COVARIANTS DE FORMES BINAIRES - SYZYGIES FONDAMENTALES

Marc Olive

COVARIANTS DE FORMES BINAIRES - SYZYGIES FONDAMENTALES

MARC OLIVE

Contents

1. Covariants de formes binaires

On se donne un espace V de formes binaires :

$$V := \bigoplus_i \mathrm{S}_{n_i}$$

où chaque S_n désigne l'espace des formes binaires de degré n ; une telle forme peut s'exprimer

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j x^{n-j} y^j$$

Il y a une action naturelle du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur tout espace de forme binaire :

$$(\gamma \cdot \mathbf{f})(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\gamma^{-1} \cdot \mathbf{x})$$

On peut considérer les algèbres $\mathbb{C}[V]$ et $\mathbb{C}\left[V \oplus \mathbb{C}^2\right]$ et les actions données par

$$(\gamma \cdot \mathbf{p})(\mathbf{f}) := \mathbf{p}(\gamma^{-1} \cdot \mathbf{f})\ ;\ (\gamma \cdot \mathbf{p})(\mathbf{f}, \mathbf{x}) := \mathbf{p}\left(\gamma^{-1} \cdot \mathbf{f}, \gamma^{-1} \cdot \mathbf{x}\right)$$

Il est ensuite possible de définir l'*algèbre des covariants*

$$\mathbf{Cov}(V) := \mathbb{C}\left[V \oplus \mathbb{C}^2\right]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}$$

et l'algèbre des invariants

$$\mathbf{Inv}(V) := \mathbb{C}\left[V\right]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}$$

Plusieurs remarques évidentes :

(1) $\mathbf{Inv}(V)$ est une sous-algèbre de $\mathbf{Cov}(V)$;

(2) $\mathbf{Cov}(V)$ est un algèbre *bi-graduée* : pour un covariant $\mathbf{h}$ quelconque on parlera de *degré* de $\mathbf{h}$ pour désigner le degré de $\mathbf{h}$ en $\mathbf{f}$ et d'*ordre* de $\mathbf{h}$ pour désigner le degré de $\mathbf{h}$ en $\mathbf{x}$. On notera alors
$$\mathbf{Cov}(V)_{d,k}$$
le sous-espace vectoriel de $\mathbf{Cov}(V)$ constitué des covariants de degré d et d'ordre k. On aura ainsi
$$\mathbf{Cov}(V) = \bigoplus_{d\geq 0, k\geq 0} \mathbf{Cov}(V)_{d,k}$$

(3) La sous-algèbre $\mathbf{Inv}(V)$ correspond exactement aux covariants d'ordre 0. On peut noter $\mathbf{Inv}(V)_d$ le sous-espace vectoriel constitué des invariants de degré d. On aura alors
$$\mathbf{Inv}(V) = \bigoplus_{d\geq 0} \mathbf{Inv}(V)_d$$

(4) Par définition même, une forme $\mathbf{f} \in \mathrm{S}_n$ va toujours donner un covariant de degré 1 et d'ordre n ; en effet le polynôme
$$\mathbf{p}(\mathbf{f}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$
sera clairement invariant car
$$(\gamma \cdot \mathbf{p}) = (\gamma^{-1} \cdot \mathbf{f})(\gamma^{-1} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\gamma \cdot \gamma^{-1} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Cette approche est bien sûr une approche algébrique : il serait d'ailleurs possible de décrire plus précisément les algèbres $\mathbf{Inv}(V)$ et $\mathbf{Cov}(V)$ (série de Hilbert, existence d'un système de paramètres, propriété de Cohen-Macaulay), mais nous proposons de présenter une approche géométrique.

2. Morphismes équivariants

Le cœur de cette approche consiste à exploiter un processus de *polarisation* du à Aronhold. Elle a depuis été reprise de nombreuses fois (entre autre par Weyl et Dieudonné). L'idée est de se donner pour un espace V de dimension n et un vecteur de coordonnées $\mathbf{a} := (a_1, \cdots, a_n)$; on définit alors l'opérateur de polarisation [1]
$$\mathrm{D}_{\mathbf{ba}} := b_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + b_n \frac{\partial}{\partial a_n}$$
Si on donne alors un polynôme $\mathbf{p}$ en $\mathbf{f} \in V$, et donc un polynôme en les variables $(a_1, \cdots, a_n)$, on pourra construire le polynôme
$$\mathrm{D}_{\mathbf{ba}}\mathbf{p}$$
Remarquons que ce polynôme peut aussi s'obtenir en considérant le polynôme
$$\mathbf{p}(\mathbf{a} + t\mathbf{b})$$
et le coefficient de t.

L'idée importante est qu'à l'aide de cet opérateur de polarisation, on peut transformer un polynôme en un élément tensoriel. Si en effet on se donne un polynôme $\mathbf{p}$ homogène de degré d, on peut introduire d variables $\mathbf{b}_\alpha, \cdots, \mathbf{b}_\varepsilon$ et considérer
$$\mathrm{D}_{\mathbf{b}_\alpha \mathbf{a}} \cdots \mathrm{D}_{\mathbf{b}_\varepsilon \mathbf{a}} \mathbf{p} \in \mathrm{Sym}^d(V)$$

Cette idée permet de construire un isomorphisme entre $\mathbf{Cov}(V)_{d,k}$ et

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}\left(\mathrm{Sym}^d(V), \mathrm{S}_k\right)$$

On peut alors définir l'espace vectoriel

$$\mathrm{Mor}(V) := \bigoplus_{k,d} \mathrm{Mor}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}\left(\mathrm{Sym}^d(V), \mathrm{S}_k\right)$$

qui est un sous-espace vectoriel de

$$\widetilde{\mathrm{Mor}}(V) := \bigoplus_{k,d} \mathrm{Mor}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}\left(\otimes^d(V), \mathrm{S}_k\right)$$

On peut alors remarquer qu'il existe une action naturel de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\widetilde{\mathrm{Mor}}(V)$. En utilisant le *caractère* des représentations de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ (Sternberg) ou bien par une approche passant par l'algèbre de Lie (Fulton–Harris), on aboutit à la formule de décomposition de Clebsch–Gordan. Rappelons en effet que la représentation de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur l'espace S_n est *irréductible.* Ensuite, on sait qu'il existe un isomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ équivariant

$$\mathrm{S}_n \otimes \mathrm{S}_p \simeq \bigoplus_{r=0}^{p} \mathrm{S}_{n+p-2r} \text{ où } p \leq n$$

Nous allons maintenant voir comment accéder à cet isomorphisme et comment généraliser cette propriété.

3. Opérateurs bi-différentiels

Historiquement, c'est Cayley qui proposa pour la première fois un opérateur différentiel pour obtenir des covariants. Cet opérateur s'appelle de nos jour l'opérateur de Cayley et est défini sur $\mathrm{S}_n \otimes \mathrm{S}_p$ par

$$\Omega_{\alpha\beta} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} & \dfrac{\partial}{\partial x_\beta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y_\alpha} & \dfrac{\partial}{\partial y_\beta} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial y_\beta} - \frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial x_\beta}$$

On peut aussi définir des opérateurs de polarisation :

$$\sigma_{\alpha\beta} := x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} + y_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\beta}$$

et, plus particulièrement

$$\sigma_{\alpha\mathbf{x}} := x \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + y \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

ce qui se notera aussi en abrégé σ_α. On peut aussi définir

$$\tilde{\sigma}_\alpha := \sigma_{\mathbf{x}\alpha} = x_\alpha \frac{\partial}{\partial x} + y_\alpha \frac{\partial}{\partial y}$$

Pour finir, on définit l'opérateur de *trace* :

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{g}(\mathbf{x}_\beta)\cdots\mathbf{k}(\mathbf{x}_\varepsilon)) := [\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{g}(\mathbf{x}_\beta)\cdots\mathbf{k}(\mathbf{x}_\varepsilon)]_{|\mathbf{x}_\alpha=\cdots=\mathbf{x}_\varepsilon=\mathbf{x}}$$

A l'aide de ces opérateurs, il est alors possible de construire des morphismes $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ équivariants.

Definition 3.1 (m-transvectants)**.** Pour tout entier $r \leq p \leq n$ on définit le m-transvectant comme l'application $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ équivariante

$$\begin{array}{rccl} \phi_r : & \mathrm{S}_n \otimes \mathrm{S}_p & \longrightarrow & \mathrm{S}_{n+p-2r} \\ & \mathbf{f} \otimes \mathbf{g} & \mapsto & \phi_r(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) := \mathrm{tr}_{\mathbf{x}} \left[\Omega^r_{\alpha\beta}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{g}(\mathbf{x}_\beta)) \right] \end{array}$$

On peut bien sûr construire les *transvectants* qui vont fournir des *covariants* :

$$\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}_r := \phi_r(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g})$$

Remark 3.2. On trouve des définitions différentes selon les textes par rapport à des coefficients éventuels. Ainsi, on pourra aussi prendre comme définition

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_r := \frac{(n-r)!}{n!} \frac{(p-r)!}{p!} \{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}_r$$

Nous avons alors deux résultats qui donnent une interprétation géométrique des transvectants. Avant cela, précisons un lemme concernant les représentations irréductibles :

Lemma 3.3. *Soit (E, G) la représentation d'un groupe G dont la décomposition en irréductible est $E_1 \oplus E_2$, ces deux espaces étant non isomorphes. Supposons données deux surjections G équivariantes*

$$\phi_i \ : E \longrightarrow E_i$$

Alors l'application $\phi := \phi_1 \oplus \phi_2$ est surjective de E sur $E_1 \oplus E_2$.

Proof. Par hypothèse, on sait qu'il existe un isomorphisme

$$\varphi \ : E \longrightarrow E_1 \oplus E_2$$

On peut ensuite noter i_1 et i_2 les injections canoniques de E_1 et E_2 dans $E_1 \oplus E_2$. On remarque alors que

$$\phi_1 \circ \varphi^{-1} \circ i_1 \ : E_1 \longrightarrow E_1$$

est un G-morphisme non nul sur un espace irréductible ; par le lemme de Schur il existe $\lambda_1 \neq 0$ tel que, pour tout $\mathbf{u}_1 \in E_1$

$$\phi_1 \circ \varphi^{-1}(\mathbf{u}_1) = \lambda_1 \mathbf{u}_1$$

On montre de même qu'il existe $\lambda_2 \neq 0$ tel que pour tout $\mathbf{u}_2 \in E_2$

$$\phi_2 \circ \varphi^{-1}(\mathbf{u}_2) = \lambda_2 \mathbf{u}_2$$

Ensuite par le lemme de Schur on aura

$$\phi_1 \circ \varphi^{-1}(\mathbf{u}_2) = \phi_2 \circ \varphi^{-1}(\mathbf{u}_1) = 0$$

Si donc on se donne $\mathbf{u} := \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in E_1 \oplus E_2$, on peut considérer

$$\mathbf{w} := \frac{1}{\lambda_1} \varphi^{-1}(\mathbf{u}_1) + \frac{1}{\lambda_2} \varphi^{-1}(\mathbf{u}_2)$$

et on aura alors $\phi(\mathbf{w}) = \mathbf{u}$; ce qui montre que ϕ est surjective. □

Lemma 3.4. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathrm{S}_n \otimes \mathrm{S}_p & \longrightarrow & \bigoplus_{r=0}^{min(n,p)} \mathrm{S}_{n+p-2r} \\ & \mathbf{f} \otimes \mathbf{g} & \longmapsto & \sum_{r=0}^{min(n,p)} \{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}_r \end{array}$$

est un isomorphisme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *équivariant.*

Proof. On remarque que les morphismes $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ équivariants ϕ_r sont à valeur dans des représentations irréductibles de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$; étant non nuls, ils sont donc surjectifs. Ensuite, les S_k sont non isomorphes deux à deux, donc on peut utiliser le lemme 3.3 appliqué à chaque transvectant ϕ_r, ce qui permet de conclure. □

On peut néanmoins préciser ce résultat en donnant une formule explicite de cette décomposition (ce qui est fait dans Grace–Young) :

Lemma 3.5. *Pour $p \leq n$ et deux formes $\mathbf{f} \in \mathrm{S}_n$ et $\mathbf{g} \in \mathrm{S}_p$ on a*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha)\mathbf{g}(\mathbf{x}_\beta) = \sum_{r=0}^{min(n,p)} \lambda(n,p,r)(\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta)^r \tilde{\sigma}_\alpha^{n-r}\tilde{\sigma}_\beta^{p-r}\{\mathbf{f},\mathbf{g}\}_r$$

avec

$$\lambda(n,p,r) := \frac{n+p-2r+1}{r!(n+p-r+1)!}\ ;\ (\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta) := x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha$$

Proof. La preuve se fait en utilisant l'isomorphisme du lemme 3.4. On va en effet évaluer sur chaque m-transvectant ϕ_r. Notons

$$\mathbf{h} := \sum_{r=0}^{\min(n,p)} \lambda(n,p,r)(\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta)^r \tilde{\sigma}_\alpha^{n-r}\tilde{\sigma}_\beta^{p-r}\{\mathbf{f},\mathbf{g}\}_r$$

On remarque dans un premier temps que par opération de trace on a directement

$$\phi_0(\mathbf{f}\otimes\mathbf{g}) = \phi_0(\mathbf{h})$$

Ensuite, on a la relation suivante, directement issue de Grace–Young ($j \leq r$):

$$\Omega_{\alpha\beta}^j(\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta)^r\tilde{\sigma}_\alpha^{n-r}\tilde{\sigma}_\beta^{p-r} = c(n,p,r,j)(\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta)^{r-j}\tilde{\sigma}_\alpha^{n-r}\tilde{\sigma}_\beta^{p-r}$$

avec

$$c(n,p,r,j) := \frac{r!}{(r-j)!}\frac{(n+p-r+1)!}{(n+p-r-j+1)!}$$

Lorsque $j > r$ l'opérateur est nul. Mais alors, après l'opération de trace, on peut vérifier que

$$\phi_r(\mathbf{f}\otimes\mathbf{g}) = \phi_r\left(\lambda(n,p,r)(\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta)^r\tilde{\sigma}_\alpha^{n-r}\tilde{\sigma}_\beta^{p-r}\{\mathbf{f},\mathbf{g}\}_r\right)$$

□

4. Formule de Gordan

Nous proposons ici de suivre la démarche proposée dans les textes de références. Notons que cette démarche n'a pas encore eu, à notre connaissance, d'interprétation géométrique. Nous avons néanmoins réussi à retrouver cette formule dans un seul cas. Rappelons d'abord le résultat dû à Gordan :

Lemma 4.1. *Etant donné trois entiers n_1, n_2, n_3, trois formes binaires $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ appartenant respectivement à S_{n_1}, S_{n_2} et S_{n_3}. On fixe trois entiers e_1, e_2, e_3 tels que*

$$e_i + e_j \leq n_k \text{ avec } i,j,k \text{ tous différents}$$

Si de plus $e_1 = 0$ ou $e_2 + e_3 = n_1$ alors on a

$$\sum_i \frac{\binom{e_2}{i}\binom{n_2-e_1-e_3}{i}}{\binom{n_1+n_2+1-2e_3-i}{i}} \left((\mathbf{f},\mathbf{g})_{e_3+i},\mathbf{h}\right)_{e_1+e_2-i} =$$
$$(-1)^{e_1} \sum_i \frac{\binom{e_3}{i}\binom{n_3-e_1-e_2}{i}}{\binom{n_1+n_3+1-2e_2-i}{i}} \left((\mathbf{f},\mathbf{h})_{e_2+i},\mathbf{g}\right)_{e_1+e_3-i}$$

La preuve nécessite quelques préambules.

Lemma 4.2. *Pour tout entier n, les puissances des formes linéaires engendrent l'espace S_n.*

Proof. A faire (exercice avec les puissances des racines nième). □

Ensuite, il y a un élément technique qui pourrait peut être avoir une interprétation géométrique, concernant le calcul de transvectant.

Lemma 4.3. *Etant donné une forme binaire $\mathbf{f}_\alpha \in \mathrm{S}_n$ et une puissance de forme binaire $\mathbf{g} := (\mathbf{b}\mathbf{x}_\beta)^p$, on a*

$$\{\mathbf{f}\otimes\mathbf{g}\}_r = \frac{p!}{(p-r)!}\,\mathrm{tr}_{\mathbf{x}}\left[\sigma^r_{\lambda\alpha}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha))\right]_{\mathbf{x}_\lambda=(b_2,-b_1)}(\mathbf{b}\mathbf{x})^{p-r}$$

Proof. Il suffit de le vérifier pour

$$\mathbf{f} = (\mathbf{a}\mathbf{x}_\alpha)^n$$

on a alors

$$\{\mathbf{f}\otimes\mathbf{g}\}_r = \frac{n!}{(n-r)!}\frac{p!}{(p-r)!}(\mathbf{a}\mathbf{x}_\alpha)^{n-r}(\mathbf{b}\mathbf{x}_\beta)^{p-r}$$

Et comme

$$\sigma^r_{\beta\alpha}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha)) = \frac{n!}{(n-r)!}(\mathbf{a}\mathbf{x}_\beta)^r(\mathbf{a}\mathbf{x}_\alpha)^{n-r}$$

on a bien le résultat annoncé. □

On peut alors donner les idées principales de la preuve du lemme 4.1 dans le cas où $e_1 = 0$:

(1) On commence par considérer la décomposition de Clebsch-Gordan pour deux puissances de formes linéaires :

$$(\mathbf{a}\mathbf{x}_\alpha)^{n_2-e_3}(\mathbf{b}\mathbf{x}_\beta)^{n_1-e_3} = \sum_{r=0}^{\min(n_2,n_1)} \lambda(n_2-e_3,n_1-e_3,r)(\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta)^r$$
$$\tilde{\sigma}_\alpha^{n_2-e_3-r}\tilde{\sigma}_\beta^{n_1-e_3-r}\{(\mathbf{a}\mathbf{x}_\alpha)^{n_2-e_3},(\mathbf{b}\mathbf{x}_\beta)^{n_1-e_3}\}_r$$

(2) On multiplie par $(\mathbf{ab})^{e_3}$; on aura

$$(\mathbf{ab})^{e_3}(\mathbf{a}\mathbf{x}_\alpha)^{n_2-e_3}(\mathbf{b}\mathbf{x}_\beta)^{n_1-e_3}$$

qui sera combinaison linéaire de termes du type

$$(\mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta)^r\tilde{\sigma}_\alpha^{n_2-e_3-r}\tilde{\sigma}_\beta^{n_1-e_3-r}\{(\mathbf{a}\mathbf{x}_\alpha)^{n_2},(\mathbf{b}\mathbf{x}_\beta)^{n_1}\}_{e_3+r}$$

(3) On applique l'opérateur $\sigma_{\alpha\beta}^{k}$ avec $k = n_1 - e_2 - e_3$ et on remarque que

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta) = 0$$

et donc le terme

$$(\mathbf{ab})^{e_3}(\mathbf{ax}_\alpha)^{n_2-e_3}(\mathbf{bx}_\alpha)^{n_1-e_3-e_2}(\mathbf{bx}_\beta)^{e_2}$$

est combinaison linéaire de

$$(\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta)^r \sigma_{\alpha\beta}^{k} \tilde{\sigma}_\alpha^{n_2-e_3-r} \tilde{\sigma}_\beta^{n_1-e_3-r} \{(\mathbf{ax}_\alpha)^{n_2}, (\mathbf{bx}_\beta)^{n_1}\}_{e_3+r}$$

mais comme

$$\sigma_{\alpha\beta}\tilde{\sigma}_\beta = \tilde{\sigma}_\alpha$$

cela donne une combinaison linéaire de

$$(\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta)^r \tilde{\sigma}_\alpha^{n_2-e_3-r+k} \tilde{\sigma}_\beta^{n_1-e_3-r-k} \{(\mathbf{ax}_\alpha)^{n_2}, (\mathbf{bx}_\beta)^{n_1}\}_{e_3+r}$$

(4) On évalue alors en $\mathbf{x}_\beta = (c_2, -c_1)$, on trace en $\mathbf{x}$ et on multiplie par $(\mathbf{cx})^{n_3-e_2}$; on obtient alors à gauche la quantité

$$(\mathbf{ab})^{e_3}(\mathbf{bc})^{e_2}(\mathbf{ax})^{n_2-e_3}(\mathbf{bx})^{n_1-e_3-e_2}(\mathbf{cx})^{n_3-e_2}$$

combinaison linéaire de termes du type

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{x}}\left[\tilde{\sigma}_\beta^{n_1-e_3-r-k}\{(\mathbf{ax}_\alpha)^{n_2}, (\mathbf{bx}_\beta)^{n_1}\}_{e_3+r}\right]_{\mathbf{x}_\beta=(c_2,-c_1)} (\mathbf{cx})^{n_3-e_2+r}$$

avec $n_1 - e_3 - r - k = e_2 - r$; et donc par le lemme 4.3 ce terme est exactement

$$\{\{(\mathbf{ax}_\alpha)^{n_2}, (\mathbf{bx}_\beta)^{n_1}\}_{e_3+r}, (\mathbf{cx}_\gamma)^{n_3}\}_{e_2-r}$$

(5) On peut ensuite intervertir les rôles de $(\mathbf{ax}_\alpha)^{n_2}$ et de $(\mathbf{cx}_\gamma)^{n_3}$, ainsi que ceux de e_3 et e_2 ; cela donnera ainsi une combinaison linéaire de termes du type

$$\{\{(\mathbf{cx}_\alpha)^{n_3}, (\mathbf{bx}_\beta)^{n_1}\}_{e_2+r}, (\mathbf{ax}_\gamma)^{n_1}\}_{e_3-r}$$

(6) Dans le cas où $e_2 + e_3 = n_1$ on applique l'opérateur $\sigma_{\beta\alpha}^{e_1}$ au lieu de $\sigma_{\alpha\beta}^{n_1-e_2-e_3}$; puis les évaluations seront les mêmes.

5. Molécules d'Aronhold

Nous avons déjà vu une première façon de construire des morphismes $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ équivariants. Nous pouvons alors interpréter graphiquement l'écriture symbolique des covariants en terme de morphismes.

Un atome de *valence* $n(\alpha)$ va représenter l'opérateur de polarisation σ_α^n

$$\alpha := \sigma_\alpha^n$$

Ensuite, une arête orientée de poids r entre deux atomes α et β va représenter l'opérateur $\Omega_{\alpha\beta}^r$. En supposant que les atomes α et β sont de valence respective n et p, pour tout entier r inférieur à $\min(n,p)$, le morphisme

$$\Omega_{\alpha\beta}^r \sigma_\alpha^{n-r} \sigma_\beta^{p-r} \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}(\mathrm{S}_n \otimes \mathrm{S}_p, \mathrm{S}_{n+p-2r})$$

sera représenté par la molécule

$$\alpha \xrightarrow{r} \beta$$

Remarquons que nous avons la relation suivante entre le morphisme précédent et les m-transvectants donnés par **??** :

$$\alpha \xrightarrow{r} \beta = (n-r)!(p-r)!\phi_r$$

Pour tout digraphe D (graphe orienté), on notera $\mathcal{V}(\mathsf{D})$ l'ensemble de ses sommets, que nous appellerons aussi atomes. Pour chaque atome $\alpha \in \mathcal{V}(\mathsf{D})$, on note $\mathrm{val}(\alpha)$ la valence de l'atome libre associé au symbole α, autrement dit l'ordre de la forme binaire associé au symbole α. On note aussi $\mathrm{val}_{\mathsf{D}}(\alpha)$ sa valence associée à l'atome α dans le digraphe D. On désigne par $\mathcal{E}(\mathsf{D})$ l'ensemble de ses arêtes orientées, et, pour chaque arête orientée $e \in \mathcal{E}(\mathsf{D})$ on note $o(e)$ son origine, $t(e)$ son extrémité et $w(e)$ le poids associé à l'arête e. On note enfin $w(\mathsf{D})$ le poids total des arêtes de D.

Definition 5.1. Une *molécule d'Aronhold* D est un graphe orienté construit à partir des atomes $\alpha, \cdots, \varepsilon$ de valences respectives $\mathrm{val}(\alpha) = n_\alpha, \cdots, \mathrm{val}(\epsilon) = n_\epsilon$ (chaque entier n étant tel que $\mathrm{S}_n \subset V$) et tel que pour tout atome α on ait $\mathrm{val}_{\mathsf{D}}(\alpha) \geq 0$. Un tel digraphe représente un morphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ equivariant

$$\phi_{\mathsf{D}} := \prod_{e\in\mathcal{E}(\mathsf{D})} \Omega_{o(e)\,t(e)}^{w(e)} \prod_{v\in\mathcal{V}(\mathsf{D})} \sigma_\alpha^{\mathrm{val}_{\mathsf{D}}(\alpha)}$$

de $\mathrm{S}_{n_\alpha} \otimes \cdots \otimes \mathrm{S}_{n_\epsilon}$ sur S_k, avec $k = \mathrm{val}_{\mathsf{D}}(\alpha) + \ldots + \mathrm{val}_{\mathsf{D}}(\epsilon)$. L'ensemble de toutes les molécules d'Aronhold sera noté $\mathfrak{M}(V)$ et l'espace vectoriel engendré par toutes les molécules d'Aronhold sera noté $\mathfrak{A}(V)$.

Si nous fixons par exemple un seul espace S_n et trois atomes α, β, γ de valence $n \geq 5$, la molécule d'Aronhold

$$\mathsf{D}= \begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "3"'] & \beta \\ & \gamma \end{tikzcd}$$

va représenter le morphisme[1]

$$\phi_{\mathsf{D}} = \Omega_{\alpha\beta}^2 \Omega_{\alpha\gamma}^3 \sigma_\alpha^{n-5} \sigma_\beta^{n-2} \sigma_\gamma^{n-3} \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}\left(\mathrm{S}_n \otimes \mathrm{S}_n \otimes \mathrm{S}_n, \mathrm{S}_{3n-10}\right) \tag{5.1}$$

Pour toute molécule d'Aronhold $\mathsf{D} \in \mathfrak{M}(V)$ dont les atomes sont notés $\alpha, \cdots, \varepsilon$, on peut associer à chaque atome $\alpha \in \mathcal{V}(\mathsf{D})$ une forme binaire $\mathbf{f}_\alpha \in \mathrm{S}_{\mathrm{val}\,\alpha} \subset V$. On peut ainsi construire une application

$$\begin{array}{rccc} \Psi \colon & \mathfrak{A}(V) & \longrightarrow & \mathbf{Cov}(V) \\ & \mathsf{D} & \longmapsto & \phi_{\mathsf{D}}(\mathbf{f}_\alpha \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}_\varepsilon) \end{array}$$

Definition 5.2. Pour tout espace V de forme binaire, un *covariant moléculaire* est l'image par Ψ d'une molécule d'Aronhold $\mathsf{D} \in \mathfrak{M}(V)$.

Notons ainsi α, β, γ et δ quatre atomes de valence respective n_1, n_2, n_3 et n_4. Nous avons alors les trois relations fondamentales suivantes, aussi appelées *syzygies* :

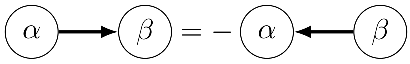
[1]La méthode symbolique [?] considérait ici le symbole $(\alpha\beta)^2(\alpha\gamma)^3(\alpha\mathbf{x})^{n-5}(\beta\mathbf{x})^{n-2}(\gamma\mathbf{x})^{n-3}$.

(1) La première syzygie est une simple conséquence de l'égalité :

$$\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}$$

Ce qui donne, en multipliant par les opérateurs de polarisation :

(5.2)

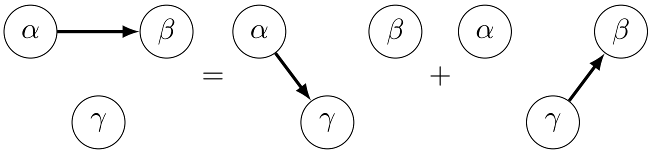


(2) La seconde syzygie provient d'une propriété sur les déterminants [2]:

$$\Omega_{\alpha\beta}\sigma_\gamma = \Omega_{\alpha\gamma}\sigma_\beta + \Omega_{\gamma\beta}\sigma_\alpha$$

Ce qui donne, sous la forme graphique :

(5.3)

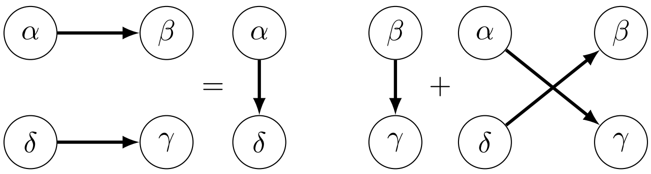


(3) La dernière est un cas particulier de la précédente :

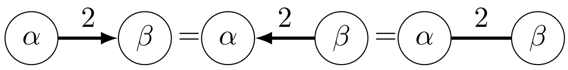
$$\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\delta} = \Omega_{\alpha\delta}\Omega_{\beta\gamma} + \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\delta\beta}$$

Ce qui donne, sous la forme graphique :

(5.4)



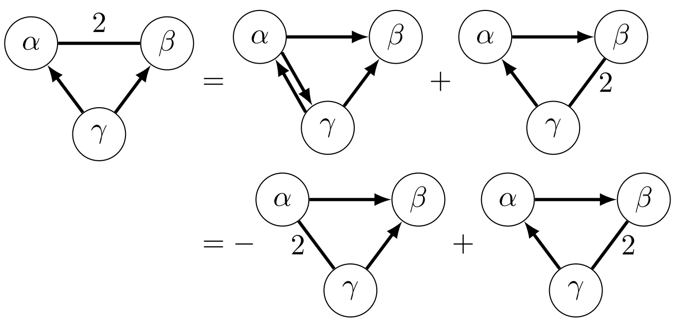
Ces relations permettent de réécrire les molécules d'Aronhold et donc les covariants moléculaires. Par exemple, par la relation 5.2 nous aurons



et donc, par la suite, nous ne préciserons plus la direction des arêtes de poids pair.

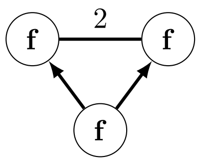
On peut aussi observer que les relations 5.3 et 5.4 permettent d'obtenir un grand nombre de relations sur les covariants moléculaires.

Par exemple, si nous nous plaçons dans l'espace[2] $V = \mathrm{S}_n$ ($n \geq 3$), les relations 5.3 et 5.2 vont donner



[2]Cet exemple est directement issu de [2, **?**]

et donc, une fois restreint à l'espace $\mathrm{Sym}^3(V)$, tous les atomes seront équivalents ; ce qui montre que, pour toute forme binaire $\mathbf{f} \in \mathrm{S}_n$.



$= 0$

References

[1] Weyl. *The Classical Groups.*
[2] Olver. *Classical invariant theory.*

LATP, CNRS & Université de Provence, 39 Rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France
E-mail address: marc.olive@math.cnrs.fr