deposits that remains still or takes movements detached from the motion of the main mass.

Two objections are made to the law of the permanence of the molecules on the walls and on the free surfaces: it is good to take examination of them. With the former it is said: in the currents the free surface sometimes widens, sometimes narrows, if the density of the liquid therein as everywhere must remain constant, it is necessary that when the surface widens, new molecules hasten, and when it shrinks, some of those who were there, they go under [the others]. Even greater acceleration in some place of surface, lower in some other place, can not be reconciled with the constant density without molecules that can occur in the first case and depart in the second one. — The answer to all these difficulties I feel it should be looked for in the first concept that we formed at the sect. 7, and that we have recalled in several other places, about being permissible to neglect terms multiplied by the molecular distance σ, in comparison to those which have not

un tal fattore. Se termini come questi possono senza errore essere trascurati, possono essere senza errore anche aggiunti positivamente o negativamente. Io tengo quindi per fermo che sia lecito considerare come esistenti alla superficie, non proprio solamente le molecole componenti il primo velo fluido, ma anche quelle di veli sottoposti a distanze equivalenti ad una, due, più volte l'intervallo molecolare σ, non però preso un tal numero di volte da rendere dette distanze finite e sensibili. Infatti le equazioni del moto per questi veli sottoposti non differiscono da quelle pel moto del primo velo, se non perchè le x, y, z spettanti al detto velo supremo hanno aumenti positivi o negativi con quel fattore piccolissimo σ : svolgansi in serie i termini componenti tali equazioni secondo le potenze dei detti aumenti, e trascurando (come è già ammesso) tutta la parte moltiplicata per σ, le equazioni figureranno come appartenenti al primo velo, mentre in verità appartengono a veli sottoposti. Ritenute come spettanti alla superficie suprema anche molecole che ne stanno al di sotto per distanze non finite, possiamo disporre di uno spessore quale ci abbisogna a fine di cavarne o di ritirarvi le molecole di cui parlasi nelle addotte difficoltà o in altre simili. Così la densità superficiale, se vuolsi considerare fra le molecole costituenti il solo velo rigorosamente supremo, può non essere costante : sarà costante come risultato a produrre il quale entrano anche molecole appartenenti a veli sottoposti. Così le molecole in una trajettoria possono diradarsi, il che anzi io ho provato a venire in casi di moto conosciuto (Vedi la prima delle Memorie sopracitate ai numeri 7, 21) , e non di meno la densità essere costante, supplendo negl'intervalli molecole prese da trajettorie contigue. – Rapporto alle densità lineare e superficiale, ho eseguito un lungo calcolo del quale risparmierò la pena ai miei lettori, esponendone solo storicamente il risultato. Noi conosciamo le espressioni di queste densità (Capo I. numeri 11, 12.) e le equazioni della continuità che ne sono conseguenze (ivi num.° 15.) . Se tali densità rimanessero esattamente costanti, potremmo mettere a profitto

such a factor. If terms such as these can be neglected without error, they can be also added positively or negatively without error. Then I hold it for certain that it is permissible to consider how existing at the surface, not really only the molecules constituting the first fluid veil, but also those of lower veils at distances equivalent to one, two, several times the molecular range σ, not, however, taken a number of times so as to make these distances finite and significant. In fact, the equations of motion for these lower veils are not different from those [equations] for the motion of the first veil, if not because the x, y, z pertinent to the said upper veil have positive or negative increments with that very small factor σ: let us develop in series the terms composing such equations according to the powers of said increments, and neglecting (as it has already admitted) the whole part multiplied by σ, the equations will be retained as belonging to the first veil, while indeed they belong to lower veils submitted. Since also molecules that are below the uppermost surfaces at not finite distances, are deemed as belonging to it, we can have a thickness which we need in order to extract or get onto the molecules of which we speak in the alleged or similar difficulties. Thus, the surface density, if we want to consider [it] among the molecules which make up only the strictly uppermost veil, can not be constant: it will be constant if also the contributions of molecules belonging to lower veils is accounted for to produce this result. So the molecules in a trajectory can thin out, what I tried to occur in cases of known motion (See the first of the Memories mentioned at sections 7, 21), and nevertheless [I tried] the density to be constant, since molecules taken in the intervals from nearby trajectories are compensating. — In relation to the linear and superficial density, I ran a long calculation which it is worth to spare my readers, exposing only historically the result of it. We know the expressions of these densities (Capo I sections 11, 12) and the equations of the continuity that are consequences of them (ibid. sect. 15). If these densities remain exactly constant, we could capitalize the corresponding equations of the continuity,

le corrispondenti equazioni della continuità, come si fa dell'altra (34) num.° 14., e così cavare nuove equazioni che si verificherebbero ai limiti del liquido. L'ho fatto : e mi è risultato che contemplando anche sì fatte equazioni, le trajettorie verrebbero rettilinee : prova manifesta che quelle densità considerate in una sola linea geometrica, o in una sola superficie matematica, non sono costanti.

La seconda obbjezione è la seguente. Lagrange pel primo (M.^{a} A.^{a} T. II. pag. 298.) e poi altri hanno riconosciuto che nell'efflusso dell'acqua da vasi che si vuotano, si danno dei casi nei quali è manifesto che la legge della permanenza delle molecole alle pareti od alle superficie libere non può assolutamente aver luogo. Nè qui s'intendono spostamenti non finiti, della natura di quelli di cui più sopra abbiamo fatto parola, e che debbonsi riguardare come nulli : s'intendono spostamenti finiti e apprezzabili anche dai nostri sensi. La mia maniera di vedere relativamente a tale difficoltà, dopo molto pensarvi è ora quale passo ad esporla. Il fluido nei casi anzidetti si sottrae all'enunciata legge, perchè il suo movimento si sottrae all'analisi fin quì trattata : la questione appartiene ad una Meccanica la quale non è per anco scritta. Di fatti in tutta la Meccanica Analitica di Lagrange e in questa stessa Memoria si suppone sempre che la massa in moto rimanga costante. Eppure si possono immaginare problemi di moto a massa variabile. Tale sarebbe quello in cui si proponesse di determinare il moto di una vallanga, nella quale la massa è sempre crescente : tale l'altro ove si prendesse a esaminare il moto di un gomitolo di filo di cui fosse trattenuto un capo, e che quindi a motivo dello svolgersi del filo, si muoverebbe con massa sempre decrescente. Si fatte ricerche sembrano a prima giunta piuttosto di curiosità, che di vantaggio : ma nel moto de' liquidi si presentano spontaneamente questioni dello stesso genere. Nell'efflusso dell'acqua da vasi che si vuotano, siccome le considerazioni si restringono al fluido ancora contenuto nel vaso, vedesi che si ha di mira un moto nel quale la massa è variabile

as we do with the other (34) sect. 14, and so derive new equations that would occur at the limits of the liquid. I have done it: and I got the result that, contemplating also so made equations, the trajectories would be straight: manifest proof that those densities considered in a single geometric line, or in a single mathematical surface, are not constant.

The second objection is the following. Lagrange first (M.^{a} A.^{a} Tome II p. 298) and then others have recognized that in the outflow of the water from draining vessels, some cases occur in which it is manifest that the law of the permanence of the molecules on the walls or on the free surfaces can not take place at all. Neither not finite displacements are considered therein, having the nature of those referred above, and that we must consider as null: we intend displacements finite and appreciable even by our senses. My way of seeing with respect to such difficulty, after a lot of thinking about, is now that I go to expose. The fluid in the aforesaid cases escapes the enunciated law, because its motion eludes the analysis so far treated: the question belongs to a Mechanics which has not yet been written. In fact throughout the Analytical Mechanics of Lagrange and in the this same Memoir it is always assumed that the mass in motion remains constant. Yet one can imagine problems of motion with variable mass. Such would be the [problem] in which we proposed to determine the motion of an avalanche, in which the mass is increasing: such the other [problem] where we would examine the motion of a ball of thread in which an head had retained, and hence due to the thread pulling, it would move with ever-decreasing mass. So done researches seems at first glance curiosity-driven, rather advantage-driven, but in the motion of liquids issues of the same kind spontaneously occur. In the outflow of the water from draining vessels, since the considerations still are restricted to the fluid contained in the vessel, you see that you have targeted a motion in which the mass is variable

e continuamente decrescente. Nel caso di una corrente accresciuta continuamente da acque di scolo affluenti dalle sponde, la massa invece sarebbe variabile per aumento. Non è che io creda i problemi di tal natura invincibili dalla potenza del calcolo : credo anzi che vi si possano assoggettare : negli integrali definiti componenti le equazioni generali scritte nel Capo II. di questa Memoria, i limiti invece di essere costanti, saranno variabili e funzioni del tempo. Intanto però questa Meccanica non è ancor fatta : e così essendo le cose, non parmi filosofico muovere difficoltà contro la Meccanica ordinaria, desumendole da questioni che sono fuori del suo dominio

CAPO VI.

Del movimento di un corpo qualunque
giusta le idee de' moderni intorno alle azioni molecolari.

Si è detto sul principio del Capo IV. esservi due maniere per mettere a calcolo nella equazione generale del moto di un qualunque corpo l'effetto dei vincoli fra le sue molecole prodotti dalle forze interne. Una maniera era quella di esprimere tali effetti per mezzo di equazioni di condizione, e quindi per mezzo della terza parte dell'equazione generalissima (1) del num°.16. : a questa ci siamo attenuti nei due Capitoli precedenti. L'altra era di contemplare, giusta le idee de' moderni, le azioni molecolari servendoci della seconda parte dell'equazione (1) summentovata, ove si comprendono tutti i termini introdotti da forze interne attive : di questa farò ora qualche parola. Ciò tanto più volentieri in quanto vedremo che le due maniere conducono ai medesimi risultamenti per quella parte della soluzione che è la più importante e fondamentale (accordo che al certo riesce molto confortante) : e per qualche altra parte si illuminano e si completano a vicenda, sì che diventa facile nell'una ciò che è complicato e difficile nell'altra.

and continuously decreasing. In the case of a current continuously increased by sewage tributaries from the banks, the mass instead would be variable because of increase. I do not believe that the problems of this nature can not be overcome by the power of the calculation: indeed I think they can be tamed: in the definite integral composing the general equations written in the Capo II of this Memoir, the limits, instead of being constants, will be variable and functions of the time. Meanwhile, however, this Mechanics is not yet done: and the things being so, I do not think appropriate to move difficulty against the ordinary Mechanics, deducing [them] from matters that are outside its domain.

CAPO VI.

On the motion of a generic [deformable] body
following the ideas of the modern scientists about the molecular actions

At the beginning of Capo IV it was said that there are two ways for taking into account -in the general equation of motion of a generic body- the effect of the constraints established among its molecules by internal forces A [first] way which was introduced consisted in expressing such effects by means of equations of condition, and therefore by means of the third part of the most general equation (1) in sect. 16: this was the way which we used in the preceding two Chapters. A second way consisted in considering -following the ideas of modern scientists- the molecular actions by making use of the second part of the aforementioned equation (1), where are to be included all the terms introduced by internal active forces: I will discuss now about this second way. This effort will be performed also because we will see that the two different ways actually lead to the same results at least for that part of the solution which is the most important and fundamental (and this agreement is really very reassuring): on the other hand, it has to be remarked that the two said ways are completing each other, and one sheds light on the other so that what was complicated and difficult in one way becomes easy in the other one.

71. Richiamando quanto si è detto ai numeri 31,32. per far vedere come nel caso dei sistemi a tre dimensioni la prima parte dell'equazione generale (1) num°.16. , dovuta alle forze esterne, si modifichi ad essere rappresentata come segue :

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\}; \tag{1}$$

vediamo ora come si modifichi la seconda parte $Sm_im_j\ K\delta\rho$, che è quella che adesso vogliamo considerare, abbandonando la parte terza, se non fosse per seguitare a ritenervi espressi termini portati da forze applicate soltanto a superficie, a linee, a punti, ma non estensibili a tutta la massa.

Questa parte, supponendo che fra ciascuna coppia di molecole siavi sempre una forza interna K, quando il numero dei punti è n, messa in disteso, si presenta così :

$$\begin{aligned} & m_1m_2K_{1,2}\delta\rho_{1,2} + m_1m_3K_{1,3}\delta\rho_{1,3} + ... + m_1m_nK_{1,n}\delta\rho_{1,n} \\ & \qquad + m_2m_3K_{2,3}\delta\rho_{2,3} + ... + m_2m_nK_{2,n}\delta\rho_{2,n} \\ & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & \qquad\qquad\qquad + m_{n-1}m_nK_{n-1,n}\delta\rho_{n-1,n} \end{aligned} \tag{2}$$

essendo in generale

$$\rho_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}\,. \tag{3}$$

E può osservarsi che le successive linee orizzontali di essa, le quali scemano successivamente di un termine, possono ridursi tutte a un numero n di termini, scrivendo invece della (2) la quantità

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_1m_1K_{1,1}\delta\rho_{1,1} + \frac{1}{2}m_1m_2K_{1,2}\delta\rho_{1,2} + ... + \frac{1}{2}m_1m_nK_{1,n}\delta\rho_{1,n} \\ & \quad + \frac{1}{2}m_2m_1K_{2,1}\delta\rho_{2,1} + \frac{1}{2}m_2m_2K_{2,2}\delta\rho_{2,2} + ... + \frac{1}{2}m_2m_nK_{2,n}\delta\rho_{2,n} \\ & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & \quad + \frac{1}{2}m_im_1K_{i,1}\delta\rho_{i,1} + \frac{1}{2}m_im_2K_{i,2}\delta\rho_{i,2} + ... + m_im_nK_{i,n}\delta\rho_{i,n} \\ & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & \quad + \frac{1}{2}m_nm_1K_{n,1}\delta\rho_{n,1} + \frac{1}{2}m_nm_2K_{n,2}\delta\rho_{n,2} + ... + \frac{1}{2}m_nm_nK_{n,n}\delta\rho_{n,n}. \end{aligned} \tag{4}$$

71. Recalling what was said in the sections 31, 32 to show how, in the case of systems having three dimensions, the first part of the general equation (1) sect. 16, due to external forces, is modified to be represented as follows:

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{etc.} \right\}; \tag{1}$$

we see now how it has to be modified the second part $Sm_im_j\ K\delta\rho$, which is that one we want to consider now, while, at the same time, in the third part we equate to zero all terms expressing actions applied to all the mass [of considered body] and only retain those terms related to forces concentrated on surfaces, lines and points.

This second part, once assuming that for each pair of molecules there is acting always an internal force K, when the number of points is equal to n, when expressed explicitly can be represented as follows:

$$\begin{aligned} & m_1m_2K_{1,2}\delta\rho_{1,2} + m_1m_3K_{1,3}\delta\rho_{1,3} + ... + m_1m_nK_{1,n}\delta\rho_{1,n} \\ & \qquad + m_2m_3K_{2,3}\delta\rho_{2,3} + ... + m_2m_nK_{2,n}\delta\rho_{2,n} \\ & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & \qquad\qquad\qquad + m_{n-1}m_nK_{n-1,n}\delta\rho_{n-1,n} \end{aligned} \tag{2}$$

being in general:

$$\rho_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}\,. \tag{3}$$

It can be however seen that the subsequent horizontal lines appearing in it[equation (2)], which one after another have a lacking term with respect to the previous line, can be rewritten in such a way that all have exactly n terms, by writing, at the place of the equation (2) the quantity

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_1m_1K_{1,1}\delta\rho_{1,1} + \frac{1}{2}m_1m_2K_{1,2}\delta\rho_{1,2} + ... + \frac{1}{2}m_1m_nK_{1,n}\delta\rho_{1,n} \\ & \quad + \frac{1}{2}m_2m_1K_{2,1}\delta\rho_{2,1} + \frac{1}{2}m_2m_2K_{2,2}\delta\rho_{2,2} + ... + \frac{1}{2}m_2m_nK_{2,n}\delta\rho_{2,n} \\ & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & \quad + \frac{1}{2}m_im_1K_{i,1}\delta\rho_{i,1} + \frac{1}{2}m_im_2K_{i,2}\delta\rho_{i,2} + ... + m_im_nK_{i,n}\delta\rho_{i,n} \\ & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & \quad + \frac{1}{2}m_nm_1K_{n,1}\delta\rho_{n,1} + \frac{1}{2}m_nm_2K_{n,2}\delta\rho_{n,2} + ... + \frac{1}{2}m_nm_nK_{n,n}\delta\rho_{n,n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Per riconoscere l'eguaglianza delle due quantità (2), (4), basta osservare che in questa seconda i termini contenenti le variate

$$\delta\rho_{1,1}, \delta\rho_{2,2}.....\delta\rho_{i,i}.....\delta\rho_{n,n}$$

sono introdotti solo per una regolarità di progressione negli indici, ma è come se non vi fossero, essendo zero i radicali $\rho_{1,1}, \rho_{2,2}....\rho_{n,n}$, e le loro variate, come risulta manifesto in forza dell'espressione generica (3). Di poi che i restanti termini possono compenetrarsi a due a due : così i due $\frac{1}{2}m_1m_2K_{1,2}\delta\rho_{1,2} + \frac{1}{2}m_2m_1K_{2,1}\delta\rho_{2,1}$ equivalgono al solo $m_1m_2K_{1,2}\delta\rho_{1,2}$. Infatti è chiaro per la (3) che $\rho_{1,2}$ eguaglia $\rho_{2,1}$: e che inoltre $K_{1,2}$ eguagli $K_{2,1}$, oltrecchè risulta dal principio che l'azione è sempre eguale alla reazione, si farà anche più perspicuo perciò che fra poco soggiungeremo intorno al modo con cui debb'essere intesa la composizione generica della forza interna K. Per simil guisa i due termini $\frac{1}{2}m_1m_3K_{1,3}\delta\rho_{1,3} + \frac{1}{2}m_3m_1K_{3,1}\delta\rho_{3,1}$ si uniranno in uno solo $m_1m_3K_{1,3}\delta\rho_{1,3}$; e così via via. Dopo le quali osservazioni è facile persuadersi che la quantità (4) si contrae nella (2).

Una qualunque delle serie orizzontali componenti la quantità (4) può compendiarsi per mezzo di una sommatoria tripla. Per convincercene bisogna richiamare l'idea della precedente disposizione delle molecole colle coordinate a, b, c, rappresentandoci funzioni di esse le coordinate della molecola generica m_i :

$$x_i = x\,(a, b, c)\,; \qquad y_i = y\,(a, b, c)\,; \qquad z_i = z\,(a, b, c)\,. \tag{5}$$

Rappresentiamoci altresì composte come segue

$$x_j = x\,(a+f, b+g, c+k)\,;\, y_j = y\,(a+f, b+g, c+k)\,;\, z_j = z\,(a+f, b+g, c+k) \tag{6}$$

le coordinate x_j, y_j, z_j dell'altra molecola qualunque m_j , la quale (tenuta fissa la m_i) passi successivamente a significare tutte le altre molecole della massa; e intendiamo che questi valori analitici (6) tengano dietro al mutarsi delle m_j col cambiarsi in essi le f, g, k, tenute ferme le a, b, c. Questo si fa come se immaginassimo nello stato precedente ideale tirati per la molecola m_i presa come origine tre nuovi assi paralleli a

To recognize the equality of the two quantities (2), (4), it is enough to observe first that in the second one the terms containing the variations

$$\delta\rho_{1,1}, \delta\rho_{2,2}.....\delta\rho_{i,i}.....\delta\rho_{n,n}$$

are introduced only for maintaining the regularity in the progression of the indices, however it is as if they where not present, because the radicals $\rho_{1,1}$,$\rho_{2,2}$ .... $\rho_{n,n}$ and their variations are vanishing, as it is manifest from the generic expression (3). Secondly it has to be observed that the remaining terms can be pair-wise added: therefore the two terms $\frac{1}{2}m_1m_2K_{1,2}\delta\rho_{1,2} + \frac{1}{2}m_2m_1K_{2,1}\delta\rho_{2,1}$ are equivalent to the following one $m_1m_2K_{1,2}\delta\rho_{1,2}$. Indeed it is clear that, because of the (3) the quantity $\rho_{1,2}$ equals the quantity $\rho_{2,1}$: and that the force $K_{1,2}$ equals the force $K_{2,1}$, as it is implied by the Principle of Action and Reaction and as it will become even clearer for what we will add about the way in which the generic composition of the internal action K has to be understood. In a similar way the two terms $\frac{1}{2}m_1m_3K_{1,3}\delta\rho_{1,3} + \frac{1}{2}m_3m_1K_{3,1}\delta\rho_{3,1}$ will gather into a single one $m_1m_3K_{1,3}\delta\rho_{1,3}$; and so on for the other terms. After the previous observations it is easy to persuade oneself that the quantity (4) is equivalent to the shorter form given by the (2).

Any whatsoever of the horizontal series which compose the quantity (4) can be reduced by means of a triple summation. To be persuaded of the truth of this statement it is needed to recall the idea of the precedently introduced disposition of the molecules by means of the coordinates a, b, c which allows us to represent the coordinates of the generic molecule m_i as given by the following functions

$$x_i = x\,(a, b, c)\,; \qquad y_i = y\,(a, b, c)\,; \qquad z_i = z\,(a, b, c)\,. \tag{5}$$

Once we have also represented as follows:

$$x_j = x\,(a+f, b+g, c+k)\,;\, y_j = y\,(a+f, b+g, c+k)\,;\, z_j = z\,(a+f, b+g, c+k) \tag{6}$$

the coordinates x_j, y_j, z_j of the other whatsoever molecule m_j , which (if the molecule m_i is kept as fixed) will subsequently pass to mean all the other molecules of considered mass; and we mean that these analytical values (6) will vary following the variation of the molecules m_j when in them the variables f, g, k, are changed, while the variables $a, b, c.$ are kept fixed. This is done as if we immagine to introduce in the preceding ideal configuration three new axes that have as origin the molecule m_i and [directed] parallel to those [axes] relative to the variables a, b, c,

quelli delle a, b, c,e chiamassimo f, g, k le coordinate di una molecola qualunque relativamente a detti nuovi assi. Ora convien ricordare quello che si è detto al num°.31., quando si trattava della prima parte della equazione generale, sul modo d' immaginarsi distribuiti gli n punti del sistema secondo indicazioni relative ai tre assi, che conducono a dare all' aggregato degli n termini una disposizione di serie tripla : e non si incontrerà difficoltà a capire che l' (i) esima delle serie orizzontali componenti la quantità (4) può compendiarsi per mezzo dell'integrale finito triplicato

$$\Sigma\Delta f\Sigma\Delta g\Sigma\Delta k \cdot \frac{1}{2} m_i m_j K \delta\rho, \tag{7}$$

avendo ρ (equazioni (3),(5),(6)) il valore dato dall'equazione

$$\begin{aligned}\rho^2 = &\left[x\left(a+f, b+g, c+k\right) - x\left(a,b,c\right)\right]^2 \\ &+ \left[y\left(a+f, b+g, c+k\right) - y\left(a,b,c\right)\right]^2 \\ &+ \left[z\left(a+f, b+g, c+k\right) - z\left(a,b,c\right)\right]^2 .\end{aligned} \tag{8}$$

I limiti delle precedenti integrazioni finite dipenderanno, come si è detto al num°.31., dalle superficie conterminanti il corpo nello stato antecedente al reale. L'espressione (7) poi si adatterà a rappresentare la prima, la seconda, l' (n) esima delle serie orizzontali componenti la quantità (4), mutando in essa le coordinate a, b, c della molecola generica m_i, dando cioè loro i valori opportuni affinchè essa diventi successivamente la molecola $m_1, m_2 .... m_n$; e siccome sono pure di numero n quelle serie orizzontali (come i termini di ciascuna di esse) , la somma delle somme ci verrà data dall'interale finito sestuplo

$$\Sigma\delta a\Sigma\delta b\Sigma\delta c\Sigma\Delta f\Sigma\Delta g\Sigma\Delta k \cdot \frac{1}{2} m_i m_j K \delta\rho. \tag{9}$$

Rammentiamoci il già detto nelle ultime linee del num°.21., circa al dare il valore σ^3 alla lettera m esprimente la massa della molecola generica : e siccome nell'integrale precedente vi è il prodotto di due simili m, ci si farà manifesto doversi mettere a luogo di esso l'espressione $\sigma^3 \cdot \sigma^3$. Richiamato altresì il teorema analitico scritto nella equazione (17) del num°.26.,

and as if we call, f, g, k the coordinates of a molecule whatsoever[, m_j,] with respect to said new axes. Now it is convenient to recall what was said in sect. 31, when the first part of the general equation was treated, about the way in which one can imagine how the n points of the system are distributed according to the positions relatively to the three axes, which lead to give to the ensemble of n terms [appearing in that general equation] a structure of triple series: and it will not be difficult to understand that the (i)-th [series] of the horizontal series which compose the quantity (4) can be represented by means of the following finite triple integral

$$\Sigma\Delta f\Sigma\Delta g\Sigma\Delta k \cdot \frac{1}{2} m_i m_j K \delta\rho, \tag{7}$$

where the quantity ρ (equations (3),(5),(6)) has the value given by the equation

$$\begin{aligned}\rho^2 = &\left[x\left(a+f, b+g, c+k\right) - x\left(a,b,c\right)\right]^2 \\ &+ \left[y\left(a+f, b+g, c+k\right) - y\left(a,b,c\right)\right]^2 \\ &+ \left[z\left(a+f, b+g, c+k\right) - z\left(a,b,c\right)\right]^2 .\end{aligned} \tag{8}$$

The limits of the precedent finite integrations will depend, as it was said in sect. 31, by the surfaces which are the boundaries of the body in the configuration preceding the real one. The expression (7) will then be adapted to represent the first, the second, the (n)-th [series] of the horizontal series which are composing the quantity (4), by changing in it the coordinates a, b, c of the generic molecule m_i, i.e. by giving to these variables[, a, b, c,] those suitable values such that [the molecule m_i] becomes one after the others the molecules $m_1, m_2 .... m_n$; and as the said horizontal series are exactly n (and also the terms of each of these series are n) the sum of all sums will be given by the finite sextuple integral

$$\Sigma\delta a\Sigma\delta b\Sigma\delta c\Sigma\Delta f\Sigma\Delta g\Sigma\Delta k \cdot \frac{1}{2} m_i m_j K \delta\rho. \tag{9}$$

Let us recall now what we said in the last lines of sect. 21, about the need of assigning the value σ^3 to the letter m which expresses the mass of the generic molecule: and as in the precedent integral there appears the product of two similar m it will appear manifest that this product must be replaced by the expression $\sigma^3 \cdot \sigma^3$. Once we will have also recalled the analytical theorem written in equation (17) sect. 26,

teorema del quale si ripete qui sei volte l'applicazione, ci troveremo disposti ad ammettere che il precedente integrale sestuplo finito si tramuta nell'integrale sestuplo continuo

$$\int da \int db \int dc \int df \int dg \int dk \cdot \frac{1}{2} K \delta \rho \tag{10}$$

coll'aggiunta di altri termini che poi debbonsi trascurare. In esso i limiti delle integrazioni pe f, g, k dipenderanno dalle superficie conterminanti il corpo nello stato antecedente, ed anche dalla posizione della molecola m_i tenuta costante, cioè dalle variabili a, b, c, che dopo le tre prime fanno poi anch'esse il loro giro.

72. Fermiamoci ora in qualche considerazione relativa alla forza interna K attuata fra molecola e molecola, tanto per attrazioni o repulsioni, che avrebbero agito anche indipendentemente da forze esterne applicate, quanto in virtù di queste stesse forze esterne. Il farla, come sulle prime suggerisce, funzione $K(\rho)$ della sola distanza molecolare, non è ammissibile se non nel caso in cui il corpo sia fluido, cessando allora la parte di azione dovuta alla figura delle molecole. In generale (rileggasi l'esposto al num°.54.) quando è in giuoco anche l'azione dovuta alla figura, debbono entrarvi quei coseni a_1, a_2, a_3, a_4, ec. che fissano le direzioni degli spigoli od assi delle due molecole relativamente ai tre assi ortogonali, coseni i cui valori cambiandosi da molecola a molecola, debbono, generalmente parlando, risultare funzioni delle corrispondenti coordinate. Sarebbe difficile assegnare come avranno poi ad esser fatte tali funzioni (e basta a questo fine il solo immaginare che quelle direzioni siano normali a superficie curve di natura varia per diversi corpi ed incognita) : ed oltre il non sapere l'interna fattura di queste funzioni, non si sa come entrino a comporre la K . In conseguenza la K , se vuolsene il concetto più generale, deve essere detta funzione delle sei coordinate, i cui valori sono espressi nelle equazioni (5), (6): nè possiamo presumere di esprimerne la composizione, solo ci è dato argomentare ch'essa sarà simmetrica relativamente alle dette sei

theorem of which we will repeat here six times the application, we will be ready to admit that the preceding finite sextuple integral is transformed into the continuous sextuple integral

$$\int da \int db \int dc \int df \int dg \int dk \cdot \frac{1}{2} K \delta \rho \tag{10}$$

with the addition of other terms, which then must be neglected. In it the integration limits for the variables f, g, k will depend on the surfaces which bound the body in the antecedent configuration, and also on the position of the molecule m,which is kept constant, that is by the variables a, b, c which after the first three will also vary in the same domain.

72. Let us now spend some time developing some considerations about the internal force K which is exerted between one molecule and another molecule, being either attractive or repulsive forces, which would have acted both independently of the applied external forces and because of the presence of these external forces. To assume that, as it was at first suggested, it[, the internal force,] is a function $K(\rho)$ of the molecular distance only, it is admissible only in the case of fluid bodies, as in that case the part of the action due to the shape of the molecules is not present. In general (the reader is invited to read once more what said in sect. 54) when the action due to the shape of molecules cannot be neglected, there [in the expression for K] must appear also those cosines a_1, a_2, a_3, a_4, etc. which are fixing the directions of the edges or axes of the two [involved] molecules relatively to the three orthogonal axes, cosines whose values are changing from one molecule to the other and therefore must result to be functions of the corresponding coordinates. It could be very difficult to find how such functions have to be assigned (and it is sufficient to this aim only to imagine that said directions could be normal to curved surfaces having various and unknown nature for different bodies): and beyond the ignorance about the internal structure of these functions, it is not known how the [function] K depends on them. As a consequence the K, if one wants to keep its most general possible use, must be a function of the six coordinates, whose values are expressed by the equations (5), (6): and we cannot presume to express its form, as we can only argue that it has to be symmetric relatively to said six

variabili, prese di tre in tre : cioè che cambiando le x_i, y_i, z_i nelle x_j, y_j, z_j, e queste nelle prime, resterà la medesima. Ciò perchè si sa (non essendovi la ragione del contrario) che la metà di K esprime l'azione della molecola m_j sulla m_i, e l'altra metà di K l'azione reciproca : si possono intendere cambiate le veci fra le due molecole, e non di meno i valori analitici debbono rimanere i medesimi : osservazione che ci porta a conchiudere l'enunciata proprietà nella espressione analitica, come accennammo anche in luogo del num°. precedente. L'inassegnabilità della funzione $K(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$ può evincersi anche con altri argomenti che mi permetto di preterire : solamente noterò come eziandio da questo lato spicchi la superiorità dei metodi che abbiamo alle mani : con essi si può tirare innanzi con sicurezza non ostante un' ignoranza che non è vincibile. Faremo un'altra osservazione intorno alla piccolezza di questa forza molecolare K , ricordandoci di quanto abbiamo detto in proposito sulla fine del num°.22. Corrispondentemente alle cose esposte nel num°.18. e seguenti, essa deve riguardarsi una forza elementare di sì inoltrata tenuità, che raccogliendone sopra un solo punto tante quante vi vengono da tutte le molecole della massa, si ha per risultante una forza ancora piccolissima dell'ordine di quelle $\sigma^3 X, \sigma^3 Y, \sigma^3 Z$ considerate al num°.18. A questo concetto risponde ottimamente l'impiccolimento procurato dal fattore σ^6, quale vedemmo risultare nell'integrale sestuplo (9) a motivo del prodotto $m_i m_j$ delle due masse elementari.

Conseguenza del fin qui detto si è che sommando i due integrali (1), (10), e ponendo tal somma in luogo delle due prime parti dell'equazione generale (1) num°.16., ci formeremo l'equazione che comprende tutta la meccanica molecolare. Prima però noteremo che giova fare per comodo

$$\Lambda = \frac{1}{4}\frac{K}{\rho} \tag{11}$$

denominazione mediante la quale potremo introdurre la quantità $\Lambda\delta\rho^2$ invece di $\frac{1}{2}K\delta\rho$ nell'integra sestuplo (10); e che

variables when taken three by three: i.e. that when changing the x_i, y_i, z_i into the x_j, y_j, z_j, and these last into the first ones the [function K] will remain the same. This is true because it is known (as there is no reason for the contrary) that one half of K expresses the action of the molecule m_j on the molecule m_i, and the other half of K expresses the reciprocal action: it is possible to assume that the roles of the two molecules are exchanged, and notwithstanding this the analytical values must remain the same: this observation leads us to conclude the stated property of the analytical expression, as we mentioned also in the precedent section. The impossibility of assigning the function $K(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$ can be deduced also by means of other arguments which I wish to omit: only I remark how, also from this point of view, the superiority of the methods which we have in our hands is emerging: with them one can continue safely to proceed in the argumentation notwithstanding an ignorance which cannot be defeated. We will add another observation about the smallness of this molecular force K, by recalling what we said about this subject at the end of sect. 22. Similarly to what expounded in sect. 18 and following ones, it has to be regarded as an elementary force which is so small that once considering the resultant of such forces on a single physical point as acted by all the other molecules of the mas, we have still a very small force of the same order of those forces $\sigma^3 X, \sigma^3 Y, \sigma^3 Z$ considered in sect. 18. This concept is perfectly corresponded by the scaling given by the factor σ^6, which we will see to result from the sextuple integral (9) due to the product $m_i m_j$ of the two elementary masses.

As a consequence of what was said up to now we can, by adding up the two integrals (1), (10), and by replacing the obtained sum in the first two parts of the general equation (1) sect. 16, formulate the equation which includes the whole molecular mechanics. Before doing so we will remark that it is convenient to introduce the following definition

$$\Lambda = \frac{1}{4}\frac{K}{\rho} \tag{11}$$

by means of which it will be possible to introduce the quantity $\Lambda\delta\rho^2$ instead of the quantity

$\frac{1}{2}K\delta\rho$ in the sextuple integral (10); and that

di questo integrale sestuplo è bene staccare la parte d'integrale triplicato relativa alle variabili f, g, k, sottoponendola allo stesso segno d'integrale triplicato per a, b, c che abbraccia la prima parte dell'equazione: il che manifestamente è permesso. Per tal modo l'anzidetta equazione generale si riduce

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z + \int df \int dg \int dk \cdot \Lambda \delta \rho^2 \right\} + \Omega = 0 \qquad (12)$$

intendendo (come ho accennato al principio del num°.71.) compresa nella Ω tutta la parte che potesse essere introdotta da forze applicate a superficie, a linee, a punti determinati, ed anche da condizioni particolari che obbligassero alcuni punti a restare sopra qualche curva o superficie data. Questa (12) sta invece della (1) del num°.44., o della (12) del num°.46., e si vede come sia ora diversamente espressa (essendo eguale il rimanente) la parte introdotta dalle azioni reciproche fra le molecole, che colà abbiamo contemplato per mezzo di equazioni di condizione sussistenti per tutto il corpo.

73. Ciò che rimane a fare all'oggetto di dedurre utili conseguenze dall'equazione (12) è semplicemente un processo di calcolo. Richiamata l'equazione (8), si vede, volgendo in serie le funzioni sotto le parentesi, come si abbia

$$\rho^2 = \left(f\frac{dx}{da} + g\frac{dx}{db} + k\frac{dx}{dc} + \frac{f^2}{2}\frac{d^2x}{da^2} + \text{ec.} \right)^2 + \left(f\frac{dy}{da} + g\frac{dy}{db} + k\frac{dy}{dc} + \frac{f^2}{2}\frac{d^2y}{da^2} + \text{ec.} \right)^2 + \left(f\frac{dz}{da} + g\frac{dz}{db} + k\frac{dz}{dc} + \frac{f^2}{2}\frac{d^2z}{da^2} + \text{ec.} \right)^2 ;$$

ed effettuando i quadrati e riunendo i termini che hanno coefficienti eguali:

$$\rho^2 = f^2 t_1 + g^2 t_2 + k^2 t_3 + 2fgt_4 + 2fkt_5 + 2gkt_6 + f^3 T_1 + 2f^2 g T_2 + 2f^2 k T_3 + f g^2 T_4 + \text{ec.} \qquad (13)$$

inside this sextuple integral it is suitable to isolate the part relative to the triple integral relative to the variables f, g, k, placing it under the same sign of triple integral with respect to the variables a, b, c which includes the first part of the equation: which it is manifestly allowed. In this way the aforementioned general equation becomes

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z + \int df \int dg \int dk \cdot \Lambda \delta \rho^2 \right\} + \Omega = 0 \qquad (12)$$

where it is intended that (as mentioned at the beginning of sect. 71) it is included in the Ω those parts which may be introduced because of the forces applied to surfaces, lines or well-determined points and also because of particular conditions which may oblige some points to belong to some given curve or surface. This equation (12) replaces the equation (1) of sect. 44, or the equation (12) of sect. 46, and it is seen how it is expressed differently (while the remaining parts are left the same) the part introduced by the reciprocal actions of the molecules which in those equations were taken into account by means of equations of conditions to hold in the whole body.

73. What remains to be done in order to deduce useful consequences from equation (12) it is simply a calculation process. Once having recalled equation (8), it is seen, transforming into series the functions in the brackets, that one has

$$\rho^2 = \left(f\frac{dx}{da} + g\frac{dx}{db} + k\frac{dx}{dc} + \frac{f^2}{2}\frac{d^2x}{da^2} + \text{etc.} \right)^2 + \left(f\frac{dy}{da} + g\frac{dy}{db} + k\frac{dy}{dc} + \frac{f^2}{2}\frac{d^2y}{da^2} + \text{etc.} \right)^2 + \left(f\frac{dz}{da} + g\frac{dz}{db} + k\frac{dz}{dc} + \frac{f^2}{2}\frac{d^2z}{da^2} + \text{etc.} \right)^2 ;$$

and by calculating the squares and gathering the terms which have equal coefficients:

$$\rho^2 = f^2 t_1 + g^2 t_2 + k^2 t_3 + 2fgt_4 + 2fkt_5 + 2gkt_6 + f^3 T_1 + 2f^2 g T_2 + 2f^2 k T_3 + f g^2 T_4 + \text{etc.} \qquad (13)$$

nella quale espressione le $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ significano sei trinomj che ci sono già familiari, avendo adottate tali denominazioni fino dalle equazioni (6) del num°.34.; e T_1, T_2, T_3, T_4, ec. all'infinito, significano trinomj della stessa natura fatti con derivate di ordine sempre più elevato. In tutti questi trinomj gli ultimi due termini sono sempre simili al primo, non differendone se non per avere le lettere y, z in luogo della x.Quelli in cui entrano le derivate seconde sono di due sorte. Ve ne hanno di fatti con derivate prime e seconde : sono in numero di 18. , cioè i seguenti :

$$
\begin{array}{l}
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da^2}\\
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadb}\\
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadc}\\
\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dadb}\\
\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{db^2}\\
\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dbdc}\\
\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dadc}\\
\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dbdc}\\
\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dc^2}\\
\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da^2}\\
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{db^2}\\
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dbdc}
\end{array}
\qquad (14)
$$

in this expression the quantities $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ represent the six trimonials which are alreay familiar to us, as we have adopted such definitions from equations (6) in sect. 34; and the quantities T_1, T_2, T_3, T_4, etc. where the index goes to infinity, represent trinomials of the same nature in which derivatives of higher and higher order appear. In all these trinomials the last two terms are always similar to the first but they differ in having the letters y, z at the place of the letter x. Those in which the second derivatives appear are of two kinds. There are those which are composed with first order and second order derivatives, and these are exactly 18 in number, which are listed in the following formula:

$$
\begin{array}{l}
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da^2}\\
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadb}\\
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dadc}\\
\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dadb}\\
\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{db^2}\\
\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dbdc}\\
\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dadc}\\
\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dbdc}\\
\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dc^2}\\
\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da^2}\\
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{db^2}\\
\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dbdc}
\end{array}
\qquad (14)
$$

$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{da^2}$$
$$\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dc^2}$$
$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{db^2}$$
$$\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dc^2}$$

Vengono poi i trinomj fatti con sole derivate seconde, e sono in numero di 21., cioè i seguenti:

$$\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{db^2}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{dc^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dc^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dc^2}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{dadb}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dadb}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dadb}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{dadc}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dadc}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dadc}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{dbdc}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dbdc}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dbdc}\right)^2$$
$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{db^2}$$
$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dc^2}$$
$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dc^2}$$
$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dadc}$$

(15)

$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{da^2}$$
$$\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{dc^2}$$
$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{dx}{dc}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{dc}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{dc}\frac{d^2z}{db^2}$$
$$\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{dc^2}$$

Then we have the trinomial constituted with second order derivatives only, and these last are 21 in number, and are listed in the following formula

$$\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{db^2}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{dc^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dc^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dc^2}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{dadb}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dadb}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dadb}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{dadc}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dadc}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dadc}\right)^2$$
$$\left(\frac{d^2x}{dbdc}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dbdc}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dbdc}\right)^2$$
$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{db^2}$$
$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dc^2}$$
$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dc^2}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dc^2}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dc^2}$$
$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dadc}$$

(15)

$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dbdc}$$
$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dbdc}$$
$$\frac{d^2x}{dc^2}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2y}{dc^2}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{dc^2}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{d^2x}{dc^2}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{dc^2}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{dc^2}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{d^2x}{dc^2}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{dc^2}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{dc^2}\frac{d^2z}{dbdc}$$
$$\frac{d^2x}{dadb}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{dadb}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{dadb}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{d^2x}{dadb}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{dadb}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{dadb}\frac{d^2z}{dbdc}$$
$$\frac{d^2x}{dadc}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{dadc}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{dadc}\frac{d^2z}{dbdc}.$$

I trinomj colle derivate di terz'ordine sono di tre sorte : ve ne hanno di quelli composti di derivate prime e terze, e se ne contano in numero di 30 : di quelli fatti di derivate seconde e terze, e sono in numero di 60: e di quelli che non contengono se non derivate terze, e raggiungono il numero di 55. Non li scrivo, potendo facilmente ognuno che sia dotato della necessaria pazienza costruirseli da se, come pure quelli con derivate di ordine più elevato.

Adoperando poi l'equazione (13) per dedurne il valore della variata $\delta\rho^2$, è chiaro che la caratteristica δ dovrà applicarsi unicamente ai trinomj di quali si è fin qui discorso, talchè si abbia

$$\delta\rho^2 = f\ ^2\delta t_1 + g\ ^2\delta t_2 + k\ ^2\delta t_3 + 2fg\ \delta t_4 + 2fk\ \delta t_5 + 2gk\ \delta t_6 + f\ ^3\delta T_1 + 2f\ ^2g\delta T_2 + 2f\ ^2k\delta T_3 + f\ g^2\delta T_4 + \text{ec.} \qquad (16)$$

$$\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{dbdc}$$
$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{dbdc}$$
$$\frac{d^2x}{dc^2}\frac{d^2x}{dadb}+\frac{d^2y}{dc^2}\frac{d^2y}{dadb}+\frac{d^2z}{dc^2}\frac{d^2z}{dadb}$$
$$\frac{d^2x}{dc^2}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{dc^2}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{dc^2}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{d^2x}{dc^2}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{dc^2}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{dc^2}\frac{d^2z}{dbdc}$$
$$\frac{d^2x}{dadb}\frac{d^2x}{dadc}+\frac{d^2y}{dadb}\frac{d^2y}{dadc}+\frac{d^2z}{dadb}\frac{d^2z}{dadc}$$
$$\frac{d^2x}{dadb}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{dadb}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{dadb}\frac{d^2z}{dbdc}$$
$$\frac{d^2x}{dadc}\frac{d^2x}{dbdc}+\frac{d^2y}{dadc}\frac{d^2y}{dbdc}+\frac{d^2z}{dadc}\frac{d^2z}{dbdc}.$$

The trinomials with third order derivatives are of three kinds: there are those constituted by derivatives of first and third order, and one can count 30 of them: there are those constituted by derivatives of second and third order, and they are 60 in number: and there are those which contain only third order derivatives and they are 55 in number. I am not writing them, as everybody who is given the needed patience can easily calculate them by himself, as it can be also done for those trinomials containing derivatives of higher order.

When using the equation (13) to deduce the value of the variation $\delta\rho^2$, it is clear that the characteristic δ will need to be applied only to the trinomials about which we have said up to now, so that we will have:

$$\delta\rho^2 = f\ ^2\delta t_1 + g\ ^2\delta t_2 + k\ ^2\delta t_3 + 2fg\ \delta t_4 + 2fk\ \delta t_5 + 2gk\ \delta t_6 + f\ ^3\delta T_1 + 2f\ ^2g\delta T_2 + 2f\ ^2k\delta T_3 + f\ g^2\delta T_4 + \text{ec.} \qquad (16)$$

Infatti i coefficienti $f\ ^2, g\ ^2, k\ ^2, 2fg$, ec. riescono sempre i medesimi in qualunque ipotesi di composizione delle x, y, z per le a, b, c, e non possono quindi essere affetti da quella operazione che ha appunto unicamente di mira i cambiamenti di forma di tali funzioni. Viceversa, moltiplicando la precedente equazione (16) per Λ e poi integrando perf, g, k all'intento di dedurne il valore da darsi al quarto termine sotto l'integrale triplicato dell'equazione (12), una sì fatta operazione s'apprende soltanto alle quantità $\Lambda f\ ^2, \Lambda g\ ^2$, ec., le variate $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3 ....\delta T_1, \delta T_2$, ec. non possono restarne intaccate, giacchè i trinomj $t_1, t_2, t_3 ....T_1, T_2$, ec. (riflettasi alla loro origine) non contengono le variabili f, g, k : tali variate riescono fattori costanti pei quali vengono moltiplicati gl'integrali che si effettuano nei successivi termini della serie.

Dopo di ciò si fa palese la verità dell'equazione

$$\int df \int dg \int dk \cdot \Lambda \delta \rho^2 = \tag{17}$$

$$(1)\ \delta t_1 + (2)\ \delta t_2 + (3)\ \delta t_3 + (4)\ \delta t_4 + (5)\ \delta t_5 + (6)\ \delta t_6$$
$$+ (7)\ \delta T_1 + (8)\ \delta T_2 + (9)\ \delta T_3 + (10)\ \delta T_4 + \text{ec.}$$

dove i coefficienti (1), (2), ec. indicati per mezzo di numeri fra parentesi, debbono considerarsi altrettante funzioni delle a, b, c quali risulterebbero dagli integrali summentovati dopo eseguite e definite le integrazioni. Ecco qual sarebbe la quantità equivalente da inrodursi nella equazione (12) al luogo del quarto termine sotto l'integrale triplicato.

74. Una proposizione nuova, a cui prego il lettore a porre molta attenzione, è che tutti i trinomj T_1, T_2, T_3, ec. all'infinito, che entrano nella precedente equazione (17), si possono esprimere per mezzo dei soli primi sei $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$, e delle loro derivate per a, b, c di tutti gli ordini. Io venni in sospetto di questa verità analitica a motivo della necessaria corrispondenza che ci dovea essere tra risultamenti a cui conduce la via tracciata in questo Capo, e quelli ottenuti per la via che abbiamo seguita nei Capitoli III e IV. Ho poi verificata l'enunciata proprietà per 39 termini della precedente

Indeed the coefficients $f\ ^2, g\ ^2, k\ ^2, 2fg$, etc. are always the same for every functions giving the variables x, y, z in terms of the variables a, b, c, and therefore cannot be affected by that operation whose aim is simply to change the form of these functions. Vice versa, by multiplying the precedent equation (16) times Λ and then integrating with respect to the variables f, g, k in order to deduce the fourth term under the triple integral of the equation (12), such an operation is affecting only the quantities $\Lambda f\ ^2, \Lambda g\ ^2$, etc., and the variations $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3 ....\delta T_1, \delta T_2$, etc. cannot be affected by it, as the trinomials $t_1, t_2, t_3 ....T_1, T_2$, etc. (one has to consider carefully which is their origin) do not contain the variables f, g, k : therefore such variations result in being constant factors, which are to be multiplied by the integrals to be calculated in the subsequent terms of the series. After these considerations the truth of the following equation is manifest:

$$\int df \int dg \int dk \cdot \Lambda \delta \rho^2 = \tag{17}$$

$$(1)\ \delta t_1 + (2)\ \delta t_2 + (3)\ \delta t_3 + (4)\ \delta t_4 + (5)\ \delta t_5 + (6)\ \delta t_6$$
$$+ (7)\ \delta T_1 + (8)\ \delta T_2 + (9)\ \delta T_3 + (10)\ \delta T_4 + \text{etc.}$$

where the coefficients (1), (2), etc. indicated by means of numbers in between brackets, must each be regarded to be a function of the variables a, b, c, [the same functions] which are obtained by calculating the aforementioned definite integrals. This is the equivalent quantity which should be introduced in the equation (12) at the place of the forth term under the triple integral.

74. A new proposition, to which the reader should pay much attention, is that all the trinomials T_1, T_2, T_3, etc. where the subscript goes to infinity, which [trinomials] appear in the precedent equation (17), can only be expresses by means of the first six t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, and of their derivatives with respect to the variables a, b, c of all orders. I started to suspect this analytical truth because of the necessary correspondence which must hold between the results which are obtained via the method considered in this Capo and those results obtained with the way considered in the Chapters III and IV. I have then verified the stated property for 39 terms of the precedent

serie (17), oltre i primi sei, cioè per tutti i trinomj scritti nelle riunioni (14), e (15), dopo di che mi sono abbandonato all'analogia : la qual cosa o presto o tardi è inevitabile, giacchè trattandosi di una serie infinita è impossibile percorrerla tutta. Ora dirò come ho fatto l'asserita verificazione, e l'importanza delle conclusioni scuserà le lungaggini nei calcoli, i quali, dalla prolissità in fuori, non presentano alcuna difficoltà.

Avendo sott'occhio i valori delle $t_1, t_2, t_3,\ t_4, t_5, t_6$ (equazioni (6) num.°34.) si riconosce subito che i primi nove trinomj della riunione (14) hanno rispettivamente i valori :

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2}\frac{dt_1}{da}; & \frac{1}{2}\frac{dt_1}{db}; & \frac{1}{2}\frac{dt_1}{dc} \\ \frac{1}{2}\frac{dt_2}{da}; & \frac{1}{2}\frac{dt_2}{db}; & \frac{1}{2}\frac{dt_2}{dc} \\ \frac{1}{2}\frac{dt_3}{da}; & \frac{1}{2}\frac{dt_3}{db}; & \frac{1}{2}\frac{dt_3}{dc}. \end{array}$$

Si trova in appresso (e può verificarsi colla sostituzione dei valori noti) che i trinomj decimo, undicesimo, tredicesimo, quindicesimo, diciassettesimo, diciottesimo equivalgono rispettivamente ai seguenti binomj :

$$\begin{array}{lll} \frac{dt_4}{da} - \frac{1}{2}\frac{dt_1}{db}; & \frac{dt_4}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_2}{da}; & \frac{dt_5}{da} - \frac{1}{2}\frac{dt_1}{dc} \\ \frac{dt_5}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_3}{da}; & \frac{dt_6}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_2}{dc}; & \frac{dt_6}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_3}{db}. \end{array}$$

E che i trinomj dodicesimo, quattordicesimo, sedicesimo hanno rispettivamente questi altri valori :

$$\frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} + \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}; \quad \frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} + \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}; \quad -\frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} + \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} + \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}.$$

Per tal modo l'asserita proposizione è provata relativamente ai primi 18 trinomj.

Ora immaginiamo formate 18 equazioni aventi nei primi membri i trinomj della riunione (14) presi uno per volta, e nei secondi i rispettivi valori ch'ora abbiamo dimostrato essere ad essi eguali. Di tali equazioni si comincino a considerare la

series (17), beyond the first six, that is for all trinomials written in the tables (14), and (15), and after these calculations I abandoned myself to the analogy: and this will sooner or later be unavoidable, because our series is infinite and it will be impossible to check all its terms. Now I will say how I performed the stated verification and the importance of the conclusions will justify the lengthinesses of the calculations, which, except for the prolixity, do not present any difficulty. Checking the values of the variables $t_1, t_2, t_3,\ t_4, t_5, t_6$ (equations (6) sect. 34) it is immediate to recognize that the first nine trinomials of the table (14) respectively have the values:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2}\frac{dt_1}{da}; & \frac{1}{2}\frac{dt_1}{db}; & \frac{1}{2}\frac{dt_1}{dc} \\ \frac{1}{2}\frac{dt_2}{da}; & \frac{1}{2}\frac{dt_2}{db}; & \frac{1}{2}\frac{dt_2}{dc} \\ \frac{1}{2}\frac{dt_3}{da}; & \frac{1}{2}\frac{dt_3}{db}; & \frac{1}{2}\frac{dt_3}{dc}. \end{array}$$

It is then possible to find that (and this can be verified by simple substitution of known values) the trinomials labelled with the number ten, eleven, thirteen, fifteen, seventeen and eighteen are equivalent respectively to the following binomials:

$$\begin{array}{lll} \frac{dt_4}{da} - \frac{1}{2}\frac{dt_1}{db}; & \frac{dt_4}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_2}{da}; & \frac{dt_5}{da} - \frac{1}{2}\frac{dt_1}{dc} \\ \frac{dt_5}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_3}{da}; & \frac{dt_6}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_2}{dc}; & \frac{dt_6}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_3}{db}. \end{array}$$

And that the trinomials labelled with the numbers twelve, fourteen and sixteen have respectively these other values:

$$\frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} + \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} - \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}; \quad \frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} - \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} + \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}; \quad -\frac{1}{2}\frac{dt_4}{dc} + \frac{1}{2}\frac{dt_5}{db} + \frac{1}{2}\frac{dt_6}{da}.$$

In this way the stated proposition is proven relatively to the first 18 trinomials.

Let us now imagine to have formed 18 equations having each as left-hand sides the trinomials of the table (14) and as right-hand side respectively the values to which we have proven they are equal. Among these equations let us consider the

prima, la decima, e la tredicesima, si moltiplichino ordinatamente per l_1, m_1, n_1, indi si sommino : si moltiplichino da capo similmente per l_2, m_2, n_2, e si sommino : si moltiplichino nuovamente da capo per l_3, m_3, n_3, e si sommino : avendo sott'occhio le nove equazioni del num.°14. segnate (28) , giungeremo a trovare a parte i valori delle tre derivate di second'ordine $\frac{d^2x}{da^2}, \frac{d^2y}{da^2}, \frac{d^2z}{da^2}$. Collo stesso andamento scegliendo opportunamente fra le anzi descritte 18 equazioni, determineremo i valori delle altre derivate di second'ordine ed otterremo :

$$2H\,\frac{d^2x}{da^2} = l_1\frac{dt_1}{da} + m_1\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_1\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2y}{da^2} = l_2\frac{dt_1}{da} + m_2\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_2\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2z}{da^2} = l_3\frac{dt_1}{da} + m_3\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_3\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2x}{db^2} = l_1\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_1\frac{dt_2}{db} + n_1\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2y}{db^2} = l_2\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{db} + n_2\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2z}{db^2} = l_3\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{db} + n_3\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2x}{dc^2} = l_1\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_1\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_1\frac{dt_3}{dc}$$
$$2H\,\frac{d^2y}{dc^2} = l_2\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_2\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_2\frac{dt_3}{dc}$$
$$2H\,\frac{d^2z}{dc^2} = l_3\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_3\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_3\frac{dt_3}{dc}$$
$$2H\,\frac{d^2x}{dadb} = l_1\frac{dt_1}{db} + m_1\frac{dt_2}{da} + n_1\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2y}{dadb} = l_2\frac{dt_1}{db} + m_2\frac{dt_2}{da} + n_2\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2z}{dadb} = l_3\frac{dt_1}{db} + m_3\frac{dt_2}{da} + n_3\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2x}{dadc} = l_1\frac{dt_1}{dc} + m_1\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_5}{db}\right) + n_1\frac{dt_3}{da}$$

first, the tenth and the thirteenth ones and let us multiply them orderly times l_1, m_1, n_1, and then let us sum the obtained results: then let us multiply the same equations again times l_2, m_2, n_2, and again sum the obtained results : finally let us multiply the same three equations times l_3, m_3, n_3, and again sum the obtained results : by considering the nine equations of sect. 14 labelled (28) , we will manage to get an expression for the values of the three second order derivatives $\frac{d^2x}{da^2}, \frac{d^2y}{da^2}, \frac{d^2z}{da^2}$. Following the same procedure, suitably choosing among the aforementioned 18 equations, we will determine the values of the other second order derivatives and we will get

$$2H\,\frac{d^2x}{da^2} = l_1\frac{dt_1}{da} + m_1\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_1\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2y}{da^2} = l_2\frac{dt_1}{da} + m_2\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_2\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2z}{da^2} = l_3\frac{dt_1}{da} + m_3\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + n_3\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2x}{db^2} = l_1\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_1\frac{dt_2}{db} + n_1\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2y}{db^2} = l_2\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{db} + n_2\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2z}{db^2} = l_3\left(2\frac{dt_4}{db} - \frac{dt_2}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{db} + n_3\left(2\frac{dt_6}{db} - \frac{dt_2}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2x}{dc^2} = l_1\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_1\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_1\frac{dt_3}{dc}$$
$$2H\,\frac{d^2y}{dc^2} = l_2\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_2\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_2\frac{dt_3}{dc}$$
$$2H\,\frac{d^2z}{dc^2} = l_3\left(2\frac{dt_5}{dc} - \frac{dt_3}{da}\right) + m_3\left(2\frac{dt_6}{dc} - \frac{dt_3}{db}\right) + n_3\frac{dt_3}{dc}$$
$$2H\,\frac{d^2x}{dadb} = l_1\frac{dt_1}{db} + m_1\frac{dt_2}{da} + n_1\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2y}{dadb} = l_2\frac{dt_1}{db} + m_2\frac{dt_2}{da} + n_2\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2z}{dadb} = l_3\frac{dt_1}{db} + m_3\frac{dt_2}{da} + n_3\left(\frac{dt_5}{db} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_4}{dc}\right)$$
$$2H\,\frac{d^2x}{dadc} = l_1\frac{dt_1}{dc} + m_1\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_5}{db}\right) + n_1\frac{dt_3}{da}$$

$$2H\ \frac{d^2y}{dadc} = l_2\frac{dt_1}{dc} + m_2\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_6}{db}\right) + n_2\frac{dt_3}{da}$$
$$2H\ \frac{d^2z}{dadc} = l_3\frac{dt_1}{dc} + m_3\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_5}{db}\right) + n_3\frac{dt_3}{da}$$
$$2H\ \frac{d^2x}{dbdc} = l_1\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_1\frac{dt_2}{dc} + n_1\frac{dt_3}{db}$$
$$2H\ \frac{d^2y}{dbdc} = l_2\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_2\frac{dt_2}{dc} + n_2\frac{dt_3}{db}$$
$$2H\ \frac{d^2z}{dbdc} = l_3\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{dc} + n_3\frac{dt_3}{db}.$$

Presentemente col mezzo di questi valori cerchiamo quelli dei trinomj della riunione (15). Richiamando le equazioni (31), (33), (34) del num.° 67. vedremo che tali valori risultano unicamente fatti delle $t_1, t_2 .... t_6$ e delle loro derivate prime, che è appunto ciò che volevamo provare. Per esempio il valore del primo trinomio

$$\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2$$

ci viene eguale ad una frazione il cui numeratore è

$$\left(t_2t_3 - t_6^2\right)\left(\frac{dt_1}{da}\right)^2 + \left(t_1t_3 - t_5^2\right)\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right)^2 + \left(t_1t_2 - t_4^2\right)\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)^2$$
$$+ 2\left(t_5t_6 - t_3t_4\right)\frac{dt_1}{da}\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + 2\left(t_4t_6 - t_2t_5\right)\frac{dt_1}{da}\left(2\frac{dt_6}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$+ 2\left(t_4t_5 - t_1t_6\right)\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right)\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$

e il denominatore la quantità

$$4\left(t_1t_2t_3 + 2t_4t_5t_6 - t_1t_6^2 - t_2t_5^2 - t_3t_4^2\right).$$

Formati a un di presso allo stesso modo si trovano i valori degli altri venti trinomj della riunione (15) : non si è dunque esagerato dicendo essere 39. i trinomj sui quali la proprietà analitica è stata in atto verificata.

75. Ammessa la proposizione del num.° precedente si rende manifesto che l'equazione (17) può prendere quest'altra forma

$$2H\ \frac{d^2y}{dadc} = l_2\frac{dt_1}{dc} + m_2\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_6}{db}\right) + n_2\frac{dt_3}{da}$$
$$2H\ \frac{d^2z}{dadc} = l_3\frac{dt_1}{dc} + m_3\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_6}{da} - \frac{dt_5}{db}\right) + n_3\frac{dt_3}{da}$$
$$2H\ \frac{d^2x}{dbdc} = l_1\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_1\frac{dt_2}{dc} + n_1\frac{dt_3}{db}$$
$$2H\ \frac{d^2y}{dbdc} = l_2\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_2\frac{dt_2}{dc} + n_2\frac{dt_3}{db}$$
$$2H\ \frac{d^2z}{dbdc} = l_3\left(\frac{dt_4}{dc} + \frac{dt_5}{db} - \frac{dt_6}{da}\right) + m_3\frac{dt_2}{dc} + n_3\frac{dt_3}{db}.$$

Now, by means of these values, let us look for the values of the trinomials of the table (15). Recalling the equations (31), (33), (34) in sect. 67 we will see that these values result to be constituted uniquely by the variables $t_1, t_2 .... t_6$ and by their first order derivatives, and this is exactly what we wanted to prove. For instance the value of the first trinomial

$$\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2$$

can be proven to be equal to a fraction whose numerator is

$$\left(t_2t_3 - t_6^2\right)\left(\frac{dt_1}{da}\right)^2 + \left(t_1t_3 - t_5^2\right)\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right)^2 + \left(t_1t_2 - t_4^2\right)\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)^2$$
$$+ 2\left(t_5t_6 - t_3t_4\right)\frac{dt_1}{da}\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right) + 2\left(t_4t_6 - t_2t_5\right)\frac{dt_1}{da}\left(2\frac{dt_6}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$
$$+ 2\left(t_4t_5 - t_1t_6\right)\left(2\frac{dt_4}{da} - \frac{dt_1}{db}\right)\left(2\frac{dt_5}{da} - \frac{dt_1}{dc}\right)$$

and whose denominator is:

$$4\left(t_1t_2t_3 + 2t_4t_5t_6 - t_1t_6^2 - t_2t_5^2 - t_3t_4^2\right).$$

Similarly forms can be found for the values of the other twenty trinomials of the table (15) : therefore it was not exaggerated to affirm that the stated analytical property has been actually verified for 39 trinomials.

75. Once the proposition of the precedent sect. has been given, it is manifest that equation (17) can assume the following other form

$$\int df \int dg \int dk \cdot \Lambda \delta\rho^2 = \tag{18}$$

$$(\alpha)\ \delta t_1 + (\beta)\ \delta t_2 + (\gamma)\ \delta t_3 + ... + (\epsilon)\ \frac{\delta dt_1}{da} + (\zeta)\ \frac{\delta dt_1}{db} + (\eta)\ \frac{\delta dt_1}{dc}$$
$$+ (\vartheta)\ \frac{\delta dt_2}{da} + ... + (\lambda)\ \frac{\delta d^2 t_1}{da^2} + (\mu)\ \frac{\delta d^2 t_1}{dadb} + ... + (\xi)\ \frac{\delta d^2 t_2}{da^2} + (o)\ \frac{\delta d^2 t_2}{dadb} + \text{ec.}$$

nella quale i coefficienti $(\alpha), (\beta)\ ....\ (\epsilon) ....\ (\lambda)\ ....$ ec. sono quantità fatte dei coefficienti $(1), (2) .... (7), (8) ....$ della equazione (17), dei sei trinomj $t_1, t_2 .... t_6$, e delle derivate di questi trinomj per a, b, c dei diversi ordini. Le variate poi δt_1, $\delta t_2 ....$ e le variate delle loro derivate di tutti gli ordini $\frac{\delta dt_1}{da}, \frac{\delta dt_1}{db}$, ec. non entrano nella (18) se non linearmente all'infinito. Ora è un principio fondamentale nel calcolo delle variazioni (e ne abbiamo fatto uso anche in questa Memoria al num.° 36. e altrove) che una serie come la precedente ove sono lineari le variate di alcune quantità e le variate delle loro derivate per variabili semplici a, b, c, può sempre trasformarsi in una espressione che contenga quelle quantità non affette da alcun segno di derivazione, coll'aggiunta di altri termini i quali sono derivate esatte relativamente all'una o all'altra o alla terza delle variabili semplici. In conseguenza di tal principio all'equazione (18) può darsi l'espressione che segue

$$\int df \int dg \int dk \cdot \Lambda \delta\rho^2 = \tag{19}$$

$$A\delta t_1 + B\ \delta t_2 + C\ \delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\ \delta t_6$$
$$+ \frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db} + \frac{d\Upsilon}{dc}.$$

I valori dei sei coefficienti A, B, C, D, E, F sono serie fatte coi coefficienti $(\alpha), (\beta), (\gamma) .... (\epsilon), (\zeta) ..$ ec. dell'equazione (18) che vi entrano linearmente a segni alternati, e affetti da derivazioni di ordine sempre più elevato più che c'inoltriamo nei termini di esse serie : le quantità Δ, Θ, Υ sono serie della stessa forma della proposta a trasformarsi, nella quale i coefficienti delle variate hanno una composizione

$$\int df \int dg \int dk \cdot \Lambda \delta\rho^2 = \tag{18}$$

$$(\alpha)\ \delta t_1 + (\beta)\ \delta t_2 + (\gamma)\ \delta t_3 + ... + (\epsilon)\ \frac{\delta dt_1}{da} + (\zeta)\ \frac{\delta dt_1}{db} + (\eta)\ \frac{\delta dt_1}{dc}$$
$$+ (\vartheta)\ \frac{\delta dt_2}{da} + ... + (\lambda)\ \frac{\delta d^2 t_1}{da^2} + (\mu)\ \frac{\delta d^2 t_1}{dadb} + ... + (\xi)\ \frac{\delta d^2 t_2}{da^2} + (o)\ \frac{\delta d^2 t_2}{dadb} + \text{etc.}$$

in which the coefficients $(\alpha), (\beta)\ ....\ (\epsilon) ....\ (\lambda)\ ....$ etc. are suitable quantities given in terms of the coefficients $(1), (2) .... (7), (8) ....$ of equation (17), of the six trinomials t_1, t_2 .... t_6, and of the derivatives of any order of these trinomials with respect to the variables a, b, c. Besides, the variations δt_1, $\delta t_2 ...$ (with the subscript varying up to infinity) and the variations of all their derivatives of all the required orders $\frac{\delta dt_1}{da}, \frac{\delta dt_1}{db}$, etc. appear in (18) only linearly. Now it is a fundamental principle of the calculus of variations (and we used it also in this Memoir in sect. 36 and elsewhere) that a series, as the precedent one, where the variations of some quantities and the variations of their derivatives with respect the fundamental variables a, b, c appear linearly, can always be transformed into an expression which contains that quantities without any sign of derivation, with the addition of other terms which are exact derivatives with respect to one of the three simple independent variables. As a consequence of this principle applied to the equation (18), the expression which follows can be given

$$\int df \int dg \int dk \cdot \Lambda \delta\rho^2 = \tag{19}$$

$$A\delta t_1 + B\ \delta t_2 + C\ \delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\ \delta t_6$$
$$+ \frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db} + \frac{d\Upsilon}{dc}.$$

The values of the six coefficients A, B, C, D, E, F are series constructed with the coefficients $(\alpha), (\beta), (\gamma) .... (\epsilon), (\zeta) .... (\lambda)$, etc. of equation (18) which appear linearly, with alternating signs and affected by derivations of higher and higher order when we move ahead in the terms of said series: the quantities Δ, Θ, Υ are series of the same form as the terms which are transformed, in which the coefficients of the variations have a composition

simile a quella che abbiamo descritta pei sei coefficienti A, B, C, D, E, F .

Introdotta la quantità che forma il secondo membro della equazione (19) invece di quella del primo sotto l'integrale triplicato della equazione (12), si fa a tutti aperto che sugli ultimi tre termini di essa può eseguirsi alcuna delle integrazioni, e che per conseguenza tali termini non fanno che somministrare quantità le quali passano ai limiti. Ciò che rimane sotto l'integrale triplicato è il solo sestinomio in tutto simile a quello già usato nell'equazione (10) num.° 35. pei sistemi rigidi. Pertanto dopo un tal punto di confronto sarà pure perfettamente eguale l'andamento analitico da tenersi in questo luogo a quello tenuto colà fino al ritrovamento delle equazioni (26), (29) del num.° 38., e verrà dimostrata l'estensione delle dette equazioni ad ogni sorta di corpi non rigidi, siccome si è accennato sul finire del num.° 38. Sarà anche visibile la coincidenza dei risultamenti cogli espressi nelle equazioni (23) del num.°50. sussistenti per qualunque sorta di sistemi, e dimostrate nel Capo IV. mercè quelle coordinate intermedie p, q, r, la di cui considerazione, attenendoci alla maniera esposta in questo Capo, non fa più bisogno.

76. L'analisi precedente apre l'adito a molte utili riflessioni. Primieramente farò parola di quelle che valgono a pienamente dissipare le dubbiezze cui ci siamo provati a rispondere al num.° 63., rimettendoci per maggiore spiegazione a quanto avremmo poi detto in questo luogo. Partendo dallo stato di antecedente disposizione ideale delle molecole colle coordinate a, b, c, e venendo a quello della disposizione reale, intendasi questo secondo espresso relativamente a due diverse terne di assi ortogonali, delle p, q, r, e delle x, y, z. Per l'espressione dello stato reale mediante lep, q, r non abbiamo a far altro che copiare l'analisi precedente scrivendo dappertutto p, q, r dove sono scritte le x, y, z. Ora volendo passare dalle coordinate p, q, r alle x, y, z, osserveremo che pel caso del fluido, siccome si è detto al num.° 72., la forza interna K, ovvero Λ

similar to the one which we have described for the six coefficients A, B, C, D, E, F.

Once -instead of the quantity under the integral sign in the left-hand side of the equation (12)- one introduces the quantities which are on the right-hand side of the equation (19), it is clear to everybody that an integration is possible for each of the last three terms of the sum appearing in it and that, as a consequence, these terms only give quantities which supply boundary conditions. What remains under the triple integral is the only sextinomial which is absolutely similar to the sextinomial already used in equation (10) sect. 35 for rigid systems. Therefore after having remarked on the aforementioned similarity, the analytical procedure to be used here will result as perfectly equal to the one used in sect. 35, procedure which led to the equations (26), (29) in sect. 38 and it will become possible to demonstrate the extension of said equations to every kind of bodies which does not respect the constraint of rigidity, as was mentioned at the end of sect. 38. It will also be visible the coincidence of the obtained results with those which are expressed in the equations (23) of sect. 50 which hold for every kind of systems and which were shown in the Capo IV by means of those intermediate coordinates p, q, r, whose consideration, when using the approach used in this Capo, will not be needed.

76. The preceding analysis allows for many useful considerations. First of all I will mention those which are needed to clarify the doubts to which we already tried to answer in sect. 63, when we promised to add more explanations later in this section. Starting from the antecedent ideal configuration of the molecules described by means of the coordinates a, b, c, and arriving at the real configuration, we intend this second configuration as described by means of two different reference triples of orthogonal axes, those of the variables p, q, r, and of the variables x, y, z. To express the real configuration by means of the variables p, q, r we need simply to copy the preceding analysis writing everywhere p, q, r where previously we had written x, y, z. Now if we want to pass from the coordinates p, q, r to the coordinates x, y, z, we will observe that in the case of the fluids, as it was said in sect. 72, the internal force K, or equivalently the quantity Λ,

è funzione unicamente della distanza molecolare ρ ; e se ben si considera la fattura dei coefficienti $(1),(2),(3)$..... dell'equazione (17), quella dei coefficienti $(\alpha),(\beta),(\gamma)$..... dell'equazione (18), e in fine quella dei sei coefficienti A,B,C,D,E,F dell'equazione (19), verremo facilmente a persuaderci che quest'ultime sei quantità, nel primo riferimento agli assi delle p,q,r, non contengono tali p,q,r se non in quanto sono contenute nel radicale ρ (equazione (8)), e nei sei trinomj $t_1,t_2,....t_6$, avendo scritto dappertutto p,q,r in luogo di x,y,z. Pertanto le sei quantità A,B,C,D,E,F godranno della proprietà analitica già tanto discussa, del cangiarsi mediante la sostituzione dei valori (31) num.° 40. in quantità egualmente fatte colle x,y,z, sparita ogni traccia delle nove quantità angolari $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_2$, ec., quando sì fatta proprietà si verifichi nel radicale ρ , e in ciascuno de' sei trinomj $t_1,t_2....t_6$. Ora qui non si ha a far altro che eseguir le operazioni, e resteremo convinti che la cosa è appunto come si è detto, rammentate le equazioni fra le quantità angolari registrate al num.° 33. Ecco uno dei risultamenti in vista dei quali dicemmo in prevenzione al cominciare del presente Capo, che le due maniere per mettere a calcolo i vincoli interni fra le molecole si illustravano a vicenda.

Viceversa, l'andamento tenuto nel Capo IV. rende possibile la trattazione delle quantità ai limiti che col metodo attuale riuscirebbe intralciatissima. Vedemmo colà (num.° 52.) come la quantità ai limiti è fatta delle stesse sei quantità, esprimenti l'effetto delle forze interne, che entrano nelle tre equazioni estensibili a tutta la massa : qui invece verrebbe complicata per l'intervento di quelle altre quantità Δ,Θ,Υ che compajono negli ultimi termini dell'equazione (19) . Convien dire che tutta la parte introdotta da tali termini nelle quantità ai limiti, v'interviene solo apparentemente : nè questo fatto analitico è senza un riscontro nel calcolo delle variazioni. Nelle questioni del calcolo delle variazioni riferibili a formole integrali definite triple, se avendo un'equazione di condizione $L=0$, se ne prendono le equazioni derivate

is uniquely a function of the molecular distance ρ ; and if one considers carefully the [algebraic and differential] form of the coefficients $(1),(2),(3)$..... in the equation (17), and that of the coefficients $(\alpha),(\beta),(\gamma)$..... of the equation (18), and finally that of the six coefficients A,B,C,D,E,F in the equation (19), we will be easily persuaded that in these last six quantities, when introducing the first reference frame relative to the variables p,q,r, will contain such variables p,q,r only because these last appear in the radical ρ (equation (8)), and in the six trinomials $t_1,t_2,....t_6$, having written everywhere the letters p,q,r at the place of the letters x,y,z. Therefore the six quantities A,B,C,D,E,F will enjoy the analytical property which we have discussed many times, which consists in changing when undergoing the substitution of the values (31) sect. 40 in quantities which depends in an equal way on the variables x,y,z, as any trace of the nine angular quantities $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_2$, etc., disappears because such property is verified by the radical ρ , and by each of the six trinomials $t_1,t_2....t_6$. Now in this case one has only to perform the indicated operations and he will be persuaded that the situation is exactly the one which we have described, once the equations among the angular quantities introduced in sect. 33 are recalled. Here is one of those results forecasting which, at the beginning of the present Capo, we stated preliminarily that the two conceived ways for calculating the internal constraints among the molecules were illustrating each other.

Vice versa the procedure used in the Capo IV. makes possible the treatment of the quantities at the boundaries which would be very difficult with the present method. We have seen there (sect. 52) as in the boundary conditions the same six quantities appear which express the effect of internal forces in the three [bulk] equations valid in all points of the body mass: here, however, the boundary conditions would be complicated because of the role played by those other quantities Δ,Θ,Υ which appear in the last terms of the equation (19). It is convenient to say that the whole part introduced by such terms in the limit quantities is playing only an apparent role: and this analytical fact is often encountered in the calculus of variations. In the questions related to the calculus of variations which can be referred to formulas involving definite triple integrals, if one has an equation of condition $L=0$, and considers the differential equations

$$\frac{dL}{da} = 0, \frac{dL}{db} = 0, \frac{dL}{dc} = 0; \frac{d^2L}{da^2} = 0, \text{ec.}$$

di qualunque ordine, e si trattano come fossero tante nuove equazioni di condizione, moltiplicandone le variate per coefficienti indeterminati, introducendo i prodotti nell'equazione del massimo o del minimo sotto il segno integrale, e praticandovi le solite trasformazioni, si viene ad aggiungere (alla quantità che vi sarebbe stata se non avessimo fatto il di più che si è detto) una quantità della stessa natura del trinomio che termina l'equazione (19) . In tal caso si capisce che la comparsa di nuove quantità ai limiti non può essere che apparente, giacchè le equazioni derivate anzidette non hanno significato che non fosse già espresso dalla sola $L = 0$.

Però l'annullarsi di quella quantità ai limiti, non essendo qui un risultato di equazioni di condizione adoperate più che non sia d'uopo, ma una necessaria conseguenza del confronto dei due metodi, potrebbe essere un mezzo che ci mettesse sulla traccia di nuove verità, ci conducesse, per esempio, a investigazioni più intime sulla natura dell'azione molecolare. Mi limito a un semplice cenno : ma a proposito dell'azione molecolare non posso tralasciare di notar cosa che parmi di non lieve momento. Il lettore si sarà accorto che nell'analisi precedente per venire alle conclusioni più importanti, cioè alle equazioni che sussistono per tutti i punti della massa, non fanno più bisogno le ipotesi ammesse dai Geometri moderni, e da me stesso nel §.V. della Memoria inserita nel Tomo XXI di questi Atti. Si è detto che l'azione molecolare deve essere sensibile per distanze insensibili, e insensibile per distanze sensibili : ciò sarà forse vero, ma sia quel ch'esser si voglia, si può prescindere, per l'oggetto nostro, da tale supposizione : gli integrali per le variabili s, g, k nelle equazioni (17), (18), (19) possono considerarsi estesi fino ai limiti del corpo, e non solamente per tratti piccolissimi , il che non è senza un certo sforzo.

Terminerò il capitolo immaginandomi un'objezione . Taluno potrebbe dirmi ; avete qui calcolate le azioni interne fra

$$\frac{dL}{da} = 0, \frac{dL}{db} = 0, \frac{dL}{dc} = 0; \frac{d^2L}{da^2} = 0, \text{etc.}$$

of all orders, and if he treats them as if they were many new equations of conditions, multiplying their variations times undetermined coefficients and introducing the obtained products in the equations for maximum or minimum under the integral sign and operating the usual transformations he will add (to the quantity which would have been left without doing the further operations which we have said) a quantity of the same nature of the trinomial which is at the end of the equation (19). In such a case one understands that the novelty of the appearance of quantities at the boundaries can be only aparent, because the aforesaid differentiated equations do not have any new meaning which was not already expresses by the equation $L = 0$ alone.

However, the requirement that the said boundary quantity must vanish, as here we are not dealing with a result concerning equations of conditions, which cannot be used more than really necessary, but simply with a necessary consequence of the comparison of the two presented methods, [that requirement] could be a tool which can lead us to the discovery of new truths, which could lead us, for instance, to more detailed investigations about the nature of molecular interactions. I limit myself to a simple hint: but concerning the molecular action I cannot avoid to remark something which seems to me to be not irrelevant. The reader will have discovered that in the preceding analysis to come to the most important conclusions, that is to the equations which hold for all points of the mass, it was not needed to use the hypotheses accepted by modern Geometers, and by myself in the §.V in the Memoir which was published in the Tome XXI of these Proceedings. It was said that the molecular action must be appreciable at distances which cannot be sensed and not appreciable for distances which can be sensed: this statement may be true, but whatever it will be, one can ignore, in our discussion, such a hypothesis: the integrals with respect to the variables s, g, k in the equations (17), (18), (19) can be regarded to be extended up at the boundaries of the body, and not only for very small distances, what is done with some effort.

I will conclude the chapter by imagining an objection. Somebody could say that: "you have here calculated the internal actions between

molecola e molecola, e sta bene : ma perchè non avete fatto lo stesso anche nel Capo IV. dove lasciaste fuori tutta la seconda parte dell'equazione generale (1) num.° 16 ? quella ommissione può toglier fede alle deduzioni ottenute con que' procedementi analitici. Rispondo : non ho allora tenuto conto delle azioni interne fra molecola e molecola, perchè vi suppliva la considerazione delle sei equazioni di condizione ivi trattate : il farlo sarebbe stato un doppio. Anche mentre si effettua il moto de' corpi rigidi hanno certamente luogo azioni fra molecole e molecole, eppure ognuno che conosca lo spirito della Meccanica analitica , si sarà persuaso che tutte vennero contemplate nelle sei equazioni (8) del num.° 34. estensibili a tutti i punti : anzi se potea nascergli dubbio, era che si fosse fatto di troppo collo stabilire tali equazioni in numero di sei, di modo che ci furono necessarie le considerazioni poste al numero 39.

Lo stesso deve dirsi nel caso generale delle equazioni di condizione (14) del num.° 47., anch'esse sussistenti per tutti i punti della massa : il contemplarle e calcolarle equivaleva al valutare tutte le forze interne, quantunque non sia perspicuo come questo avvenga. Ad alcuni può sotto alcuni riguardi parere più convincente il metodo tenuto in questo Capo, perchè ci permette il farci qualche immagine intorno al modo d'agire delle forze molecolari : eppure io reputo che i meglio pensanti daranno la preferenza al metodo del Capo IV., metodo diretto e più potente, perchè appoggiato a quel principio geometrico della posizione arbitraria degli assi rimpetto al sistema, che ci servirà anche nel Capo seguente, e che contiene la ragione di tante verità meccaniche . Vedo altresì possibile seguendo il filo de' ragionamenti esposti nel Capo IV. spiegare il vero senso di quel altro principio lagrangiano, che al cominciare dello stesso Capo chiamammo troppo astratto, fissarne l'estensione e il modo sicuro di usarne. Una tale spiegazione però non sarebbe forse di molta utilità, il che asserisco perchè parmi che tutti i vantaggi ai quali mirava Lagrange col mettere quel principio, si ottengano più direttamente e naturalmente tenendo l'andamento descritto nel medesimo Capo IV.

one molecule and another molecule, and we can agree about this point: but why you have not done the same also in the Capo IV, where you left out all the second part of the general equation (1) sect. 16? Such omission can nullify all the deductions obtained with those analytical procedures". I answer as follows: "I have not taken into account then all the internal actions between pairs of molecules because at their place I considered the six equations of condition which were treated there: indeed considering also said actions would have meant to include their effects two times. Also when one considers the motion of rigid bodies the action between each pair of molecules is effective, but everybody who knows the spirit of Analytical Mechanics will be persuaded that all of these actions were accounted for by the six equations (8) in sect. 34 which are valid for all physical points: on the contrary if one doubt could be raised it could concern the fact that the six equations of conditions were redundant, and for this reason the considerations in section 39 became necessary.

The same has to be said in the general case of the equations of conditions (14) in sect. 47, which also hold for all points of the mass: the only fact of considering and calculating them is equivalent to account for all internal forces, although it is not explicitly detailed how this occurs. To somebody it could seem -in some aspects- more persuasive the method used in this Capo, as it allows us to have an explanation about the way in which the molecular actions are acting: however I believe that those who think in the best way will prefer the method presented in the Capo IV, which is a method more direct and more powerful, because it is based on that geometrical principle which assumes the indifference of the choice of the reference frames with respect to the system, principle which we will need also in the next Capo, and which contains the reason of so many mechanical truths. Moreover I see that it is possible -by following the flow of reasonings expounded in the Capo IV- to explain the true meaning of that other lagrangian principle, which at the beginning of the same Capo we said to be too abstract, and to firmly establish its extension and the effective way of using it. Aforementioned explication, however, would not be maybe of great utility, and I state this because I believe that all advantages to which Lagrange was aiming by postulating that principle could be obtained more directly and naturally by using the procedure described in the same Capo IV:"

CAPO VII.

Del moto e dell'equilibrio di un corpo qualunque, ridotto ad essere un sistema lineare o superficiale.

Fu rimproverato in particolar modo ai metodi della M.A. di Lagrange di essere insufficienti per varie questioni che riguardano curve o superficie elastiche. Entro io quindi a trattare del moto e dell'equilibrio de' sistemi lineari e superficiali, toccandone almeno le generalità, con tanto più di gusto in quanto farò vedere che lungi dal venir meno que' metodi nel presente caso, spiegano essi qui forse meglio che altrove tutta la loro ampiezza e magnificenza. Sia pure che le soluzioni date nella M.A. di alcuni di sì fatti problemi non riescano abbastanza generali per comprenderne altri contemplati di poi : ripeterò quel che dissi altrove: Lagrange non potea far tutto; egli per altro ci diede in mano metodi che, a saperli ben intendere ed applicare, valgono in questioni di questo genere per rispondere alle già fatte domande, e per prevenir le future. Anzi non solo è possibile con tali metodi affrontare nel caso presente qualunque ricerca, ma lo è in due diverse maniere, in corrispondenza con quanto sponemmo pei sistemi a tre dimensioni nei Capi IV. e VI. Delle due maniere mi atterrò io qui alla prima, a quella cioè che riduce ad equazioni di condizione l'espressione dei vincoli interni fra le molecole : e per l'altra mi limiterò ad assicurare il lettore di averla seguita fino ad un certo punto, e di aver trovato una perfetta corrispondenza nei risultamenti. Se di questa qui non riporto l'analisi, ciò faccio per due ragioni : la prima per non passare ogni segno di discrezione in servirmi dello spazio concessomi nel volume sociale : la seconda perchè, dopo aver visto l'andamento tenuto nel Capo precedente, lo studioso potrà non difficilmente fabbricarsi da se una tale analisi, la quale riesce meno complicata della riferita nel luogo citato.

CAPO VII.

Of motion and equilibrium of a body whatsoever, reduced to be a linear or superficial system.

The methods of M.A. by Lagrange ware particularly criticized for being insufficient to various issues concerning elastic curves or surfaces. So I start treating the motion and balance of linear and superficial systems, touching at least the generalities, with so much more enjoyment as I will show that, far from failing those methods in this case, they explain here perhaps more than anywhere else the whole their magnitude and magnificence. Although the solutions given in M.A. of some problems of this kind fail to be general enough to understand other ones covered later: I will repeat what I said elsewhere: Lagrange could not do everything; he, moreover, gave us methods that, well knowing how to understand and apply, apply in matters of this kind to answer questions which have already been asked, and to prevent the future ones. Indeed, not only we can deal with any research in the present case by these methods, but it is in two different ways, in correspondence with what we expounded for systems in three dimensions in Capo IV and VI. Here I will limit myself to the first of two ways, namely, i.e. to that which reduces to equations of condition the expression of internal constraints between the molecules: and for the other I will ensure the reader to have followed up it to a certain point, and to have found a perfect match in the results. If I do not report here the analysis of this, I do that for two reasons: the first, not to push the edge of discretion in using the space that I was given in [this] volume [published by the Società italiana delle Scienze residente in Modena]: the second because, after seeing the performance held in the precedent Capo, the scholar will not be hard to construct by himself such an analysis, which can be less complicated than that reported in the cited place.

77. Dissi di avere scelto per trattare le presenti questioni quella maniera che riduce tutto al maneggio di equazioni di condizione come nel Capo IV. Ragione della preferenza fu il procurarmi due nuove occasioni per mettere in evidenza la fecondità di quel principio di cui già vedemmo varie applicazioni, e che consiste nello scrivere analiticamente l'arbitrio in cui siamo relativamente alla collocazione degli assi a cui riferire il sistema. Esso ci condusse nel Capo IV. alle equazioni generali : da esso (come accennammo al num.° 60.) dipende la vera spiegazione del principio delle velocità virtuali, e di quelli della conservazione del moto del centro di gravità, e delle aree : per esso (come si è notato sul fine del num.° 66.) si potrebbe adattare l'analisi data da Lagrange (il che adesso non fa più bisogno) anche al moto de' fluidi elastici ; ora il medesimo ci fornirà le equazioni di condizione che si verificano per ogni punto nei sistemi lineari e superficiali.

È cosa degna di molta considerazione quel verificarsi delle equazioni (14) num.° 47. per ogni sistema a tre dimensioni costante o mutabile, in equilibrio o in moto : notammo come esse vengano dall'aver collocato tre assi ortogonali rimpetto a tre altri, facendo sparire le quantità angolari dalle equazioni che ne esprimono le relazioni, e riducendole ad equazioni fra derivate parziali che per la loro generalità equivalgono esse sole a tutte le equazioni finite senza numero che si otterrebbero variando i valori di quelle quantità angolari. Ebbene : lo stesso può farsi anche pei sistemi lineari e superficiali : si possono trovare a riscontro delle equazioni (14) num.° 47. equazioni cui debbano sempre soddisfare le derivate delle variabili esprimenti le coordinate di qualunque curva o superficie, mobile, flessibile, contrattile, ec.: e ciò unicamente in virtù dell'arbitrio nella collocazione degli assi rimpetto al sistema, arbitrio cui si dà per tal modo un'espressione analitica. Tali equazioni sono le equazioni di condizione le quali, quando le curve o superficie si considerano fatte di molecole, esprimono i vincoli interni fra queste, e danno presa ai metodi della Meccanica analitica : interessa trovarle.

77. I said to have chosen for treating these issues that manner that reduces everything to the handling of equations of condition as in Capo IV. The reason for the preference was to procure two new opportunities to highlight the fruitfulness of that principle of which we have already seen various applications, and that is to write analytically the arbitrariness that we have as regards the location of the axes in which to report the system. It led us to the general equations in Capo IV: the true explanation of the principle of virtual velocities depends upon it (as we mentioned at sect. 60), as well as [the true explanation] of those [principles] of the conservation of the motion of the center of gravity, and of the areas: by virtue of this principle (as it was noted at the end of sect. 66) the analysis given by Lagrange (that now no longer needs) could be adapted also to the motion of the elastic fluids; and now the same [principle] will provide us with the equations of condition that occur for each point in linear and superficial systems.

It is well worthy of much consideration the occurrence of the equations (14) sect. 47 for each system in three dimensions constant or changeable, in equilibrium or in motion: we noticed how they come out from having placed three orthogonal axes with respect to three others, getting rid of the angular quantities from the equations that express their relationships, and reducing them to equations between partial derivatives which alone, for their generality, are equivalent to all the finite equations without number that would be obtained by varying the values of those angular quantities. Well, the same can also be made for linear and superficial systems: equations which must always meet the derivatives of the variables expressing the coordinates of any curve or surface, movable, flexible, contractile, etc. can be found reflected in the equations (14) sect. 47: and that only by virtue of the arbitrariness in the positioning of the axes with respect to the system, arbitrariness to which an analytical expression is given in such a way. These equations are the equations of condition which, when the curves or surfaces are considered made of molecules, express the internal constraints among them, and are adapted to the [application of] methods of analytical Mechanics: we are interested in finding them.

78. Sia una curva qualunque riferita a tre assi ortogonali delle p, q, r per mezzo di due equazioni

$$q = \phi(p); \qquad r = \psi(p). \tag{1}$$

Nel caso di curve fatte di molecole conviene, come si è detto nel Capo I. num.° 11. riguardare le p, q, r siccome funzioni di una variabile semplice a relativa allo stato precedente, ed anche del tempo t

$$p = p\,(a,t)\,; \qquad q = q\,(a,t)\,; \qquad r = r\,(a,t)\,; \tag{2}$$

allora le equazioni (1) vogliono essere intese come le due che risultano dall'eliminazione della a fra queste tre, talchè quelle (1) possono contenere anche il t esplicito alla p, e confuso colle costanti.

Riferiamo ora la stessa curva ad altri tre assi delle x, y, z comunque posti rimpetto ai primi : avremo fra le une e le altre coordinate le equazioni (1) del num.° 33., che qui giova replicare

$$\begin{aligned} x &= f + \alpha_1\ p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ y &= g + \alpha_2\ p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\ z &= h + \alpha_3\ p + \beta_3 q + \gamma_3 r. \end{aligned} \tag{3}$$

Le dodici quantità f, g, h, α_1, ec. restano costanti passando da uno ad altro punto del sistema, cosicchè anche le x, y, z si potranno considerare direttamente funzioni dell'unica variabile semplice p. Deriviamo pertanto le riferite equazioni per la p, e indicando tali derivate con apici, avremo

$$\begin{aligned} &x' = \alpha_1\ + \beta_1 q' + \gamma_1 r'; \quad y' = \alpha_2\ + \beta_2 q' + \gamma_2 r'\ ; \quad z' = \alpha_3\ + \beta_3 q' + \gamma_3 r' \\ &x'' = \beta_1 q'' + \gamma_1 r''; \quad y'' = \beta_2 q'' + \gamma_2 r''; \quad z'' = \beta_3 q'' + \gamma_3 r'' \\ &x''' = \beta_1 q''' + \gamma_1 r'''; \quad y''' = \beta_2 q''' + \gamma_2 r'''\ ; \quad z''' = \beta_3 q''' + \gamma_3 r''' \\ &x^{IV} = \beta_1 q^{IV} + \gamma_1 r^{IV}\ ; \quad y^{IV} = \beta_2 q^{IV} + \gamma_2 r^{IV}\ ; \quad z^{IV} = \beta_3 q^{IV} + \gamma_3 r^{IV} \\ &\text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \end{aligned} \tag{4}$$

78. Let any curve be referred to three orthogonal axes of the p, q, r by means of two equations

$$q = \phi(p); \qquad r = \psi(p). \tag{1}$$

In the case of curves made of molecules we should consider, as mentioned in the Capo I sect. 11, the p, q, r as functions as a simple variable a relative to the precedent state, and also of the time t

$$p = p\,(a,t)\,; \qquad q = q\,(a,t)\,; \qquad r = r\,(a,t)\,; \tag{2}$$

then the equations (1) want to be understood as the two that result from the elimination of the a among these three, so that those (1) may also contain t explicit in the p, and confused with the constants.

Now let us report the same curve to other three axes of the x, y, z however placed with respect to the first [axes]: we will have between the one and the other coordinates the equations (1) of sect. 33, which it is useful to replicate

$$\begin{aligned} x &= f + \alpha_1\ p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ y &= g + \alpha_2\ p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\ z &= h + \alpha_3\ p + \beta_3 q + \gamma_3 r. \end{aligned} \tag{3}$$

The twelve quantities f, g, h, α_1, etc. remain constant passing from one to another point of the system, so that also the x, y, z may be considered directly functions of the unique simple variable p. Therefore, let us derive the above equations with respect to the p, by indicating those derivatives by means of quotes, we will have

$$\begin{aligned} &x' = \alpha_1\ + \beta_1 q' + \gamma_1 r'; \quad y' = \alpha_2\ + \beta_2 q' + \gamma_2 r'\ ; \quad z' = \alpha_3\ + \beta_3 q' + \gamma_3 r' \\ &x'' = \beta_1 q'' + \gamma_1 r''; \quad y'' = \beta_2 q'' + \gamma_2 r''; \quad z'' = \beta_3 q'' + \gamma_3 r'' \\ &x''' = \beta_1 q''' + \gamma_1 r'''; \quad y''' = \beta_2 q''' + \gamma_2 r'''\ ; \quad z''' = \beta_3 q''' + \gamma_3 r''' \\ &x^{IV} = \beta_1 q^{IV} + \gamma_1 r^{IV}\ ; \quad y^{IV} = \beta_2 q^{IV} + \gamma_2 r^{IV}\ ; \quad z^{IV} = \beta_3 q^{IV} + \gamma_3 r^{IV} \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned} \tag{4}$$

Poniamo altresì per comodo le seguenti denominazioni

$$k = x'^2 + y'^2 + z'^2; \quad l = x''^2 + y''^2 + z''^2 \qquad (5)$$
$$m = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2; \quad n = x^{IV\,2} + y^{IV\,2} + z^{IV\,2}; \text{ec.}$$

Quadrando tutte le equazioni (4) e sommandole a tre a tre come stanno nelle linee orizzontali, troveremo (rammentate le equazioni del num.° 33. fra le quantità angolari, e le precedenti denominazioni (5))

$$k = 1 + q'^2 + r'^2; \quad l = q''^2 + r''^2 \qquad (6)$$
$$m = q'''^2 + r'''^2; \quad n = q^{IV\,2} + r^{IV\,2}; \text{ec.}$$

Si vede manifestamente il procedere di tali equazioni. Queste non contengono più le quantità angolari, ma però ci presentano ancora le derivate delle q, r relativamente alla p, mentre si vorrebbero equazioni fra le sole derivate delle x, y, z per la p. A conseguire l'intento bisogna combinare le (6) colle loro derivate per rapporto a p che sono

$$k' = 2q'q'' + 2r'r''; \quad l' = 2q''q''' + 2r''r'''; \quad m' = 2q'''q^{IV} + 2r'''r^{IV}; \text{ec.} \qquad (7)$$

$$k'' - 2l = 2q'q''' + 2r'r'''; \qquad l'' - 2m = 2q''q^{IV} + 2r''r^{IV}; \text{ec.} \qquad (8)$$

$$k''' - 3l' = 2q'q^{IV} + 2r'r^{IV}; \text{ec.} \qquad (9)$$

È manifesto che il numero delle derivate che vogliamo eliminare cresce assai meno che non cresca il numero delle equazioni. Così , fermandoci alle derivate terze, abbiamo dalle (6) tre equazioni, cui vanno aggiunte tre altre, cioè le prime due delle (7), e la prima delle (8). Passando alle derivate quarte, si aggiunge una equazione a ciascuno dei gruppi (6), (7), (8), (9) e s'introducono due sole nuove quantità da eliminarsi q^{IV}, r^{IV}. Colle sole equazioni scritte superiormente in numero di dieci è chiaro che potremo eliminare le otto quantità $q', r'; q'', r''; q''', r'''; q^{IV}, r^{IV}$, ed ottenere due equazioni di quelle che desiriamo, fra le k, l, m, n e loro derivate, ossia (equazioni (5)) fra le sole derivate dellex, y, z relativamente a p. Anzi se ne

Let us also assume for convenience the following definitions

$$k = x'^2 + y'^2 + z'^2; \quad l = x''^2 + y''^2 + z''^2 \qquad (5)$$
$$m = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2; \quad n = x^{IV\,2} + y^{IV\,2} + z^{IV\,2}; \text{etc.}$$

Squaring all the equations (4) and adding them three at a time as they are in the horizontal lines, we will find (since the equations of sect. 33 between the angular quantities, and the precedent definitions (5) have been recollected)

$$k = 1 + q'^2 + r'^2; \quad l = q''^2 + r''^2 \qquad (6)$$
$$m = q'''^2 + r'''^2; \quad n = q^{IV\,2} + r^{IV\,2}; \text{etc.}$$

One can see clearly the progress of such equations. These do not contain anymore the angular quantities, however they still show us the derivatives of the q, r with respect to the p, while one would like equations only between the derivatives of x, y, z with respect to the p. To achieve this aim, the (6) must be combined with their derivatives with respect to p

$$k' = 2q'q'' + 2r'r''; \quad l' = 2q''q''' + 2r''r'''; \quad m' = 2q'''q^{IV} + 2r'''r^{IV}; \text{etc.} \qquad (7)$$

$$k'' - 2l = 2q'q''' + 2r'r'''; \qquad l'' - 2m = 2q''q^{IV} + 2r''r^{IV}; \text{etc.} \qquad (8)$$

$$k''' - 3l' = 2q'q^{IV} + 2r'r^{IV}; \text{etc.} \qquad (9)$$

It is manifest that the number of derivatives that we want to eliminate grows much less than the number of equations does not grow. So, stopping us at the third derivatives, we have from the (6) three equations, which other three must be added to, that is, the first two of the (7), and the first of the (8). Turning to the fourth derivatives, one equation is added to each one of the groups (6), (7), (8), (9) and only two new quantities q^{IV}, r^{IV} are introduced to be eliminated. Only with the equations written above, ten in number, it is clear that we can eliminate the eight quantities $q', r'; q'', r''; q''', r'''; q^{IV}, r^{IV}$, and get two equations of those that we desire, between the k, l, m, n and their derivatives, namely (equations (5)) only between the derivatives of x, y, z with respect to p. Indeed,

può ottenere una non oltrepassando le equazioni che contengono le derivate terze q'''', r'''': ecco in qual maniera. Si prendano la seconda delle (7) e la prima delle (8) e se ne cavino i valori delle q'''', r'''': troveremo

$$q'''' = \frac{r''\left(k'' - 2l\right) - r'l'}{2\left(q'r'' - q''r'\right)}; \qquad r'''' = \frac{q'l' - q''\left(k'' - 2l\right)}{2\left(q'r'' - q''r'\right)}.$$

Quadriamo queste due equazioni e sommiamole : richiamando le equazioni (6), e la prima delle (7) per le opportune sostituzioni, otterremo

$$4m\left(q'r'' - q''r'\right)^2 = l\left(k'' - 2l\right)^2 - k'l'\left(k'' - 2l\right) + (k-1)\,l'^2.$$

Ora sommiamo questa colla seguente

$$4m\left(q'r'' - q''r'\right)^2 = mk'^2$$

che è la prima delle (7) quadrata e moltiplicata per m ; osservando essere

$$\left(q'r'' - q''r'\right)^2 + \left(q'q'' + r'r''\right)^2 = \left(q'^2 + r'^2\right)\left(q''^2 + r''^2\right)$$

giungiamo all'equazione desiderata che è

$$4m\,(k-1)\,l = l\left(k'' - 2l\right)^2 - k'l'\left(k'' - 2l\right) + (k-1)\,l'^2 + mk'^2. \tag{10}$$

Qui si può, sostituiti i valori (5), cercar di dare all'equazione una forma elegante, la quale però non gioverebbe al nostro fine, come apparirà dal progresso.

Ecco una equazione fra le sole derivate dellex, y, z, la quale (cosa notabile) si verifica per qualunque curva, e ne vedemmo più sopra la ragione. Il più è, che di tali equazioni se ne possono trovare altre simili quante se ne vogliono seguendo l'indicato processo di eliminazione. La prima di quelle che risultano dalla eliminazione delle q^{IV}, r^{IV} è

$$\begin{aligned} 4n\,(k-1)\,l = {} & l\left(k''' - 3l'\right)^2 + (k-1)\left(l'' - 2m\right)^2 \\ & - k'\left(k''' - 3l'\right)\left(l'' - 2m\right) + k'^2 n. \end{aligned} \tag{11}$$

Non mi fermo a descrivere l'operazione, e nemmeno a dare le equazioni che seguono, perchè, come fra poco si farà chiaro,

one of them can be obtained not going beyond the equations that contain the third derivatives q'''', r'''': here in which manner. Let us consider the second of the (7) and the first of the (8) and let us obtain the values of q'''', r'''': we will find

$$q'''' = \frac{r''\left(k'' - 2l\right) - r'l'}{2\left(q'r'' - q''r'\right)}; \qquad r'''' = \frac{q'l' - q''\left(k'' - 2l\right)}{2\left(q'r'' - q''r'\right)}.$$

Let us square and add these two equations: recalling the equations (6), and the first of the (7) for the appropriate substitutions, we will get

$$4m\left(q'r'' - q''r'\right)^2 = l\left(k'' - 2l\right)^2 - k'l'\left(k'' - 2l\right) + (k-1)\,l'^2.$$

Now let us sum this one with the following

$$4m\left(q'r'' - q''r'\right)^2 = mk'^2$$

which is the first of the (7) which has been squared and multiplied by m: by noting that the following equation holds

$$\left(q'r'' - q''r'\right)^2 + \left(q'q'' + r'r''\right)^2 = \left(q'^2 + r'^2\right)\left(q''^2 + r''^2\right)$$

we get the desired equation, that is

$$4m\,(k-1)\,l = l\left(k'' - 2l\right)^2 - k'l'\left(k'' - 2l\right) + (k-1)\,l'^2 + mk'^2. \tag{10}$$

Here one can, since the values (5) have been substituted, try to give an elegant form to the equation, which, however, would not be beneficial to our goal, as it will appear from the following.

Here is an equation only between the derivatives of the x, y, z, which (notable thing) is verified for any curve, and we saw above the reason of it. The most important result is that, of these equations, one can find, in their number, other similar [equations] as many as one wants, following the indicated process of elimination. The first of those resulting from the elimination of the q^{IV}, r^{IV} is

$$\begin{aligned} 4n\,(k-1)\,l = {} & l\left(k''' - 3l'\right)^2 + (k-1)\left(l'' - 2m\right)^2 \\ & - k'\left(k''' - 3l'\right)\left(l'' - 2m\right) + k'^2 n. \end{aligned} \tag{11}$$

I do not stop to describe the operation, and either to give the following equations, because, as it will be clear shortly,

a noi non importa molto il conoscere l'attualità di tali equazioni, ci basta sapere la loro esistenza. Sono poi di parere, visto quello che ha detto Lagrange per le curve rigide (M.A. Tom. I. pag.161.), che dopo un certo numero tali equazioni non saranno più che una combinazione delle precedenti, il che non è necessario chiarire. Sì fatte equazioni (10), (11) e seguenti stanno a riscontro delle (14) num.° 47. pei sistemi a tre dimensioni.

79. Presentemente si richiami il già detto al num° 28. pei sistemi lineari, e si capirà che, analogamente alla equazione (1) num.° 44., potremo esprimere per

$$\int da \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + \int da \cdot G + \Omega = 0 \tag{12}$$

l'equazione generale meccanica in relazione con tali sistemi, intendendo significato dall'integrale $\int da \cdot G$ il complesso dei termini portati dalle equazioni di condizione a noi incognite nelle quali fossero espressi i vincoli esistenti fra le molecole. Conviene nella equazione precedente trasformare gl'integrali in modo che siano presi per la p di cui le x, y, z si considerano funzioni prima che per la a.

Dalla equazione (14) num.° 11. per la quale ottenemmo l'espressione della densità in tali sistemi, caviamo

$$\Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{da} = 1. \tag{13}$$

Riflettiamo essere $\frac{dx}{da} = \frac{dx}{dp}\frac{dp}{da}$, e ponendo per abbreviare

$$V = \Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dp} \tag{14}$$

la precedente equazione si cambierà nella

$$\frac{dp}{da} V = 1. \tag{15}$$

Ora se sotto i due integrali dell'equazione (12) introduciamo il fattore $\frac{dp}{da} V$, non produciamo alterazione, essendo tal fattore, come provammo, eguale all'unità. Allora quegli integrali ci appajono subito trasformabili in altri per p, e passiamo ad avere l'equazione generale espressa come segue

we do not care very much about the relevance of these equations, we need to know their existence. I than think, since it has been seen what Lagrange said about the rigid curves (M. A. Tome I p. 161), that, after a certain number, these equations will not be more than a combination of the above [equations], which does not need to be clarified. Such equations (10), (11) and following should be compared with (14) sect. 47 for the systems in three dimensions.

79. At present let us recall what has already been said at sect. 28 for the linear systems, and it will be clear that, similarly to the equation (14) sect. 44, we will be able to express for

$$\int da \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{etc.} \right\} + \int da \cdot G + \Omega = 0 \tag{12}$$

the general mechanical equation in connection with such systems, meaning that the integral $\int da \cdot G$ indicates the set of the terms taken from the equations of condition unknown to us in which the constraints existing between the molecules were expressed. It is convenient to transform the integrals in the above equation so that they are calculated in terms of the p, of which the x, y, z are considered functions, rather than in terms of the a.

From the equation (14) sect. 11, for which we obtained the expression of the density in these systems, we obtain

$$\Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{da} = 1. \tag{13}$$

Let us acknowledge that it is $\frac{dx}{da} = \frac{dx}{dp}\frac{dp}{da}$, and setting to shorten

$$V = \Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dp} \tag{14}$$

the above equation will change to the

$$\frac{dp}{da} V = 1. \tag{15}$$

Now if we introduce the factor $\frac{dp}{da} V$ under the two integrals in equation (12), we do not produce alteration, being such a factor, as we tried, equal to unit. Then those integrals will appear to us immediately convertible into other integrated with respect to p, and let us have the general equation expressed as follows

$$\int dp \cdot V \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + \int dp \cdot VG + \Omega = 0; \tag{16}$$

dove debbono intendersi tutte le quantità ridotte funzioni di p, soppressa per ora la considerazione dell'ulteriore composizione della p in a. Avendo l'equazione generale sotto l'esposta forma, il secondo termine di essa, che ci era incognito perchè non conoscevamo le equazioni di condizione espresse fra le x, y, z e la a, adesso ci diventa noto, sapendo dal numero precedente (equazioni (10), (11), ec.) quali sono le equazioni di condizione espresse fra lex, y, z e la p. Non abbiamo pertanto a far altro che sostituire sotto il detto secondo segno integrale i primi membri delle variate delle equazioni (10), (11), ec. ridotte a zero, moltiplicati per coefficienti indeterminati : studiamo tali quantità. Se poniamo mente a quella introdotta dalla prima equazione (10), essa è della forma

$$(1)\,\delta k + (2)\,\delta k' + (3)\,\delta k'' + (4)\,\delta l + (5)\,\delta l' + (6)\,\delta m, \tag{17}$$

cioè lineare per rapporto alle variate $\delta k, \delta k', \delta k'', \delta l$, ec.; dicasi lo stesso delle quantità introdotte dalle variate della equazione (11) e seguenti. La somma di tali quantità, per quante si prendano equazioni di condizione, è ancora una quantità della stessa forma (17), accrescendovi le variate delle derivate, cioè aggiungendovi termini contenenti linearmente le $\delta k''', \delta k^{IV}, ...\delta l''$, ec. Ecco poi un'osservazione che abbrevia le operazioni. In così fatta somma si possono ommettere tutti i termini contenenti le variate delle derivate $k', k'', k'''...l', l'', ...m'$, ec.: e di vero tali termini , come i seguenti dell'espressione (17), $(2)\,\delta k', (3)\,\delta k'', (5)\,\delta l'$, attese le note trasformazioni per le quali diventano

$$\begin{aligned} (2)\,\delta k' &= -(2)'\,\delta k + [(2)\,\delta k]' \\ (3)\,\delta k'' &= (3)''\,\delta k - \left[(3)\,\delta k - (3)\,\delta k'\right]' \\ (5)\,\delta l' &= -(5)'\,\delta l + [(5)\,\delta l]'\,; \text{ec.} \end{aligned} \tag{18}$$

si provano equivalenti a binomj dove primamente ricompajono le variate $\delta k, \delta l$, ec. non affette da derivazioni e già esistenti

$$\int dp \cdot V \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{etc.} \right\} + \int dp \cdot VG + \Omega = 0; \tag{16}$$

where all the quantities are to be understood as functions of p, since now the consideration of the further composition of the p in a have been suppressed. Having the general equation under the exposed form, the second term of it, that was unknown to us because we did not know the equations of condition expressed between the x, y, z and the a, now becomes known to us, knowing from the precedent section (equations (10), (11), etc.) which are the equations of condition expressed between the x, y, z and the p. What we must do, therefore, is to substitute under the said second integral sign the first members of the variations of the equations (10), (11), etc. equated to zero, multiplied by indeterminate coefficients: let us study such quantities. If we put our mind to the one introduced by the first equation (10), it is of the form

$$(1)\,\delta k + (2)\,\delta k' + (3)\,\delta k'' + (4)\,\delta l + (5)\,\delta l' + (6)\,\delta m, \tag{17}$$

i.e., linear with respect to the variations $\delta k, \delta k', \delta k'', \delta l$, etc.; the same can be said about the quantities introduced by the equation (11) and following. The sum of such quantities, far how many equations of the condition are considered, is still a quantity of the same form (17), adding to it the variations of the derivatives, i.e. adding to it terms linearly containing the $\delta k''', \delta k^{IV}, ...\delta l''$, etc. Here then an observation that shortens the operation. In this sum all the terms containing the variations of the derivatives $k', k'', k''', ..., l', l'', ..., m'$ etc. can be omitted: indeed such terms, as the following ones of the expression (17), $(2)\,\delta k', (3)\,\delta k'', (5)\,\delta l'$, since the known transformation are verified by means of which [those terms] becomes

$$\begin{aligned} (2)\,\delta k' &= -(2)'\,\delta k + [(2)\,\delta k]' \\ (3)\,\delta k'' &= (3)''\,\delta k - \left[(3)\,\delta k - (3)\,\delta k'\right]' \\ (5)\,\delta l' &= -(5)'\,\delta l + [(5)\,\delta l]'\,; \text{etc.} \end{aligned} \tag{18}$$

are proven to be equivalent to binomia where firstly the variations $\delta k, \delta l$, etc. again appear not affected by derivations and already existing in other terms of the quantities (17),

in altri termini della quantità (17), coi quali si compenetrano questi nuovi : ciò che resta forma complessivamente una quantità derivata esatta relativamente alla p, che introdotta sotto il secondo segno integrale dell'equazione (16), passa ai limiti e si fonde sull'ultimo termine Ω di quella equazione. Così si fa palese che termini come i precedenti (18) non vengono ad influire sulle equazioni estensibili a tutti i punti del sistema. L'osservazione si troverà molto simile a quella per la quale nel Capo precedente num.° 75. concludemmo la non influenza degli ultimi termini dell'equazione (19) pel ritrovamento delle tre equazioni che coincidevano colle (26) del num.° 38.

Dopo gli addotti ragionamenti è piano l'inferirne che alla equazione generale (16) pei sistemi lineari può darsi la forma

$$\int dp \cdot V \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\}$$

$$+ \int dp \cdot (\lambda \delta k + \mu \delta l + \nu \delta m + \rho \delta n + \text{ec.}) + \Omega = 0; \qquad (19)$$

dove sotto il secondo segno integrale appariscono le variate delle sole quantità k, l, m, n, ec. equivalenti, per le equazioni (5), a trinomj noti che possono continuarsi a piacere. Tali variate sono moltiplicate per fattori $\lambda, \mu, \nu, \rho....$ che riterremo fra di loro indipendenti, essendo coefficienti raccolti da tante equazioni variate, ciascuna delle quali porta un moltiplicatore indeterminato. Veramente se il numero dei trinomj k, l, m, n, ec. fosse maggiore di quello delle equazioni (10),(11), ec., essendo le indeterminate introdotte dal metodo de' moltiplicatori tante quante le equazioni, alcuno dei coefficienti $\lambda, \mu, \nu, \rho...$ dipenderebbe dagli altri; potranno essi però dirsi fra loro indipendenti fino al numero che eguaglia quello delle equazioni irreducibili le une alle altre.

80. Rimane a sostituire nell'equazione (19) alle quantità k, l, m, n, ec. i loro valori scritti nelle equazioni (5) . Qui conviene primieramente porre attenzione all'equazione

with which these new are merged: what remains [of the previous terms] forms an overall quantity [which is an] exact derivative with respect to the p, which introduced under the second integral sign of the equation (16), passes to the limits [(i.e., it is integrated and then calculated at the extrema)] and merges with the last term Ω of that equation. So it is clear that such terms as the precedent ones (18) do not affect the equations extensible to all points of the system. The observation will be found very similar to that for which we concluded in the precedent Capo sect. 75 that the last terms of the equation (19) do not affect the discovery of the three equations which coincides with the (26) of sect. 38.

After the adduced reasonings it is easy to infer from them that the general equation (16) for the linear systems may be in the form

$$\int dp \cdot V \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right\}$$

$$+ \int dp \cdot (\lambda \delta k + \mu \delta l + \nu \delta m + \rho \delta n + \text{etc.}) + \Omega = 0; \qquad (19)$$

where, under the second integral sign, there appear the variations of the only quantities k, l, m, n, etc. equivalent, for the equations (5), to known trinomials, which can be continued as much as one wants. Such variations are multiplied by the factors $\lambda, \mu, \nu, \rho....$ which we will consider each other independent, being coefficients collected from many varied equations, each of which carries an indeterminate multiplier. Actually, if the number of the trinomials k, l, m, n, etc. were greater than that of the equations (10), (11), etc., being the indeterminate [quantities] introduced by the method of the multipliers as many as the equations, some of the coefficients $\lambda, \mu, \nu, \rho...$ would depend on the others; but they can be said to be independent of one another up to the number that equals that of equations irreducible to each other.

80. It remains to substitute in the equation (19) to the quantities k, l, m, n, etc. their values written in the equations (5). Here one should first pay attention to the equation

$$\begin{aligned}\lambda\delta k+\mu\delta l+\nu\delta m+\rho\delta n+\text{ec.}=\\ 2\lambda(x'\delta x'+y'\delta y'+z'\delta z')\\ +2\mu\left(x''\delta x''+y''\delta y''+z''\delta z''\right)\\ +2\nu\left(x'''\delta x'''+y'''\delta y'''+z'''\delta z'''\right)+\text{ec.};\end{aligned}\tag{20}$$

poi osservare che sui termini componenti il secondo membro si debbono nuovamente operare le solite trasformazioni, giacchè in essi le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ sono affette da derivazioni. Essendo identicamente

$$\begin{aligned}2\lambda x'\delta x' &= -\left(2\lambda x'\right)'\delta x+\left(2\lambda x'\delta x\right)'\\ 2\mu x''\delta x'' &= \left(2\mu x''\right)''\delta x-\left[\left(2\mu x''\right)'\delta x-2\mu x''\delta x'\right]'\\ 2\nu x'''\delta x''' &= -\left(2\nu x'''\right)'''\delta x+\left[\left(2\nu x'''\right)''\delta x-\left(2\nu x''\right)'\delta x'+2\nu x'''\delta x''\right]'\\ &\text{ec.}\qquad\qquad\qquad\text{ec.}\end{aligned}\tag{21}$$

e simili equazioni avendo luogo pei termini che contengono le derivate delle y, z, sarà facile riconoscere quale risulti dopo le trasformazioni la prima parte del secondo membro della (20), cui si dà una forma trinomiale raccogliendo i coefffficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$: la seconda parte costituisce una derivata esatta che, quando viene introdotta sotto il segno integale, produce un nuovo versamento di quantità ai limiti. Riuniti pertanto i due integrali della equazione (19) in un solo, procedendo col solito metodo conseguiremo le tre equazioni

$$\begin{aligned}V\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\frac{dP}{dp}=0\\ V\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\frac{dQ}{dp}=0\\ V\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)-\frac{dR}{dp}=0\end{aligned}\tag{22}$$

essendosi poste per abbreviare

$$\begin{aligned}P=2\lambda x'-\left(2\mu x''\right)'+\left(2\nu x'''\right)''-\text{ec.}\\ Q=2\lambda y'-\left(2\mu y''\right)'+\left(2\nu y'''\right)''-\text{ec.}\\ R=2\lambda z'-\left(2\mu z''\right)'+\left(2\nu z'''\right)''-\text{ec.}\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}\lambda\delta k+\mu\delta l+\nu\delta m+\rho\delta n+\text{etc.}=\\ 2\lambda(x'\delta x'+y'\delta y'+z'\delta z')\\ +2\mu\left(x''\delta x''+y''\delta y''+z''\delta z''\right)\\ +2\nu\left(x'''\delta x'''+y'''\delta y'''+z'''\delta z'''\right)+\text{etc.};\end{aligned}\tag{20}$$

then observe that the usual transformations must again be accomplished on the terms making up the right-hand side, since in them the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ are affected by derivations. Being identically

$$\begin{aligned}2\lambda x'\delta x' &= -\left(2\lambda x'\right)'\delta x+\left(2\lambda x'\delta x\right)'\\ 2\mu x''\delta x'' &= \left(2\mu x''\right)''\delta x-\left[\left(2\mu x''\right)'\delta x-2\mu x''\delta x'\right]'\\ 2\nu x'''\delta x''' &= -\left(2\nu x'''\right)'''\delta x+\left[\left(2\nu x'''\right)''\delta x-\left(2\nu x''\right)'\delta x'+2\nu x'''\delta x''\right]'\\ &\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\text{etc.}\end{aligned}\tag{21}$$

and similar equations taking place for the terms containing the derivatives of the y, z, it will be easy to recognize how the first part of the right-hand side of the (20) results, which is given a trinomial form collecting the total coefficients of the $\delta x, \delta y, \delta z$: the second part is an exact derivative which, when it is introduced under the integral sign, produces a new transfer of quantities to the limits. Therefore, since the two integrals of equation (19) have been gathered into one, proceeding with the usual method we will achieve the three equations

$$\begin{aligned}V\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\frac{dP}{dp}=0\\ V\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\frac{dQ}{dp}=0\\ V\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)-\frac{dR}{dp}=0\end{aligned}\tag{22}$$

having posed to shorten

$$\begin{aligned}P=2\lambda x'-\left(2\mu x''\right)'+\left(2\nu x'''\right)''-\text{etc.}\\ Q=2\lambda y'-\left(2\mu y''\right)'+\left(2\nu y'''\right)''-\text{etc.}\\ R=2\lambda z'-\left(2\mu z''\right)'+\left(2\nu z'''\right)''-\text{etc.}\end{aligned}\tag{23}$$

Dalle equazioni (22) può farsi sparire ogni vestigio apparente della p. Essendo per qualunque funzione L di x che poi è funzione di p,

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{dp}, \tag{24}$$

richiamato per V il suo valore dato dalla equazione (14), si può dividere per $\frac{dx}{dp}$, e le (22) diventano

$$\begin{aligned}
\Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dP}{dx} \\
\Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dQ}{dx} \\
\Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{dR}{dx}
\end{aligned} \tag{25}$$

dove non sono in evidenza se non le variabili x, y, z : ma le P, Q, R hanno i valori (23).

81. Giova mandar via la p anche dai valori (23) delle P, Q, R : giacchè (parlando in generale per tutte le tre sorte di sistemi continui) le coordinate p, q, r, intermedie fra le a, b, c e le x, y, z dei due stati antecedente e reale, fanno bensì un gran giuoco, essendo quelle che si somministrano le equazioni di condizione, ma non vengono opportune quando si vogliono applicare le formole alla risoluzione dei problemi . A tal fine osserviamo che ponendo

$$\epsilon = 2\lambda; \quad \theta = -2\mu'; \quad \tau = 2\upsilon'' - 2\mu; \text{ec.} \tag{26}$$

le (23) si riducono più semplicemente

$$\begin{aligned}
P &= \epsilon x' + \theta x'' + \tau x''' + \text{ec.} \\
Q &= \epsilon y' + \theta y'' + \tau y''' + \text{ec.} \\
R &= \epsilon z' + \theta z'' + \tau z''' + \text{ec.}
\end{aligned} \tag{27}$$

Indichiamo per pochi momenti con apici al piede le derivate per la a dello stato antecedente : avremo, fatta $\omega = \frac{dp}{da}$,

Any apparent trace of the p can be eliminated from the equations (22). Being for any function L of x that is in turn a function of p,

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{dp}, \tag{24}$$

recalled for V its value given by the equation (14), it $[V]$ can be divided by $\frac{dx}{dp}$, and the (22) become

$$\begin{aligned}
\Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dP}{dx} \\
\Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dQ}{dx} \\
\Gamma\sqrt{\imath + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{dR}{dx}
\end{aligned} \tag{25}$$

where only the variables x, y, z are highlighted; but the P, Q, R have the values (23).

81. The p should be removed also from the values (23) of the P, Q, R: since (generally speaking for all three types of continuous systems) the coordinates p, q, r, intermediate between the a, b, c and x, y, z of the two antecedent and actual states, on one hand they are very useful, being those that give us the equations of condition, but on the other hand [they] are not suitable when one wants to apply the formulas to the resolutions of problems. To this end, we observe that by placing

$$\epsilon = 2\lambda; \quad \theta = -2\mu'; \quad \tau = 2\upsilon'' - 2\mu; \text{etc.} \tag{26}$$

the (23) reduce in a simpler form

$$\begin{aligned}
P &= \epsilon x' + \theta x'' + \tau x''' + \text{etc.} \\
Q &= \epsilon y' + \theta y'' + \tau y''' + \text{etc.} \\
R &= \epsilon z' + \theta z'' + \tau z''' + \text{etc.}
\end{aligned} \tag{27}$$

Let us indicate for a few moments with subscripts the derivatives with respect to the a of the antecedent state: we will have, by posing $\omega = \frac{dp}{da}$,

$$x' = \frac{x_{,}}{\omega}; \quad x'' = \frac{\omega x_{,,} - \omega_{,} x_{,}}{\omega^{3}}$$
$$x''' = \frac{\omega^{2} x_{,,,} - 3\omega\omega_{,} x_{,,} + \left(3\omega_{,}^{2} - \omega\omega_{,,}\right) x_{,}}{\omega^{3}}; \text{ec.}$$

e analoghi saranno i valori per le $y', y'', y''', ...z', z'', z''', ...$ di modo che adottando quest'altre denominazioni

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega}\epsilon - \frac{\omega_{,}}{\omega^{3}}\vartheta + \frac{3\omega_{,}^{2} - \omega\omega_{,,}}{\omega^{5}}\tau - \text{ec.} \\ B &= \frac{1}{\omega^{2}}\vartheta - \frac{3\omega_{,}}{\omega^{4}}\tau + \text{ec.} \\ C &= \frac{1}{\omega^{3}}\tau - \text{ec.} \\ &\text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{aligned} \tag{28}$$

le (27) assumeranno le forme

$$\begin{aligned} P &= A\frac{dx}{da} + B\frac{d^{2}x}{da^{2}} + C\frac{d^{3}x}{da^{3}} + \text{ec.} \\ Q &= A\frac{dy}{da} + B\frac{d^{2}y}{da^{2}} + C\frac{d^{3}y}{da^{3}} + \text{ec.} \\ R &= A\frac{dz}{da} + B\frac{d^{2}z}{da^{2}} + C\frac{d^{3}z}{da^{3}} + \text{ec.} \end{aligned} \tag{29}$$

dove per significare le derivate rispetto alla a ho rimessa, invece degli apici al piede, la notazione ordinaria. Si noti che i coefficienti A, B, C, ec. i quali hanno assorbito tutto quanto restava di contenente ancora la p nelle sue derivate per la a, possono essere direttamente considerati siccome coefficienti indeterminati : essi infatti sono tanti quante le ϵ, ϑ, τ, ec., e queste tante quante le λ, μ, υ, ec.

Se poi vogliamo che nelle equazioni generali compajano soltanto derivate prese per la a dello stato antecedente, e pel tempo (il che appunto si richiede per trattare alcune questioni) conseguiremo facilmente l'intento moltiplicando le (25) per $\frac{dx}{da}$. Osservisi allora (equazione (13)) che il coefficiente comune ai primi membri eguaglia l'unità : si ponga altresì mente che N essendo una funzione qualunque della x funzione di a, è sempre $\frac{dN}{da} = \frac{dN}{dx}\frac{dx}{da}$; e quelle equazioni ci diventeranno

$$x' = \frac{x_{,}}{\omega}; \quad x'' = \frac{\omega x_{,,} - \omega_{,} x_{,}}{\omega^{3}}$$
$$x''' = \frac{\omega^{2} x_{,,,} - 3\omega\omega_{,} x_{,,} + \left(3\omega_{,}^{2} - \omega\omega_{,,}\right) x_{,}}{\omega^{3}}; \text{etc.}$$

and the values for the $y', y'', y''', ...z', z'', z''', ...$ will be analogous so that, by adopting these other definitions

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega}\epsilon - \frac{\omega_{,}}{\omega^{3}}\vartheta + \frac{3\omega_{,}^{2} - \omega\omega_{,,}}{\omega^{5}}\tau - \text{etc.} \\ B &= \frac{1}{\omega^{2}}\vartheta - \frac{3\omega_{,}}{\omega^{4}}\tau + \text{etc.} \\ C &= \frac{1}{\omega^{3}}\tau - \text{etc.} \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned} \tag{28}$$

the (27) will take the forms

$$\begin{aligned} P &= A\frac{dx}{da} + B\frac{d^{2}x}{da^{2}} + C\frac{d^{3}x}{da^{3}} + \text{etc.} \\ Q &= A\frac{dy}{da} + B\frac{d^{2}y}{da^{2}} + C\frac{d^{3}y}{da^{3}} + \text{etc.} \\ R &= A\frac{dz}{da} + B\frac{d^{2}z}{da^{2}} + C\frac{d^{3}z}{da^{3}} + \text{etc.} \end{aligned} \tag{29}$$

where, to signify the derivatives with respect to the a, I have again used, instead of subscripts, the ordinary notation. Note that the coefficients A, B, C, etc., which have absorbed all that remained of still containing the p in the form of its derivatives with respect to the a, can be directly considered as indeterminate coefficients: in fact they are as many as the ϵ, ϑ, τ, etc., and these are as many as the λ, μ, υ, etc.

If then we want that in the general equations appear only derivatives with respect to the a of the antecedent state, and for the time being (which in fact is required to deal with some issues) we will easily achieve the intent by multiplying the (25) for $\frac{dx}{da}$. Note then (equation (13)) that the coefficient common to the first members equals unit: let us be careful that N, being an any function of the x function of a, is always $\frac{dN}{da} = \frac{dN}{dx}\frac{dx}{da}$; and those equations will become

$$X - \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dP}{da}; \quad Y - \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dQ}{da}; \quad Z - \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dR}{da} \tag{30}$$

nelle quali le P, Q, R hanno i valori (29).

Volta un'occhiata alle denominazioni introdotte per abbreviazione di scrittura col mezzo delle equazioni (26), (28), capiremo facilmente che i valori delle P, Q, R espressi nelle (29) si riducono ai soli primi termini, se dei trinomj scritti nelle equazioni (5) riteniamo solamente il primo, il che equivale a considerar nelle curve quella sola forza interna che appellasi tensione. Messi a profitto anche i seguenti termini delle (29), non ci sarebbe per niente malagevole il dedurre dalle precedenti equazioni quelle conseguenze che Lagrange (M.A. Tom. I. pag. 152.), Binet (Journal de l'École Polyt. T.X. pag. 418.) e Bordoni (Memorie della Società Italiana T. XIX. pag. 1.) hanno ricavate dalla considerazione delle forze agenti sugli angoli di contingenza e di torsione, come eziandio le altre cose scritte di poi ; ma questo non è lo scopo ch'io mi sono prefisso, non volendo qui (e lo feci intendere fin da principio) entrare nei particolari delle varie questioni, ma provare soltanto come esse tutte siano abbracciate dal metodo lagrangiano.

82. Lo stesso verrò ora facendo in ordine ai sistemi superficiali. In questo caso, delle p, q, r visibili nelle equazioni (3), le prime due si hanno a riguardare come variabili fra di loro indipendenti, e la r va considerata funzione di esse. Esprimeremo con apici in alto le derivate per la p, e con apici a basso le derivate per la q.

Incominciamo a dedurre dalle (3) le seguenti serie di equazioni

$$\begin{array}{lll}
x' = \alpha_1 + \gamma_1 r'; & y' = \alpha_2 + \gamma_2 r'; & z' = \alpha_3 + \gamma_3 r' \\
x_, = \beta_1 + \gamma_1 r_,; & y_, = \beta_2 + \gamma_2 r_,; & z_, = \beta_3 + \gamma_3 r_, \\
x'' = \gamma_1 r'' & ; \quad y'' = \gamma_2 r'' & ; \quad z'' = \gamma_3 r'' \\
x'_, = \gamma_1 r'_, & ; \quad y'_, = \gamma_2 r'_, & ; \quad z'_, = \gamma_3 r'_, \\
x_{,,} = \gamma_1 r_{,,} & ; \quad y_{,,} = \gamma_2 r_{,,} & ; \quad z_{,,} = \gamma_3 r_{,,} \\
\text{ec.} & \text{ec.} & \text{ec.}
\end{array} \tag{31}$$

$$X - \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dP}{da}; \quad Y - \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dQ}{da}; \quad Z - \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dR}{da} \tag{30}$$

in which the P, Q, R have the values (29).

Since a look at the definitions introduced for abbreviation of writing by means of the equations (26), (28) has been taken, we will easily understand that the values of the P, Q, R expressed in the (29) are reduced only to the first terms, if in the number of the trinomials written in the equations (5) we consider only the first, which is equivalent to considering in the curves only that internal force which is called stress. Since the following terms of the (29) have been considered in a profitable way, it would be not at all cumbersome for us to deduce from the above equations those consequences which Lagrange (M.A. Tome I. p. 152), Binet (Journal de the École Polyt. Tome X p. 418) and Bordoni (Memoirs of the Italian Society Tome XIX p. 1) have obtained from the consideration of the forces acting on the corners of contingency and of torsion, as well as the other things written afterwards, but this is not the purpose that I have prefixed, not wanting here (and I did understand from the beginning) to go into the details of the various issues, but only prove as they all are embraced by the Lagrangian method.

82. The same I do now as to superficial systems. In this case, in the number of the p, q, r visible in the equations (3), the first two are to be considered as independent variables between them, and the r must be considered function of them. We will express with superscripts the derivatives with respect to the p, and with subscripts the derivatives with respect to the q.

We begin to deduce from the (3) the following series of equations

$$\begin{array}{lll}
x' = \alpha_1 + \gamma_1 r'; & y' = \alpha_2 + \gamma_2 r'; & z' = \alpha_3 + \gamma_3 r' \\
x_, = \beta_1 + \gamma_1 r_,; & y_, = \beta_2 + \gamma_2 r_,; & z_, = \beta_3 + \gamma_3 r_, \\
x'' = \gamma_1 r'' & ; \quad y'' = \gamma_2 r'' & ; \quad z'' = \gamma_3 r'' \\
x'_, = \gamma_1 r'_, & ; \quad y'_, = \gamma_2 r'_, & ; \quad z'_, = \gamma_3 r'_, \\
x_{,,} = \gamma_1 r_{,,} & ; \quad y_{,,} = \gamma_2 r_{,,} & ; \quad z_{,,} = \gamma_3 r_{,,} \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array} \tag{31}$$

Qui pure adottando nuove lettere in luogo di trinomj come segue

$$\begin{aligned} k &= x'^2 + y'^2 + z'^2 & n &= x''x_{,,} + y''y_{,,} + z''z_{,,} \\ h &= x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2 & j &= x_{,}^{'2} + y_{,}^{'2} + z_{,}^{'2} \\ i &= x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,} & f &= x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,} \\ l &= x''^2 + y''^2 + z''^2 & g &= x_{,,}x'_{,} + y_{,,}y'_{,} + z_{,,}z'_{,} \\ m &= x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2 & &\text{ec.} \qquad\quad \text{ec.} \end{aligned} \tag{32}$$

ci sarà facile, a motivo delle tanto usate equazioni fra le quantità angolari registrate al num.° 33., dedurre dalle (31) le seguenti

$$\begin{aligned} &k = 1 + r'^2; \quad h = 1 + r_{,}^2; \quad i = r'r_{,} \\ &l = r''^2 \quad ; \quad j = r_{,}^{'2} \quad ; \quad m = r_{,,}^2 \\ &f = r''r'_{,} \quad ; \quad g = r'_{,}\, r_{,,} \quad ; \quad n = r''r_{,,}; \text{ec.} \end{aligned} \tag{33}$$

le quali corrispondono alle (6) pel caso de' sistemi lineari, cioè non contengono più le quantità angolari, ma sono ancora ingombre dalle derivate della r per le p, q. Le equazioni che si cercano fra le sole derivate delle x, y, z per lep, q, si ricavano a colpo d'occhio dalle precedenti e sono

$$\begin{aligned} &(k-1)(h-1) = i^2; \quad lj = f^2; \quad lm = n^2; \quad jm = g^2 \\ &k'^2 = 4(k-1)l; \quad k_{,}^2 = 4(k-1)j; \quad h'^2 = 4(h-1)j; \quad h_{,}^2 = 4(h-1)m; \text{ec.} \end{aligned} \tag{34}$$

Queste stanno a riscontro delle (10),(11), ec. num.° 78. e delle (14) num.° 47., vale a dire si verificano per qualunque superficie atteso l'arbitrio nella posizione degli assi ai quali è riferita. Anche di esse diremo che dopo un certo numero non saranno più probabilmente se non combinazioni delle antecedenti. Esse sono le equazioni di condizione che, quando la superficie è fatta di molecole, esprimono i vincoli interni e si prestano onde possiamo scrivere mediante il metodo lagrangiano le equazioni del moto e dell'equilibrio di qualunque sistema superficiale.

83. Passeremo ad assegnare le dette equazioni, richiamando il già esposto al num.° 30. : nè ci sarà difficile il persuaderci

Here also adopting new symbols instead of trinomials as follows

$$\begin{aligned} k &= x'^2 + y'^2 + z'^2 & n &= x''x_{,,} + y''y_{,,} + z''z_{,,} \\ h &= x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2 & j &= x_{,}^{'2} + y_{,}^{'2} + z_{,}^{'2} \\ i &= x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,} & f &= x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,} \\ l &= x''^2 + y''^2 + z''^2 & g &= x_{,,}x'_{,} + y_{,,}y'_{,} + z_{,,}z'_{,} \\ m &= x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2 & &\text{etc.} \qquad\quad \text{etc.} \end{aligned} \tag{32}$$

it will be easy for us, because of the much used equations between the angular quantities reported at sect. 33, to deduce from the (31) the following

$$\begin{aligned} &k = 1 + r'^2; \quad h = 1 + r_{,}^2; \quad i = r'r_{,} \\ &l = r''^2 \quad ; \quad j = r_{,}^{'2} \quad ; \quad m = r_{,,}^2 \\ &f = r''r'_{,} \quad ; \quad g = r'_{,}\, r_{,,} \quad ; \quad n = r''r_{,,}; \text{etc.} \end{aligned} \tag{33}$$

which correspond to the (6) for the case of the linear systems, i.e. they do not contain any longer the angular quantities, but they are still full of the derivatives of the r with respect to the p, q. The equations that are sought only between among the derivatives of x, y, z with respect to the p, q, are obtained at a glance from the precedent and are

$$\begin{aligned} &(k-1)(h-1) = i^2; \quad lj = f^2; \quad lm = n^2; \quad jm = g^2 \\ &k'^2 = 4(k-1)l; \quad k_{,}^2 = 4(k-1)j; \quad h'^2 = 4(h-1)j; \quad h_{,}^2 = 4(h-1)m; \text{etc.} \end{aligned} \tag{34}$$

These match the (10), (11), etc. sect. 78 and the (14) sect. 47, namely they occur for any surface given the arbitrariness of the position of the axes to which it is referred. Also about them we will say that, after a certain number, they will not be any longer probably if not combinations of the antecedent ones. They are the equations of condition that, when the surface is made of molecules, express the internal constraints and are suitable so that we can write, by means of the Lagrangian method, the equations of the motion and of the balance of any superficial system.

83. We shall have to assign those equations, recalling what was already exposed at the sect. 30: nor it will be difficult for us to persuade

che in corrispondenza della equazione (1) num.° 44., e della (12) num.° 79. l'equazione generale meccanica assumerà presentemente l'espressione

$$\int da \int db \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + \int da \int db \cdot G + \Omega = 0. \tag{35}$$

Questa pure va trasformata analogamente a quanto si è praticato nei citati luoghi. Qui gli integrali debbono comparire presi per le p,q di cui le x, y, z si hanno a considerare funzioni prima che delle a, b. Con tale intendimento, in virtù delle equazioni (20), (22) del num.° 12. ci prepareremo l'equazione seguente

$$\Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} \right) = 1 \tag{36}$$

dove Γ è la densità superficiale nel punto(x, y, z). Osserviamo che per essere x, y, z funzioni di p, q, r e queste di a, b, abbiamo

$$\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} = \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp} \right) \left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da} \right) :$$

risultamento della stessa natura di quello più generale discorso al num.° 45., e che facilmente si verifica sostituendo a $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$ i valori equivalenti $\frac{dx}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{da}$, $\frac{dx}{dp}\frac{dp}{db} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{db}$, e i due simili alle derivate $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}$. Pertanto la precedente equazione (36), avendo posto per amore di brevità

$$U = \Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp} \right) \tag{37}$$

diventa

$$\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da} \right) U = 1;$$

e questa ci fa vedere che non produrremo alcuna alterazione se introdurremo il primo membro di essa come fattore delle quantità sottoposte ai due segni integrali dell'equazione (35). Allora essi, in forza del noto e più volte usato teorema, si riducono prontamente ad integrali per le p', q' ed otteniamo

us that at the equation (1) sect. 44, and at the (12) sect. 79 the general mechanical equation will now assume the expressions

$$\int da \int db \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{etc.} \right\} + \int da \int db \cdot G + \Omega = 0. \tag{35}$$

This also must be transformed analogously to what has been accomplished in the above mentioned places. Here the integrals must be expressed in terms of the p, q of which the x, y, z are to be considered functions before the a, b. With this understanding, by virtue of the equations (20), (22) of sect. 12 we will prepare the following equation

$$\Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} \right) = 1 \tag{36}$$

where Γ is the superficial density in the point (x, y, z). We observe that since x, y, z are functions of p, q, r and these are [functions] of a, b, we have

$$\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da} = \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp} \right) \left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da} \right) :$$

result of the same nature as the more general discussed at sect. 45, which is easily verified by substituting to $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$ the equivalent values $\frac{dx}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{da}$, $\frac{dx}{dp}\frac{dp}{db} + \frac{dx}{dq}\frac{dq}{db}$, and the two similar to the derivatives $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}$. Therefore, the above equation (36), having posed for the sake of brevity

$$U = \Gamma \sqrt{\imath + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp} \right) \tag{37}$$

becomes

$$\left(\frac{dp}{da}\frac{dq}{db} - \frac{dp}{db}\frac{dq}{da} \right) U = 1;$$

and this shows us that we shall not generate any alteration if we will introduce the first member of it as a factor of the quantities subjected to the two integral signs of the equation (35). Then they, by virtue of the well-known and often used theorem, are readily reduced to integrals with respect to the p', q', and we obtain

$$\int dp \int dq \cdot U \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{ec.} \right\} + \int dp \int dq \cdot UG + \Omega = 0 \tag{38}$$

nella quale tutte le quantità si devono ora riguardare funzioni delle p, q, dissimulata l'ulterior composizione delle p, q in a, b.

Il secondo termine dell'ultima equazione contiene tutta la parte che si riferisce alle equazioni di condizione sussistenti per tutti i punti del sistema, equazioni che ci sono note quando sono espresse fra le x, y, z e le p, q, e sono le (34). La quantità sottoposta a quel secondo segno d'integrale duplicato, avendo moltiplicato le variate delle equazioni (34) per altrettante indeterminate, e poi sommate secondo il metodo, risulta della forma

$$\begin{aligned} &\lambda\delta k + \mu\delta h + \nu\delta i + (1)\,\delta l + (2)\,\delta j + (3)\,\delta m \\ &+ (4)\,\delta f + (5)\,\delta n + (6)\,\delta g + \text{ec.} \end{aligned} \tag{39}$$

dove possiamo ommettere i termini contenenti le variate $\delta k', \delta k,, \delta h', \delta h,,$ ec. quando non cerchiamo se non le equazioni che si verificano per tutti i punti del sistema. La ragione è affatto simile alla già esposta al num.° 79., cioè che tali termini dopo le solite trasformazioni o ci presentano quantità che si compenetrano colle già notate, o quantità che essendo derivate esatte per p, o per q, passano ai limiti.

Proseguendo, e sostituendo nella espressione (39) alle $k, h, i, ec.$ i valori scritti nelle (32), essa diventa

$$\begin{aligned} &2\lambda(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') \\ &+ 2\mu\left(x,\delta x, + y,\delta y, + z,\delta z,\right) \\ &+ \nu\left(x,\delta x' + y,\delta y' + z,\delta z' + x'\delta x, + y'\delta y, + z'\delta z,\right) \\ &+ \text{ec.} \end{aligned} \tag{40}$$

sulla quale conviene praticare le note trasformazioni per ridurla alla forma

$$\begin{aligned} &(I)\,\delta x + (II)\,\delta y + (III)\,\delta z \\ &+ \frac{d\Delta}{dp} + \frac{d\Theta}{dq} + \frac{d^2\Upsilon}{dpdq}. \end{aligned} \tag{41}$$

$$\int dp \int dq \cdot U \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \text{etc.} \right\} + \int dp \int dq \cdot UG + \Omega = 0 \tag{38}$$

in which all the quantities must be regarded as functions of the variables p, q, once it is performed the ulterior composition producing the variables p, q in terms of the variables a, b.

The second term of the last equation contains the whole part which is referred to the equations of condition which hold for all points of the system and these equation are known to us when they are expressed in terms of the [variables] x, y, z and the variables p, q, and are given by the equations (34).

The quantity under the second double integral sign, having multiplied the variations of the equations (34) times the same number of indeterminate multipliers and then summed up following the method, results into the formula

$$\begin{aligned} &\lambda\delta k + \mu\delta h + \nu\delta i + (1)\,\delta l + (2)\,\delta j + (3)\,\delta m \\ &+ (4)\,\delta f + (5)\,\delta n + (6)\,\delta g + \text{etc.} \end{aligned} \tag{39}$$

where we can omit the terms containing the variations $\delta k', \delta k,, \delta h', \delta h,,$ etc. when we are looking only for the equations which hold for all the points of the system. The reason is completely similar to the one which we have exposed in sect. 79, i.e. that these terms after the usual transformations either produce quantities which can be combined with those which are already listed or produce quantities which produce limit terms, as they result to be exact derivatives with respect to p or q.

By proceeding, and substituting in the expression (39) to the variables $k, h, i,$ etc. the values written in the (32), it becomes

$$\begin{aligned} &2\lambda(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') \\ &+ 2\mu\left(x,\delta x, + y,\delta y, + z,\delta z,\right) \\ &+ \nu\left(x,\delta x' + y,\delta y' + z,\delta z' + x'\delta x, + y'\delta y, + z'\delta z,\right) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned} \tag{40}$$

on which it is convenient to apply the well-know transformations in order to reduce it to the form

$$\begin{aligned} &(I)\,\delta x + (II)\,\delta y + (III)\,\delta z \\ &+ \frac{d\Delta}{dp} + \frac{d\Theta}{dq} + \frac{d^2\Upsilon}{dpdq}. \end{aligned} \tag{41}$$

I processi conosciuti ci guidano a trovare

$$\begin{aligned}(I) = &-\left(2\lambda x' + \nu x_{,}\right)' + \left[2\,(1)\,x'' + (4)x'_{,} + (5)\,x_{,,}\right]'' \\ &- \left(2\mu x_{,} + \nu x'\right)_{,} + \left[(4)\,x'' + 2(2)x'_{,} + (6)\,x_{,,}\right]'_{,} + \text{ec.} \\ &+ \left[(5)\,x'' + (6)x'_{,} + 2\,(3)\,x_{,,}\right]_{,,}\end{aligned}$$

e per le $(II)\,,(III)$ valori che non differiscono dal precedente se non per esservi dappertutto la lettera y, o la z in luogo della x. Se poi si adottano per compendio le denominazioni

$$L_{1} = 2\lambda x' + \nu x_{,} - \left[2\,(1)\,x'' + (4)x'_{,} + (5)\,x_{,,}\right]' - \frac{1}{2}\left[(4)\,x'' + 2(2)x'_{,} + (6)\,x_{,,}\right]_{,} + \text{ec.}$$

$$M_{1} = 2\mu x_{,} + \nu x' - \frac{1}{2}\left[(4)\,x'' + 2(2)x'_{,} + (6)\,x_{,,}\right]' - \left[(5)\,x'' + (6)x'_{,} + 2\,(3)\,x_{,,}\right]_{,} + \text{ec.}$$

$$L_{2} = 2\lambda y' + \nu y_{,} - \left[2\,(1)\,y'' + (4)y'_{,} + (5)\,y_{,,}\right]' - \frac{1}{2}\left[(4)\,y'' + 2(2)y'_{,} + (6)\,y_{,,}\right]_{,} + \text{ec.} \qquad (42)$$

$$M_{2} = 2\mu y_{,} + \nu y' - \frac{1}{2}\left[(4)\,y'' + 2(2)y'_{,} + (6)\,y_{,,}\right]' - \left[(5)\,y'' + (6)y'_{,} + 2\,(3)\,y_{,,}\right]_{,} + \text{ec.}$$

$$L_{3} = 2\lambda z' + \nu z_{,} - \left[2\,(1)\,z'' + (4)z'_{,} + (5)\,z_{,,}\right]' - \frac{1}{2}\left[(4)\,z'' + 2(2)z'_{,} + (6)\,z_{,,}\right]_{,} + \text{ec.}$$

$$M_{3} = 2\mu z_{,} + \nu z' - \frac{1}{2}\left[(4)\,z'' + 2(2)z'_{,} + (6)\,z_{,,}\right]' - \left[(5)\,z'' + (6)z'_{,} + 2\,(3)\,z_{,,}\right]_{,} + \text{ec.}$$

si scorge che i valori delle $(I),(II)\,,(III)$ assumono le espressioni

$$(I) = -\frac{dL_{1}}{dp} - \frac{dM_{1}}{dq}; \qquad (II) = -\frac{dL_{2}}{dp} - \frac{dM_{2}}{dq}; \qquad (III) = -\frac{dL_{3}}{dp} - \frac{dM_{3}}{dq}$$

dove a significare le derivate per la p o per la q ho tornato a far uso della notazione più comune.

Siccome poi, giusta il metodo, collocata la quantità (41) sotto il secondo segno integrale della (38), debbonsi riunire i due integrali, ed eguagliare a zero i coefficienti totali delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$, ci risulteranno le tre equazioni

$$\begin{aligned}U\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dL_{1}}{dp} + \frac{dM_{1}}{dq} \\ U\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dL_{2}}{dp} + \frac{dM_{2}}{dq} \\ U\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{dL_{3}}{dp} + \frac{dM_{3}}{dq}.\end{aligned} \qquad (43)$$

Resta a far sparire da queste le derivate prese per le p, q, cambiandole in altre prese per le x, y delle quali si considera funzione la terza coordinata z.

The calculation procedures which we know very well lead us to find

$$\begin{aligned}(I) = &-\left(2\lambda x' + \nu x_{,}\right)' + \left[2\,(1)\,x'' + (4)x'_{,} + (5)\,x_{,,}\right]'' \\ &- \left(2\mu x_{,} + \nu x'\right)_{,} + \left[(4)\,x'' + 2(2)x'_{,} + (6)\,x_{,,}\right]'_{,} + \text{etc.} \\ &+ \left[(5)\,x'' + (6)x'_{,} + 2\,(3)\,x_{,,}\right]_{,,}\end{aligned}$$

and for the quantities $(II)\,,(III)$ some values which are differing from the precedent one simply because one has to replace everywhere the letter y or the letter z instead of the letter x. If then, for sake of brevity, one adopts the definitions

$$L_{1} = 2\lambda x' + \nu x_{,} - \left[2\,(1)\,x'' + (4)x'_{,} + (5)\,x_{,,}\right]' - \frac{1}{2}\left[(4)\,x'' + 2(2)x'_{,} + (6)\,x_{,,}\right]_{,} + \text{etc.}$$

$$M_{1} = 2\mu x_{,} + \nu x' - \frac{1}{2}\left[(4)\,x'' + 2(2)x'_{,} + (6)\,x_{,,}\right]' - \left[(5)\,x'' + (6)x'_{,} + 2\,(3)\,x_{,,}\right]_{,} + \text{etc.}$$

$$L_{2} = 2\lambda y' + \nu y_{,} - \left[2\,(1)\,y'' + (4)y'_{,} + (5)\,y_{,,}\right]' - \frac{1}{2}\left[(4)\,y'' + 2(2)y'_{,} + (6)\,y_{,,}\right]_{,} + \text{etc.} \qquad (42)$$

$$M_{2} = 2\mu y_{,} + \nu y' - \frac{1}{2}\left[(4)\,y'' + 2(2)y'_{,} + (6)\,y_{,,}\right]' - \left[(5)\,y'' + (6)y'_{,} + 2\,(3)\,y_{,,}\right]_{,} + \text{etc.}$$

$$L_{3} = 2\lambda z' + \nu z_{,} - \left[2\,(1)\,z'' + (4)z'_{,} + (5)\,z_{,,}\right]' - \frac{1}{2}\left[(4)\,z'' + 2(2)z'_{,} + (6)\,z_{,,}\right]_{,} + \text{etc.}$$

$$M_{3} = 2\mu z_{,} + \nu z' - \frac{1}{2}\left[(4)\,z'' + 2(2)z'_{,} + (6)\,z_{,,}\right]' - \left[(5)\,z'' + (6)z'_{,} + 2\,(3)\,z_{,,}\right]_{,} + \text{etc.}$$

one can recognize that the values of the $(I),(II)\,,(III)$ assume the expressions

$$(I) = -\frac{dL_{1}}{dp} - \frac{dM_{1}}{dq}; \qquad (II) = -\frac{dL_{2}}{dp} - \frac{dM_{2}}{dq}; \qquad (III) = -\frac{dL_{3}}{dp} - \frac{dM_{3}}{dq}$$

where in order to represent the derivatives with respect to the variables p or q the most common notation has been used.

As then, in order to follow the method, once the quantity (41) is written under the second integral sign of the (38), one has to gather the two integrals and equate to zero the total coefficients of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$, the following three equations will be obtained

$$\begin{aligned}U\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dL_{1}}{dp} + \frac{dM_{1}}{dq} \\ U\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dL_{2}}{dp} + \frac{dM_{2}}{dq} \\ U\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{dL_{3}}{dp} + \frac{dM_{3}}{dq}.\end{aligned} \qquad (43)$$

Therefore what remains to be done is to replace in these last equations the derivatives with respect to the variables p, q, with those calculated in terms of the variables x, y on which it is assumed that the third variable z must depend.

84. A questo fine è necessario premettere la dimostrazione di un principio puramente analitico. Le x, y essendo funzioni delle p, q, e viceversa essendo lecito considerare le p, q funzioni delle x, y

$$p = p(x, y); \quad q = q(x, y); \tag{44}$$

due quantità qualunque L, M funzioni delle p, q, si potranno aver per tali in quanto prima lo sono delle x, y. Di qui le due equazioni

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dx}x' + \frac{dL}{dy}y'; \quad \frac{dM}{dq} = \frac{dM}{dx}x_{,} + \frac{dM}{dy}y_{,}$$

che scriveremo senza alterazione, perchè giova in appresso,

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dL}{dx}\cdot\omega x' + \frac{dL}{dy}\cdot\omega y'\right); \quad \frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dM}{dx}\cdot\omega x_{,} + \frac{dM}{dy}\cdot\omega y'\right); \tag{45}$$

e alla quantità ω, che può essere qualunque, daremo il valore

$$\omega = \frac{1}{x'y_{,} - y'x_{,}}. \tag{46}$$

Ora vogliamo provare identiche le due equazioni

$$\frac{d\cdot\omega x'}{dx} + \frac{d\cdot\omega y'}{dy} = 0; \quad \frac{d\cdot\omega x_{,}}{dx} + \frac{d\cdot\omega y_{,}}{dy} = 0, \tag{47}$$

dove i quattro prodotti $\omega x', \omega y', \omega x_{,}, \omega y_{,}$, si considerano funzioni di x, y, supponendosi che eseguite le derivazioni indicate dal loro modo di essere, siansi rimessi al luogo delle p, q i valori (44). Abbiamo le due equazioni

$$x = x[p(x, y), q(x, y)]; \quad y = y[p(x, y), q(x, y)]$$

che sono identiche perchè s'intendono formate, avendo nelle espressioni delle x, y per le p, q risostituito alle p, q i valori (44). Esse, derivate per le x, y, ci porgono le quattro

$$\begin{aligned} 1 &= x'p'(x) + x_{,}q'(x); \quad 0 = y'p'(x) + y_{,}q'(x) \\ 0 &= x'p'(y) + x_{,}q'(y); \quad 1 = y'p'(y) + y_{,}q'(y). \end{aligned}$$

Ricaviamo da queste i valori delle quattro incognite $x', x_{,}, y', y_{,}$; posta per brevità

$$D = p'(x)q'(y) - q'(x)p'(y), \tag{48}$$

84. To this aim it is necessary to state first the demonstration of a purely analytical principle. As the variables x, y are functions of the variables p, q, and as vice-versa it is licit to consider the variables p, q as functions of the variables x, y

$$p = p(x, y); \quad q = q(x, y); \tag{44}$$

then two whatsoever functions L, M of the variables p, q, can be recognized to be depending on these last variables when it has been recognized first that they are functions depending on the variables x, y . Therefore we get the two equations

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dx}x' + \frac{dL}{dy}y'; \quad \frac{dM}{dq} = \frac{dM}{dx}x_{,} + \frac{dM}{dy}y_{,}$$

which, as we will need it later, will be equivalently written as

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dL}{dx}\cdot\omega x' + \frac{dL}{dy}\cdot\omega y'\right); \quad \frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dM}{dx}\cdot\omega x_{,} + \frac{dM}{dy}\cdot\omega y'\right); \tag{45}$$

where to the arbitrary quantity ω we will assign the value

$$\omega = \frac{1}{x'y_{,} - y'x_{,}}. \tag{46}$$

Now we want to prove that the following two equalities hold:

$$\frac{d\cdot\omega x'}{dx} + \frac{d\cdot\omega y'}{dy} = 0; \quad \frac{d\cdot\omega x_{,}}{dx} + \frac{d\cdot\omega y_{,}}{dy} = 0, \tag{47}$$

where the four products $\omega x', \omega y', \omega x_{,}, \omega y_{,}$, are regarded to be functions of the variables x, y, and where one assumes that whenever it is required the quantities p and q are replaced by the values (44). [We start remarking that] we have the two equations

$$x = x[p(x, y), q(x, y)]; \quad y = y[p(x, y), q(x, y)]$$

which are verified because they are intended to be calculated, having replaced in the expressions of the x, y in terms of the p, q the values given for the p, q by the [equations] (44). These two equations, once derived with respect to the variables x, y will give us the four other equations

$$\begin{aligned} 1 &= x'p'(x) + x_{,}q'(x); \quad 0 = y'p'(x) + y_{,}q'(x) \\ 0 &= x'p'(y) + x_{,}q'(y); \quad 1 = y'p'(y) + y_{,}q'(y). \end{aligned}$$

We can obtain from them the values of the four unknown quantities $x', x_{,}, y', y_{,}$; if, for sake of brevity, we introduce the notation

$$D = p'(x)q'(y) - q'(x)p'(y), \tag{48}$$

li troveremo facilmente espressi come segue

$$x' = \frac{q'(y)}{D};\quad x_{,} = -\frac{p'(y)}{D};\quad y' = -\frac{q'(x)}{D};\quad y_{,} = \frac{p'(x)}{D}. \tag{49}$$

Tali valori riducono quello di ω scritto nella (46), avendo sott'occhio la (48), $\omega = D$: dopo di che le stesse equazioni (49) ci danno

$$\omega x' = q'(y);\quad \omega y' = -q'(x);\quad \omega x_{,} = -p'(y);\ \omega y_{,} = p'(x).$$

Questi risultati dimostrano le equazioni (47) così prontamente che basta la sola ispezione.

Moltiplichiamo le equazioni (47) rispettivamente per $\frac{L}{\omega}, \frac{M}{\omega}$, e aggiungiamone i primi membri ai secondi delle (45), il che non vi porta alterazione perchè aggiungiamo quantità nulle. Potremo compenetrare i quadrinomj risultanti e scrivere

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\cdot L\omega x'}{dx} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\cdot L\omega y'}{dy}$$
$$\frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\cdot M\omega x_{,}}{dx} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\cdot M\omega y_{,}}{dy},$$

le quali equazioni sommate ci porgono

$$\frac{dL}{dp} + \frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\cdot\omega\left(Lx' + Mx_{,}\right)}{dx} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\cdot\omega\left(Ly' + My_{,}\right)}{dy}. \tag{50}$$

Questa è l'equazione contenente il principio analitico col quale trasformare i secondi membri delle (43).

Richiamato dalla (37) il valore di U , facciamo l'osservazione che l'ultimo fattor binomiale di esso eguaglia $\frac{1}{\omega}$, come si scorge per l'equazione (46), restituita alle derivate parziali la notazione ordinaria. Potremo pertanto dividere dappertutto per questa quantità $\frac{1}{\omega}$, dopo la quale operazione se scriviamo R in luogo del radicale $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$ che si adopera per lo spianamento delle superficie, ci si renderà manifesto come le equazioni (43) si mutino nelle seguenti

we will find them easily expressed as follows:

$$x' = \frac{q'(y)}{D};\quad x_{,} = -\frac{p'(y)}{D};\quad y' = -\frac{q'(x)}{D};\quad y_{,} = \frac{p'(x)}{D}. \tag{49}$$

These values allow us to reduce the expression for ω as written in the (46), once we consider the equality (48), indeed: $\omega = D$: therefore the same equations (49) will produce

$$\omega x' = q'(y);\quad \omega y' = -q'(x);\quad \omega x_{,} = -p'(y);\ \omega y_{,} = p'(x).$$

These last results show the equations (47) by a simple inspection.

Next, let us multiply the equations (47) respectively times the quantities $\frac{L}{\omega}, \frac{M}{\omega}$, and let us add the left-hand sides of obtained equalities to the right-hand sides of the equalities (45), which is not changing their validity as we are adding vanishing quantities. We will be able to gather the resulting quadrinomial to get

$$\frac{dL}{dp} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\cdot L\omega x'}{dx} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\cdot L\omega y'}{dy}$$
$$\frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\cdot M\omega x_{,}}{dx} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\cdot M\omega y_{,}}{dy},$$

and these last equations, once summed up, will give us the following equality:

$$\frac{dL}{dp} + \frac{dM}{dq} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\cdot\omega\left(Lx' + Mx_{,}\right)}{dx} + \frac{1}{\omega}\cdot\frac{d\cdot\omega\left(Ly' + My_{,}\right)}{dy}. \tag{50}$$

This is the equation which contains the analytical principle with which the right-hand sides of the equations (43) must be transformed.

Once we will have recalled from the equation (37) the value of the quantity U, let us observe that its last binomial factor is equal to $\frac{1}{\omega}$, as it is seen from the equation (46), once one has used for the partial derivatives the usual notation. We will therefore be able to divide everywhere by this quantity $\frac{1}{\omega}$, and after this operation, if we write R instead of the root $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$ which is used for rectifying the surface, it will be manifest that the equations (43) will become the following ones

$$\begin{aligned}
\Gamma R\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\frac{d\cdot\omega\left(L_1x'+M_1x_,\right)}{dx}+\frac{d\cdot\omega\left(L_1y'+M_1y_,\right)}{dy}\\
\Gamma R\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\frac{d\cdot\omega\left(L_2x'+M_2x_,\right)}{dx}+\frac{d\cdot\omega\left(L_2y'+M_2y_,\right)}{dy}\\
\Gamma R\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\frac{d\cdot\omega\left(L_3x'+M_3x_,\right)}{dx}+\frac{d\cdot\omega\left(L_3y'+M_3y_,\right)}{dy}
\end{aligned}\tag{51}$$

ove le derivate parziali sono adesso per le x,y. Compajono però ancora delle derivate per p,q nelle qantità sottoposte ai segni differenziali, e queste bisognerà farle sparire cercando di compenetrare nei coefficienti indeterminati gli elementi analitici dove intervengono, presso a poco come si è fatto al num.° 81., e non lasciando in evidenza se non derivate relative alle a,b dello stato antecedente, o alle x,y dell'attuale.

85. Noi qui ci limiteremo a ritenere nei valori di L_1,M_1,L_2, ec. (equazioni (42)) i soli termini colle derivate prime $x',x_,\ y',y_,,z',z_,$, ed anche malgrado una tanta limitazione arriveremo a risultati molto generali. Asssumendo soltanto binomiali quei valori, e rissovenendoci che abbiamo

$$z'=\frac{dz}{dx}x'+\frac{dz}{dy}y';\qquad z_,=\frac{dz}{dx}x_,+\frac{dz}{dy}y_,,$$

troveremo dopo facili riduzioni che, poste le

$$\begin{aligned}
A&=\omega\left(2\lambda x'^2+2\nu x'x_,+2\mu x_,^2\right)\\
B&=\omega\left(2\lambda y'^2+2\nu y'y_,+2\mu y_,^2\right)\\
C&=\omega\left(2\lambda x'y'+\nu\left(x'y_,+x_,y'\right)+2\mu x_,y_,\right),
\end{aligned}\tag{52}$$

i secondi membri delle (51) si modificano così da risultarne le tre

$$\begin{aligned}
\Gamma R\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\frac{dA}{dx}+\frac{dC}{dy}\\
\Gamma R\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\frac{dC}{dx}+\frac{dB}{dy}\\
\Gamma R\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\frac{d\cdot\left(A\frac{dz}{dx}+C\frac{dz}{dy}\right)}{dx}+\frac{d\cdot\left(C\frac{dz}{dx}+B\frac{dz}{dy}\right)}{dy}.
\end{aligned}\tag{53}$$

In esse potremo riguardare a dirittura le A,B,C come le tre indeterminate funzioni delle x,y introdotte dal metodo, giacchè

$$\begin{aligned}
\Gamma R\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\frac{d\cdot\omega\left(L_1x'+M_1x_,\right)}{dx}+\frac{d\cdot\omega\left(L_1y'+M_1y_,\right)}{dy}\\
\Gamma R\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\frac{d\cdot\omega\left(L_2x'+M_2x_,\right)}{dx}+\frac{d\cdot\omega\left(L_2y'+M_2y_,\right)}{dy}\\
\Gamma R\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\frac{d\cdot\omega\left(L_3x'+M_3x_,\right)}{dx}+\frac{d\cdot\omega\left(L_3y'+M_3y_,\right)}{dy}
\end{aligned}\tag{51}$$

where the partial derivatives are now in terms of the variables x,y. However the derivatives with respect to the variables p,q still appear in the quantities under the derivation signs and these derivatives will need to disappear, by gathering in the indeterminate coefficients the analytical elements in which they are appearing, very similarly to what has been done in sect. 81, and never leaving as factors anything else than the derivatives with respect to the variables a,b of the antecedent state or with respect to the variables x,y relative to the actual state.

85. Here we will limit ourselves to leave in the values of the quantities L_1,M_1,L_2, etc. (equations (42)) only those terms in which the first derivatives $x',x_,\ y',y_,,z',z_,$, appear, and notwithstanding such a great limitation we will obtain very general results. By assuming that these values are only binomial and recalling that we have

$$z'=\frac{dz}{dx}x'+\frac{dz}{dy}y';\qquad z_,=\frac{dz}{dx}x_,+\frac{dz}{dy}y_,,$$

we will find after simple reductions that, once introduced the notations

$$\begin{aligned}
A&=\omega\left(2\lambda x'^2+2\nu x'x_,+2\mu x_,^2\right)\\
B&=\omega\left(2\lambda y'^2+2\nu y'y_,+2\mu y_,^2\right)\\
C&=\omega\left(2\lambda x'y'+\nu\left(x'y_,+x_,y'\right)+2\mu x_,y_,\right),
\end{aligned}\tag{52}$$

the right-hand sides of the (51) are modified in such a way that one gets the other three equations

$$\begin{aligned}
\Gamma R\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\frac{dA}{dx}+\frac{dC}{dy}\\
\Gamma R\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\frac{dC}{dx}+\frac{dB}{dy}\\
\Gamma R\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\frac{d\cdot\left(A\frac{dz}{dx}+C\frac{dz}{dy}\right)}{dx}+\frac{d\cdot\left(C\frac{dz}{dx}+B\frac{dz}{dy}\right)}{dy}.
\end{aligned}\tag{53}$$

In them we will be able to recognize, in a straightforward way, that the quantities A,B,C are the three indeterminate functions of the variables x,y which are introduced by the method, as

sono tre del pari che le indeterminate λ, ν, μ. Queste (53) coincidono, quanto alla forma, colle trovate dai moderni Geometri seguendo le viste loro proprie (Cauchy. Exercices des Mathématiques. T. III, pag. 246.); ma il metodo Lagrangiano ci scopre ben altro orizzonte pel caso che nelle equazioni (42) tenessimo conto dei termini seguenti: ecco materia per ulteriori studj.

Noteremo che facendo dipendere nelle (53) le A, B, C da un'unica indeterminata λ nel modo seguente

$$A = \lambda\left(1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right); \quad C = -\lambda\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}; \quad B = \lambda\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)$$

esse si possono facilmente ridurre a quelle date da Lagrange per le superficie elastiche in due luoghi della M.A. Tom. I. pag. 103,149.

Non mi estenderò più oltre, giacchè spero di avere raggiunto lo scopo propostomi sul principio di quest'ultimo Capo. Terminerò con riflessioni generali analoghe ad altre sparse qua e là nel decorso della Memoria. Dopo che Lagrange ha ridotto tutte le questioni della Meccanica razionale al calcolo delle variazioni, volere persistere a farne senza, è un imitare coloro i quali per le ricerche di alta geometria, piuttosto che correre a volo giovandosi di formole prese dal calcolo differenziale e integrale, si ostinano ad andar pedestri col sussidio de' metodi sintetici. Così procedendo si fa poco, e s' incontra grave pericolo di far male. Conviene persuadersi che le dimostrazioni sempre più ammettono qualche sospetto di errore, quanto maggiore è il tratto nel quale sono appoggiate al semplice ragionamento: chè la portata intuitiva della nostra ragione è assai limitata, e facilmente c'inganniamo appena gli elementi della questione crescono a notabil numero e si complicano fra di loro. Abbiamo bisogno di metodi potenti quali essendo come l'espressione simultanea e compendiosa di molti principj, operano col valore di tutti, e non con quello di uno per volta, che è quanto avviene d'ordinario nel ragionamento logico: di

they are three in number as the indeterminate quantities λ, ν, μ. The obtained equations (53) coincide, for what concerns the form, with those found by the modern geometers following their own points of view (Cauchy. Exercices des Mathématiques. Tome III, p. 246); but the Lagrangian method is opening our mind to much wider horizons if in the equations (42) we will consider the subsequent terms: and this is the object of further studies.

We will remark that if we assume that the three multipliers A, B, C appearing in the equations (53) depend on a unique indeterminate one λ as follows

$$A = \lambda\left(1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right); \quad C = -\lambda\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}; \quad B = \lambda\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)$$

the aforementioned equations can be easily reduced to those given by Lagrange for the elastic surfaces in the pages 103 and 149 of the M.A. Tome I.

I will not add more words as I hope that I already reached the aim fixed at the beginning of this last Capo. I will conclude with some general considerations analogous to those which are spread here and there in the course of Memoir. Since Lagrange managed to reduce all the questions of Rational Mechanics to the Calculus of Variations, the decision of insisting to avoid its use is similar to wish to behave as those who being involved in the researches in higher geometry, instead of flying to use the formulas taken from integral and differential calculus, stubbornly persist in using in a pedestrian way the synthetic methods. By proceeding in this way one does not manage to get many results and highly risks to be wrong. It is instead convenient to persuade oneself that the more the demonstrations are likely to be suspected to be wrong the greater is the part in which they are based on the simple reasoning: as the intuitive grasp of our reason is very limited and very easily we are mislead as soon as the elements of the question increase to a great number and are interconnected in a complex way. We need to use powerful methods which, representing the simultaneous and compendious expression of many principles, are able to act by gathering simultaneously the power of all of them differently from what happens usually in the logical reasoning where the principles are used one by one: we need

metodi che ridotti a processi determinati e immutabili, non ci lasciano forviare. Anche usando mezzi così fatti la nostra ragione mantiene i suoi diritti, in quanto ne riconosce veri i fondamenti, e giuste le applicazioni: sebbene non le sia il più delle volte concesso conseguire un'intrinseca evidenza relativamente alle conseguenze a cui arriva. È per tal modo che nella ricerca della verità facciamo quei grandi viaggi, ai quali il ragionamento diretto è affatto insufficiente, tornandoci esso poi vantaggioso quando, giunti a certe mete, vogliamo estendere il beneficio delle ottenute cognizioni. Uno appunto fra i più poderosi degli indicati mezzi è il calcolo delle variazioni per la meccanica. Già vedemmo nella precedente Memoria copia di risultati che se ne deducono, e tocammo di molte teoriche che potrebbero rannodarsi alle varie parti di essa. Eppure io sento profondamente che anche tutto il presente lavoro è ben lungi dall'esaurire la fecondità dei metodi lagrangiani: credo poter assicurare che con questi stessi metodi si percorrono a passi di conquista le varie parti della fisica matematica. Ho già in pronto altro non breve scritto in continuazione dell'attuale, e nutro desiderio di poter produrre anche ulteriori prove di fatto dell'esposta asserzione: ma qualunque sia per essere il termine a cui riusciranno le mie fatiche, tengo per fermo che il tempo farà ragione alle parole colle quali diedi cominciamento a questa Memoria.

FINE DELLA PRESENTE MEMORIA

methods which, once reduced to well-determined and immutable processes, do not allow us to be deceived. Of course also when it is using this kind of tools our reason still keeps its rights, as it is able to recognize as true their fundaments and correct their applications, although to our reason it is not allowed, most of the time , to reach the intrinsic evidence relatively to the consequences to which it managed to arrive. It is in this way that in our search towards the truth we manage to accomplish those great explorations for which the direct reasoning is absolutely insufficient, while it becomes again advantageous when, once reached certain destinations, we want to extend the benefits of the obtained knowledge. One of the most forceful among the indicated tools for mechanics is precisely the calculus of variation. In the previous Memoir we have already seen the panoply of results which can be deduced by its use and we treated the many theories which could be connected with the various parts which constitute it.

However I deeply feel that also all the present work is very far from exhausting the fecundity of the Lagrangian methods: I believe to be able to assure that with these same methods one can conquer all the various parts of mathematical physics.

I have ready another work, which is not short and which will continue the present one, and I strongly desire to be able to produce ulterior factual evidence of the stated assertion: but whenever I will be able to conclude my work and no matter how successful will be my own efforts I am strongly persuaded that time will give reason to the words with which I started this Memoir.

END OF THE PRESENT MEMOIR