La Relativité restreinte expliquée aux enfants (de 7 à 107 ans)

Charles-Michel Marle

La Relativité restreinte expliquée aux enfants (de 7 à 107 ans)

Charles-Michel Marle
Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Pierre et Marie Curie
Paris, France

2 juillet 2005

Résumé

L'auteur pense qu'il est possible d'expliquer aux enfants de 15 à 16 ans les idées essentielles de la théorie de la Relativité, sans aucun calcul compliqué, en n'utilisant que quelques notions très simples de géométrie affine. L'approche proposée est présentée sous forme de dialogue entre l'auteur et un de ses petite-enfants. Le document présent ne traite que de la Relativité restreinte. La Relativité générale fera l'objet d'un autre texte, adapté aux enfants de 8 à 108 ans.

Pour Agathe, Florent, Basile, Mathis, Gabrielle,
Morgane, Quitterie et mes autres petits-enfants à venir

1 Prologue

Imaginons qu'un jour un de mes petits enfants, vers l'âge de 15 ou 16 ans, me dise :

— Grand-père, peux-tu m'expliquer ce qu'est la théorie de la relativité ? Notre professeur de physique nous en a un peu parlé, en nous racontant des histoires de trains et d'éclairs qui frappent la voie, de contraction des longueurs et de dilatation des temps, et je n'ai pas compris grand chose !

Voici le dialogue que j'aimerais avoir avec elle (ou lui).

— Connais-tu ce théorème de géométrie : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu ?

— Oui, grand-père ! je sais même que la réciproque est vraie : si les diagonales d'un quadrilatère plan se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme. Et je crois même que j'en connais une démonstration !

— Bravo ! tu sais tout ce qu'il faut pour comprendre l'idée de base de la relativité restreinte ! Tu en sais même plus qu'il n'en faut, car nous n'aurons pas besoin de la réciproque. Cependant, nous allons d'abord devoir réfléchir aux notions de Temps et d'Espace.

— Justement, ces notions me semblent très intuitives, et cependant difficiles à comprendre en profondeur !

— Tu n'es pas le seul à avoir ce sentiment. Le Temps et l'Espace sont des notions bien mystérieuses. Ensemble, le Temps et l'Espace forment le cadre dans lequel tous les phénomènes physiques se déroulent, dans lequel tous les objets matériels se situent et évoluent, y compris nos corps. Nous n'en connaissons pas la nature profonde. Aussi nous devons adopter une attitude d'esprit modeste et évolutive. Sans prétendre percer tous les mystères de l'Espace et du Temps, cherchons à en comprendre certaines propriétés et essayons de les utiliser pour la description, voire même la prévision, des phénomènes physiques. Soyons prêts à réviser l'idée que nous nous faisons du Temps et de l'Espace si, à un certain moment, cette idée n'est plus en accord avec l'expérience.

— Mais, grand-père, si nous ne savons pas ce que sont le Temps et l'Espace, comment pouvons-nous espérer en comprendre certaines propriétés et les utiliser ?

— En nous faisant une image mentale du Temps et de l'Espace, et en raisonnant sur cette image mentale. Hélas, nous, pauvres humains, ne pouvons faire mieux : nous ne pouvons accéder à la connaissance du monde qui nous entoure qu'à travers nos sens (prolongés par les instruments d'étude et de mesure que nous avons créés) et notre pensée, donc en raisonnant sur les images mentales que nous nous faisons des objets de ce monde !

Je vais maintenant t'indiquer comment les images mentales que les savants se sont faites du Temps et de l'Espace ont évolué au cours des siècles, principalement de Newton à Einstein.

2 Le Temps et l'Espace selon Newton et Leibniz

2.1 Le Temps de Newton

Le grand savant Isaac Newton (1642–1727) se faisait du Temps l'image mentale suivante : une droite $\mathcal{T}$, se prolongeant à l'infini dans les deux sens, donc sans commencement ni fin, et sans origine privilégiée. Chaque instant particulier, par exemple "maintenant", ou encore "dans trois jours au moment du lever du Soleil à Paris", correspond à un élément de cette droite.

Note bien que Newton admettait sans discussion qu'à chaque événement ayant lieu dans l'univers, on pouvait associer un instant, c'est-à-dire un élément de la droite $\mathcal{T}$, l'instant où cet événement se produit.

— Mais où donc se trouve cette droite du Temps $\mathcal{T}$? Est-elle tracée dans un plan, dans l'espace ?

— Nulle part ! Il ne faut pas penser à la droite du Temps comme tracée quelque part dans quelque chose de dimension plus grande. Newton concevait le Temps comme une droite abstraite, parce que les instants successifs sont ordonnés de manière linéaire, comme les points d'une droite. N'oublie pas que la droite du Temps $\mathcal{T}$ est une image mentale, non le Temps lui-même ! Cependant, cette image mentale n'est pas une simple idée vague : elle est dotée de propriétés bien précises, de nature mathématique : cette droite est munie d'une *structure affine* et d'une *orientation*.

— Qu'appelles-tu structure affine ? et à quoi cela sert-il ?

— Cela sert à comparer entre eux deux intervalles de temps, et en faire le rapport. Newton admettait qu'on pouvait comparer entre eux deux intervalles de temps, même s'ils se situaient à des siècles ou des millénaires l'un de l'autre, et en faire le rapport, par exemple pour dire que l'un est deux fois plus long que l'autre. C'est cette propriété qu'en langage mathématique moderne, on exprime en disant que la droite $\mathcal{T}$ représentant le Temps est munie d'une *structure affine*.

Pour le mathématicien, cette propriété signifie qu'on peut faire subir à la droite $\mathcal{T}$ une transformation (appelée *translation*) consistant à la faire glisser le long d'elle-même, sans la dilater ni la comprimer, sans que cela change en quoi que ce soit ses propriétés.

Pour le physicien, elle signifie que les lois qui régissent tous les phénomènes d'évolution restent les mêmes à toutes les époques.

Autre propriété importante du Temps : il s'écoule toujours dans le même sens. Afin de prendre en compte cette propriété, on *oriente* la droite $\mathcal{T}$ qui représente le Temps, c'est-à-dire qu'on considère comme distincts, non équivalents, les deux sens de parcours sur cette droite. On peut faire cela par exemple en privilégiant un de ces deux sens de parcours, celui qui va du passé vers le futur. On dit alors que la droite affine $\mathcal{T}$ est *orientée*.

2.2 L'Espace absolu de Newton

— D'accord, je veux bien accepter cette image mentale du Temps, bien qu'elle ne rende pas compte de sa propriété essentielle : il s'écoule sans que nous puissions rien faire pour l'en empêcher ! Et l'Espace ?

— Newton assimilait l'Espace à l'espace euclidien de dimension 3 des géomètres, que je noterai $\mathcal{E}$. C'est aux figures de cet espace que s'appliquent le théorème de Thalès, le théorème affirmant que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, le théorème de Pythagore, ...

2.3 Le mouvement selon Newton et le concept d'Espace-Temps

Newton décrivait ainsi le mouvement des objets matériels. Un objet A du monde physique occupe, à chaque instant durant son existence, c'est-à-dire pour chaque élément t de la droite du Temps $\mathcal{T}$ pour lequel l'objet A existe, une position A_t dans l'Espace $\mathcal{E}$. Lorsque t varie, les positions successives A_t de A constituent la description du mouvement de cet objet.

J'introduis tout de suite un concept nouveau, celui d'Espace-Temps, dû au mathématicien allemand Hermann Minkowski (1864–1909). Ce concept n'a été employé par les Mécaniciens qu'après la découverte de la Relativité restreinte, ce qui est très regrettable, car son emploi facilite grandement la compréhension des bases de la Mécanique, tant classique que relativiste. C'est pourquoi je l'utilise dès maintenant, dans le cadre de l'Espace et du Temps absolus de Newton, bien que Newton lui-même ne l'ait pas utilisé.

Avec les conceptions de Newton, l'Espace-Temps, c'est simplement l'ensemble produit $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$, formé par les couples (appelés *événements*) (x,t) d'un point x de $\mathcal{E}$ et d'un instant t de $\mathcal{T}$.

— À quoi donc peut bien servir cet Espace-Temps ?

— À décrire commodément les mouvements. Par exemple, le mouvement d'un point matériel A (objet de dimensions assez petites pour être assimilé à un point) qui, à chaque instant t, occupe dans l'Espace la position A_t, est décrit par une ligne de l'Espace-Temps, appelée *ligne d'Univers* du point matériel A, formée par tous les événements (A_t,t), lorsque t parcourt l'intervalle de temps pendant lequel le point matériel A existe.

Regarde la figure 1, où pour simplifier l'Espace est représenté comme une droite, comme s'il était de dimension 1. Tu y verras les lignes d'univers de trois points matériels a, b et c.

- La ligne d'univers de b est parallèle à l'axe des Temps $\mathcal{T}$: ce point matériel est au repos, il occupe une position fixe dans l'Espace absolu $\mathcal{E}$.

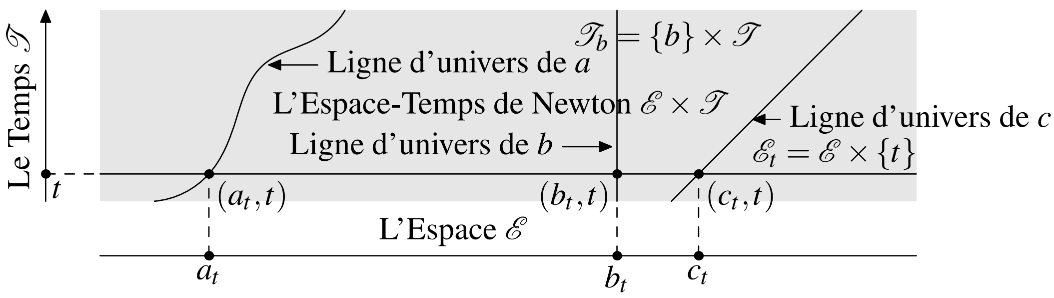


FIGURE 1 – Lignes d'univers dans l'Espace-Temps de Newton.

– La ligne d'univers de c est une droite oblique ; dans $\mathcal{E}$, ce point parcourt une ligne droite à vitesse constante.
– La ligne d'univers de a est une courbe, non une droite ; cela signifie que la vitesse de a varie au cours du temps.

2.4 Repos absolu et mouvement

Pour Newton, les notions de *repos* et de *mouvement* avaient donc un caractère absolu : l'objet A était au repos si sa position A_t dans l'Espace $\mathcal{E}$ ne variait pas lorsque l'instant considéré t variait sur la droite du Temps $\mathcal{T}$; il était en mouvement si, au contraire, A_t variait avec t.

— Cela semble bien naturel. Pourquoi remettre en cause cette description du mouvement ?

— Parce que rien n'est fixe dans l'Univers ! La Terre tourne sur elle-même et autour du Soleil, qui lui-même tourne autour du centre de notre Galaxie ! Et il y a, dans l'Univers, des milliards de Galaxies, toutes en mouvement les unes par rapport aux autres ! C'est pourquoi les conceptions de Newton ont été très tôt critiquées, notamment par son contemporain, le grand mathématicien et philosophe Gottfried Wilhelm Leibniz (1647–1716).

2.5 Référentiels

— Mais comment donc faisait Newton pour étudier le mouvement des planètes sans savoir ce qui est fixe ?

— Pour étudier le mouvement d'un corps matériel A, (que ce soit une pomme qui tombe d'un arbre, la planète Mars ou la Terre), Newton, et après lui la plupart des mécaniciens jusqu'à aujourd'hui,ont pris l'habitude d'utiliser un *référentiel*. Cela consiste à choisir un corps R qui reste à peu près indéformable au cours du temps (nous dirons que ce corps est *rigide*), au moins pendant la durée du mouvement à étudier, et à faire comme si ce corps était fixe. On peut alors étudier le mouvement *relatif* de A par rapport à R considéré comme fixe.

Selon les conceptions de Newton, si nous savions ce qui est fixe dans l'Univers, nous pourrions choisir pour R un corps immobile ; le référentiel correspondant est appelé *référentiel fixe*.

Le corps rigide R utilisé pour déterminer le référentiel choisi peut être, par exemple,
– la Terre (si l'on étudie le mouvement d'une pomme qui tombe d'un arbre),

– ou le trièdre formé par les droites joignant le centre du Soleil à trois étoiles lointaines (si l'on étudie le mouvement d'une planète du système solaire).

2.6 Référentiels galiléens et Espace-Temps de Leibniz

Tous les référentiels ne sont pas équivalents : on appelle *référentiel galiléen* [1], ou *référentiel inertiel* un référentiel dans lequel le *principe de l'inertie* est satisfait.

Ce principe a d'abord été formulé pour le mouvement absolu, dans l'Espace absolu $\mathcal{E}$ de Newton ; il affirme que le mouvement (absolu) de tout point matériel libre est rectiligne et uniforme. Mais comme Newton lui-même l'a montré, ce principe reste applicable au mouvement *relatif* d'un point matériel libre par rapport à certains référentiels autres que le référentiel fixe, les *référentiels galiléens*.

Plus précisément, supposons que le principe de l'inertie s'applique aux mouvements relatifs par rapport au référentiel associé à un corps rigide R_1. On montre qu'il s'applique aussi au mouvement relatif par rapport au référentiel associé à un autre corps rigide R_2 *si et seulement si* le mouvement relatif de R_2 par rapport à R_1 est un mouvement de translation à vitesse constante.

Le référentiel fixe, s'il existe, apparaît comme un référentiel galiléen particulier, qu'aucune expérience de Mécanique ne permet de distinguer des autres référentiels galiléens. C'est pourquoi certains savants, notamment Leibniz, ont contesté son existence.

Comme Newton, Leibniz admettait le concept de Temps absolu $\mathcal{T}$, mais rejetait celui d'Espace absolu $\mathcal{E}$. De son vivant, il n'est pas parvenu à faire accepter ses vues concernant l'Espace et le mouvement, probablement parce qu'à son époque personne ne voyait comment donner à celles-ci une forme mathématique rigoureuse. Maintenant, nous pouvons le faire. Voici comment.

Nous admettrons qu'à chaque instant $t \in \mathcal{T}$, il existe un *Espace à l'instant* t, noté $\mathcal{E}_t$, qui a toutes les propriétés de l'espace euclidien de dimension 3 des géomètres.

Attention ! nous devons considérer comme disjoints, c'est-à-dire sans aucun élément en commun, les Espaces $\mathcal{E}_{t_1}$ et $\mathcal{E}_{t_2}$ à deux instants distincts t_1 et t_2, $t_1 \neq t_2$.

L'Espace-Temps de Leibniz, que nous noterons $\mathcal{U}$ (pour Univers), est la réunion, pour tous les instants $t \in \mathcal{T}$, des Espaces à l'instant t, $\mathcal{E}_t$. Ainsi, selon les conceptions de Leibniz, nous avons toujours un Espace-Temps, mais plus d'Espace absolu $\mathcal{E}$!

J'ai représenté, sur la figure 2,

– à gauche l'Espace-Temps de Newton $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$, avec ses deux projections $p_1 : \mathcal{E} \times \mathcal{T} \to \mathcal{E}$ et $p_2 : \mathcal{E} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$;
– à droite l'Espace-Temps de Leibniz $\mathcal{U}$, qui n'est muni que d'une seule projection naturelle sur le Temps $\mathcal{T}$, encore notée $p_2 : \mathcal{U} \to \mathcal{T}$. Les six lignes horizontales que tu peux voir sur cette figure sont les Espace $\mathcal{E}_t$, pour six valeurs différentes de t dans $\mathcal{T}$.

— Mais comment les Espaces aux différents instants sont-ils groupés pour former l'Espace-Temps de Leibniz $\mathcal{U}$? Leur empilement est-il arbitraire ?

— Non, cet empilement n'est pas du tout arbitraire. L'Univers de Leibniz est un espace affine de dimension 4, fibré sur le Temps $\mathcal{T}$, qui est un espace affine de dimension 1, par une application affine $p_2 : \mathcal{U} \to \mathcal{T}$. Ses fibres, les Espaces $\mathcal{E}_t = p_2^{-1}(t)$ aux divers instants $t \in \mathcal{T}$, sont des espaces affines euclidiens de dimension 3. La structure affine de $\mathcal{U}$ est déterminée par le *principe de l'inertie* dont nous avons déjà parlé. On peut formuler ce principe sous une forme évitant le recours à tout référentiel, en disant :

1. En hommage à Galileo Galilei, dit Galilée (1564–1642), père de la physique expérimentale moderne.

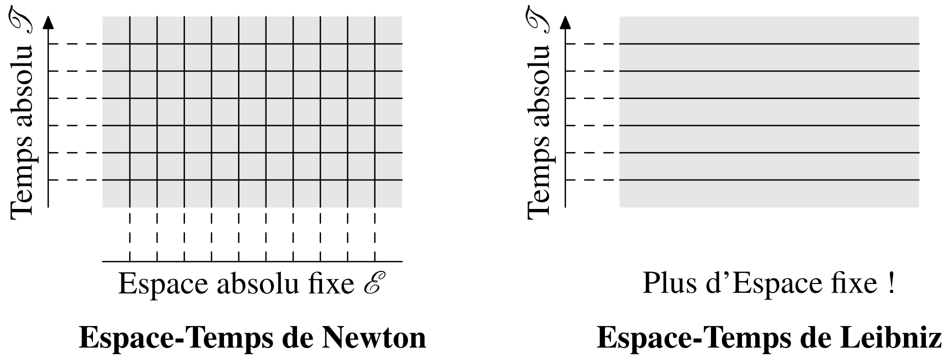


FIGURE 2 – Espaces-Temps de Newton et de Leibniz.

La ligne d'univers de tout point matériel libre est une droite.

Sous cette forme, le principe de l'inertie est applicable à l'Espace-Temps de Leibniz $\mathcal{U}$, tout autant qu'à celui de Newton $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$. Mieux, il *détermine* la structure affine de $\mathcal{U}$, car on montre que s'il existe sur $\mathcal{U}$ une structure affine telle la ligne d'univers de tout point matériel libre soit une droite, cette structure affine est unique. Une loi physique, le *principe de l'inertie*, se trouve ainsi incorporée à la géométrie de l'Espace-Temps $\mathcal{U}$.

En employant un référentiel R, les mécaniciens pouvaient considérer séparément l'Espace (lié à ce référentiel) et le Temps, et ainsi décomposer l'Espace-Temps de Leibniz en un produit de deux facteurs : l'Espace $\mathcal{E}_R$ lié au référentiel R, et le Temps absolu $\mathcal{T}$. C'est ce que j'ai essayé de représenter sur la figure 3 : chaque ligne oblique, sur cette figure, est la ligne d'univers d'un point matériel fixe dans le référentiel R ; elle correspond donc à un point de l'Espace $\mathcal{E}_R$ lié au référentiel R. Mais, bien sûr, l'Espace $\mathcal{E}_R$ lié au référentiel R n'a rien d'absolu : il dépend du choix dudit référentiel !

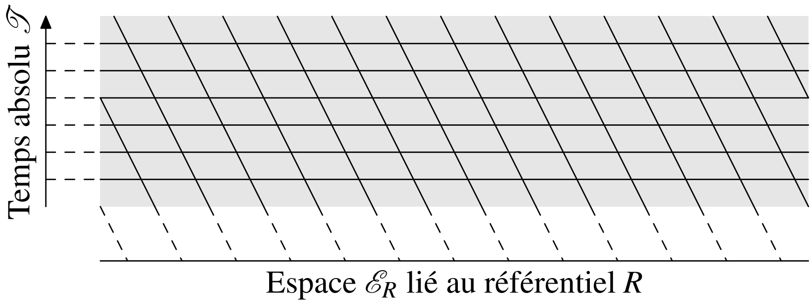


FIGURE 3 – Dans l'Espace-Temps de Leibniz, construction de l'Espace lié à un référentiel particulier.

L'usage immodéré de référentiels semble bien avoir empêché les Mécaniciens de voir clairement la distinction qu'il convient de faire entre les Espaces-Temps de Newton et de Leibniz. Avant 1905, bien peu nombreux ont été les scientifiques conscients du fait qu'en abandonnant le concept d'Espace absolu, ils avaient déjà radicalement changé le cadre conceptuel dans lequel sont décrits les mouvements :

– pour Newton, l'Espace-Temps $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$ n'était qu'une construction mathématique abstraite, sans grand intérêt (il ne l'utilisait pas), sans relation directe avec la réalité ; ce sont ses deux composantes, l'Espace absolu $\mathcal{E}$ et le Temps absolu $\mathcal{T}$ auxquels une signification physique était attribuée ;

– mais selon les conceptions de Leibniz, formulées comme ci-dessus, l'Espace-Temps $\mathcal{U}$ a une signification physique, le Temps absolu $\mathcal{T}$ aussi, mais l'Espace absolu n'en a pas puisqu'il n'existe plus.

3 La Relativité

Le grand physicien Albert Einstein (1879–1955) [1] a été conduit à abandonner l'Espace-Temps de Leibniz afin de concilier les théories utilisées dans deux domaines différents de la Physique : la Mécanique d'une part, l'Électromagnétisme et l'Optique d'autre part.

Le grand physicien écossais James Clerk Maxwell (1831–1879) a établi des équations montrant que les phénomènes électromagnétiques se propagent dans le vide sous forme d'ondes, à une vitesse finie, indépendante du mouvement de la source qui les a émis, la même dans toutes les directions. Il a compris que la lumière était une onde électromagnétique. Ses vues ont été confirmées par de nombreux résultats expérimentaux.

3.1 L'éther luminifère, une hypothèse vite abandonnée

Dans l'Espace-Temps de Leibniz (comme dans celui de Newton) les vitesses relatives s'ajoutent. Pour cette raison, la propriété de se propager à la même vitesse dans toutes les directions ne peut être vraie dans tous les référentiels. Les physiciens ont été conduits à penser que c'était par rapport à un référentiel bien particulier que la lumière se propageait à la même vitesse dans toutes les directions. Ils ont imaginé l'existence d'un milieu très subtil, appelé *éther luminifère*, imprégnant toute chose, servant de support aux ondes électomagnétiques, et ont supposé que c'est relativement au référentiel dans lequel l'éther est au repos que les ondes électromagnétiques se propagent à la même vitesse dans toutes les directions. Cela revenait à admettre à nouveau l'existence de l'Espace fixe de Newton, identifié à l'éther, avec une complication supplémentaire car certains supposaient l'éther déformable au cours du Temps, car partiellement entraîné par les objets en mouvement !

— Mais alors, grand-père, des mesures précises de la vitesse de la lumière dans plusieurs directions devraient permettre de déterminer la vitesse de la Terre par rapport à l'éther !

— Très juste ! Ces mesures ont été faites de nombreuses fois, notamment par Albert Abraham Michelson (1852–1931) et Edward Williams Morley (1838–1923) entre 1880 et 1887, et n'ont mis en évidence aucune vitesse de la Terre par rapport à l'hypothétique éther.

Ces résultats sont restés mal expliqués jusqu'en 1905, malgré de nombreuses tentatives, dont la plus intéressante est due à Hendrik Anton Lorentz (1853–1928) et George Francis FitzGerald (1851–1901). Ces deux physiciens ont proposé l'hypothèse suivante : lorsqu'un objet matériel rigide, par exemple une règle ou un banc d'optique, se déplace par rapport à l'éther, cet objet se contracte dans la direction de son déplacement.

— C'est donc cela, la contraction des longueurs dont mon prof' de physique a parlé !

— Non ! Pas du tout ! On entretient, à ce sujet, des idées fausses ! Pour Lorentz et FitzGerald, cette contraction était un phénomène réel, affectant vraiment les longueurs de tous les objets en mouvement par rapport à l'éther. Leur hypothèse a eu le mérite de mettre Einstein sur la bonne voie, mais elle est maintenant abandonnée, ainsi d'ailleurs que l'hypothèse de l'existence d'un éther luminifère ! Nous verrons bientôt qu'en Relativité restreinte, la contraction des longueurs et la dilatation des temps ne sont que des apparences, des effets de perspective ! Un peu comme lorsque tu regardes une règle de 20 centimètres en la tenant à bout de bras : pour une même distance entre ton oeil et le centre de la règle, si la ligne droite allant de ton oeil à ce centre n'est pas perpendiculaire à la règle, tu la verras plus courte que si cette ligne droite est perpendiculaire à la règle. Et même, à la limite, lorsque la règle es t placée le long de la ligne droite allant de ton oeil à son centre, elle te semble réduite à un point. En Relativité restreinte, la contraction apparente des longueurs et la dilatation apparente des temps ont la même origine que ces variations apparentes de la longueur d'une règle avec l'angle sous lequel on l'observe.

3.2 L'Espace-Temps de Minkowski

En 1905, Einstein a, le premier [2], compris que pour expliquer les résultats des expériences de Michelson et Morley, on devait modifier en profondeur les propriétés attribuées à l'Espace et au Temps. L'idée nouvelle qu'il a introduite, tout à fait révolutionnaire en 1905, peut, aujourd'hui, sembler assez naturelle, si l'on se dit :

En passant de l'Espace-Temps de Newton à celui de Leibniz, nous avons reconnu que l'Espace n'est pas absolu, mais lié au choix d'un référentiel. Pourquoi ne pas garder l'Espace-Temps en lui attribuant de nouvelles propriétés, en admettant que le Temps, lui non plus, n'est pas absolu, mais dépend du choix d'un référentiel ?

— Mais si nous n'avons plus de Temps absolu, quelles propriétés conserve notre Espace-Temps ?

— En 1905, Einstein admettait encore, implicitement, que l'Espace-Temps était un espace affine de dimension 4, que nous appellerons *Espace-Temps de Minkowski*, et que nous noterons $\mathcal{M}$. Il admettait aussi que les *translations* de l'Espace-Temps ne modifient pas ses propriétés. Il admettait également que dans cet Espace-Temps, le principe de l'inertie restait valable, à condition de l'énoncer sous la forme n'utilisant aucun référentiel :

la ligne d'univers d'un point matériel libre est une droite.

Il conservait aussi la notion de *référentiel galiléen*. Dans $\mathcal{M}$, un référentiel galiléen est déterminé par la donnée d'une direction de droite (pas n'importe quelle droite, une *droite de genre temps*, comme nous allons le voir bientôt). La donnée d'un référentiel galiléen R permet de décomposer l'Espace-Temps de Minkowski $\mathcal{M}$ en un produit $\mathcal{E}_R \times \mathcal{T}_R$ d'un Espace $\mathcal{E}_R$, de dimension 3, et d'un Temps $\mathcal{T}_R$, de dimension 1, qui tous deux dépendent du référentiel galiléen R. Je te rappelle que dans l'Espace-Temps de Leibniz $\mathcal{U}$, la donnée d'un référentiel galiléen R permettait de décomposer $\mathcal{U}$ en un produit $\mathcal{E}_R \times \mathcal{T}$ d'un Espace $\mathcal{E}_R$ dépendant du choix du référentiel R, et du Temps absolu $\mathcal{T}$ qui, lui, ne dépendait pas de R. C'est en cela que l'Espace-Temps de Minkowski $\mathcal{M}$ se distingue de l'Espace-Temps de Leibniz $\mathcal{U}$.

Sous ces hypothèses, les propriétés de l'Espace-Temps $\mathcal{M}$ sont conséquences des deux principes :

- le *Principe de relativité :* toutes les lois physiques s'expriment de la même manière dans tous les référentiels galiléens ;
- le *Principe de constance de la vitesse de la lumière :* le module de la vitesse de la lumière dans le vide est une constante universelle, ne dépendant ni du mouvement de la source qui a émis cette lumière, ni du référentiel galiléen dans lequel cette vitesse est évaluée.

2. Le grand mathématicien Jules Henri Poincaré (1854–1912) a, lui aussi, la même année, formulé des idées très proches, sans aller jusqu'à proposer explicitement l'abandon du Temps absolu.

— Mais comment la donnée d'une direction de droite peut-elle déterminer un référentiel galiléen, puisque nous n'avons plus de Temps absolu ?

— C'est le principe de constance de la vitesse de la lumière qui va permettre cette détermination. Je vais t'expliquer comment. Mais je dois d'abord t'indiquer quels sont les trois types de droites de l'Espace-Temps de Minkowski $\mathcal{M}$.

3.3 Droites de lumière, de genre temps et de genre espace

Appelons *droites de lumière* les droites de $\mathcal{M}$ qui sont des lignes d'univers possibles de signaux lumineux. Les droites de lumière qui passent par un événement A forment un cône (de dimension 3) ayant pour sommet l'événement A ; les deux nappes de ce cône sont appelées le *demi-cône futur* et le *demi-cône passé* de sommet A. La figure 4 représente le cône de lumière de sommet A dans deux schémas simplifiés :

- à gauche, dans un Espace-Temps schématique de dimension 2, ou dans une coupe de l'Espace-Temps "vrai" $\mathcal{M}$ de dimension 4 par un plan de genre temps [3], ce cône de lumière est la réunion des deux droites $\mathcal{L}^d$ et $\mathcal{L}^g$, lignes d'univers de signaux lumineux passant par A et allant, respectivement, vers la droite et vers la gauche ;
- à droite, j'ai représenté une vue en perspective du cône de lumière de sommet A dans un Espace-Temps schématique de dimension 3.

Je te laisse le soin d'imaginer le cône de lumière de sommet A dans l'Espace-Temps de Minkowski "vrai", de dimension 4. Le cône de lumière ayant pour sommet un autre événement B se déduit du cône de lumière de sommet A par la translation qui envoie A sur B.

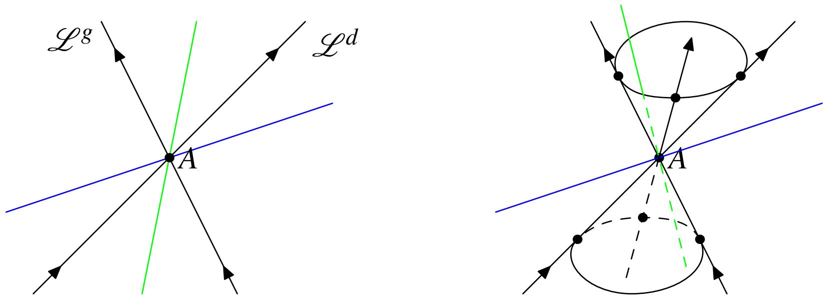


Schéma où $\mathscr{M}$ est de dimension 2 Schéma où $\mathscr{M}$ est de dimension 3

FIGURE 4 – Cônes de lumière ; en vert, droites de genre temps et en bleu, droites de genre espace.

Outre les droites de lumière, on distingue deux autres types de droites dans $\mathcal{M}$:

- les *droites de genre temps*, contenues dans l'intérieur du cône de lumière ayant pour sommet un quelconque de leurs points ; j'en ai représenté une, en vert, sur la figure 4 ;
- et les *droites de genre espace*, extérieures au cône de lumière ayant pour sommet un de leurs points ; j'en ai représenté une, en bleu, sur la figure 4.

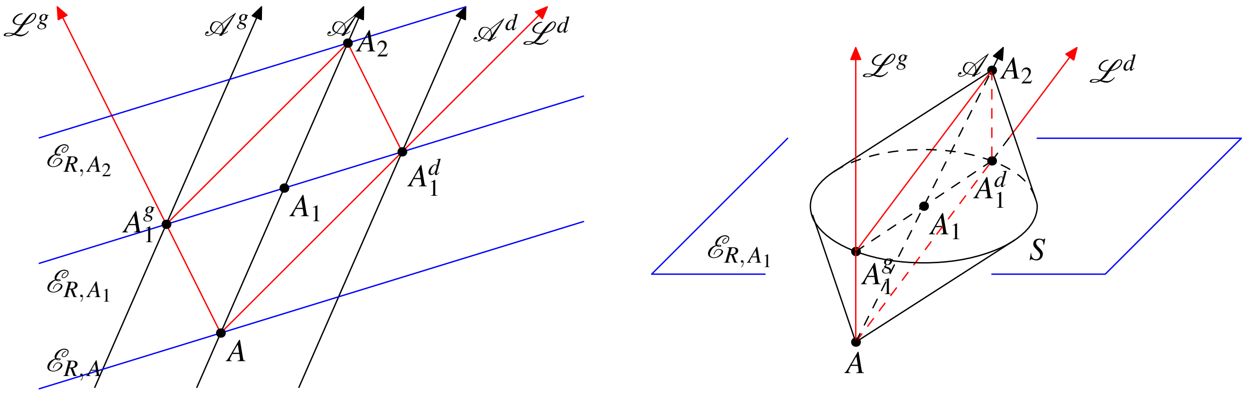
3.4 Référentiels galiléens dans l'Espace-Temps de Minkowski

Je peux maintenant t'expliquer comment la donnée d'une droite de genre temps $\mathcal{A}$, ou plus précisément la donnée de la direction de cette droite, détermine un référentiel ga-

3. Cela signifie que ce plan contient des droites qui sont des lignes d'univers possibles de points matériels libres.

liléen. Les objets au repos relativement à ce référentiel sont ceux dont tous les points ont pour lignes d'univers des droites parallèles à $\mathcal{A}$. Convenons d'appeler *ligne isochore*[4] de notre référentiel chaque droite parallèle à $\mathcal{A}$. Chaque isochore est un ensemble d'événements qui ont tous lieu au même point de l'Espace $\mathcal{E}_R$ relatif au référentiel R.

La connaissance des droites isochores ne suffit pas à déterminer notre référentiel. Nous devons encore préciser, pour chaque événement $M \in \mathcal{M}$, quel est l'ensemble de tous les autres événements $M' \in \mathcal{M}$ ayant lieu au même instant que M, pour le Temps $\mathcal{T}_R$ relatif à notre référentiel. On l'appellera le *sous-espace isochrone* contenant l'événement M, relativement au référentiel R, et on le notera $\mathcal{E}_{R,M}$. Les sous-espaces isochrones sont des sous-espace affines de dimension 3 de $\mathcal{M}$, tous parallèles les uns aux autres, déterminés par la propriété suivante : *les distances, évaluées dans le référentiel R, parcourues par la lumière dans deux directions opposées, pendant un même intervalle de temps (évalué lui aussi dans le référentiel R), sont égales.*



Section plane **Vue en perspective en 3 dimensions**

FIGURE 5 – Construction des isochrones d'un référentiel galiléen

Dans un Espace-Temps schématique de dimension 2, la construction des sous-espaces isochrones, représentée sur la partie gauche de la figure 5, est facile. Traçons les deux droites de lumière $\mathcal{L}^g$ et $\mathcal{L}^d$ passant par un événement A situé sur la droite $\mathcal{A}$. Ce sont les lignes d'univers de signaux lumineux passant par A et se dirigeant, respectivement, vers la gauche et vers la droite. Elles sont représentées en rouge sur la partie gauche de la figure 5. Prenons, sur la droite $\mathcal{A}$, un événement A_1 situé, par exemple, dans le futur de A. Construisons le parallélogramme dont deux côtés sont portés par les droites $\mathcal{L}^g$ et $\mathcal{L}^d$ et dont le centre est A_1. Les isochrones sont toutes les droites parallèles à la diagonale de genre espace, $A_1^g A_1^d$, de ce parallélogramme. Sur la partie gauche de la figure 5, j'ai représenté en bleu trois de ces lignes, $\mathcal{E}_{R,A}$, $\mathcal{E}_{R,A_1}$ et $\mathcal{E}_{R,A_2}$.

— Peux-tu expliquer pourquoi ?

— Voyons quelles sont les distances parcourues, pendant l'intervalle de temps qui sépare les événements A et A_1, par deux signaux lumineux issus de l'événement A et se dirigeant, respectivement, vers la gauche et vers la droite. L'intervalle de temps séparant A et A_1 doit, bien sûr, être évalué dans le référentiel déterminé par la direction de la droite

4. Le mot *isochore*, employé en thermodynamique pour désigner les réactions ayant lieu à volume constant, est utilisé ici pour désigner un ensemble d'événements qui ont lieu en un même emplacement spatial, à divers instants ; c'est le pendant du mot *isochrone* qui désigne un ensemble d'événements ayant lieu au même instant à divers emplacements spatiaux.

$\mathcal{A}$. Le signal lumineux qui va vers la gauche parcourt, pendant cet intervalle de temps, la distance $A_1A_1^g$, et le signal lumineux qui va cers la droite la distance $A_1A_1^d$. Ces distances sont égales, car $A_1^gA_1^d$ est la diagonale du parallélogramme $AA_1^gA_2A_1^d$, dont le centre est A_1.

— Mais il me semble que le chemin parcouru par le signal lumineux qui va vers la gauche, pendant l'intervalle de temps qui sépare A et A_1, est le segment de droite AA_1^g, et non pas $A_1A_1^g$. Quant à celui qui va vers la droite, il parcourt le segment de droite AA_1^d, et non pas $A_1A_1^d$. Ne faudrait-il donc pas imposer l'égalité des segments de droite AA_1^g et AA_1^d, plutôt que celle des segments de droite $A_1A_1^g$ et $A_1A_1^d$?

— Certainement pas ! Nous devons exprimer l'égalité des distances parcourues par la lumière dans deux directions opposées de *l'Espace de notre référentiel*, pas dans l'Espace-Temps ! Les signaux lumineux issus de l'événement A parcourent, dans l'Espace-Temps, respectivement vers la gauche et vers la droite, les segments AA_1^g et AA_1^d de leurs lignes d'univers respectives, $\mathcal{L}^g$ et $\mathcal{L}^d$. Mais ce ne sont pas ces segments de droite dont nous devons exprimer l'égalité : cela n'aurait d'ailleurs aucun sens, car la structure affine de l'Espace-Temps ne nous permet de comparer entre eux deux segments de droite que lorsqu'ils sont portés par des droites parallèles. Nous devons décomposer chacun de ces deux segments de droite en une composante temporelle et une composante spatiale, relativement au référentiel galiléen déterminé par la direction de la droite $\mathcal{A}$. Afin d'exprimer que c'est pendant un même intervalle de temps (évalué dans le référentiel galiléen déterminé par $\mathcal{A}$) que la lumière s'est propagée le long de AA_1^g vers la gauche et de AA_1^d vers la droite, nous écrirons que les composantes *temporelles* de ces deux segments de droite sont égales. Et afin d'exprimer que ces deux signaux lumineux ont parcouru, dans l'Espace de notre référentiel, des distances égales dans deux directions opposées, nous écrirons que les composantes *spatiales* de AA_1^g et AA_1^d sont de même longueur. Soyons plus précis : mieux vaut considérer des segments de droite *orientés*, c'est-à-dire des vecteurs. Nous exprimerons alors que les composantes *temporelles* des vecteurs $\overrightarrow{AA_1^g}$ et $\overrightarrow{AA_1^d}$ sont égales, et que les composantes *spatiales* de ces deux vecteurs sont opposées. La construction que nous avons faite conduit bien à ce résultat, puisque les vecteurs $\overrightarrow{AA_1^g}$ et $\overrightarrow{AA_1^d}$ ont tous deux pour composante temporelle $\overrightarrow{AA_1}$, et ont pour composantes spatiales, respectivement, $\overrightarrow{A_1A_1^g}$ et $\overrightarrow{A_1A_1^d}$.

— Mais comment-donc fais-tu pour trouver ces composantes temporelles et spatiales ?

— Voyons, j'espère que tes profs de math ou de physique t'ont expliqué que pour décomposer un vecteur du plan en une somme de deux vecteurs, dont l'un est parallèle à une direction de droite D_1 et l'autre à une direction de droite D_2 non parallèle à D_1, il suffit de projeter ce vecteur sur D_1 parallèmement à D_2, et sur D_2 parallèlement à D_1 ! C'est ce que je fais ici : lorsque je projette $\overrightarrow{AA_1^g}$ sur la droite $\mathcal{A}$ parallèlement à la droite $\mathcal{E}_{R,A_1}$, j'obtiens pour projection $\overrightarrow{AA_1}$; et lorsque je projette $\overrightarrow{AA_1^g}$ sur la droite $\mathcal{E}_{R,A_1}$ parallèlement à la droite $\mathcal{A}$, j'obtiens pour projection $\overrightarrow{A_1A_1^g}$. Je te laisse le soin de faire pareil pour les projections de $\overrightarrow{AA_1^d}$.

— D'accord, j'ai compris ! Et qu'en est-il pour le "vrai" Espace-Temps de Minkowski, de dimension 4 ?

— La contruction que j'ai expliquée pour un Espace-Temps schématique de dimension 2 s'applique dans chaque section de l'Espace-Temps de Minkowski "vrai" (de dimension 4) par un plan contenant la droite $\mathcal{A}$ (ou, plus généralement, par un plan parallèle à $\mathcal{A}$). Cette construction nous donne la direction des droites qui sont les intersections de ce plan avec les sous-espaces isochrones de notre référentiel. On peut aussi expliquer cette construction comme indiqué sur la partie droite de la figure 5. On prend, sur la droite $\mathcal{A}$, l'événement A_2 tel que A_1 soit le milieu de AA_2, et on considère le demi-cône de lumière passé de sommet A_2. Ce demi-cône coupe le demi-cône de lumière futur de sommet A selon une sphère S, de dimension 2. Cette sphère est contenue dans un hyperplan affine (c'est-à-dire un sous-espace affine de dimension 3) unique, noté $\mathcal{E}_{A_1}$. Cet hyperplan, de genre espace, est le sous-espace isochrone contenant l'événement A_1 de notre référentiel. Les autres sous-espaces isochrones de ce référentiel sont tous les hyperplans parallèles à $\mathcal{E}_{A_1}$.

— Bon, je pense avoir à peu près compris. Mais où donc sont le Temps $\mathcal{T}_R$ et l'Espace $\mathcal{E}_R$ de notre référentiel ? et comment peux-tu dire que l'Espace-Temps de Minkowski $\mathcal{M}$ se décompose en un produit de $\mathcal{E}_R$ et de $\mathcal{T}_R$?

— L'Espace $\mathcal{E}_R$ de notre référentiel est, tout simplement, l'ensemble de toutes les lignes isochores de notre référentiel, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les droites de $\mathcal{M}$ parallèles à $\mathcal{A}$. En effet, chacune de ces droites est l'ensemble des événements ayant lieu en un endroit spécifié de notre Espace $\mathcal{E}_R$; cela nous permet d'identifier chacune de ces droites à un point de $\mathcal{E}_R$. De même, le Temps $\mathcal{T}_R$ de notre référentiel est l'ensemble de tous les sous-espaces isochrones de notre référentiel, c'est-à-dire l'ensemble de tous les hyperplans de $\mathcal{M}$ parallèles à $\mathcal{E}_{R,A_1}$. L'Espace-Temps de Minkowski peut être identifié au produit $\mathcal{E}_R \times \mathcal{T}_R$ parce que la donnée d'un couple formé par un sous-espace isochrone et une droite isochore de $\mathcal{M}$ détermine un élément unique de $\mathcal{M}$, l'événement en lequel ce sous-espace et cette droite se coupent ; et inversement, la donnée d'un événement, élément de $\mathcal{M}$, détermine un unique couple formé d'un sous-espace isochrone et d'une droite isochore, le sous-espace isochrone et la droite isochore qui contiennent cet événement.

— Que se passe-t-il si on change de référentiel galiléen ?

— Comme dans l'Espace-Temps de Leibniz, la direction des droites isochores du nouveau référentiel (les lignes d'univers des points au repos par rapport au nouveau référentiel) n'est plus la même que celle des droites isochores de l'ancien référentiel. Mais en plus, la direction des sous-espace isochrones du nouveau référentiel n'est pas la même que celle des sous-espaces isochrones de l'ancien ! Pour cette raison, l'ordre chronologique de deux événements peut dépendre du référentiel galiléen dans lequel on l'apprécie !

3.5 Propriétés métriques de l'Espace-Temps de Minkowski

Nous devons aller plus loin dans la comparaison des mesures faites dans deux référentiels galiléens différents. La structure affine de $\mathcal{M}$ nous permet de comparer des segments de droite portés par des droites parallèles. Cela ne suffit pas, car du point de vue du physicien, il est en principe possible de comparer des intervalles de temps mesurés dans deux référentiels galiléens différents, c'est-à-dire des segments de deux droites de genre temps non parallèles. Pour cela, on peut construire deux horloges identiques (en utilisant, par exemple, les raies spectrales d'atomes de même nature) et placer chacune de ces horloges de manière à ce qu'elle soit au repos dans son référentiel. Du point de vue du mathématicien, il y a donc encore quelque chose à préciser quant à la géométrie de l'Espace-Temps de Minkowski. C'est le Principe de Relativité qui va nous permettre de le faire.

Soient AA_1 et AB_1 deux segments de droite portés par les droites de genre temps $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$,

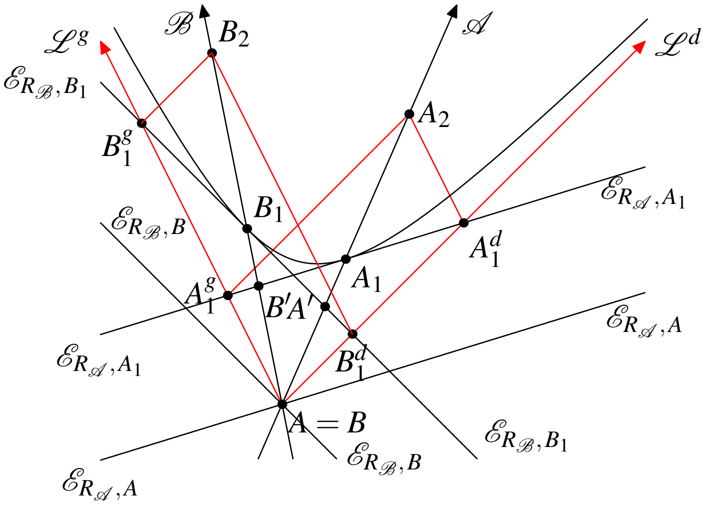


FIGURE 6 – Comparison des temps associés à deux référentiels galiléens.

qui se rencontrent en l'événement A. Soient $R_\mathcal{A}$ et $R_\mathcal{B}$ les référentiels galiléens déterminés par les directions de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, respectivement. Supposons que les intervalles de temps correspondant à AA_1 mesuré dans le référentiel $R_\mathcal{A}$, et à AB_1 mesuré dans $R_\mathcal{B}$, soient égaux. Soit B' l'événement intersection de la droite de genre temps $\mathcal{B}$ et du sous-espace isochrone $\mathcal{E}_{R_\mathcal{A},A_1}$ du référentiel galiléen $R_\mathcal{A}$ contenant l'événement A_1 (figure 6). Dans le référentiel $R_\mathcal{A}$, les événements A_1 et B' ont lieu au même instant ; par suite, les intervalles de temps, mesurés dans ce référentiel, qui séparent les événements A et A_1 d'une part, A et B' d'autre part, sont égaux. Donc l'intervalle de temps qui sépare les événements A et B_1 apparaît plus long que l'intervalle de temps qui sépare les événements A et A_1, lorsque ces deux intervalles de temps sont mesurés dans le référentiel $R_\mathcal{A}$; le rapport de ces deux intervalles de temps est $\dfrac{AB_1}{AB'}$. Remarque bien que ce rapport a bien un sens en géométrie affine, car les intervalles AB_1 et AB' sont portés par la même droite $\mathcal{B}$. On l'appelle *rapport de dilatation du temps* du référentiel galiléen $R_\mathcal{B}$, observé dans le référentiel galiléen $R_\mathcal{A}$.

— C'est donc cela, la dilatation des temps ?

— Oui, c'est cela. Remarque bien que cette dilatation n'est qu'apparente, comme un effet de perspective. Mais permets-moi de terminer le raisonnement qui va préciser comment comparer des segments de deux droites de genre temps non parallèles. Échangeons les rôles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Soit A' l'événement intersection de la droite de genre temps $\mathcal{A}$ et du sous-espace isochrone $\mathcal{E}_{R_\mathcal{B},B_1}$ du référentiel galiléen $R_\mathcal{B}$ contenant l'événement B_1. Le rapport de dilatation du temps du référentiel galiléen $R_\mathcal{A}$ observé dans le référentiel galiléen $R_\mathcal{B}$ est $\dfrac{AA_1}{AA'}$. D'après le Principe de Relativité, nous devons avoir

$$\frac{AA_1}{AA'} = \frac{AB_1}{AB'},$$

car les deux référentiels galiléens $R_\mathcal{A}$ et $R_\mathcal{B}$ doivent jouer le même rôle, chacun vis-à-vis de l'autre.

D'après une propriété bien connue des hyperboles, cette égalité est vérifiée *si et seulement si* A_1 *et* B_1 *sont sur un même arc d'hyperbole ayant pour asymptotes les deux droites de lumière* $\mathcal{L}^d$ *et* $\mathcal{L}^g$ (qui se coupent en A et sont contenues dans le plan qui contient les deux droite de genre temps $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$). Ou, plus généralement, sur une même nappe d'hyperboloïde ayant le cône de lumière de sommet A comme cône asymptote.

— Peux-tu m'expliquer la preuve de cette "propriété bien connue des hyperboles", qui pour moi est nouvelle ?

— Bien volontiers, si tu acceptes de suivre attentivement quelques petits calculs. Soient $\overrightarrow{e_d}$ et $\overrightarrow{e_g}$ deux vecteurs non nuls, parallèles, respectivement, à $\mathcal{L}^d$ et à $\mathcal{L}^g$, dirigés vers le futur. Je vais faire un peu de calcul vectoriel dans le plan engendré par les deux droites concourantes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, en utilisant le repère affine $(A, \overrightarrow{e_d}, \overrightarrow{e_g})$. Dans ce repère affine, soient a^d et a^g les coordonnées de A_1, b^d et b^g celles de B_1. Cela veut dire que

$$\overrightarrow{AA_1} = a^d\overrightarrow{e_d} + a^g\overrightarrow{e_g}\,, \qquad \overrightarrow{AB_1} = b^d\overrightarrow{e_d} + b^g\overrightarrow{e_g}\,.$$

Puisque A_1 et B_1 sont dans le futur de A et que $\overrightarrow{e_d}$ et $\overrightarrow{e_g}$ sont dirigés vers le futur, a^d, a^g, b^d et b^g sont strictement positifs. Posons

$$\frac{AA'}{AA_1} = \lambda\,, \qquad \frac{AB'}{AB_1} = \mu\,.$$

Nous avons :

$$\overrightarrow{AA'} = \lambda\overrightarrow{AA_1} = \lambda(a^d\overrightarrow{e_d} + a^g\overrightarrow{e_g})\,.$$

Calculons $\overrightarrow{B_1A'}$ en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{B_1A'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB_1} = (\lambda a^d - b^d)\overrightarrow{e_d} + (\lambda a^g - b^g)\overrightarrow{e_g}\,.$$

Puisque B_1 et A' se trouvent sur la droite qui joint B_1^g et B_1^d, les vecteurs $\overrightarrow{B_1A'}$ et $\overrightarrow{B_1^gB_1^d}$ sont parallèles. Dans le repère affine $(A, \overrightarrow{e_d}, \overrightarrow{e_g})$, les coordonnées de B_1^d sont $(2b^d, 0)$, et celles de B_1^g sont $(0, 2b^g)$. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{B_1^gB_1^d} = \overrightarrow{AB_1^d} - \overrightarrow{AB_1^g} = 2b^d\overrightarrow{e_d} - 2b^g\overrightarrow{e_g}\,.$$

En exprimant que les vecteurs $\overrightarrow{B_1A'}$ et $\overrightarrow{B_1^gB_1^d}$ sont parallèles, nous obtenons donc

$$\frac{\lambda a^d - b^d}{2b^d} = -\frac{\lambda a^g - b^g}{2b^g}\,.$$

Nous en tirons l'expression de λ :

$$\lambda = \frac{2b^db^g}{a^db^g + a^gb^d}\,.$$

En échangeant les rôles de A_1 et B_1, ainsi que de A' et B', nous obtenons de même

$$\mu = \frac{2a^da^g}{b^da^g + b^ga^d}\,.$$

Nous voyons ainsi que l'égalité

$$\frac{AA_1}{AA'} = \frac{AB_1}{AB'}\,,$$

c'est-à-dire l'égalité $\lambda = \mu$, est vérifiée si et seulement si

$$a^da^g = b^db^g\,,$$

ce qui exprime que A_1 et B_1 sont sur une même branche d'hyperbole ayant pour asymptotes les demi-droites $\mathcal{L}^g$ et $\mathcal{L}^d$.

— Voilà une affirmation bien péremptoire ! Pourquoi donc ?

— Voyons, c'est évident comme tu vas le voir si j'utilise des notations plus familières ! Dans un plan, prenons deux axes (pas nécessairement orthogonaux) $x'Ox$ et $y'Oy$. Choisissons, sur chacun de ces axes, une unité de longueur (ce qui équivaut à prendre un vecteur non nul parallèle à chacun de ces axes pour vecteur de base). Notons x et y les coordonnées d'un point courant. L'équation d'une branche d'hyperbole, contenue dans la partie du plan $x > 0$ et $y > 0$, ayant pour asymptotes les demi-axes Ox et Oy, est de la forme

$$xy = k\,, \quad \text{avec } k \text{ constante strictement positive}\,, \quad \text{et} \quad x > 0\,, \quad y > 0\,.$$

Dans le problème qui nous intéresse, l'origine O est l'événement A, nos demi-axes Ox et Oy sont les demi-droites $\mathcal{L}^d$ et $\mathcal{L}^g$, a^d et a^g sont les coordonnées de A_1, b^d et b^g celles de B_1. La relation

$$a^d a^g = b^d b^g$$

exprime donc bien que A_1 et B_1 sont sur une même branche d'hyperbole ayant $\mathcal{L}^d$ et $\mathcal{L}^g$ pour asymptotes !

— Tu as raison, c'est évident en effet ! Si je comprends bien, grand-père, lorsqu'on a choisi AA_1 pour unité de temps sur la droite de genre temps $\mathcal{A}$, cela détermine l'unité de temps sur toute autre droite de genre temps passant par A. Peut-on aussi comparer deux segments de droite portés par deux droites de genre espace non parallèles ?

— Oui, bien sûr. On peut faire pour des segments de deux droites de genre espace non parallèles un raisonnement tout à fait semblable à celui que nous avons fait pour des segments de deux droites de genre temps. On met en évidence un *rapport de contraction des longueurs* d'un référentiel $R_{\mathcal{B}}$ observées dans un référentiel $R_{\mathcal{A}}$. En échangeant les rôles des deux référentiel, on établit le résultat suivant. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux droites de genre temps se rencontrant en l'événement A. Soient $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ deux droites de genre espace passant par l'événement A, appartenant à l'Espace à l'instant où a lieu l'événement A, respectivement, du référentiel $R_{\mathcal{A}}$ déterminé par $\mathcal{A}$ et du référentiel $R_{\mathcal{B}}$ déterminé par $\mathcal{B}$. Soient AA^d et AB^d deux segments de droite d'origine A portés, respectivement, par les droites $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$. Mesurés, respectivement, dans le référentiel $R_{\mathcal{A}}$ et dans le référentiel $R_{\mathcal{B}}$, ces deux segments de droite sont de même longueur *si et seulement si A^d et B^d sont sur un même hyperboloïde à une nappe ayant pour cône asymptote le cône de lumière de sommet A.*

Plus simplement, on peut remarquer que sur les droites de genre espace, la comparaison des distances découle de celle des durées : on mesure une distance par la durée mise par la lumière pour la parcourir. La contraction apparente des longueurs apparaît alors comme une conséquence de la dilatation apparente des temps

4 Conclusion

La comparaison des durées et des distances présentée ci-dessus permet d'introduire, de manière très naturelle, la métrique pseudo-euclidienne de l'espace de Minkowski. Les figures que nous avons présentées permettent très aisément d'expliquer la contraction apparente des longueurs et la dilatation apparente des temps, lors d'un changement de référentiel galiléen.

Parmi les arcs de courbe de genre temps qui joignent deux événements (dont l'un est dans le futur de l'autre), *la ligne droite est le plus long chemin (en temps propre) allant de l'un de ces événements à l'autre*. Cette propriété permet de comprendre aisément, avec très peu de calculs, la propriété improprement appelée "paradoxe des jumeaux de Langevin".

La Relativité restreinte conduit à l'impossibilité de transmettre à distance des signaux à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Cela exclut l'existence de corps parfaitement rigides (car en déplaçant un de ces corps, on pourrait transmettre instantanément un signal entre ses deux extrémités). Cela conduit à remettre en question la structure euclidienne de l'Espace associé à un référentiel galiléen, et même l'existence de lignes droites, donc la structure affine de l'Espace-Temps. En introduisant certaines idées nouvelles (essentiellement, le Principe d'équivalence), il semble possible d'exposer les idées de base de la Relativité Générale sous une forme compréhensible par les enfants (de 8 à 108 ans).

Références

[1] Einstein, A., Lorentz, H.A., Weyl, H., Minkowski, H., *The Principles of Relativity*, une collection d'articles originaux sur les théories de la relativité restreinte et générale, commentés par A. Sommerfeld. Methuen and Company, 1923. Réimprimé par Dover Publications, Inc., New York.

[2] Newton, Isaac, *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, tomes I et II, traduit par Madame la Marquise du Chastellet, chez Desaint et Saillant, Paris, 1759. Réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1990.

[3] Poincaré, Henri, *La Mécanique nouvelle*, livre contenant le texte d'une conférence faite au congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences (Lille, 1909), l'article du 23 Juillet 1905 *Sur la dynamique de l'électron*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **XXI** (1906), et la Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ayant le même titre, datée du 15 Juin 1905 ; Gauthier-Villars, Paris, 1924 ; réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1989.