

L'analyse fractale des zones métropolitaines: un aperçu méthodologique

Pierre Frankhauser

▶ **To cite this version:**

Pierre Frankhauser. L'analyse fractale des zones métropolitaines: un aperçu méthodologique. Premières Rencontres de Théo Quant, Oct 1993, Besançon, France. pp.185-198. hal-00876101

HAL Id: hal-00876101
https://hal.science/hal-00876101

Submitted on 26 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'ANALYSE FRACTALE DES ZONES MÉTROPOLITAINES
UN APERÇU MÉTHODOLOGIQUE

Pierre FRANKHAUSER

IRADES, URA 908 du CNRS
Université de Franche-Comté
32, rue Mégevand
25030 BESANCON Cedex
Tel. 81 66 53 31
Fax 81 66 53 55

I. Introduction

1. Les villes – des espaces fragmentés

La croissance des agglomérations se manifeste dans la plupart des cas par l'apparition d'un tissu urbain amorphe et fragmenté même si le plan initial de la ville était conçu selon une géométrie régulière comme les bastides ou les villes nouvelles. Cette morphologie irrégulière de la surface bâtie ne semble pas liée à une situation historique particulière et elle apparaît souvent en dépit des intentions des urbanistes qui tentent souvent d'imposer des plans compacts et réguliers.

Ceci incite à supposer que la morphogenèse urbaine est le résultat de processus d'auto-organisation qui devraient se manifester par un principe d'ordre interne, si irrégulière que paraisse la morphologie urbaine. Or l'application des mesures de densité, utilisées habituellement pour caractériser la structure du tissu urbain, ne semble pas révéler un tel principe d'ordre. On peut poser la question de savoir si en recourant à d'autres types de mesures, il est possible de découvrir des lois dans l'organisation spatiale des villes.

2. Un principe d'ordre dans les zones métropolitaines : la relation périmètre-surface

En étudiant pour des zones métropolitaines la relation entre le périmètre et la surface des zones bâties, on découvre une loi empirique assez régulière qui semble indiquer qu'il existe un principe d'organisation spatiale dans l'espace urbanisé [1], [2]. Avant de présenter les résultats de cette analyse, nous donnons un exemple d'une telle relation pour un ensemble d'objets géométriques simple, des cercles à différents rayons ρ_i. En éliminant ce rayon dans les formules du périmètre $p_i = 2 \cdot \pi \cdot \rho_i$ et de la surface $a_i = \pi \cdot \rho$ on obtient une relation entre a_i et p_i :

$$a_i = \frac{1}{4\,\pi} \cdot p_i^2 \qquad (1)$$

Si l'on passe aux logarithmes $y_i = \log a_i$ et $x_i = \log p_i$, et $c = \log \frac{1}{4 \cdot \pi}$, on obtient

$$y_i = c + 2x_i \qquad (2)$$

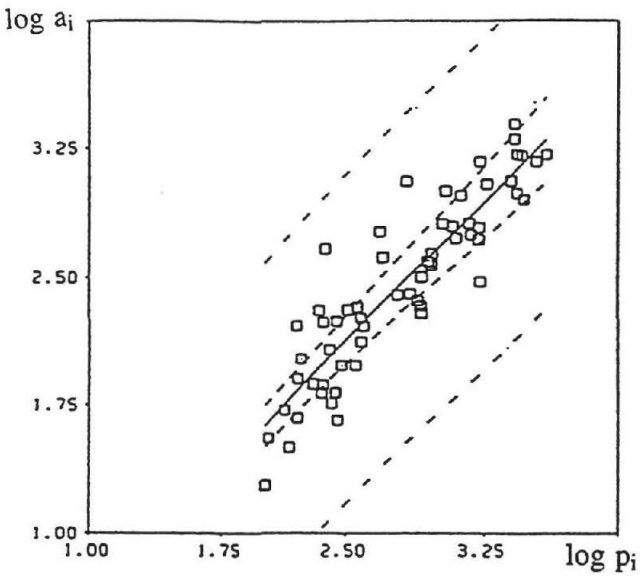
Les points (x_i, y_i) seraient donc situés sur une droite, dont la pente serait *deux*.

Afin de vérifier une telle relation pour un ensemble de villes, nous avons déterminé la surface bâtie et le périmètre pour une soixantaine de villes d'Europe, d'Amérique du Nord et du Tiers Monde à partir de la même base cartographique et à la même échelle[1]. La figure 1 montre une représentation double-logarithmique de l'ensemble des points (x_i, y_i) ainsi que la droite d'ajustement obtenue par une régression linéaire. Le coefficient de détermination R^2 se monte à 0,82 ce qui prouve une bonne qualité d'ajustement. Mais *la valeur de la pente est de 1,06* et s'approche donc de la valeur *un* ce qui indiquerait l'existence d'une loi proportionnelle.

Une telle proportionnalité entre le périmètre et la surface est contradictoire en géométrie euclidienne !

La régularité de la courbe empirique montre cependant que l'organisation spatiale suit une loi commune à l'ensemble des villes considérées. Le recours à la géométrie fractale nous permettra de trouver une interprétation de ce phénomène.

Figure 1 : La représentation bi-logarithmique entre les périmètres p_i et les surfaces a_i observées

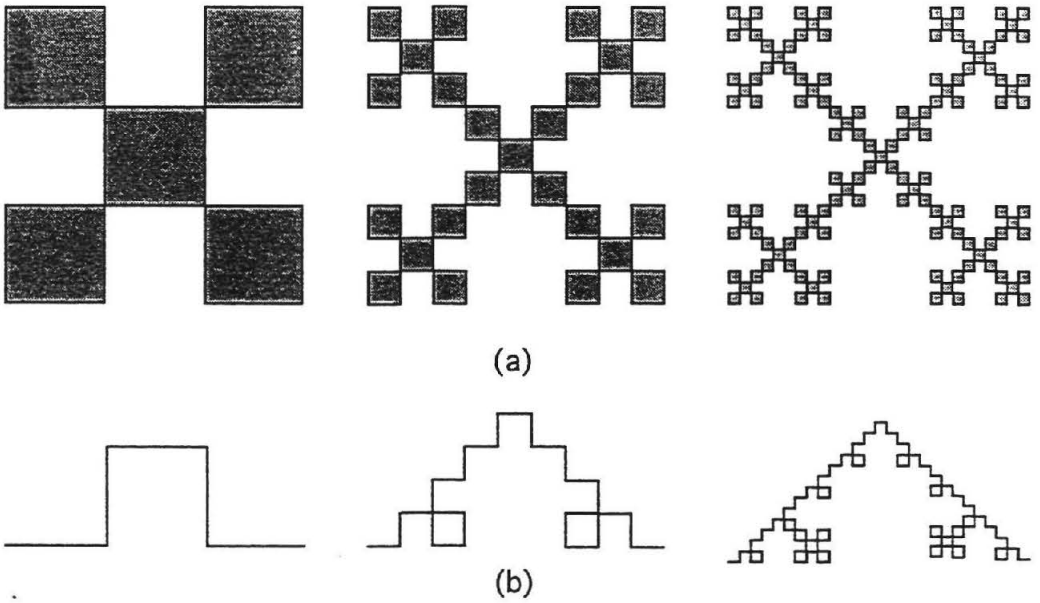


II. La formalisation fractale des tissus urbains

1. Les tapis de Sierpinski - des tissus fractals

La propriété particulière la plus importante des objets fractals est l'existence d'une organisation hiérarchique à l'intérieur des structures, souvent désignée comme *homothétie interne* ou *auto-similarité*. Afin d'illustrer ce phénomène, nous recourons à la construction d'un type de fractales qui nous sert ensuite de modèle pour les tissus urbains.

Figure 2 : Les premières étapes d'itération pour la construction de deux structures fractales



(a) construction d'un tapis de Sierpinski, (b) construction d'une courbe fractale
La courbe de (b) forme la bordure de chaque coté du tapis de Sierpinski

Nous prenons un carré de longueur L que nous réduisons selon le facteur $r = \frac{1}{3}$ et nous plaçons $N_1 = N = 5$ de ces carrés de longueur $l_1 = r \cdot L$ sous forme d'un damier tel qu'il est représenté dans la figure 2a, à gauche. Ensuite nous répétons cette opération pour chacun des cinq carrés (figure 2a, milieu). Ainsi la figure consiste maintenant en $N_2 = N^2 = 25$ carrés de longueur $l_1 = r^2 \cdot L$. L'aspect de damier a disparu et une hiérarchie spatiale apparaît : nous observons $v_1 = 4$ grandes lacunes de taille l_1 et $v_2 = 4 \cdot N = 20$ petites lacunes de longueur l_2. En répétant encore cette opération on fait émerger un niveau hiérarchique supplémentaire de lacunes tel qu'il est représenté dans la figure 2a à droite. En poursuivant cette *application itérée*, le nombre d'éléments se porterait à une étape n à $N_n = N^n$ et leur longueur serait réduite à $l_n = r^n \cdot L$, de sorte que la surface totale des carrés pointillés qui forment la fractale, soit alors

$$\begin{aligned} a_n &= N_n \cdot l_n^2 \\ &= \left(N \cdot r^2\right)^n \cdot L^2 \qquad (3) \\ &= \left(\frac{5}{9}\right)^n \cdot L^2 \qquad (4) \end{aligned}$$

Comme $\frac{5}{9} < 1$, la surface diminue donc à chaque étape et on imagine qu'en répétant cette opération jusqu'à l'infini, on obtiendrait un ensemble de points détachés, dont la surface tendrait vers zéro.

Du fait de la distribution hiérarchique des lacunes, ces points ne sont pas distribués de façon *homogène* dans la surface, mais ils forment *des agrégats de points*. Une telle fractale est appelée *tapis de Sierpinski*.

La figure 2b montre une construction similaire. La figure initiale est ici un segment d'une droite de longueur L qui est réduit par le facteur $r = \frac{1}{3}$. Nous plaçons $N = 5$ de ces segments de longueur l_1 telle qu'une partie saillante apparaisse (figure 2b, à gauche). On vérifie que la longueur totale de l'objet est ainsi $p_1 = \frac{5}{3}$. L. En répétant cette opération pour chacune des parties droites, on obtient l'objet central de la figure 2b, dont le périmètre se porte à $p_2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 . L > p_1$. Si l'on poursuit cette itération, la longueur de l'objet augmente encore et on obtient à l'étape n une longueur totale de $p_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n . L > p_n\text{-}1$. Le périmètre croît donc ainsi vers l'infini pour $n \longrightarrow \bullet$ bien que l'objet n'occupe qu'un secteur bien limité du plan. La figure 2b peut être interprétée comme la bordure supérieure de la figure 2a. Ainsi en utilisant quatre de ces figures, on pourrait construire à chaque étape le périmètre du tapis de Sierpinski de la figure 2a [2].

Le fait que le périmètre d'une figure, donc la longueur d'une courbe croisse vers l'infini semble indiquer qu'il est d'une dimension supérieure à celle d'une courbe habituelle telle qu'un cercle, c'est-à-dire *un*. Cependant elle ne couvre pas la surface entière et n'atteint donc pas la dimension *deux*. Ce comportement n'est plus en concordance avec la géométrie habituelle, d'autant plus que la surface de l'objet semble converger vers zéro. Pour caractériser de tels curieux ensembles, la théorie de la mesure a introduit des *dimensions à valeurs fractionnaires*. On définit une mesure générale L, dont on exige qu'elle reste constante au cours de l'itération :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \stackrel{!}{=} \text{const} &= N_n \cdot (l_n)^D \\ &\equiv L^D \end{aligned} \qquad (5)$$

ou

$$N_n = \text{const} \cdot l_n^{-D} \qquad (6)$$

La condition que L soit constante est remplie par un choix approprié de D. Ainsi la relation (6) détermine le nouveau paramètre D, *la dimension fractale* de l'objet. En passant aux logarithmes, on obtient une relation linéaire

$$\log N_n = \log \text{const} - D \log l_n \tag{7}$$

où D est la pente d'une droite, définie par les points ($x_n = \log l_n$, $y_n = \log N_n$). En introduisant $N_n = N^n$ et $l_n = r^n \cdot L$, on obtient une relation qui ne dépend plus de l'étape n, mais uniquement des paramètres caractéristiques pour l'application itérée, N et r :

$$\log N = -D \log r \tag{8}$$

ou

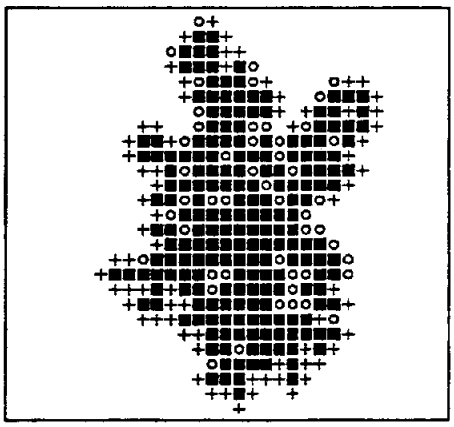
$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} \tag{9}$$

Pour les deux objets fractals de la figure 2 ces paramètres ont les mêmes valeurs et on obtient ainsi $D = \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1{,}47$. *La surface et le périmètre sont de la même dimension fractale et de ce fait proportionnels, ce qui correspond à l'observation faite pour les agglomérations.* Ainsi la courbe empirique de la figure 1 est en concordance avec la géométrie des tapis de Sierpinski[2].

2. L'organisation hiérarchique des tissus urbains

Si la relation périmètre-surface semble en concordance avec la géométrie fractale, la régularité des tapis de Sierpinski semble gênante pour une approche réaliste de la morphologie urbaine. Cependant le comportement fractal n'est pas limité à des objets réguliers, comme le montre la structure représentée dans la figure 3 qui a été obtenu par un processus aléatoire [2].

Figure 3 : Structure fractale aléatoire, obtenue par un modèle simple qui sert à simuler la croissance urbaine

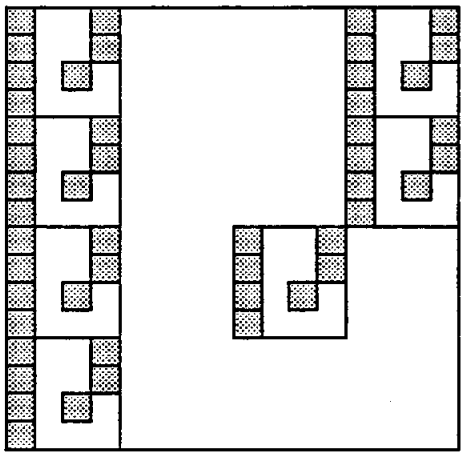


On distingue trois types d'occupation :

- occupé
- \+ peut être occupé
- o ne peut être occupé (espace protégé)

Le comportement fractal est le résultat de la protection de certaines zones qui ne peuvent être occupées au cours du processus de croissance ultérieur. Un tel effet de blocage semble en effet contribuer à la fragmentation des espaces urbains [2].

Figure 4 : Tapis de Sierpinski qui montre à la fois une hiérarchie d'agrégats et une hiérarchie de lacunes



L'élément caractéristique des fractales est leur organisation hiérarchique qu'on observe dans la répartition des espaces vides du tapis de Sierpinski. Nous ajoutons qu'il existe des structures similaires, où les agrégats montrent, eux aussi, une répartition hiérarchique, de façon qu'on observe un nombre croissant d'éléments de surface de plus en plus petite. La distribution suit, comme pour les lacunes, une *loi hyperbolique*, analogue à (6) (cf. figure 4).

Une telle hiérarchie d'éléments dans un ensemble nous rappelle une relation bien connue en géographie urbaine, *la loi rang-taille* des villes qui suit, elle aussi, une logique hyperbolique (cf. par exemple [3]). Cependant, cette observation se réfère à une échelle assez globale et concerne la distribution de la population.

Or, en comparant les surfaces de villes par classes de taille, Bussière et Stovall ont pu montrer qu'il existe une loi analogue à l'échelle des

zones métropolitaines [4]. Ce comportement s'explique du fait qu'il existe un grand nombre d'unités urbaines de petite surface et un nombre décroissant de grandes unités. Une telle hiérarchie est en concordance avec la *théorie des lieux centraux*, et il est en effet possible de donner une interprétation fractale de cette théorie [5], [2].

Une telle organisation hiérarchique paraît moins évidente à l'échelle des agglomérations même. Afin de trouver une interprétation, nous revenons à la répartition des lacunes dans notre exemple opérationnel, le tapis de Sierpinski. On observe qu'en s'éloignant du centre de l'objet, s'ajoutent des espaces vides de taille de plus en plus importante. Ceci implique une *dilution radiale* de la densité des points occupés.

Une analyse fractale permet donc de vérifier dans quelle mesure un système spatial montre le même type d'organisation spatiale à une variété d'échelles. Si on observe en effet le même type de comportement à plusieurs échelles, un tel système est structuré selon un principe hiérarchique qui est, lui, caractérisé par la dimension fractale. En passant d'un niveau d'échelle à un autre, on ne peut s'attendre à trouver toujours le même comportement spatial. Alors, l'analyse fractale permet de distinguer le niveau où l'ordre interne du système se modifie.

Le schéma 1 montre pour chaque niveau les phénomènes caractéristiques de l'organisation spatiale des habitats auxquels se réfère une telle analyse en passant de l'échelle des quartiers à l'échelle régionale. Comme exemple opérationnel nous choisissons les zones métropolitaines, exemple actuellement le mieux étudié.

III. L'application du concept fractal aux zones métropolitaines

1. Aperçu méthodologique

Le comportement fractal des agglomérations a été étudié récemment sous des aspects différents notamment à l'échelle régionale et métropolitaine par un certain nombre d'auteurs, en particulier par M. Batty et P. Longley en collaboration avec d'autres auteurs [6], [7], [8], [9], [10], par R.White [11], et par P. Frankhauser [12], [13], [1], [14], [2] et H. Le Bras [15].

Pour les fractales régulières l'application itérée a permis de déterminer directement la dimension fractale. Ceci n'est plus possible pour des structures empiriques irrégulières. Afin de mesurer le comportement fractal de telles structures, on a élaboré des algorithmes qui imitent l'application itérée en introduisant une séquence de mesures à taille variable. A chacune de ces étapes on détermine le nombre d'éléments de cette taille nécessaires pour couvrir la structure.

Les analyses fractales ont permis de mettre en évidence que les tissus urbains suivent une organisation spatiale définie que l'on peut caractériser par leur dimension fractale. De plus il a été possible de distinguer plusieurs types de villes non seulement par les valeurs de ces dimensions, mais aussi à partir de l'aspect des courbes d'analyses mêmes. En effet les courbes permettent de découvrir des seuils où le comportement spatial change.

Afin de réaliser des analyses automatisées à partir de ces algorithmes, il est nécessaire de les implanter sur l'ordinateur et de numériser une représentation cartographique du tissu bâti des villes en question. La résolution choisie lors du scannage détermine alors la taille du pixel qui, lui, représente la mesure inférieure pour les analyses.

Le logiciel que nous avons développé[3] permet actuellement d'utiliser trois algorithmes d'analyses : l'analyse du quadrillage, l'analyse radiale et l'analyse de la corrélation. Ces méthodes ne sont pas équivalentes : l'analyse radiale est un outil pertinent pour étudier le comportement local dans le voisinage d'un centre défini, tandis que les autres deux méthodes mesurent la répartition globale de la surface occupée à l'intérieur d'une zone.

Nous rappelons qu'une dimension fractale proche de deux indique que le tissu analysé est très homogène, alors que des valeurs faibles montrent une hiérarchisation importante.

3. L'analyse du quadrillage

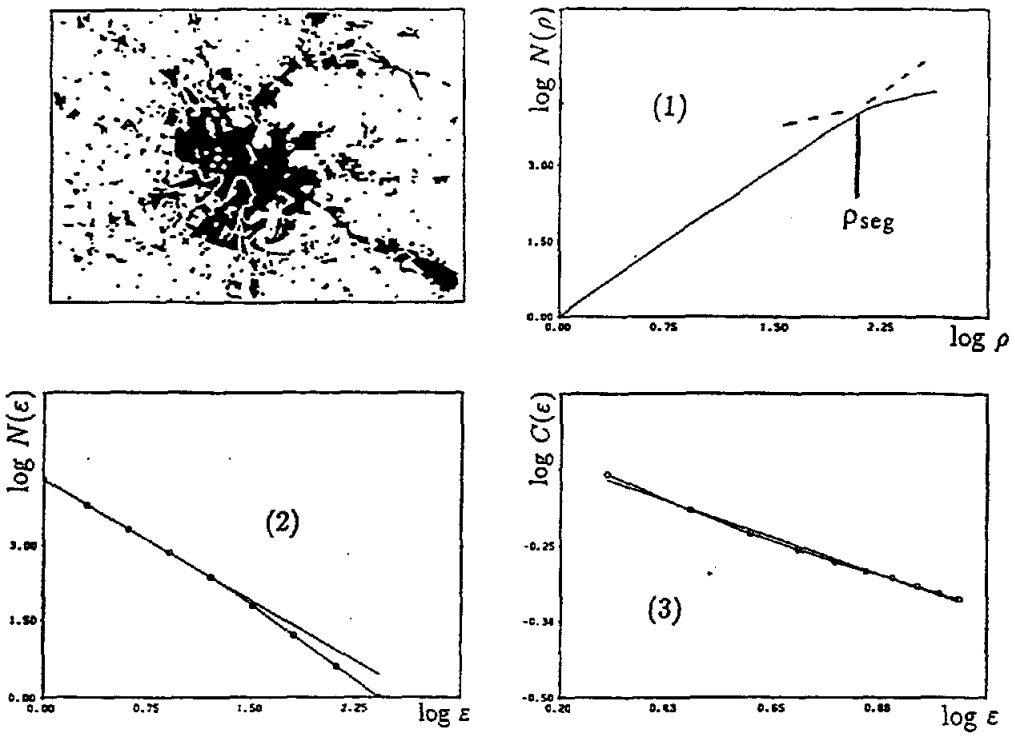
On commence par déterminer la zone dans laquelle on veut étudier le comportement fractal. Cette zone est couverte par un quadrillage, dont on fait varier la distance ε du maillage. Pour chaque valeur ε on compte le nombre $N(\varepsilon)$ de mailles contenant des points occupés. Pour une fractale on obtient, dans une représentation double-logarithmique de la fonction $N(\varepsilon)$, une relation linéaire, analogue à la relation (7) :

$$\log N(\varepsilon) = \log \text{const} - D_q \log\varepsilon \qquad (10)$$

La pente est égale à la dimension du quadrillage D_q.

Comme ce type d'analyse se réfère à une zone de taille limitée, l'extension maximale des lacunes à l'intérieur de la zone reste bornée. Ainsi la plupart des courbes sont constituées de deux parties à pentes différentes (cf. figure 5). Dans la partie qui se réfère à de grandes mailles la pente atteint la valeur deux ; en effet, dans ce cas, on trouve encore des éléments occupés à l'intérieur de chaque maille. Par contre on obtient une valeur fractionnaire pour les mailles plus fines qui traduisent une hiérarchie spatiale. Souvent la qualité d'ajustement est assez élevée dans chacune des deux parties.

Figure 5 : La surface bâtie de Moscou et les courbes obtenues pour l'analyse radiale (1), l'analyse du quadrillage (2) et l'analyse de la corrélation (3)



3. *L'analyse radiale*

Ce type d'analyse est basée sur une logique différente. Elle se réfère à un point choisi, par exemple le barycentre d'un agrégat. On détermine le nombre total de points occupés $N(\rho)$ à différentes distances ρ du centre choisi. La loi fractale prend la forme suivante

$$\begin{aligned} N(\rho) &= \rho^{D_r} \\ \Rightarrow \quad \log N(\rho) &= D_r \cdot \rho \end{aligned} \tag{11}$$

La relation linéaire (11) permet de déterminer la dimension radiale D_r.

Cette méthode s'avère un instrument puissant pour analyser la dilution radiale de la surface bâtie à partir du centre choisi et semble donc particulièrement adaptée à l'étude des agglomérations. Ceci devient évident si l'on considère la part de la surface occupée par le bâti à distance ρ du centre $\frac{N(\rho)}{N_{tot}(\rho)}$ où $N_{tot}(\rho)$ est le nombre de pixels nécessaires pour couvrir la surface entière qui est, elle, proportionnelle à r^2. Ainsi on obtient :

$$\frac{N(\rho)}{N_{tot}(\rho)} \sim \rho^{D_r-2} \tag{12}$$

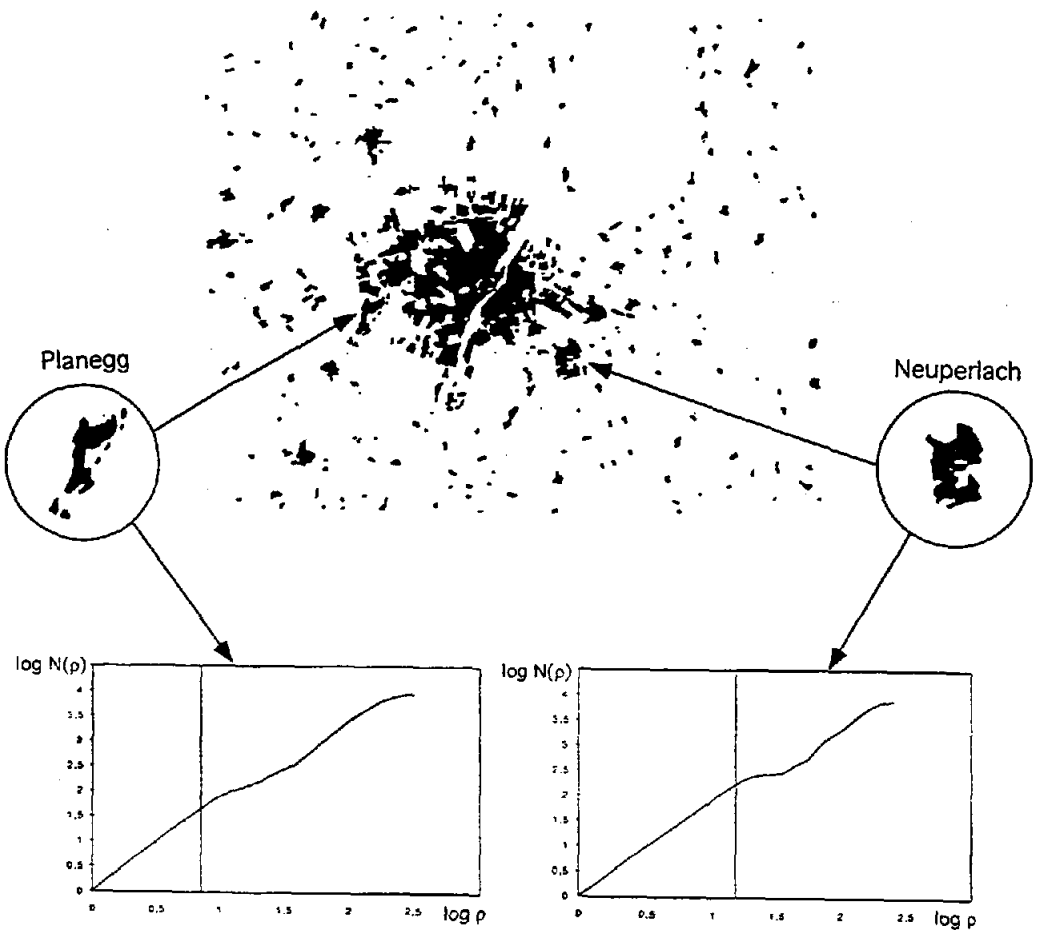
Comme $D_r < 2$, l'exposant est négatif et on retrouve donc une loi hyperbolique pour la dilution de la surface occupée à partir du centre choisi.

Le type de courbe obtenue pour l'analyse radiale est également représenté sur la figure 5. On observe souvent une courbe assez régulière à l'intérieur des agglomérations. Dès qu'on atteint la couronne périurbaine, une inflexion de la courbe apparaît. Elle indique un changement dans l'organisation spatiale à cette distance du centre. Souvent ces zones montrent leur propre organisation fractale, également bien définie. Cette zone transitoire est plus ou moins étendue selon la morphologie de l'agglomération. {\em L'analyse permet donc une segmentation directe des zones à comportement différent.

Les zones urbanisées sont habituellement composées d'un certain nombre de sous-centres qui se groupent autour d'un centre urbain important. Les habitats les plus proches de l'agrégat central sont souvent absorbés par celui-ci au cours de l'urbanisation. Sous l'aspect de la morphologie urbaine ils perdent ainsi leur caractère indépendant et font désormais partie d'un agrégat central agrandi –même si les limites administratives ne suivent pas toujours cette évolution. L'analyse radiale est un instrument subtil pour distinguer le degré d'absorption d'un habitat. Si d'autres agrégats sont situés près du centre, on observe sur la courbe une faible inflexion avant que celle-ci remonte de nouveau. Vice-versa le même comportement est observé quand on choisit comme position de référence de l'analyse le centre d'une commune située dans la périphérie. Cependant pour une zone périurbaine qui n'est pas encore intégrée dans l'agrégat central on observe une courbe à inflexion nette.

La figure 6 montre deux analyses radiales de villes situées dans la banlieue de Munich. Dans le premier cas presqu'aucune inflexion de la courbe n'apparaît, la commune est en effet pratiquement englobée dans l'agrégat central. Par contre, dans le deuxième exemple, il s'agit d'une ville assez éloignée du centre et on constate une inflexion importante de la courbe.

Figure 6 : La surface bâtie de Munich et l'analyse radiale de Planegg et de Neuperlach. Planegg est presque englobé dans l'agglomération et la courbe montre donc une faible inflexion, Neuperlach est encore situé hors de l'agrégat central ce qui se manifeste dans la courbe par une segmentation nette



En analysant la dilution radiale de sous-centres dans les zones métropolitaines on constate souvent que les dimensions fractales différent. Ainsi la loi fractale dépend de la position du centre de comptage choisi. Ceci révèle que le processus d'urbanisation de ces sous-centres a bien fait émerger un tissu à morphologie fractale, mais que sa loi de dilution radiale est différente à celle de l'agrégat central. Si le comportement fractal dépend de la localisation choisie, on parle d'un comportement multifractal.

4. L'analyse de corrélation

Une troisième méthode est l'analyse de la corrélation. On détermine pour chaque point occupé[4] le nombre de points occupés à une certaine distance ρ. On obtient ainsi une indication sur la dilution radiale moyenne.

Souvent ce type d'analyse est réalisé dans une seule direction, ce qui suppose une structure isomorphe. Alors cette analyse correspond à la détermination de la corrélation spatiale par rapport à la distance variable ρ. Dans une fractale, cette corrélation suit une loi hyperbolique qui sert à déterminer une dimension fractale, la dimension de corrélation. Comme cette méthode s'effectue à l'intérieur d'une fenêtre d'analyse, il s'agit d'une méthode globale qui est, cependant, plus sensible à la répartition de la surface occupée que l'analyse du quadrillage.

5. Une analyse complémentaire : la distribution des agrégats

Au niveau des zones métropolitaines il semble intéressant d'étudier la distribution des agrégats selon leur taille afin de vérifier si l'on trouve une hiérarchie spatiale, conforme à une loi rang-taille. A cette fin, il est possible d'introduire des classes de taille i dont la surface moyenne est de a_i. Ensuite on compte le nombre total d'agrégats $N(a_i)$ dont la surface est supérieure à a_i. Si l'on observe une distribution parétienne, on obtient une relation hyperbolique[5] entre $N(a_i)$ et a_i :

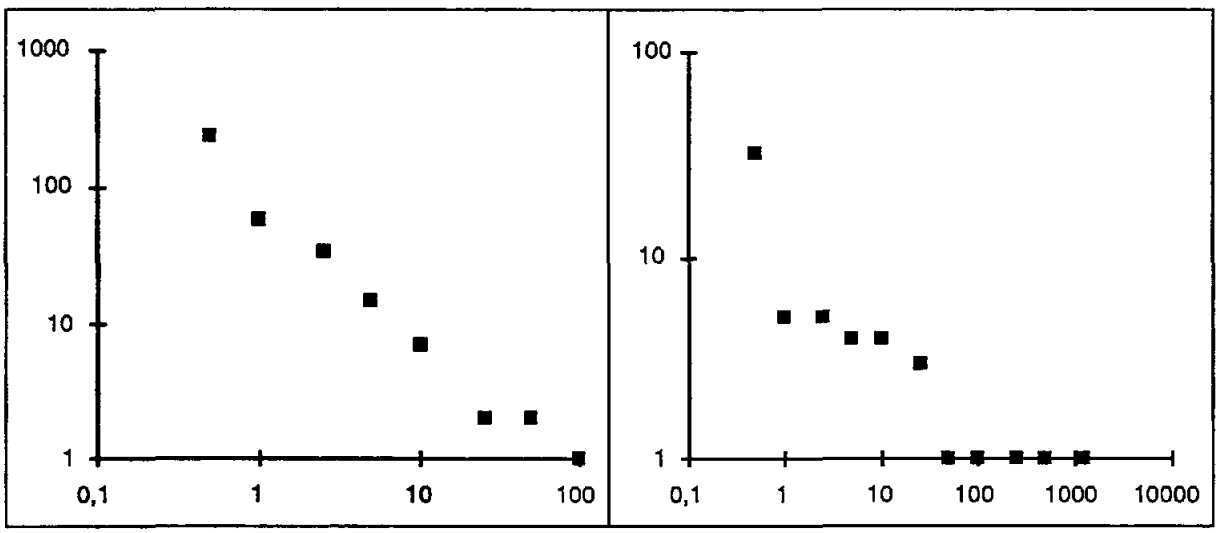
(13)

En choisissant une représentation double-logarithmique pour cette relation, on obtient une relation linéaire, comme nous l'avons discuté pour les relations fractales.

Une valeur basse indique un faible degré de hiérarchisation puisque les nombres d'occupation N_i ne varie pas beaucoup. Par contre une différence importante entre les valeurs N_i reflète une hiérarchie développée.

La figure 7 montre deux exemples de courbes empiriques. Dans le cas de Saint Petersbourg on observe une courbe assez régulière qui traduit une forte hiérarchie d'agrégats. Par contre, dans le cas de Melbourne, une telle hiérarchie manque et il est impossible de déterminer l'exposant β.

Figure 7 : L'analyse des agrégats pour la zone métropolitaine de Saint Petersbourg à gauche et celle de Melbourne à droite



7. Les résultats des analyses empiriques

7.1. L'ensemble analysé

Nous avons analysé la surface bâtie d'un ensemble d'une vingtaine de zones métropolitaines. Afin d'obtenir des résultats comparables nous avons toujours utilisé la même base cartographique au 1:500.000 [17] qui a été redessinée et numérisée en utilisant les mêmes paramètres de résolution. Trois catégories de villes ont été choisies : des villes européennes, des villes nord-américaines et australiennes et quelques villes du Tiers Monde. Nous avons recouru à toutes les méthodes d'analyse décrites. Les résultats sont présentés dans le tableau 1[14], [2]. Pour chaque ville les trois valeurs D_q, D_r et D_c différent l'une de l'autre. Ceci ne peut surprendre, car les trois types d'analyse caractérisent des aspects différents dans l'organisation spatiale des tissus urbains. Ainsi, nous rappelons le caractère local de l'analyse radiale: dans un système d'agglomérations, il est possible que la dilution radiale suive une règle fractale différente dans chacun des agrégats. On parle alors d'un comportement multi-fractal. Les autres analyses caractérisent, au contraire, l'ensemble de la zone, et, de ce fait en particulier la répartition spatiale des différents agrégats. Les trois types d'analyses sont ainsi complémentaires et la comparaison des trois dimensions permet de distinguer différentes catégories de villes selon leur organisation spatiale.

Dans certains cas nous avons pu effectuer une analyse des agrégats qui mesure directement la distribution hiérarchique des agglomérations[6] [14]. Ces investigations ont confirmé les résultats des analyses fractales par rapport à l'organisation spatiale de la zone métropolitaine: dans des espaces homogènes, dont les dimensions s'approchent de la valeur deux, on remarque une absence de hiérarchie des agrégats.

Tableau 1 : Les dimensions fractales des zones métropolitaines analysées

	Dimensions			exp.		Dimensions			exp.
Europe	$D^{(r)}$	$D^{(q)}$	$D^{(c)}$	β	*Amérique Australie*	$D^{(r)}$	$D^{(q)}$	$D^{(c)}$	β
Berlin	1,95	1,73	1,76	1,03	Boston	1,96	1,69	1,79	–
Londres	1,99	1,72	1,88	1,06	Pittsburgh	1,91	1,59	1,79	0,85
Paris	1,99	1,66	1,83	–	Los Angeles	1,99	1,93	1,93	–
Moscou	1,96	1,60	1,73	1,04	Melbourne	1,99	1,85	1,93	(*)
St. Petersbourg	1,97	1,38	–	1,00	Sydney	1,95	1,82	1,92	–
Budapest	1,97	1,72	1,86	0,84	*Tiers Monde*				
Rome	1,82	1,69	–	0,78	Mexico	1,97	1,76	1,87	1,03
Stuttgart	1,94	1,41	1,59	1,16	Taipeh	1,97	1,39	1,42	(*)
Dortmund	1,97	1,79	1,84	–	Pékin	1,98	1,93	1,96	(*)
Essen	1,97	1,81	1,86	–					

D_r dimension radiale
D_q dimension du quadrillage
D_c dimension de corrélation
b exposant rang-taille des agrégats
(*) ajustement rang-taille non possible

6.2 Les villes européennes

On observe que Londres et Paris ont des valeurs D_r très élevées, ce qui reflète une structure assez homogène du centre. La valeur élevée de D_q pour Londres traduit une plus forte urbanisation de l'arrière-pays. Cet effet est confirmé par l'analyse des agrégats : La courbe montre un surplus de villes de taille moyenne par rapport à une hiérarchie parétienne. C'est en effet la courbe la moins régulière des villes européennes. Les dimensions radiales de Berlin et de Moscou sont plus basses que celle de Londres ce qui s'explique par leur extension axiale le long des voies de transport. Ainsi on observe une forte dilution radiale à partir du centre. Par contre la dimension D_q est comparable pour Londres et Berlin, l'arrière-pays de Berlin est assez urbanisé. Moscou et Berlin montrent des courbes régulières pour l'analyse des agrégats et les valeurs de l'exposant β sont pratiquement les mêmes. Ceci montre une hiérarchie parétienne des villes comparable dans les deux zones urbanisées.

Bien que beaucoup plus petite, Budapest ressemble par ses dimensions à Londres et montre donc une structure spatiale comparable, sauf que la courbe de la distribution des agrégats est très régulière. La valeur basse de l'exposant α traduit une hiérarchisation assez faible. La zone métropolitaine de Rome suit une caractéristique particulière. Elle est de surface très petite et de morphologie dispersée, ce qui se manifeste par des dimensions de valeur basse. La hiérarchie des agrégats est encore moins développée qu'à Budapest, effet qui semble lié à la faible urbanisation de l'arrière-pays.

Nous avons ajouté quelques exemples particuliers : les villes de Dortmund et d'Essen d'une part, situées dans une région à taux d'urbanisation élevé, la Ruhr, et d'autre part Stuttgart et St. Petersbourg, deux zones métropolitaines de morphologie très fragmentée. Les résultats sont éloquents : les dimensions radiales de Dortmund et d'Essen approchent celles de Londres, les autres dimensions sont même plus élevées. Il s'agit donc d'un tissu très homogène. Les dimensions radiales de Stuttgart et de St. Petersbourg s'approchent de ces valeurs, mais les autres dimensions sont les plus basses dans l'ensemble des villes étudiées. En outre la courbe de l'analyse radiale montre dans les deux cas une forte variation entre le centre et la zone périurbaine. Une analyse plus détaillée[7] montre pour Stuttgart que la zone périurbaine suit son propre comportement actal, à une dimension $D_r \approx 1{,}27$. Ceci reflète une croissance polynucléaire qui favorise le développement de sous-centres le long des axes de transport. Dans le cas de St. Petersbourg, certaines irrégularités apparaissent dans l'analyse radiale pour la zone périurbaine, par contre l'analyse du quadrillage montre une courbe très régulière, ce qui implique une distribution d'agrégats parfaitement hiérarchisée. Cette observation est confirmée par la distribution des agrégats qui suit un principe de hiérarchisation régulière. La valeur β s'approche de celle obtenue pour Berlin et Moscou.

6.3 Les villes américaines et australiennes

Dans ce groupe on distingue deux catégories différentes. Les métropoles anciennes telles que Pittsburgh et Boston montrent des valeurs proches de celles trouvées pour les villes européennes. Par contre les villes dont l'évolution spatiale a été marquée par l'automobile, ainsi Los Angeles ou Melbourne montrent une structure beaucoup plus homogène, sans dilution radiale qui se traduit par des valeurs élevées des dimensions D_q et D_c s'approchant de la dimension radiale.

On retrouve cette différence dans l'analyse des agrégats. Pittsburgh montre une courbe régulière, tandis que Melbourne montre une courbe en paliers, mal structurée.

6.4 Les villes du Tiers Monde

Les villes du Tiers Monde ne forment pas un groupe homogène. Nous présentons trois exemples, Mexico, Taipeh et Pékin. Mexico ressemble aux villes européennes par la régularité de la courbe obtenue pour l'analyse des agrégats : la structure assez homogène se manifeste dans les valeurs élevées des dimensions D_r et D_c. La périphérie montre une forme plus fragmentée ce qui s'explique par des contraintes topographiques et, de ce fait, D_q est plus basse. En effet Mexico ressemble par son infrastructure urbaine aux villes européennes. Ainsi il y existe un réseau de transport en commun efficace[8]. Par contre Taipeh est un petit centre dispersé, entouré d'une zone peu urbanisée ce qui se traduit par les valeurs basses de D_q et D_c. Pékin, dont l'hinterland n'est pas encore urbanisé, a gardé sa forme historique, très compacte. Cet agrégat homogène domine la structure ce qui explique les valeurs élevées des dimensions. Pour Taipeh comme pour Pékin les courbes de l'analyse des agrégats montrent des paliers importants qui reflètent l'absence d'une hiérarchie de villes dans l'arrière-pays.

7. L'analyse de la croissance urbaine

7.1 L'évolution des dimensions fractales

Les résultats obtenus montrent que la répartition de la surface bâtie suit, dans les villes, une loi définie. A l'échelle des zones métropolitaines, l'apparition d'une hiérarchie d'agrégats paraît en concordance avec la théorie des lieux centraux. Par contre il semble surprenant de découvrir un principe d'ordre dans la morphologie fragmentée des agglomérations. Celle-ci n'est issue ni d'un principe d'optimisation ni d'une vision urbanistique[9]. Ceci incite à approfondir l'étude de la morphogenèse urbaine. A cette fin nous avons analysé l'évolution de la surface bâtie de deux zones métropolitaines, celle de Berlin et celle de Munich (cf. tableau 2).

Tableau 2 : L'évolution des dimensions fractales pour les zones métropolitaines de Berlin et de Munich

Berlin	D_r	D_q	D_c	Munich	D_r	D_q	D_c
1875	1,96	1,43	1,17	1800	1,97	0,68	1,20
1910	1,94	1,43	1,05	1850	1,98	0,85	1,34
1920	1,94	1,54	1,59	1900	1,96	1,00	1,69
1945	1,97	1,68	1,60	1950	1,96	1,39	1,84
				1965	1,96	1,48	1,83

D_r dimension radiale
D_q dimension du quadrillage
D_c dimension de corrélation

La figure 8a montre l'évolution des dimensions pour Munich. On remarque que la dimension radiale, qui décrit l'évolution du centre ne varie pas beaucoup au cours de la période d'observation. Elle reste même constante pour les périodes 1900 à 1950 et 1950 à 1965. Ceci implique qu'aucune densification n'apparaît à l'intérieur de cette ville, mais que l'agglomération ne croît que dans sa périphérie, donc vers l'arrière-pays. En outre, la répartition de la surface bâtie ajoutée suit le principe de dilution radiale observée à l'intérieur de l'agrégat, tel que de plus grands espaces vides persistent à l'intérieur de la zone urbanisée. Ainsi la part de la surface non-bâtie ajoutée augmente au cours de l'étalement de l'agrégat central. Nous avons pu trouver des raisons à cette fragmentation de l'espace urbain dans le comportement de la population qui semble vouloir bénéficier aussi bien de la proximité des infrastructures urbaines que des espaces verts [2]. Un tel type de croissance correspond au principe allométrique, souvent observé dans des systèmes biologiques [2]. Il rappelle aussi les structures obtenues par certains modèles de croissance fractale qui simulent un étalement dendritique à partir d'un centre[10]. Nous rappelons que cette morphologie paraît non seulement en concordance à la géométrie des tapis de Sierpinski, mais elle est confirmée par l'allongement observé de la bordure des agglomérations telle qu'elle se manifeste dans la loi périmètre-surface discutée ci-dessus.

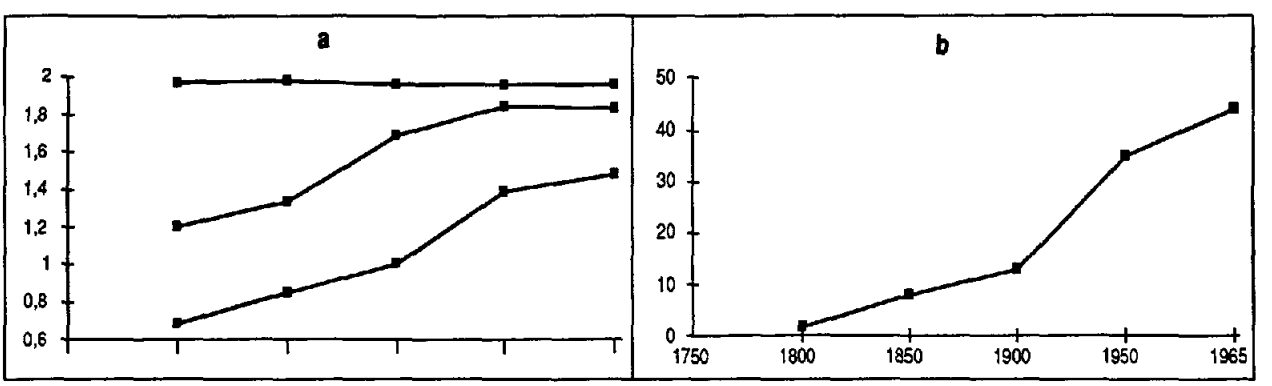
Les autres dimensions fractales augmentent au cours du temps ce qui reflète l'urbanisation de l'arrière-pays. La figure 8a montre que les deux dimensions qui caractérisent la répartition du bâti dans l'ensemble de la zone urbanisée varient de la même façon. A Berlin cette évolution se manifeste après 1910. En effet à cette période, on observe l'apparition de plusieurs sous-centres périphériques qui se situent sur des voies de transport importantes.

7.2 La dynamique du rayon de segmentation

Si l'on observe une croissance urbaine qui suit au moins approximativement une loi allométrique, l'étalement de la surface bâtie est l'effet dominant de la croissance urbaine. Ainsi la connaissance du rayon de segmentation tel que nous l'avons introduit dans la section 3.3 pour chaque époque nous donne la possibilité de retracer directement la dynamique spatiale d'une telle agglomération.

La figure 8 montre pour l'exemple de Munich l'évolution de ce rayon ρ_{seg}. On constate une accélération de l'extension spatiale à partir de 1900.

Figure 8 : L'évolution des dimensions fractales (a) et du rayon de segmentation à Munich (b)



(1) dimension radiale D_r (2) dimension de corrélation D_c (3) dimension du quadrillage D_q

Il est évident que pour une analyse plus détaillée de la dynamique urbaine, une séquence temporelle plus dense serait nécessaire.

IV. Conclusion

La fractalité révèle l'existence d'une organisation hiérarchique dans une structure. Elle peut être caractérisée par un seul type de paramètre, la dimension fractale.

En particulier l'analyse radiale s'est avérée un instrument puissant pour explorer la morphologie urbaine. Ainsi elle peut servir à déterminer le rayon de segmentation entre une ville et son arrière-pays et distinguer différentes zones dans une agglomération à partir de l'organisation spatiale. En outre pour des communes périurbaines, il est possible de mesurer le degré d'absorption spatiale par l'agglomération principale.

L'existence d'un comportement fractal à l'échelle des zones métropolitaines semble liée à une croissance polynucléaire qui se manifeste par une loi rang-taille des agrégats, en concordance avec la théorie des lieux centraux. Par contre, il paraît plus surprenant de découvrir un tel principe d'ordre dans la morphologie fragmentée des tissus urbains au niveau des agglomérations. Cet effet semble issu d'une croissance dominée par les axes de transport. L'influence de l'utilisation de certains moyens de transport sur la morphogenèse urbaine a été confirmée par la comparaison entre villes européennes et américaines. L'analyse fractale de séquences temporelles du bâti de quelques agglomérations a permis d'approfondir les connaissances sur les lois de la croissance urbaine et de trouver, pour la fragmentation de l'espace, d'autres explications, en particulier la préservation de zones vertes à l'intérieur des espaces urbanisés, situées à proximité de zones résidentielles.

V. Remerciements

L'auteur remercie D. Pumain et L. Sanders de l'équipe P.A.R.I.S. au CNRS pour maintes inspirations. Il remercie également K. Humpert et H. Bohm de l'Institut d'Urbanisme de l'Université de Stuttgart pour avoir mis à sa disposition la plupart des représentations cartographiques ainsi que pour les discussions fertiles, menées au cours du travail.

Cette recherche a été financée par le Sonderforschungsbereich 230 "Natürliche Konstruktionen" de l'Université de Stuttgart, par le Département de Systémique de l'Université de Dortmund, par l'IRADES (Université de Franche-Comté), ainsi que par le programme PIR-Villes du CNRS.

Références bibliographiques

[1] P. FRANKHAUSER, R. SADLER : Fractal analysis of agglomerations. In Sonderforschungsbereich 230 "Natürliche Konstruktionen», editor, *Natural Structures – Principles, Strategies and Models in Architecture and Nature*, volume II, 1992

[2] P. FRANKHAUSER : *La fractalité des structures urbaines*. Anthropos, 1994

[3] D. PUMAIN : *La dynamique des villes*. Economica, 1981

[4] R. BUSSIERE, T. STOVALL : Systèmes évolutifs urbains et régionaux à l'état d'équilibre

[5] S.L. ARLINGHAUS, W.-C. ARLINGHAUS : The fractal theory of central place geometry : a diophantine analysis of fractal generators for arbitrary löschian numbers. *Geographical Analysis*, 21(2), 1989

[6] M. BATTY, P. LONGLEY : The fractal simulation of urban structure. *Papers in Planning Research*, 92, 1985

[7] P. LONGLEY, M. BATTY, J. SHEPHERD, G. SADLER : Implications of planning policy for the geometry of land use patterns : A preliminary analysis of the settlement geography of south east. In *Paper presented at the 7th European Colloquium on Theoretical and Quantitative Geography*, Stockholm, 1991

[8] M. BATTY : Generating urban forms from diffusive growth. *Environment and Planning A*, 23, 1991

[9] M. BATTY, K.-S. KIM : Form follows function: reformulating urban population density function, Urban Studies, 29(7), 1992

[10] M. BATTY, P. LONGLEY : *Fractal Cities, a Geometry of Form and Function*. Academic Press, 1994

[11] R. WHITE, G. ENGELEN : Cellular automata and fractal urban form: a cellular modelling approach to the evolution of urban land use patterns. *Environment and Planning A*, 25, 1993

[12] P. FRANKHAUSER : Fractal aspects of urban systems. In Sonderforschungsbereich 230 "Natürliche Konstruktionen», editor, *Beiträge zum I. Internationalen Symposium des SFB 230 Natürliche Konstruktionen – Leichtbau in Architektur und Natur Teil 1*, 1988

[13] P. FRANKHAUSER : Aspects fractals des structures urbaines. *L'Espace Géographique*, (1), 1991

[14] P. FRANKHAUSER : Fractal properties of settlement structures. In *Proceedings of the 1st International Seminary on ructural Morphology, Montpellier*, 1992

[15] H. LE BRAS : *Le village au planète*. DATAR, éditions de l'aube, 1993

[16] P. FRANKHAUSER : *Beschreibung der Evolution urbaner Systeme mit der Mastergleichung*. Thèse de Doctorat, Université de Stuttgart, 1991

[17] KÜMMERLY und FREY, Rand Mc. Nally WESTERMANN : *Internationaler Atlas*. Georg Westermann, 1981

Notes

[1] L'auteur remercie K. Humpert et B. Pfeil pour avoir mis ces données à sa disposition

[2] Même si cette concordance n'apparaît pas toujours d'une façon aussi nette dans d'autres tapis de Sierpinski, cette propriété reste toujours valable dans la limite d'itérations élevées, du fait que les éléments qui forment la bordure représentent un sous-ensemble de la fractale et convergent donc vers le même ensemble limite (D. Kahnert, communication personnelle, [1])

[3] L'auteur remercie R. Sadler (Stuttgart) ainsi que B. Fergani (Besançon) pour la réalisation du logiciel d'analyse

[4] En pratique on utilise souvent un échantillon représentatif

[5] La déduction est basée sur l'introduction de classes de taille dont les limites sont définies selon une progression géométrique [16]

[6] L'auteur remercie K. Humpert et B. Pfeil d'avoir mis les données nécessaires à sa disposition

[7] au 1/400.000

[8] K. Humpert, communication personnelle

[9] Même si certains architectes ont proposé des plans qui ressemblent à des objets fractals issus d'une application itérée (cf. [2])

[10] M. Batty a recouru à un tel modèle pour simuler la croissance urbaine [8], [10]