Théorème de Chebotarev effectif

Bruno Winckler *

7 novembre 2013

ABSTRACT : Let K be a number field, and L be a finite normal extension of K with Galois group G. It is known that the number of Frobenius automorphisms corresponding to prime ideals, whose norms are less than x, is equivalent to the logarithmic integral as x tends to infinity, and these automorphisms are well-distributed among the conjugacy classes of G : this is the Chebotarev theorem. The purpose of this paper is to compute the absolute constants of the error term appearing in a previous work about this theorem, due to Lagarias and Odlyzko.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Fil de la preuve **3**

3 Fonctions L d'Artin et transformées de Mellin **4**

4 Réduction au cas des fonctions L de Hecke **7**

5 L'intégrale sur un contour **14**

6 La formule explicite **17**

7 Les régions sans zéros **20**

8 Estimations finales **21**

1 Introduction

La répartition des nombres et idéaux premiers est un problème récurrent en théorie des nombres. Par exemple, on sait depuis le XIX^e siècle que la quantité de nombres premiers inférieurs à x est asymptotiquement équivalente à $\frac{x}{\ln(x)}$, tandis que le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet affirme que les nombres premiers se répartissent « uniformément » dans chaque classe de congruence possible. Le théorème de densité de Chebotarev, prouvé dans [Che] en 1926, généralise les résultats de cette nature à l'ensemble des idéaux premiers d'une extension galoisienne L/K de corps de nombres : les automorphismes de Frobenius associés aux idéaux premiers par la théorie algébrique des corps se répartissent « uniformément » dans chaque classe de conjugaison du groupe

*Université Bordeaux 1, Talence, bruno.winckler@math.u-bordeaux1.fr

de Galois. Ce théorème a de nombreuses applications, par exemple dans la théorie des courbes elliptiques ou des formes modulaires, comme l'illustre [Ser], et ceci suffit à justifier la recherche d'un développement asymptotique aussi précis que possible. Dans cette direction, [L & O] donne les deux premiers termes du développement asymptotique de la fonction de décompte de ces idéaux premiers à des constantes non explicites près, et [Œs] annonce une explicitation de ces constantes si on admet l'hypothèse de Riemann généralisée. En vue d'applications diophantiennes qui feront l'objet d'une étude ultérieure, on cherche à exhiber de telles constantes, et c'est l'objet de cet article. On précise le contexte ci-dessous.

Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres, d_L le discriminant absolu de L, n_L le degré de L sur $\mathbb{Q}$. Si G est le groupe de Galois de cette extension, on désigne un ensemble de G stable par conjugaison par la lettre C ; pour tout $x > 1$, la fonction $\pi_C(x)$ décompte le nombre d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de K de norme inférieure ou égale à x, qui ne se ramifient pas dans L, et tels que $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right] \in C$, où $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]$ est l'unique automorphisme de Galois (à conjugaison près) qui, réduit modulo $\mathfrak{p}$, coïncide avec l'automorphisme de Frobenius.

Si $C = G$, alors $\pi_C(x) = \pi_K(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ quand $x \to \infty$. Le théorème de Chebotarev énonce que plus généralement, on a

$$\pi_C(x) \sim \frac{|C|}{|G|}\frac{x}{\ln(x)} \text{ quand } x \to \infty.$$

Plus précisément, si $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ et $\zeta_L(s) = \prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(\mathrm{O}_L)\setminus\{0\}} (1 - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$, alors on a une forme effective, qui s'exprime à l'aide de l'éventuel zéro positif β de la fonction ζ_L tel que $0 < 1 - \beta \leq \frac{1}{4\ln(d_L)}$.

Théorème 1.1 (Théorème de Chebotarev effectif) *Conservons les notations ci-dessus. On a, pour tout* $x \geq \exp\left(8n_L(\ln(150867 d_L^{44/5}))^2\right)$,

$$\left|\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)\right| \leq \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x^\beta) + C_0 x \exp\left(-\frac{1}{99}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right),$$

avec $C_0 = 783846699796966 < 7{,}84 \cdot 10^{14}$.

On en sait un peu plus sur β : d'après [Sta], page 148, il existe une constante absolue et effectivement calculable c telle que $\beta < 1 - \frac{1}{c d_L^{1/n_L}}$; d'après [B & G], il est fort probable que $c = \frac{\pi^2}{6}$ convienne. Le terme d'erreur est nettement plus petit si on suppose que l'hypothèse de Riemann est vérifiée pour ζ_L :

Théorème 1.2 *Supposons que l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie pour* ζ_L. *Alors, pour tout* $x \geq 2$,

$$\begin{aligned}\left|\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)\right| \quad &\leq \quad \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\Big[\left(32 + \frac{181}{\ln(x)}\right)\ln(d_L) \\ &+ \quad \left(28\ln(x) + 330 + \frac{1655}{\ln(x)}\right)n_L\Big].\end{aligned}$$

Remarque. Dans [Œs], Oesterlé énonce même, sans démonstration,

$$\left|\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)\right| \leq \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\left(\ln(d_L)\left(\frac{1}{\pi} + \frac{5{,}3}{\ln(x)}\right) + n_L\left(2 + \frac{\ln(x)}{2\pi}\right)\right).$$

Ces deux théorèmes sont démontrés dans [L & O], mais avec des constantes non explicites. Pour trouver ces constantes, on suit la stratégie de démonstration proposée par [L & O], en soignant les majorations.

On remercie F. Pazuki, P. Autissier pour leurs conseils avisés, et K. Belabas pour l'intérêt manifesté pour ces résultats.

2 Fil de la preuve

L'essentiel de la preuve consiste en la recherche d'une formule asymptotique avec un terme d'erreur explicite pour $\psi_C(x) = \psi_C(x, L/K)$, une sorte de fonction pondérée de décompte des puissances d'idéaux premiers, intimement liée à $\pi_C(x, L/K)$. Cette fonction classique est définie par

$$\psi_C(x, L/K) = \sum_{\substack{\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^m \leq x \\ \mathfrak{p} \text{ non ramifié} \\ \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]^m = C}} \ln(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})).$$

Conformément à [L & O], voici les étapes de la preuve :

1. La fonction ψ_C est très proche d'une transformée de Mellin inverse tronquée :

$$I_C(x, T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} F_C(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s,$$

   où la fonction F_C est construite en faisant une combinaison linéaire de dérivées logarithmiques de fonctions L, en profitant de la formule d'orthogonalité des caractères de G pour exclure tous les idéaux premiers qui ne nous intéressent pas ; c'est dans le même esprit que la preuve traditionnelle du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet est construite (voir [Ser2] par exemple). On cherche à étudier l'écart $R_1(x, T)$ entre ψ_C et I_C. Cet écart est explicité dans la section 3.

2. La fonction F_C peut, en fait, être écrite comme combinaison linéaire de dérivées logarithmiques de fonctions L de Hecke. Toutes les singularités de F_C, qui sont des pôles simples, apparaissent en tant que zéros et pôles de ζ_L. Cette étape est l'objet de la section 4, et est déjà entièrement explicite dans [L & O] : je citerai le résultat en question *sans le redémontrer*.

3. L'intégrale $I_C(x, T)$ diffère d'une intégrale sur un contour $B_C(x, T)$ par un terme d'erreur $R_2(x, T)$ (la fameuse étape où on « translate à gauche la droite (!) d'intégration »). On a ici besoin de résultats de densité sur les zéros non triviaux de ζ_L pour estimer R_2 ; c'est l'objet de la section 4.

4. L'intégrale sur un contour est évaluée grâce au théorème des résidus, dans la section 6. L'intégrande a pour pôles les zéros et les pôles de ζ_L ; on en tire un terme principal $\frac{|C|}{|G|}x$ (c'est le pôle $s = 1$) et une somme $S(x, T)$ indicée par les zéros de ζ_L à l'intérieur du contour de $B_C(x, T)$. On en déduit une formule explicite tronquée pour $\psi_C(x)$ avec un terme d'erreur inconditionnel, qui est donnée dans le théorème 6.1 de la section 6.

5. Il faut à présent étudier la somme sur les zéros $S(x,T)$. Si on suppose vraie l'hypothèse de Riemann généralisée, on peut directement aller à la section 8. Sinon, on a besoin de mieux connaître l'emplacement des zéros non triviaux : on dévoile des régions proches de $\mathrm{Re}(s)=1$ sans zéros pour ζ_L, dans la section 7.
6. La formule asymptotique $\psi_C(x) \sim \frac{|C|}{|G|}x$ avec un reste explicité en découle, par un bon choix de T en fonction de x, visant à minimiser les termes d'erreur. C'est traité dans la section 8.
7. Enfin, la formule explicite pour π_C s'obtient par une transformée d'Abel, à la fin de ce papier.

Les résultats non prouvés ici sont ceux qui ont déjà été explicités dans [L & O], auquel cas on renvoie le lecteur à ce papier. Dans un souci d'auto-suffisance, on rappelle néanmoins toutes les définitions nécessaires à la compréhension de la preuve. Enfin, quand on remplace les constantes réelles par des nombres rationnels, cela se fait systématiquement grâce aux fractions continuées réduites à l'ordre 3.

3 Fonctions L d'Artin et transformées de Mellin

Par commodité, on note $\pi_C(x) = \pi_C(x, L/K)$, $\psi_C(x) = \psi_C(x, L/K)$ et $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}$. Enfin, les sommes $\sum_{\mathfrak{p}}$ sont toujours indicées par les idéaux premiers non nuls de l'anneau des entiers de K.

L'article [L & O] prouve que la fonction F_C citée dans la section précédente a pour expression

$$F_C(s) = \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{m=1}^{\infty} \theta(\mathfrak{p}^m) \ln(\mathrm{N}(\mathfrak{p}))(\mathrm{N}(\mathfrak{p}))^{-ms},$$

où pour $\mathfrak{p}$ non ramifié dans L on a $\theta(\mathfrak{p}^m) = 1$ si $\left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]^m = C$, $\theta(\mathfrak{p}^m) = 0$ sinon, et $|\theta(\mathfrak{p}^m)| \leq 1$ si $\mathfrak{p}$ se ramifie dans L.

On voit alors que si on oublie un instant les facteurs correspondant aux idéaux premiers ramifiés, $\psi_C(x)$ est une somme partielle des coefficients de $F_C(s)$. Pour obtenir $\psi_C(x)$ à partir de $F_C(s)$, on utilise la version tronquée de la transformée inverse de Mellin :

Lemme 1 *Si $y > 0$, $\sigma > 0$ et $T > 0$, alors*

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s - 1\right| &\leq y^\sigma \min(1, T^{-1}|\ln(y)|^{-1}) \text{ si } y > 1,\\
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\right| &\leq \sigma T^{-1} \text{ si } y = 1,\\
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s\right| &\leq y^\sigma \min(1, T^{-1}|\ln(y)|^{-1}) \text{ si } 0 < y < 1.
\end{aligned}$$

Démonstration. Voir [Dav], pages 109–110, par exemple. □

Soient $\sigma_0 > 1$ et $x \geq 2$. On définit $I_C(x,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT} F_C(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s$. Comme la série de Dirichlet définissant F_C est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, on peut intégrer

terme à terme (suivant le lemme 3.1) pour obtenir

$$\begin{aligned}\left| I_C(x,T) - \sum_{\substack{\mathfrak{p},m \\ \mathrm{N}(\mathfrak{p})^m \leq x}} \theta(\mathfrak{p}^m)\ln(\mathrm{N}(\mathfrak{p})) \right| &\leq \sum_{\substack{\mathfrak{p},m \\ \mathrm{N}(\mathfrak{p}^m)=x}} (\ln(\mathrm{N}(\mathfrak{p})) + \sigma_0 T^{-1}) \\ &+ R_0(x,T), \end{aligned} \tag{1}$$

où

$$R_0(x,T) = \sum_{\substack{\mathfrak{p},m \\ \mathrm{N}(\mathfrak{p}^m)<x}} \left(\frac{x}{\mathrm{N}(\mathfrak{p}^m)}\right)^{\sigma_0} \min\left(1, T^{-1}\left|\ln\left(\frac{x}{\mathrm{N}(\mathfrak{p}^m)}\right)\right|^{-1}\right)\ln(\mathrm{N}(\mathfrak{p})). \tag{2}$$

La somme du membre de gauche dans (1) égale $\psi_C(x)$, aux termes ramifiés près. On a $\mathrm{N}(\mathfrak{p}) \geq 2$, et d'après [Ser] (prop. 5 du n°1.3) on a

$$\sum_{\mathfrak{p} \text{ ramifié}} \ln(\mathrm{N}(\mathfrak{p})) \leq \frac{2}{|G|}\ln(d_L).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\left| \sum_{\substack{\mathfrak{p},m \\ \mathrm{N}(\mathfrak{p}^m)\leq x}} \theta(\mathfrak{p}^m)\ln(\mathrm{N}(\mathfrak{p})) - \psi_C(x) \right| &\leq \sum_{\substack{\mathfrak{p},m \\ \mathfrak{p} \text{ ramifié} \\ \mathrm{N}(\mathfrak{p}^m)\leq x}} \ln(\mathrm{N}(\mathfrak{p})) \\ &\leq \sum_{\mathfrak{p} \text{ ramifié}} \ln(\mathrm{N}(\mathfrak{p})) \sum_{\substack{m \\ \mathrm{N}(\mathfrak{p}^m)\leq x}} 1 \\ &\leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \sum_{\mathfrak{p} \text{ ramifié}} \ln(\mathrm{N}(\mathfrak{p})) \\ &\leq \frac{2}{\ln(2)} \frac{\ln(x)\ln(d_L)}{|G|}. \end{aligned} \tag{3}$$

Comme il y a au plus n_K paires distinctes $(\mathfrak{p}, m)$ telles que $\mathrm{N}(\mathfrak{p}^m) = x$, on a

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p},m \\ \mathrm{N}(\mathfrak{p}^m)=x}} \ln(\mathrm{N}(\mathfrak{p})) \leq n_K \ln(x) \text{ et } \sum_{\substack{\mathfrak{p},m \\ \mathrm{N}(\mathfrak{p}^m)=x}} \sigma_0 T^{-1} \leq n_K \sigma_0 T^{-1}. \tag{4}$$

Alors, (1), (3) et (4) entraînent

$$\psi_C(x) = I_C(x,T) + R_1(x,T),$$

où

$$R_1(x,T) \leq \frac{2}{\ln(2)}\frac{\ln(x)\ln(d_L)}{|G|} + n_K\sigma_0 T^{-1} + n_K\ln(x) + R_0(x,T). \tag{5}$$

Le reste de la section est voué à estimer $R_0(x,T)$. À présent, on prend $\sigma_0 = 1 + \frac{1}{\ln(x)}$ (on a alors $x^{\sigma_0} = ex$). Écrivons $R_0(x,T) = S_1 + S_2 + S_3$, où S_1 est la somme dans (2) n'impliquant que les idéaux $\mathfrak{p}$ tels que $|\mathrm{N}(\mathfrak{p}^m) - x| \geq \frac{1}{4}x$, tandis que S_2 est indicé par ceux tels que $|x - \mathrm{N}(\mathfrak{p}^m)| \leq 1$, et S_3 récupère les termes restants.

Pour $\mathfrak{p}$ tel que $|\mathrm{N}(\mathfrak{p}^m) - x| \geq \frac{1}{4}x$, on a $\min\left(1, T^{-1}\left|\ln\left(\frac{x}{\mathrm{N}(\mathfrak{p})^m}\right)\right|^{-1}\right) \leq \frac{T^{-1}}{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}$. On obtient alors,

$$S_1 \leq \frac{xT^{-1}e}{\ln\left(\frac{5}{4}\right)} \sum_{\mathfrak{p},m} \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-m\sigma_0} \ln(\mathrm{N}(\mathfrak{p})) = \frac{xT^{-1}e}{\ln\left(\frac{5}{4}\right)} \left(-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(\sigma_0)\right).$$

La dernière majoration dépend de la comparaison entre $-\frac{\zeta_{\mathbb{Q}}'}{\zeta_{\mathbb{Q}}}(\sigma_0)$ et $(\sigma_0 - 1)^{-1}$. De l'analyse classique permet d'obtenir

Lemme 2 *On a, pour $\sigma > 1$,*

$$-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(\sigma) \leq -n_K \frac{\zeta_{\mathbb{Q}}'}{\zeta_{\mathbb{Q}}}(\sigma) \leq n_K(\sigma - 1)^{-1}.$$

Démonstration. La première inégalité est prouvée dans [L & O], page 426, et la deuxième inégalité se déduit de l'égalité

$$\zeta_{\mathbb{Q}}(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma - 1} - \sigma I(\sigma), \tag{6}$$

où $I(\sigma) = \int_1^\infty (t - [t]) t^{-\sigma-1} \mathrm{d}t$. Sachant cela, on obtient facilement

$$\frac{\zeta_{\mathbb{Q}}'}{\zeta_{\mathbb{Q}}}(\sigma) + \frac{1}{\sigma - 1} > \frac{1 - (2\sigma - 1)I(\sigma)}{\zeta(\sigma)(\sigma - 1)}$$

pour tout $\sigma > 1$. Comme $I(\sigma) = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\sigma}{\sigma-1} - \zeta_{\mathbb{Q}}(\sigma)\right)$, l'inégalité à démontrer se réduit à l'inégalité $\zeta_{\mathbb{Q}}(\sigma) \geq \frac{\sigma^2}{(\sigma-1)(2\sigma-1)}$, qui est un exercice simple d'analyse. □

Reprenons. On a

$$S_1 \leq \frac{xT^{-1}e}{\ln\left(\frac{5}{4}\right)} \left(-n_K \frac{\zeta_{\mathbb{Q}}'}{\zeta_{\mathbb{Q}}}(\sigma_0)\right) \leq \frac{e}{\ln\left(\frac{5}{4}\right)} n_K x T^{-1} \ln(x). \tag{7}$$

La majoration de S_2 est poussée plus loin que dans [L & O] assez facilement : on a, pour $x \geq 2$,

$$S_2 \leq 2n_K \ln(x+1) \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\sigma_0} \leq \frac{4e\ln(3)}{\ln(2)} n_K \ln(x). \tag{8}$$

Enfin, pour S_3 (qui est indicé par les idéaux $\mathfrak{p}$ tels que $1 < |N(\mathfrak{p}^m) - x| < \frac{x}{4}$) on a, en

vertu de l'inégalité $\left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} \leq \frac{2n}{|x-n|}$ (pour $2n \geq x$),

$$\begin{aligned} S_3 &\leq \frac{4e^2}{3^{1+1/\ln(2)}} T^{-1} \ln\left(\frac{5x}{4}\right) \sum_{\substack{n \\ 1<|n-x|<\frac{x}{4}}} \left|\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} \sum_{\substack{\mathfrak{p},m \\ \mathrm{N}(\mathfrak{p})^m=n}} 1 \\ &\leq \frac{8e^2}{3^{1+1/\ln(2)}} n_K T^{-1} \ln\left(\frac{5x}{4}\right) \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ 1<|n-x|<\frac{x}{4}}} \frac{n}{|x-n|} \\ &\leq \frac{8e^2}{3^{1+1/\ln(2)}} n_K T^{-1} \ln\left(\frac{5x}{4}\right) \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ 1<k<\frac{x}{4}}} \left(1+\frac{x}{k}\right) \\ &\leq \frac{8e^2}{3^{1+1/\ln(2)}} n_K T^{-1} x \ln\left(\frac{5x}{4}\right)\left(\frac{1}{4}+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &\leq \frac{8e^2}{3^{1+1/\ln(2)}} n_K T^{-1} x (\ln(x))^2 \end{aligned} \tag{9}$$

En regroupant (7), (8) et (9), on obtient une majoration de R_0, puis de R_1 :

$$\begin{aligned} R_0(x,T) &\leq \frac{4e\ln(3)}{\ln(2)} n_K \ln(x) + \left(\frac{8e^2}{3^{1+1/\ln(2)}} + \frac{e}{\ln\left(\frac{5}{4}\right)\ln(2)}\right) n_K T^{-1} x (\ln(x))^2 \\ &\leq \frac{69}{4} n_K \ln(x) + \frac{65}{3} n_K T^{-1} x (\ln(x))^2 \end{aligned} \tag{10}$$

valable pour tout $x \geq 2$ et tout $T \geq 1$, et donc,

$$R_1(x,T) \leq \frac{2}{\ln(2)} \frac{\ln(x)\ln(d_L)}{|G|} + \frac{73}{4} n_K \ln(x) + \frac{145}{6} n_K T^{-1} x (\ln(x))^2. \tag{11}$$

4 Réduction au cas des fonctions L de Hecke

Soit $g \in G$, et soit H le sous-groupe de G engendré par g, E le corps fixé par H, et notons avec la lettre χ les caractères irréductibles de H (qui sont de dimension 1).

Lemme 3 *On a*

$$F_C(s) = -\frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi} \bar{\chi}(g) \frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s, \chi, L/E).$$

Démonstration. Voir [L & O], pages 429–431. □

Ainsi, F_C s'écrit non seulement à l'aide de fonctions L d'Artin correspondant à des caractères non linéaires de G, mais on peut aussi les exprimer comme combinaison linéaire de dérivées logarithmes de fonctions L de Hecke *abéliennes*. L'article [L & O] utilise ceci pour améliorer la localisation et la densité des singularités de F_C.

On a donc

$$I_C(x,T) = -\frac{|C|}{|G|} \sum_{\chi} \bar{\chi}(g) \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT} \frac{x^s}{s} \frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s, \chi, L/E) \mathrm{d}s, \tag{12}$$

et on a vu que ψ_C s'écrit comme somme de cette intégrale et de R_1, qu'on a déjà estimé en (11). Il s'agit donc, à présent, d'évaluer les intégrales présentes dans (12). D'où la

nécessité de borner le nombre de singularités de $\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}$. C'est l'occasion de rappeler quelques propriétés classiques de ces fonctions L, qu'on peut retrouver dans le chapitre 5 de [Neu].

Comme les corps L et E sont fixés, on peut omettre L/E dans l'écriture de $\mathrm{L}(s,\chi,L/E)$. Soit $F(\chi)$ le conducteur de χ, et soit

$$A(\chi) = d_E \mathrm{N}_{E/\mathbb{Q}}(F(\chi))$$

On définit $\delta(\chi)$ comme étant égal à 1 pour le caractère principal, et 0 sinon. Enfin, pour rappel, pour chaque χ il existe deux entiers naturels $a(\chi)$ et $b(\chi)$ tels que $a(\chi)+b(\chi) = n_E$, de sorte que si on pose

$$\gamma_\chi(s) = \left(\pi^{-(s+1)/2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{b(\chi)} \left(\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{a(\chi)}$$

et

$$\xi(s,\chi) = (s(s-1))^{\delta(\chi)} A(\chi)^{s/2}\gamma_\chi(s)L(s,\chi), \tag{13}$$

alors on a l'équation fonctionnelle

$$\xi(1-s,\bar{\chi}) = W(\chi)\xi(s,\chi),$$

où $W(\chi)$ est une constante de module 1. De plus, $\xi(\cdot,\chi)$ est une fonction entière d'ordre 1 qui ne s'annule pas en 0, donc

$$\xi(s,\chi) = e^{B_1(\chi)+B(\chi)s}\prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho} \tag{14}$$

pour des constantes $B_1(\chi)$ et $B(\chi)$, où $\rho = \beta + i\gamma$ parcourt l'ensemble des zéros (non triviaux) de $L(s,\chi)$ tels que $0 < \beta < 1$. La lettre ρ désignera toujours ces zéros. En dérivant logarithmiquement (13) et (14), on obtient la relation importante

$$\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi) = B(\chi) + \sum_\rho\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{2}\ln(A(\chi)) - \delta(\chi)\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}\right) - \frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s), \tag{15}$$

valable pour tout nombre complexe s où ces quantités sont définies. On ne sait pas déterminer exactement la dépendance de B en fonction de χ, mais on sait tout de même déduire de l'équation fonctionnelle ceci :

Lemme 4 *En conservant les notations ci-dessus,*

$$\mathrm{Re}(B(\chi)) = -\sum_\rho \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi) + \frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\bar{\chi}) &= \sum_\rho\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{s-\bar{\rho}}\right) - \ln(A(\chi)) - 2\delta(\chi)\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}\right)\\ &- 2\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s).\end{aligned} \tag{16}$$

Démonstration. Voir [Odl]. □

On établit ici quelques résultats préliminaires.

Lemme 5 *Si* $\mathrm{Re}(s) > 1$*, alors* $\left|\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi)\right| \leq \frac{n_E}{\mathrm{Re}(s)-1}$.

Démonstration. En comparant leurs séries de Dirichlet, on voit que

$$\left|\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi)\right| \leq -\frac{\zeta_E'}{\zeta_E}(\mathrm{Re}(s)),$$

et on en arrive aisément au résultat du lemme. □

Lemme 6 *1. Si* $\mathrm{Re}(z) \geq a$*, avec* $a \geq 1$*, alors*

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)\right| \leq \ln(|z|) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}.$$

2. Si $|\mathrm{Im}(z)| \geq b \geq 1$*, alors*

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)\right| \leq \ln(|z|) + \pi\left(1 + \frac{1}{2b}\right) + \frac{1}{2b}.$$

3. Si $|z+k| \geq \frac{1}{8}$ *pour tout entier naturel* k*, alors*

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)\right| \leq \ln(|z|) + \frac{83}{5}.$$

Démonstration. Le produit de Weierstrass de Γ nous enseigne, en considérant sa dérivée logarithmique, que

$$-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

pour tout complexe z différent des entiers négatifs (γ_0 désigne la constante d'Euler-Mascheroni). Alors, en utilisant la formule d'Euler-McLaurin (pour $z > 0$) avec cette somme, on obtient que

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \ln(z) - \frac{1}{2z} + \int_0^{\infty} \frac{B_1(\{x\})}{(z+x)^2}\mathrm{d}x,$$

où $B_1 = X - \frac{1}{2}$ est le premier polynôme de Bernoulli ; l'égalité pour tout z complexe (à l'exception de $z \leq 0$) s'obtient par le principe du prolongement analytique. On en déduit que, pour $\mathrm{Re}(z) \geq a \geq 1$,

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)\right| \leq \ln(|z|) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}.$$

On procède de même pour l'inégalité dans le domaine $|\mathrm{Im}(z)| \geq 1$. Passons à la troisième inégalité : si $\mathrm{Re}(z) < 1$ et $|\mathrm{Im}(z)| < 1$ (notons que le cas $|\mathrm{Im}(z)| \geq 1$ est déjà traité et vérifie l'inégalité annoncée), l'équation fonctionnelle vérifiée par Γ permet de montrer que

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+m) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{z+k}$$

pour tout entier $m > 0$. On pose $m = -\left[\mathrm{Re}(z) - 1\right]$, de sorte que $\mathrm{Re}(z+m) \geq 1$ (c'est le plus petit entier naturel à vérifier cette inégalité), ce qui permet de borner $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+m)$:

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+m)\right| \leq \ln\left(\sqrt{5}\right) + \frac{\pi}{2} + 1.$$

Comme $|z+k| < \frac{1}{2}$ pour au plus un entier naturel k, et qu'on a en plus supposé que $|z+k| \geq \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel k et $\mathrm{Re}(z) < 2-m$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{z+k}\right| \leq 10 + \sum_{k=0}^{m-3} \frac{1}{-2+(m-k)} < 10 + \sum_{j=1}^{m-2} \frac{1}{j} \leq 11 + \ln(|z|+1),$$

ce raisonnement valant du moins si $m > 2$ (si $m \leq 2$, l'inégalité vaut même sans le terme logarithmique), pour finalement donner l'inégalité

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)\right| \leq \ln(|z|) + \ln(9) + \ln\left(\sqrt{5}\right) + \frac{\pi}{2} + 12,$$

valable pour tout z complexe tel que $|z+k| \geq \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel k. D'où l'inégalité annoncée. □

Lemme 7 *Si* $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2}$ *et* $|s| \geq \frac{1}{8}$*, alors*

$$\left|\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s)\right| \leq \frac{n_E}{2}\left(\ln(1+|s|) + \frac{164}{7}\right), \tag{17}$$

Démonstration. Le lemme précédent montre que si $|z| \geq \frac{1}{16}$ et $\mathrm{Re}(z) \geq -\frac{1}{4}$, alors :

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z)\right| \leq \ln(|z|) + \frac{827}{36}. \tag{18}$$

En effet, si on suppose $\mathrm{Re}(z) > -\frac{1}{4}$, alors $\mathrm{Re}(z+2) > \frac{7}{4}$, donc

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z+2)\right| \leq \ln(|z|+2) + \frac{\pi}{2} + \frac{4}{7}.$$

L'équation fonctionnelle donne alors l'inégalité (18). En particulier, si

$$\gamma_\chi(s) = \left[\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right]^{b(\chi)} \cdot \left[\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right]^{a(\chi)},$$

alors

$$\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s) = -\frac{b(\chi)\ln(\pi)}{2} + \frac{b(\chi)}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right) - \frac{a(\chi)\ln(\pi)}{2} + \frac{a(\chi)}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right),$$

et le résultat en découle simplement. □

Remarque. Ce même lemme 6 permet de démontrer que si $s = \sigma + it$ avec $\sigma \geq 2$, alors $\left|\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s)\right| \leq \frac{n_E}{2}\left(\ln\left(|t|+\sigma+1\right) + \frac{405}{134}\right)$. Cette inégalité plus précise nous sera utile plus particulièrement dans le prochain lemme (pour $\sigma \geq 1$, on peut remplacer 405 par 539, et on l'utilisera dans la démonstration du lemme 13).

Fort de tous ces résultats, on peut démontrer le premier lemme important de [L & O] sous une forme explicite :

Lemme 8 *Soit* $n_\chi(t)$ *le nombre de zéros* $\rho = \beta + i\gamma$ *de* $\mathrm{L}(s,\chi)$ *avec* $0 < \beta < 1$ *et* $|\gamma - t| \leq 1$*. Pour tout* t*, on a*

$$n_\chi(t) + n_\chi(-t) \leq \frac{5}{2}\left[\ln(A(\chi)) + n_E\left(\ln(|t|+3) + \frac{1075}{134}\right)\right].$$

Démonstration. On part de l'identité (16) :

$$\sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{s-\bar\rho}\right) = \frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi)+\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\bar\chi)+\ln(A(\chi))+2\delta(\chi)\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}\right)+2\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s).$$

On sait estimer chacune des quantités du membre de droite, d'après ce qui précède. Prenons $s=2+it$. On a :

$$\left|\sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{s-\bar\rho}\right)\right| \le 3+\ln(A(\chi))+n_E\left(\ln(|t|+3)+\frac{673}{134}\right),$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_\rho \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{s-\bar\rho}\right) &\ge \sum_{\substack{\rho\\ |\gamma-t|\le 1}} \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(t-\gamma)^2}+\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma+t|\le 1}} \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(t+\gamma)^2}\\ &\ge \left(\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma-t|\le 1}}+\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma+t|\le 1}}\right)\frac{2}{5}=\frac{2}{5}(n_\chi(t)+n_\chi(-t)).\ \square\end{aligned}$$

Ce lemme permet d'obtenir d'autres estimations qui informent sur l'importance des zéros des fonctions L dans la preuve effective du théorème de Chebotarev : des calculs lourds mais sans mystère conduisent à :

Lemme 9 *Pour tout réel ε tel que $0<\varepsilon\le 1$, on a*

$$\begin{aligned}\left|B(\chi)+\sum_{|\rho|<\varepsilon}\frac{1}{\rho}\right| &\le \frac{1}{8}\left(5\pi^2+34+\frac{10}{\varepsilon}\right)\ln(A(\chi))\\ &+ \left(\frac{10842}{107}+\frac{1790}{157\varepsilon}\right)n_E\end{aligned}$$

Démonstration. On a :

$$\left|B(\chi)+\sum_{|\rho|<\varepsilon}\frac{1}{\rho}\right| \le \left|B(\chi)+\sum_\rho\left(\frac{1}{2-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right| \tag{19}$$

$$+ \left|\sum_{|\rho|\ge 1}\left(\frac{1}{2-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right| \tag{20}$$

$$+ \left|\sum_{|\rho|<1}\frac{1}{2-\rho}\right| \tag{21}$$

$$+ \left|\sum_{\varepsilon<|\rho|<1}\frac{1}{\rho}\right|. \tag{22}$$

Les sommes dans (20) et (22) s'estiment de la même manière, à l'aide de la fonction n_χ introduite pour le lemme 8. Par exemple, dans le cas de (20), comme $\left|\frac{1}{2-\rho}+\frac{1}{\rho}\right| =$

$\frac{2}{|(2-\rho)\rho|} \leq \frac{2}{|\rho|^2}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{|\rho|\geq 1}\left(\frac{1}{2-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right| &\leq \sum_{\substack{t=-\infty \\ t \text{ impair}}}^{\infty} \sum_{\substack{|\rho|\geq 1 \\ t\leq\gamma\leq t+2}} \frac{2}{|\rho|^2} \\
&\leq 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{n_\chi(2j+2)+n_\chi(-(2j+2))}{(2j+1)^2} + 2n_\chi(0) \\
&\leq 5\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}+\frac{1}{2}\right)\left(\ln(A(\chi))+\frac{1075}{134}n_E\right) \\
&+ 5n_E\left(\ln(5)+\int_0^{\infty}\frac{\ln(2t+5)}{(2t+1)^2}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\ln(3)\right) \\
&= \frac{5}{8}(\pi^2+4)\ln(A(\chi)) \\
&+ 5\left[\frac{1075}{134\cdot 8}\left(\pi^2+4\right)+\left(\frac{13}{8}\ln(5)+\frac{\ln(3)}{2}\right)\right]n_E.
\end{aligned}$$

Semblablement, on trouve

$$\left|\sum_{\varepsilon<|\rho|<1}\frac{1}{\rho}\right| \leq \frac{n_\chi(0)}{\varepsilon} \leq \frac{5}{4\varepsilon}\left[\ln(A(\chi))+n_E\left(\ln(3)+\frac{1075}{134}\right)\right].$$

Si $|\rho|<1$, alors $|2-\rho|>1$, donc

$$\left|\sum_{|\rho|<1}\frac{1}{2-\rho}\right| \leq \frac{5}{4}\left[\ln(A(\chi))+n_E\left(\ln(3)+\frac{1075}{134}\right)\right],$$

et il ne reste plus que la somme (19) à évaluer. Pour cela, on pose $s=2$ dans (15), et on estime tous les termes qui nous intéressent grâce aux lemmes 5 et 7 (plus précisément, la remarque qui suit le lemme 7) :

$$\left|B(\chi)+\sum_{\rho}\left(\frac{1}{2-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right| \leq \frac{3}{2}+\frac{n_E}{2}\left(\ln(3)+\frac{673}{134}\right)+\frac{1}{2}\ln(A(\chi)).$$

En regroupant toutes ces estimations, on obtient le lemme annoncé. □

Dans le même esprit de preuve :

Lemme 10 *Si $s=\sigma+it$ avec $-\frac{1}{2}\leq\sigma\leq 3$ et $|s|\geq\frac{1}{8}$, alors :*

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi)+\frac{\delta(\chi)}{s-1}-\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t|\leq 1}}\frac{1}{s-\rho}\right| &\leq \frac{5}{4}\left(1+\frac{7}{4}\pi^2\right)\ln(A(\chi)) \\
&+ \frac{n_E}{2}\ln(|t|+5)\left(57+\frac{35}{|t|+4}\right) \\
&+ \frac{50096}{255}n_E+\frac{53}{6}.
\end{aligned}$$

Démonstration. On évalue l'identité (15) en $\sigma + it$ puis en $3 + it$, et on soustrait les deux égalités résultantes. Ainsi, $B(\chi)$ est éliminé, et on a :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi) - \frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(3+it,\chi) &= \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{3+it-\rho}\right) - \frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(s) + \frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(3+it) \\ &- \delta(\chi)\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2+it} - \frac{1}{3+it}\right).\end{aligned}$$

La seule quantité à réellement poser problème, dans la majoration qui nous intéresse, est la somme sur les zéros ρ. L'application des lemmes 5 et 7 permet de majorer de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi) + \frac{\delta(\chi)}{s-1} - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t|\leq 1}} \frac{1}{s-\rho}\right| &\leq \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t|>1}} \left|\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{3+it-\rho}\right| \qquad (23) \\ &+ \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t|\leq 1}} \left|\frac{1}{3+it-\rho}\right| \qquad (24) \\ &+ \frac{53}{6} + \left(\ln(|t|+4) + \frac{24811}{1876}\right) n_E.\end{aligned}$$

On a $|3 + it - \rho| > 2$ pour tout zéro ρ non trivial (car $0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$), donc

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t|\leq 1}} \left|\frac{1}{3+it-\rho}\right| \leq \frac{1}{2} n_\chi(t),$$

et on utilise alors le lemme 8 pour majorer (24). À présent, (23) se calcule progressivement (on note $s = \sigma + it$ et $\rho = \beta + i\gamma$) :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t|>1}} \left|\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{3+it-\rho}\right| &= \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-t|>1}} \frac{3-\sigma}{|s-\rho||3+it-\rho|} \\ &\leq \frac{7}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-(t+2k)|\leq 1}} \frac{1}{|t-\gamma|^2} \\ &+ \frac{7}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-(t-2k)|\leq 1}} \frac{1}{|t-\gamma|^2} \\ &\leq \frac{7}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_\chi(t+2k) + n_\chi(t-2k)}{(2k-1)^2} \\ &\leq \frac{35\pi^2}{16}\left(\ln(A(\chi)) + \frac{1075}{134} n_E\right) \\ &+ \frac{35}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(|t|+2k+3)}{(2k-1)^2} n_E.\end{aligned}$$

Cette dernière somme se majore, par exemple, par une comparaison série-intégrale ; on obtient ainsi $\frac{\ln(|t|+5)}{2}\left(3 + \frac{1}{|t|+4}\right)$ comme majorant. On en déduit le lemme, en regroupant

les différentes estimations faites ici. Par commodité, on utilise la majoration $\frac{24811}{1876} + \frac{1075}{134}\left(\frac{5}{4} + \frac{35\pi^2}{16}\right) \leq \frac{50096}{255}$. $\square$

5 L'intégrale sur un contour

Maintenant, on se charge d'évaluer $I_C(x,T)$ en passant par l'évaluation de

$$I_\chi(x,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT} \frac{x^s}{s}\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi)\mathrm{d}s \tag{25}$$

pour chaque caractère χ de H. À présent, on a besoin que T soit différent des zéros de toutes les fonctions $\mathrm{L}(s,\chi)$ (cette condition s'éclairera plus tard). On introduit un nouveau paramètre U, vérifiant $U = j+\frac{1}{2}$ pour un certain entier naturel j (plus tard, on fera tendre U vers $+\infty$), et on définit

$$I_\chi(x,T,U) = \frac{1}{2\pi i}\int_{B_{T,U}} \frac{x^s}{s}\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi)\mathrm{d}s, \tag{26}$$

où $B_{T,U}$ est le rectangle (orienté dans le sens trigonométrique) dont les sommets sont $\sigma_0 - iT$, $\sigma_0 + iT$, $-U + iT$ et $-U - iT$. Cette intégrale s'exprime simplement à l'aide des singularités de l'intégrande, mais ceci attendra encore un peu. Dans cette section, on montrera que $R_\chi(x,T,U) = I_\chi(x,T,U) - I_\chi(x,T)$ est petit. On divise $R_\chi(x,T,U)$ en trois intégrales, celle verticale

$$V_\chi(x,T,U) = \frac{1}{2\pi}\int_{T}^{-T} \frac{x^{-U+iT}}{-U+iT}\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(-U+it,\chi)\mathrm{d}t, \tag{27}$$

et les deux intégrales horizontales

$$H_\chi(x,T,U) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-U}^{-1/4} \left(\frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT}\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(\sigma-iT,\chi) - \frac{x^{\sigma+iT}}{\sigma+iT}\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(\sigma+iT,\chi)\right)\mathrm{d}\sigma \tag{28}$$

et

$$H^*_\chi(x,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1/4}^{\sigma_0} \left(\frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT}\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(\sigma-iT,\chi) - \frac{x^{\sigma+iT}}{\sigma+iT}\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(\sigma+iT,\chi)\right)\mathrm{d}\sigma \tag{29}$$

Pour borner $\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}$, et donc estimer ces intégrales, on a besoin du lemme 6, qui renseigne sur la taille de $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$.

On en déduit :

Lemme 11 *Si $s = \sigma + it$ avec $\sigma \leq -\frac{1}{4}$ et $|s+m| \geq \frac{1}{4}$ pour tout entier naturel m, alors*

$$\left|\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi)\right| \leq \ln(A(\chi)) + n_E\left(\ln(|s|+2) + \frac{19683}{812}\right).$$

Démonstration. Partant de l'équation fonctionnelle vérifiée par $\mathrm{L}(\cdot,\chi)$, on a

$$\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi) = -\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(1-s,\bar{\chi}) - \ln(A(\chi)) - \frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(1-s) - \frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(s),$$

et $\mathrm{Re}(1-s) \geq \frac{5}{4}$, ce qui permet d'utiliser le lemme 5 pour borner $\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(1-s,\bar{\chi})$. De plus, le lemme 6 donne une autre version du lemme 7, pour z tel que $|z+k| \geq \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel k : on obtient l'inégalité similaire $\left|\frac{\gamma_\chi'}{\gamma_\chi}(z)\right| \leq \frac{n_E}{2}\left(\ln(1+|z|)+\frac{989}{58}\right)$. Alors,

$$\left|\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(s,\chi)\right| \leq \ln(A(\chi)) - \frac{n_E}{\sigma} + n_E\left(\ln(|s|+2)+\frac{16435}{812}\right),$$

d'où le résultat. □

Reprenons : les intégrales verticale (27) et horizontale (28) sont estimées à l'aide de l'inégalité ci-dessus. On a, pour $x \geq 2$, $T \geq 1$ et $U \geq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} |V_\chi(x,T,U)| &\leq \frac{x^{-U}}{2\pi U}\int_{-T}^{T}\left|\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(-U+it,\chi)\right|\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{x^{-U}T}{\pi U}\left(\ln(A(\chi)) + n_E\left(\ln(U+T+2)+\frac{19683}{812}\right)\right), \end{aligned} \tag{30}$$

et, sous ces mêmes conditions,

$$\begin{aligned} |H_\chi(x,T,U)| &\leq \frac{1}{\pi T}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{4}} x^\sigma\left(\ln(A(\chi)) + n_E\left(\ln(|\sigma|+T+2)+\frac{19683}{812}\right)\right)\mathrm{d}\sigma \\ &\leq \frac{x^{-1/4}}{\pi T\ln(x)}\left[\ln(A(\chi)) + \left(\ln\left(T+\frac{9}{4}\right)+\frac{19683}{812}\right)n_E\right] \\ &+ \frac{n_E x^{-1/4}}{\pi T(\ln(x))^2}\frac{1}{\left(T+\frac{9}{4}\right)}, \end{aligned} \tag{31}$$

Estimer l'intégrale $H_\chi^*(x,T)$ est un peu plus ardu, et nécessite le lemme 10. Il nous indique que

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}(\sigma+iT,\chi) - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-T|\leq 1}}\frac{1}{\sigma+iT-\rho}\right| &\leq \frac{571}{25}\ln(A(\chi)) \\ &+ n_E\left(\frac{57}{2}\ln(T+5)+\frac{5921}{28}\right) \end{aligned}$$

pour σ dans $\left[-\frac{1}{4},\sigma_0\right]$, $x \geq 2$ et $T \geq 2$. On a la même estimation en $\sigma - iT$. Alors,

$$\begin{aligned} \Big|H_\chi^*(x,T) &- \frac{1}{2\pi i}\int_{-1/4}^{\sigma_0}\Big(\frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT}\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma+T|\leq 1}}\frac{1}{\sigma-iT-\rho} \\ &- \frac{x^{\sigma+iT}}{\sigma+iT}\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-T|\leq 1}}\frac{1}{\sigma+iT-\rho}\Big)\mathrm{d}\sigma\Big| \\ &\leq \frac{ex-x^{-1/4}}{\pi T\ln(x)}\left[\frac{571}{25}\ln(A(\chi)) + n_E\left(\frac{57}{2}\ln(T+5)+\frac{5921}{28}\right)\right]. \end{aligned}$$

Pour en finir avec l'estimation de $H_\chi^*(x,T)$, on doit encore vérifier que l'intégrale ci-dessus reste assez « petite ».

Lemme 12 *Soit $\rho = \beta + i\gamma$, avec $0 < \beta < 1$ et $\gamma \neq t$. Si $|t| \geq 2$, $x \geq 2$ et $1 < \sigma_1 \leq 3$, alors :*

$$\left| \int_{-1/4}^{\sigma_1} \frac{x^{\sigma+it}}{(\sigma+it)(\sigma+it-\rho)} \mathrm{d}\sigma \right| \leq \left(\sigma_1 + \frac{9}{4}\right) \frac{x^{\sigma_1}}{(|t|-1)(\sigma_1-\beta)}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\gamma > t$. Soit B le rectangle (orienté dans le sens trigonométrique) dont les sommets ont pour affixes $\sigma_1 + i(t-1)$, $\sigma_1 + it$, $-\frac{1}{4} + it$ et $-\frac{1}{4} + i(t-1)$. Le théorème de Cauchy assure que

$$\int_B \frac{x^s}{s(s-\rho)} \mathrm{d}s = 0,$$

puisque l'intégrande n'a pas de singularité à l'intérieur du rectangle. En outre, sur les arêtes du rectangle, à l'exception de celle joignant $-\frac{1}{4} + it$ et $\sigma_1 + it$, on peut le majorer par $\frac{x^{\sigma_1}}{(|t|-1)(\sigma_1-\beta)}$. D'où le résultat pour $\gamma > t$. On procède de même si $\gamma < t$, en changeant $i(t-1)$ en $i(t+1)$ dans les affixes des sommets du rectangle. □

Ceci prouve que

$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{2\pi i} \int_{-1/4}^{\sigma_0} \frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT} \quad & \Big(\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma+T|\leq 1}} \frac{1}{\sigma-iT-\rho} \Big) \mathrm{d}\sigma \Big| \\ & \leq \frac{\sigma_0 + \frac{9}{4}}{2\pi} n_\chi(-T) \frac{x^{\sigma_0}}{(T-1)(\sigma_0-1)} \\ & \leq \frac{5\,(13\ln(x)+4)\,ex}{16\pi(T-1)} \left[\ln(A(\chi)) + n_E \left(\ln(T+3) + \frac{1075}{134} \right) \right] \end{aligned}$$

pour $x \geq 2$ et $T \geq 2$. On a le même résultat pour les zéros indicés grâce à la condition $|\gamma - T| \leq 1$. Si on suppose l'hypothèse de Riemann généralisée, le terme en $\ln(x)$ disparaît, d'après [L & O], page 445. On ne s'en chargera pas ici.
En fin de compte, on obtient

$$\begin{aligned} |H_\chi^*(x,T)| \quad \leq \quad & \left(\frac{5\,(13\ln(x)+4)\,ex}{8(T-1)} + \frac{571}{25} \frac{ex - x^{-1/4}}{T\ln(x)} \right) \frac{\ln(A(\chi))}{\pi} \\ + \quad & \frac{n_E}{\pi} \Big[\left(\frac{57}{2} \frac{ex - x^{-1/4}}{T\ln(x)} + \frac{5\,(13\ln(x)+4)\,ex}{8(T-1)} \right) \ln(T+5) \\ + \quad & \frac{5375\,(13\ln(x)+4)\,ex}{2144(T-1)} + \frac{5921}{28} \frac{ex - x^{-1/4}}{T\ln(x)} \Big] \end{aligned} \tag{32}$$

En combinant (30), (31) et (32), on obtient le résultat principal de la section, à savoir,

$$\begin{aligned}|I_\chi(x,T)-I_\chi(x,T,U)| &\leq \frac{65e}{8\pi}\frac{x\ln(x)}{T-1}\left[\ln(A(\chi))+n_E\left(\ln(T+5)+\frac{1075}{268}\right)\right]\\ &+ \frac{5e}{2\pi}\frac{x}{T-1}\left[\ln(A(\chi))+n_E\left(\ln(T+5)+\frac{1075}{268}\right)\right]\\ &+ \frac{e}{\pi}\frac{x}{T\ln(x)}\left[\frac{571}{25}\ln(A(\chi))+n_E\left(\frac{57}{2}\ln(T+5)+\frac{5921}{28}\right)\right]\\ &+ \frac{x^{-U}T}{\pi U}\left[\ln(A(\chi))+n_E\left(\ln(U+T+2)+\frac{19683}{812}\right)\right]\\ &+ \frac{4n_Ex^{-1/4}}{17\pi T(\ln(x))^2}. \qquad (33)\end{aligned}$$

6 La formule explicite

On en arrive enfin à une formule explicite pour ψ_C en fonction des zéros ρ. On revient à la définition de $I_\chi(x,T,U)$ donnée en (26), où on rappelle que $x\geq 2$ et $U=j+\frac{1}{2}$ pour un certain entier naturel j. Soit $T\geq 2$ différent de l'ordonnée de tout zéro de tout $\mathrm{L}(s,\chi)$. Par le théorème de Cauchy, $I_\chi(x,T,U)$ égale la somme des résidus de l'intégrande aux pôles à l'intérieur de $B_{T,U}$. Pour un décompte détaillé des résidus, on renvoie à [L & O], pages 446–448 : on a en tout cas

$$\begin{aligned}I_\chi(x,T,U) &= -\delta(\chi)x+\sum_{\substack{\rho\\|\gamma|<T}}\frac{x^\rho}{\rho}-b(\chi)\sum_{1\leq m\leq\frac{U+1}{2}}\frac{x^{1-2m}}{2m-1}\\ &- a(\chi)\sum_{1\leq m\leq\frac{U}{2}}\frac{x^{-2m}}{2m}+r(\chi)+(a(\chi)-\delta(\chi))\ln(x), \qquad (34)\end{aligned}$$

où

$$r(\chi)=B(\chi)-\frac{1}{2}\ln(A(\chi))+\frac{n_E}{2}\ln(\pi)+\delta(\chi)-\frac{b(\chi)}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{a(\chi)}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1).$$

Quand $U\to+\infty$, (33) et (34) donnent la formule explicite suivante, valide pour tout $x\geq 2$ et tout $T\geq 2$ différent de l'ordonnée d'un zéro.

$$\begin{aligned}\Big|I_\chi(x,T)+\delta(\chi)x &- \sum_{\substack{\rho\\|\gamma|<T}}\frac{x^\rho}{\rho}-r(\chi)-(a(\chi)-\delta(\chi))\ln(x)\\ &- \frac{n_E}{2}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}(b(\chi)-a(\chi))\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Big|\\ &\leq \frac{65e}{8\pi}\frac{x\ln(x)}{T-1}\left[\ln(A(\chi))+n_E\left(\ln(T+5)+\frac{1075}{268}\right)\right]\\ &+ \frac{5e}{2\pi}\frac{x}{T-1}\left[\ln(A(\chi))+n_E\left(\ln(T+5)+\frac{1075}{268}\right)\right]\\ &+ \frac{e}{\pi}\frac{x}{T\ln(x)}\left[\frac{571}{25}\ln(A(\chi))+n_E\left(\frac{57}{2}\ln(T+5)+\frac{5921}{28}\right)\right]\\ &+ \frac{4n_Ex^{-1/4}}{17\pi T(\ln(x))^2}. \qquad (35)\end{aligned}$$

On a alors presque ce qu'on veut :

Théorème 6.1 *Si $x \geq 2$ et $T \geq 2$, alors*

$$\begin{aligned}\left|\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x + S(x,T)\right| \quad &\leq \quad \frac{|C|}{|G|}\Big(\frac{145}{6}n_L\frac{x(\ln(x))^2}{T} \\ &+ \quad \frac{65e}{8\pi}\frac{x\ln(x)}{T-1}\left[\ln(d_L) + n_L\left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\ &+ \quad \frac{5}{2}\left(\frac{e}{\pi}+1\right)\frac{x}{T-1}\left[\ln(d_L) + n_L\left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\ &+ \quad \frac{e}{\pi}\frac{x}{T\ln(x)}\left[\frac{571}{25}\ln(d_L) + n_L\left(\frac{57}{2}\ln(T+5) + \frac{5921}{28}\right)\right] \\ &+ \quad \ln(x)\left[\frac{2}{\ln(2)}\ln(d_L) + \frac{77}{4}n_L\right] + \frac{94}{7}\ln(d_L) + \frac{3817}{30}n_L \\ &+ \quad \frac{4n_Lx^{-1/4}}{17\pi T(\ln(x))^2}\Big),\end{aligned}$$

où

$$S(x,T) = \frac{|C|}{|G|}\sum_{\chi}\bar{\chi}(g)\left(\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}}\frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{\substack{\rho \\ |\rho|<\frac{1}{2}}}\frac{1}{\rho}\right), \tag{36}$$

les deux dernières sommes étant sur les zéros non triviaux de $\mathrm{L}(\cdot,\chi)$.

Démonstration. D'après le lemme 9, on a

$$\left|r(\chi) + \sum_{|\rho|<\frac{1}{2}}\frac{1}{\rho}\right| \leq \left(\frac{5\pi^2}{8}+\frac{29}{4}\right)\ln(A(\chi)) + \left(\frac{2102053}{16799} + \frac{1}{2}\ln(\pi) + \frac{1}{2}\gamma_0 + \ln(2)\right)n_E,$$

donc

$$\begin{aligned}\Big|I_\chi(x,T) + \delta(\chi)x \quad &- \quad \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}}\frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{|\rho|<\frac{1}{2}}\frac{1}{\rho}\Big| \\ &\leq \quad \frac{65e}{8\pi}\frac{x\ln(x)}{T-1}\left[\ln(A(\chi)) + n_E\left(\ln(T+5)+\frac{1075}{268}\right)\right] \\ &+ \quad \frac{5e}{2\pi}\frac{x}{T-1}\left[\ln(A(\chi)) + n_E\left(\ln(T+5)+\frac{1075}{268}\right)\right] \\ &+ \quad \frac{e}{\pi}\frac{x}{T\ln(x)}\left[\frac{571}{25}\ln(A(\chi)) + n_E\left(\frac{57}{2}\ln(T+5)+\frac{5921}{28}\right)\right] \\ &+ \quad n_E\ln(x) + \frac{94}{7}\ln(A(\chi)) + \frac{3817}{30}n_E \\ &+ \quad \frac{4n_Ex^{-1/4}}{17\pi T(\ln(x))^2}.\end{aligned}$$

Alors, (12) et (25) donnent, pour $T \neq \mathrm{Im}(\rho)$ pour tout zéro ρ de tout $\mathrm{L}(s,\chi)$, la même majoration (à une multiplication par $\frac{|C|}{|G|}$ près) pour

$$\left| I_C(x,T) - \frac{|C|}{|G|}\sum_{\chi}\bar{\chi}(g)\left(\delta(\chi)x - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}}\frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{|\rho|<\frac{1}{2}}\frac{1}{\rho}\right)\right|$$

en remplaçant $\ln(A(\chi))$ par $\ln(d_L)$ et n_E par n_L, en vertu des formules

$$\sum_{\chi}\ln(A(\chi)) = \ln(d_L) \text{ (formule du discriminant) et } n_E \cdot [L:E] = n_L.$$

Comme $\psi_C(x,T) = I_C(x,T) + R_1(x,T)$,

$$\begin{aligned}
\left|\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x + S(x,T)\right| \quad &\leq \quad \frac{|C|}{|G|}\Big(\frac{145}{6}n_L\frac{x(\ln(x))^2}{T} \\
&+ \quad \frac{65e}{8\pi}\frac{x\ln(x)}{T-1}\left[\ln(d_L) + n_L\left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\
&+ \quad \frac{5e}{2\pi}\frac{x}{T-1}\left[\ln(d_L) + n_L\left(\ln(T+5) + \frac{1075}{268}\right)\right] \\
&+ \quad \frac{e}{\pi}\frac{x}{T\ln(x)}\left[\frac{571}{25}\ln(d_L) + n_L\left(\frac{57}{2}\ln(T+5) + \frac{5921}{28}\right)\right] \\
&+ \quad \ln(x)\left[\frac{2}{\ln(2)}\ln(d_L) + \frac{77}{4}n_L\right] + \frac{94}{7}\ln(d_L) + \frac{3817}{30}n_L \\
&+ \quad \frac{4n_L x^{-1/4}}{17\pi T(\ln(x))^2}\Big),
\end{aligned}$$

ce qui donne le théorème si $T \neq \mathrm{Im}(\rho)$ pour tout zéro ρ de fonction L. Maintenant, si $T = \mathrm{Im}(\rho_T)$ pour un certain zéro ρ_T (ou plusieurs ; il y en a au plus $\sum_{\chi} n_\chi(T)$), on a, pour ε assez proche de 0,

$$S(x,T+\varepsilon) = S(x,T) + \frac{|C|}{|G|}\sum_{\chi}\bar{\chi}(g)\sum_{\substack{\rho_T \\ T=\mathrm{Im}(\rho_T)}}\frac{x^{\rho_T}}{\rho_T}$$

et $T+\varepsilon$ différent de tout zéro de fonction L. Alors,

$$\begin{aligned}
\left|\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x + S(x,T)\right| \quad &\leq \quad \left|\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x + S(x,T+\varepsilon)\right| \\
&+ \quad \frac{|C|}{|G|}\sum_{\chi} n_\chi(T)\frac{x}{T}
\end{aligned}$$

On sait estimer la dernière somme grâce au lemme 8 et la formule du discriminant, tandis que la première quantité du membre de droite s'évalue à l'aide des calculs qui précèdent. On obtient la majoration du théorème en faisant tendre ε vers 0. □

C'est le résultat principal du papier : on a exprimé $\psi_C(x)$ en fonction d'un terme principal $\frac{|C|}{|G|}x$, de $S(x,T)$ et un terme d'erreur relativement petit. Il reste à estimer $S(x,T)$. Si on suppose la justesse de l'hypothèse de Riemann généralisée, on peut avoir une bonne borne à partir des résultats déjà établis ; si on veut un résultat inconditionnel, on doit montrer que les zéros ρ ne s'approchent pas trop de la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$.

7 Les régions sans zéros

Cette section concerne les zéros exceptionnels que les fonctions ζ_L peuvent éventuellement avoir. Pour rappel, comme $\zeta_L = \prod_\chi \mathrm{L}(\cdot,\chi)$, un zéro pour ζ_L en entraîne un pour au moins une des fonctions $\mathrm{L}(\cdot,\chi)$; dans le cas du lemme 14 à venir, il n'y a en vérité qu'une seule fonction $\mathrm{L}(\cdot,\chi)$ éventuellement concernée. Seul un résultat nécessite d'être explicité, c'est le lemme 8.1 de [L & O], que voici :

Lemme 13 *La fonction ζ_L n'a pas de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ dans la région délimitée par les conditions*

$$|\gamma| \geq \frac{1}{1 + 4\ln(d_L)}$$

et

$$\beta \geq 1 - (7 - 4\sqrt{3})\left(22\ln(d_L) + n_L\left(\frac{5}{2}\ln(|\gamma|+3) + \frac{1078}{67} + 2\ln(3)\right) + \frac{15}{2}\right)^{-1}.$$

Démonstration. Partant de la formule du produit eulérien pour ζ_L, on a pour $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$,

$$-\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda_L(m) m^{-s},$$

où

$$\Lambda_L(m) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{\substack{\mathfrak{p}|p \\ \mathfrak{f}(\mathfrak{p}/p)|r}} \mathfrak{f}(\mathfrak{p}/p)\right)\ln(p) \text{ si } n = p^r, p \text{ premier}, r \geq 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

En particulier, $\Lambda_L(m) \geq 0$ pour tout entier naturel non nul m. Par conséquent, en vertu de l'identité traditionnelle

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad 3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos(\theta))^2,$$

on sait que

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(-3\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma) - 4\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma + it) - \frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma + 2it)\right) &= 2\sum_{m=1}^{\infty} \Lambda_L(m) m^{-\sigma}(1 + \cos(t\ln(m)))^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Or, si on prend pour χ le caractère trivial, l'égalité (15) montre que

$$2\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(s) = \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{s-\bar{\rho}}\right) - \ln(d_L) - 2\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) - 2\frac{\gamma_L'}{\gamma_L}(s),$$

où la somme est indicée par les zéros ρ de ζ_L. Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s-\rho}\right) > 0$ pour tout ρ. À présent, considérons $\beta + i\gamma$ un zéro tel que $|\gamma| \geq \frac{1}{1+4\ln(d_L)}$. Alors, pour $2 \geq \sigma > 1$, d'après l'inégalité citée dans la remarque qui précède le lemme 8,

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma) &\leq \frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2}\ln(d_L) + \frac{\gamma_L'}{\gamma_L}(\sigma), \\ &\leq \frac{1}{\sigma-1} + 1 + \frac{1}{2}\ln(d_L) + \frac{n_L}{2}\left(\ln(3) + \frac{539}{134}\right). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} -\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma+2i\gamma)\right) &\leq \frac{1}{2}\ln(d_L) + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma+2i\gamma-1} + \frac{1}{\sigma+2i\gamma}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{\gamma_L'}{\gamma_L}(\sigma+2i\gamma)\right) \\ &\leq \frac{5}{2}\ln(d_L) + \frac{n_L}{2}\left(\ln(2|\gamma|+3) + \frac{539}{134}\right) + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et, en conservant la contribution du zéro $\rho = \beta + i\gamma$,

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}(\sigma+i\gamma)\right) \leq \frac{9}{2}\ln(d_L) + \frac{n_L}{2}\left(\ln(|\gamma|+3) + \frac{539}{134}\right) + 1 - \frac{1}{\sigma-\beta}.$$

Ces inégalités, et le fait souligné ci-dessus que tous les coefficients de Dirichlet de $-\frac{\zeta_L'}{\zeta_L}$ soient positifs, impliquent que pour tout $\sigma > 1$,

$$\frac{4}{\sigma-\beta} < \frac{3}{\sigma-1} + 22\ln(d_L) + n_L\left(\frac{5}{2}\ln(|\gamma|+3) + 4\cdot\frac{539}{134} + 2\ln(3)\right) + \frac{15}{2},$$

et il suffit alors de prendre

$$\sigma = 1 + (2\sqrt{3}-3)\left(22\ln(d_L) + n_L\left(\frac{5}{2}\ln(|\gamma|+3) + 4\cdot\frac{539}{134} + 2\ln(3)\right) + \frac{15}{2}\right)^{-1}$$

pour obtenir le résultat du lemme. □

Lemme 14 *Si $n_L > 1$, alors ζ_L a au plus un zéro $\rho = \beta + i\gamma$ dans la région délimitée par les conditions*

$$|\gamma| \leq \frac{1}{4\ln(d_L)} \text{ et } \beta \geq 1 - \frac{1}{4\ln(d_L)}.$$

Ce zéro, s'il existe, est réel et simple, et correspond à un unique caractère (réel) χ_0 qui annule $\mathrm{L}(\cdot,\chi_0)$. Par ailleurs, si $n_L = 1$, alors ζ_L n'admet pas de zéro tel que $|\gamma| < 14$.

Démonstration. Voir [L & O], pages 455–456. □

8 Estimations finales

Théorème 8.1 *Si ζ_L vérifie l'hypothèse de Riemann généralisée, alors*

$$\begin{aligned} \left|\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x\right| &\leq \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\ln(x)\Big[\left(\frac{23}{3} + \frac{4781}{96\ln(x)}\right)\ln(d_L) \\ &+ \left(\frac{863}{31}\ln(x) + \frac{68}{3} + \frac{58681}{113\ln(x)}\right)n_L\Big] \end{aligned}$$

pour tout $x \geq 2$.

Remarque. Plus précisément, on a, pour tout $x \geq 2$,

$$\begin{aligned}\left|\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x\right| &\leq \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\Big[\left(\frac{23}{3}\ln(x) + \frac{29}{3} + \frac{336}{17\ln(x)} + \frac{26\ln(x)}{9\sqrt{x}} + \frac{94}{7\sqrt{x}}\right)\ln(d_L) \\ &+ \Big(\frac{863}{31}(\ln(x))^2 + \frac{68}{3}\ln(x) + \frac{1198}{13} + \frac{1343}{6\ln(x)} \\ &+ \frac{77\ln(x)}{4\sqrt{x}} + \frac{3817}{30\sqrt{x}} + \frac{3}{40x^{3/4}(\ln(x))^2}\Big)n_L\Big].\end{aligned}$$

Démonstration. Si ζ_L vérifie l'hypothèse de Riemann généralisée, alors toutes les fonctions $\mathrm{L}(\cdot,\chi)$ associées à ζ_L par la formule $\zeta_L = \prod_\chi \mathrm{L}(\cdot,\chi)$ la vérifient également. Ainsi, pour chaque χ il n'existe pas de zéro ρ non trivial tel que $|\rho| < \frac{1}{2}$, et par le lemme 8 :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{|\rho|<\frac{1}{2}} \frac{1}{\rho}\right| &\leq \sqrt{x}\left(2n_\chi(0) + \sum_{0\leq j\leq \frac{T-1}{2}} \frac{n_\chi(2j+2) + n_\chi(-(2j+2))}{2j+1}\right) \\ &\leq \frac{5}{2}\sqrt{x}\Big[\left(2 + \frac{\ln(T)}{2}\right)\left(\ln(A(\chi)) + \frac{1075}{134}n_E\right) \\ &+ \left(\frac{281}{55} + \frac{\ln(T+4)\ln(T)}{4}\right)n_E\Big],\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{T-1}{2}} \frac{\ln(2t+5)}{2t+1}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^{\frac{T-1}{2}} \left(\frac{\ln(2t+5)}{2t+1} + \frac{\ln(2t+1)}{2t+5}\right)\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2}\int_1^{\frac{T-1}{2}} \left(\frac{\ln(2t+5)}{2t+1} - \frac{\ln(2t+1)}{2t+5}\right)\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{\ln(T)\ln(T+4) - \ln(3)\ln(7)}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\ln(2) + 9\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

En se rappelant la définition de $S(x,T)$ donnée dans le théorème 6.1, ceci implique que pour tout $T \geq 2$, $|S(x,T)|$ admet la même majoration, à une multiplication par $\frac{|C|}{|G|}$ près, en remplaçant $\ln(A(\chi))$ par $\ln(d_L)$ et n_E par n_L. On pose $T = \sqrt{x}+1$, par exemple (on a bien $T \geq 2$), et la formule explicite du théorème 6.1 prouve le résultat désiré. □

Théorème 8.2 *Soit β_0 le zéro réel éventuel de ζ_L vérifiant $\beta_0 \geq 1 - \frac{1}{4\ln(d_L)}$, et χ_0 le caractère (réel) tel que $\mathrm{L}(\beta_0,\chi_0) = 0$. Si $x \geq \exp\left(4n_L(\ln(150867 d_L^{44/5}))^2\right)$, alors*

$$\psi_C(x) = \frac{|C|}{|G|}x - \frac{|C|}{|G|}\chi_0(g)\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} + \frac{|C|}{|G|}R(x),$$

où $|R(x)| \leq 1505234280710x\exp\left(-\frac{7-4\sqrt{3}}{5}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right)$. Le second terme peut être supprimé en l'absence du zéro exceptionnel β_0.

Démonstration. Pour alléger les calculs, posons $a = \exp\left(\frac{15}{44}\right)$, $b = 3^{\frac{4}{5}}\exp\left(\frac{2156}{335}\right)$ et $c = 2^{\frac{7-4\sqrt{3}}{5}}$. Si $\rho = \beta + i\gamma$ avec $\rho \neq \beta_0$ est un zéro non trivial d'une fonction L tel que

$|\gamma| < T$, alors la borne inconditionnelle du lemme 13 montre que

$$|x^\rho| = x^\beta \leq x \exp\left(-\frac{c\ln(x)}{\ln\left((ad_L)^{44/5}(b(T+3))^{n_L}\right)}\right)$$

pour $x \geq 2$ et $T \geq 2$. De plus, le lemme 8 montre, en imitant le raisonnement de la démonstration du théorème 8.1, que

$$\sum_{\chi} \sum_{\substack{|\rho|\geq\frac{1}{2} \\ |\gamma|\leq T}} \left|\frac{1}{\rho}\right| \leq \frac{5}{2}\left[\left(2+\frac{\ln(T)}{2}\right)\left(\ln(d_L)+\frac{1075}{134}n_L\right)+\left(\frac{281}{55}+\frac{\ln(T+4)\ln(T)}{4}\right)n_L\right].$$

Par ce même lemme, comme $\rho \neq 1-\beta_0$ implique $|\rho| \geq \frac{1}{4\ln(d_L)}$ (par le lemme 14), on a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\chi}\sum_{\substack{\rho\neq 1-\beta_0 \\ |\rho|<\frac{1}{2}}}\left(\left|\frac{x^\rho}{\rho}\right|+\left|\frac{1}{\rho}\right|\right)\right| &\leq (\sqrt{x}+1)\sum_{\chi}\sum_{\substack{\rho\neq 1-\beta_0 \\ |\rho|<\frac{1}{2}}}\left|\frac{1}{\rho}\right| \\ &\leq 5(\sqrt{x}+1)\left[\ln(d_L)+n_L\left(\ln(3)+\frac{1075}{134}\right)\right]\ln(d_L) \\ &\leq \frac{8945}{9}(\sqrt{x}+1)(\ln(d_L))^2\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hermite-Minkowski $d_L \geq \frac{\pi}{3}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{n_L-1}$, valable quand $n_L > 1$ (ce dont on déduit plus précisément $n_L \leq \frac{\ln(d_L)}{\ln\left(\frac{\pi}{3}\right)}$). À noter que si $n_L = 1$ (et $\ln(d_L) = 0$), alors cette inégalité est également vraie. Pour finir,

$$\frac{x^{1-\beta_0}}{1-\beta_0} - \frac{1}{1-\beta_0} = x^\sigma \ln(x) \leq \sqrt{x}\ln(x)$$

pour un certain $\sigma \in [0{,}1-\beta_0]$. Tout ceci nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\left|S(x,T)-\frac{|C|}{|G|}\chi_0(g)\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0}\right| &= \frac{|C|}{|G|}\left[\sum_{\chi}\bar{\chi}(g)\left(\sum_{\substack{|\rho|>\frac{1}{2}\\|\gamma|<T}}\frac{x^\rho}{\rho}+\sum_{\substack{|\rho|<\frac{1}{2}\\|\gamma|<T}}\frac{x^\rho}{\rho}-\sum_{|\rho|<\frac{1}{2}}\frac{1}{\rho}\right)-\chi_0(g)\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0}\right]\\
&\leq \frac{|C|}{|G|}\frac{5}{2}\Big[\left(2+\frac{\ln(T)}{2}\right)\left(\ln(d_L)+\frac{1075}{134}n_L\right)\\
&+ \left(\frac{281}{55}+\frac{\ln\left(T+4\right)\ln(T)}{4}\right)n_L\Big]x\exp\left(-\frac{c\ln(x)}{\ln\left((ad_L)^{44/5}(b(T+2))^{n_L}\right)}\right)\\
&+ \frac{|C|}{|G|}\left(\frac{8945}{9}(\sqrt{x}+1)(\ln(d_L))^2+\frac{x^{1-\beta_0}}{1-\beta_0}-\frac{1}{1-\beta_0}\right)\\
&\leq \frac{|C|}{|G|}\frac{5}{2}\Big[\frac{4607}{10}+\frac{2012}{23}\ln(T)+\frac{(\ln(T+2))^2}{4\ln\left(\frac{\pi}{3}\right)}\Big]\ln(d_L)\\
&\times x\exp\left(-\frac{c\ln(x)}{\ln\left((ad_L)^{44/5}(b(T+2))^{n_L}\right)}\right)\\
&+ \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\left(\ln(x)+\frac{8945}{9}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(\ln(d_L))^2\right).
\end{aligned}$$

En posant $T=\frac{1}{b(ad_L)^{44/5}}\exp\left(\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right)-3$ et en considérant les réels $x\geq 2$ tels que $\ln(x)\geq 4n_L\left(\ln(5b(ad_L)^{44/5})\right)^2$, on a bien $T\geq 2$, et

$$\begin{aligned}
\left|S(x,T)-\frac{|C|}{|G|}\chi_0(g)\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0}\right| &\leq \frac{|C|}{|G|}\frac{5}{2}\ln(d_L)\left(\frac{4607}{10}+\frac{2012}{23}\ln(T)+\frac{(\ln(T+2))^2}{4\ln\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)\\
&\times x\exp\left(-c\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right)\\
&+ \frac{|C|}{|G|}\left(\frac{293321}{69696}\sqrt{x}\ln(x)+\left(\frac{5}{88}\right)^2\frac{\ln(x)}{n_L}\right)\\
&\leq 11715979982\frac{|C|}{|G|}x\exp\left(-\frac{c}{2}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right)\\
&+ \frac{|C|}{|G|}\frac{320}{19}n_L x\exp\left(-c\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right), \qquad (37)
\end{aligned}$$

d'après les inégalités (38) et (39) listées ci-après. On invoque à nouveau le théorème 6.1. Ce choix pour T, ainsi que les inégalités suivantes,

$$\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\leq\exp\left(\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right)+a(\ln(a)-1)\text{ pour tous }x\geq 2,a>1, \qquad (38)$$

$$\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\leq\exp\left(\frac{1}{4a^2n_L}\right)x\exp\left(-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right)\text{ pour tous }x\geq 2,a>0, \qquad (39)$$

$$\frac{44}{5}\ln(d_L) \le \ln(5b(ad_L)^{44/5}) \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}} \text{ (supposée vérifiée ci-dessus),}$$

$$n_L \le \frac{5}{88\ln\left(\frac{\pi}{3}\right)}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}} \text{ (Hermite-Minkowski et l'inégalité ci-dessus)}$$

impliquent que :

$$\begin{aligned}\left|\psi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x + S(x,T)\right| &\le 1505243591773\frac{|C|}{|G|}x\exp\left(-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right)\\ &+ \frac{|C|}{|G|}\left[\ln(x)\left(\frac{2}{\ln(2)} + \frac{77}{4\ln\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right) + \frac{94}{7} + \frac{1647}{5\ln\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right]\ln(d_L)\\ &\le 1505243592416\frac{|C|}{|G|}x\exp\left(-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right). \qquad (40)\end{aligned}$$

Finalement, le rassemblement de (37) et (40) donne le théorème. □

Pour passer de ψ_C à π_C, le raisonnement est assez classique. Posons

$$\theta_C(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \text{ non ramifié}\\ \mathrm{N}(\mathfrak{p})\le x\\ \left[\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right]=C}} \ln(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})).$$

Il y a au plus n_K idéaux $\mathfrak{p}^m$, avec $\mathfrak{p}$ premier, dont la norme a une certaine valeur donnée, et de plus

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p},m\ge 2\\ \mathfrak{p} \text{ non ramifié}\\ \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}^m)\le x}} \ln(\mathrm{N}(\mathfrak{p})) = \theta_C(x^{1/2}) + \theta_C(x^{1/3}) + \cdots + \theta_C(x^{1/[\ln(x)/\ln(2)]})$$

car $x^{1/M} < 2$ pour $M > \ln(x)/\ln(2)$, donc l'inégalité $\theta_C(x) \le n_K\theta_{\mathbb{Q}}(x) < 1{,}01624 n_K x$ (tirée de [R& B], théorème 9, valable pour tout $x \ge 2$) implique que :

$$\psi_C(x) - \theta_C(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{p},m\ge 2\\ \mathfrak{p} \text{ non ramifié}\\ \mathrm{N}(\mathfrak{p}^m)\le x}} \ln(\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})) \le \frac{22}{15}n_K\sqrt{x}\ln(x). \qquad (41)$$

Ceci prouve que θ_C vérifie presque la même formule asymptotique que ψ_C :

$$\begin{aligned}\left|\theta_C(x) - \frac{|C|}{|G|}x\right| &\le \frac{|C|}{|G|}\sqrt{x}\ln(x)\Big[\left(\frac{23}{3} + \frac{4781}{96\ln(x)}\right)\ln(d_L)\\ &+ \left(\frac{863}{31}\ln(x) + \frac{362}{15} + \frac{58681}{113\ln(x)}\right)n_L\Big]\end{aligned}$$

si on suppose l'hypothèse de Riemann généralisée, et, inconditionnellement,

$$\theta_C = \frac{|C|}{|G|}x - \frac{|C|}{|G|}\chi_0(g)\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0} + \frac{|C|}{|G|}R_0(x),$$

où β_0 est l'éventuel zéro exceptionnel de ζ_L dans la région décrite dans le lemme 14, χ_0 le caractère tel que $\mathrm{L}(\beta_0,\chi_0)=0$, avec $|R_0(x)|\leq 1505234280719x\exp\left(-\frac{7-4\sqrt{3}}{5}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right)$.

Une transformée d'Abel donne les théorèmes 1.1 et 1.2 : on a en effet

$$\pi_C(x)-\frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)=\frac{\theta_C(x)-\frac{|C|}{|G|}x}{\ln(x)}+\int_2^x\frac{\theta_C(t)-\frac{|C|}{|G|}t}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t.$$

On utilise la majoration $\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\ln(t)}\leq\frac{4\sqrt{x}}{\ln(x)}$, obtenue *via* le changement de variable $u=\frac{-\ln(t)}{2}$ qui nous ramène à l'étude de l'exponentielle intégrale, dont on trouve toute une étude dans [A & S], page 228.
Il faut toutefois être vigilant pour obtenir le théorème inconditionnel : comme le théorème 8.2 ne donne une estimation valable qu'à partir de $x\geq\exp\left(4n_L(\ln(150867d_L))^2\right)=:a$, on doit faire un léger découpage :

$$\begin{aligned}\pi_C(x)-\frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x) &= -\frac{|C|}{|G|}\chi_0(g)\frac{x^{\beta_0}}{\ln(x^{\beta_0})}+\frac{|C|}{|G|}\frac{R_0(x)}{\ln(x)}+\int_2^{\sqrt{x}}\frac{\theta_C(t)-\frac{|C|}{|G|}t}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t\\ &+ \int_{\sqrt{x}}^x\frac{\theta_C(t)-\frac{|C|}{|G|}t}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t\Big).\end{aligned}$$

Si, à partir de maintenant, on suppose $x\geq a^2$, alors

$$\begin{aligned}\left|\pi_C(x)-\frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x)\right| &= \Big|-\frac{|C|}{|G|}\chi_0(g)\frac{x^{\beta_0}}{\ln(x^{\beta_0})}+\frac{|C|}{|G|}\frac{R_0(x)}{\ln(2)}+n_K\int_2^{\sqrt{x}}\frac{2{,}01624}{(\ln(t))^2}\mathrm{d}t\\ &+ \int_{\sqrt{x}}^x\frac{-\frac{|C|}{|G|}\chi_0(g)\frac{t^{\beta_0}}{\beta_0}+\frac{|C|}{|G|}R_0(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t\Big|,\end{aligned}$$

et $\int_2^{\sqrt{x}}\mathrm{d}t\leq\sqrt{x}\leq\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{7-4\sqrt{3}}{5}\right)^2\right)x\exp\left(-\frac{7-4\sqrt{3}}{5}\sqrt{\frac{\ln(x)}{n_L}}\right)$, tandis que

$$\int_{\sqrt{x}}^x\frac{\exp\left(-c\sqrt{\frac{\ln(t)}{n_L}}\right)}{(\ln(t))^2}\mathrm{d}t\leq 4x\frac{\exp\left(-c\sqrt{\frac{\ln(x)}{2n_L}}\right)}{(\ln(x))^2},$$

d'où le théorème 1.1. □

Références

[A & S] M. Abramovitz et I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York : Dover, 1964.

[B & G] P.T. Bateman et E. Grosswald, *Imaginary quadratic fields with unique factorization*, Illinois J. Math. 6. 187–192, 1962.

[Che] N. Chebotarev, *Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören*, Math. Ann. 95, 1926, 191–228.

[L & O] J. Lagarias, A. Odlyzko, *Effective versions of the Chebotarev density theorem*, in : Algebraic Number Fields, ed. A. Fröhlich, Academic Press, New York, 1977, p. 409–464.

[Dav] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, Markham, Chicago, 1967.

[Neu] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, Springer Verlag, 1992, 574 pages.

[Odl] A. M. Odlyzko, *On conductors and discriminants*, *Algebraic number fields : L-functions and Galois properties* (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975), Academic Press, London, 1977, pp. 377–407.

[Œs] J. Œsterlé, *Versions effectives du théorème de Chebotarev sous l'hypothèse de Riemann généralisée*, Astérisque 61, 1979, 165–167.

[R& B] J. B. Rosser, L. Schoenfeld. *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math., 1962 p. 64–94.

[Ser] J.-P. Serre, *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S, tome 54 (1981), p. 123–201.

[Ser2] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, PUF, 1994, 192 pages.

[Sta] H. M. Stark, *Some effective cases of the Brauer-Siegel theorem*, Inventiones math., 23 (1974), p. 135–152.