

Caractérisation et modélisation d'un élastomère dissipatif: application au pré-dimensionnement de pièces lamifiées élastomère-métal

Alexis DELATTRE ^{1,3 *}, Stéphane LEJEUNES ², Stéphane MÉO ¹, Florian LACROIX ¹, Caroline RICHARD ¹

¹ LMR, Université François Rabelais de Tours

² LMA, UPR CNRS 7051

³ Eurocopter France

* alexis.delattre@etu.univ-tours.fr

Résumé — Dans cette communication, on présente des essais de caractérisation réalisés sur un caoutchouc chargé. A partir de ces résultats, nous proposons un nouveau modèle de comportement capable de traduire les effets de la fréquence et de l'amplitude du chargement. Par une approche phénoménologique et en se basant sur la thermodynamique des processus irréversibles, ce modèle est développé en grandes déformations et tient compte de la contrainte de faible compressibilité.

Mots clés — Grandes déformations, élastomère, incompressibilité, viscoélasticité.

1 Introduction

Ces travaux s'inscrivent dans un projet visant à développer un outil de conception robuste et adapté à un contexte de pré-dimensionnement (crucial vis-à-vis des contraintes calendaires d'un développement industriel) pour les pièces lamifiées élastomère-métal utilisées dans les rotors d'hélicoptères [3]. Ces pièces sont soumises à des sollicitations mécaniques et thermiques importantes. Le cahier des charges de ces pièces est donc très exigeant d'autant plus qu'elles fonctionnent essentiellement dans un régime non-linéaire. Malheureusement, les outils actuels (logiciels éléments finis généralistes) sont inadaptés à la modélisation de ce type de pièces car leur géométrie est complexe (lamelles très élancées), le comportement est fortement non-linéaire, les chargements sont multi-axiaux et combinent des composantes statiques et dynamiques.

Les élastomères utilisés dans ces pièces sont des caoutchoucs chargés conçus de manière à optimiser leurs caractéristiques élastiques et leur résistance à la fatigue. Certaines variétés employées présentent un caractère viscoélastique important qui est dépendant de la fréquence et de l'amplitude du chargement. De plus, les conditions de fonctionnement d'un hélicoptère imposent de prendre en compte la dépendance du comportement à la température. Pour toutes ces raisons, il est nécessaire d'avoir un modèle de comportement qui intègre l'ensemble de ces effets si l'on souhaite dimensionner avec pertinence ce type de pièces. Cependant, les modèles de comportement rencontrés dans la littérature ne décrivent que partiellement ces effets ou présentent une complexité telle qu'ils sont inadaptés à un contexte industriel.

Dans ce papier, nous présentons des résultats d'essais de caractérisation sur un élastomère synthétique rencontré dans les pièces lamifiées. Cette campagne expérimentale comprend différents types d'essais (statiques, dynamiques,...) sur plusieurs types d'éprouvette (diabolo, double-cisaillement, ...). Les essais dynamiques ont mis en évidence la dépendance à la fréquence et à l'amplitude de sollicitation et des essais de relaxation ont permis d'établir le caractère visco-hyperélastique non-linéaire du comportement du matériau. A partir des données expérimentales, nous proposons un modèle de comportement de ce matériau. Pour cela, nous avons retenu une approche phénoménologique basée sur la thermodynamique des processus irréversibles.

2 Caractérisation des propriétés élasto-dissipatives du matériau

2.1 Description des essais expérimentaux

Au vu des applications industrielles visées, nous souhaitons caractériser le comportement multi-axial, dynamique et stabilisé d'un elastomère synthétique chargé de noir de carbone dans une gamme de fréquences comprise entre 0 et 30Hz et une gamme d'amplitudes allant jusqu'à 100% de déformation. Pour ce faire, nous avons mené une campagne d'essais sur des éprouvettes élémentaires de type double-cisaillement, H2 et diabolo. Ces éprouvettes sont assouplies avant chaque essai afin de supprimer l'effet Mullins [6] que nous ne souhaitons pas prendre en compte dans notre modèle.

Plus précisément, cette campagne d'essais de caractérisation s'est appuyée sur les essais suivants :

- Des essais de relaxation et de relaxation par paliers
- Des essais quasi-statiques (à faible vitesse de déformation)
- Des essais cycliques à différentes amplitudes et différentes fréquences, avec ou sans précharge
- Des essais DMA ou de caractérisation physico-chimique

L'ensemble de ces essais ont été répétés plusieurs fois de façon à s'assurer de leur reproductibilité. De plus, certains d'entre eux ont été réalisés sous enceinte climatique à différentes températures.

2.2 Résultats expérimentaux

La Fig.1(a) nous montre que la réponse visco-élastique du matériau est fortement dépendante de l'amplitude de la sollicitation. En effet, nous constatons une relaxation de la contrainte plus importante pour des faibles niveaux de déformation.

Les Fig.2(a) et Fig.2(b) nous montrent que le comportement dissipatif du matériau semble essentiellement visco-élastique : les contraintes relaxées à la charge et à la décharge sont quasiment identiques pour un niveau de déformation donné. En reliant ces contraintes relaxées entre-elles, nous pouvons définir un comportement hyperélastique qui correspond à la réponse statique du matériau (c'est-à-dire celle que nous aurions s'il était possible de réaliser un essai à vitesse de déformation nulle). Dans ces figures, nous avons arbitrairement choisi d'exploiter les contraintes relaxées à la décharge (dans un cas visco-plastique, cela permet en effet de s'affranchir d'une contrainte plastique). Nous obtenons un comportement hyperélastique typique des élastomères, à savoir une réponse adoucissante pour de petites amplitudes de déformation, puis raidissante pour de plus grandes amplitudes.

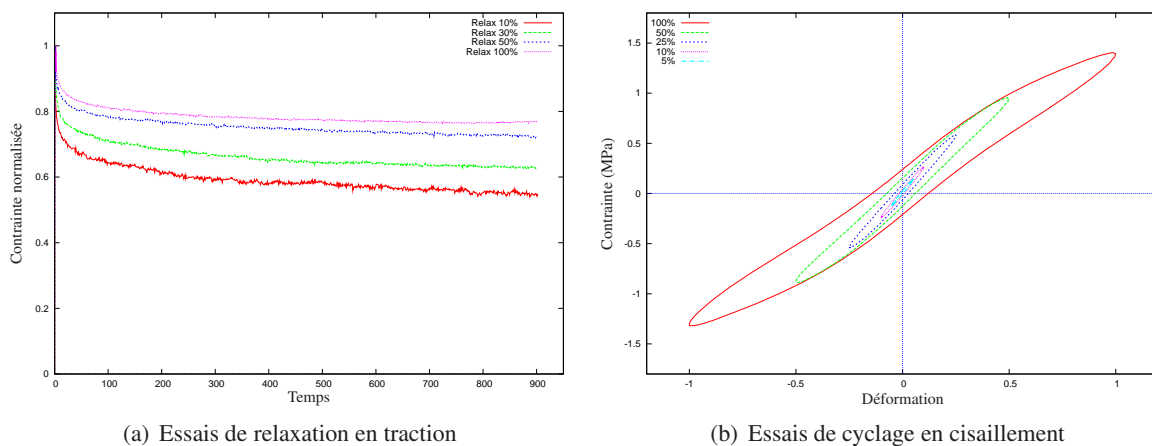


Fig. 1 – Essai de cyclage sinusoïdal en cisaillement à différentes amplitudes à 3Hz sans pré-déformation statique et essais de relaxation à différentes amplitudes en traction

La Fig.1(b) présente un exemple de résultat obtenu sur un essai cyclique en cisaillement. Nous constatons une réponse fortement non-linéaire et dépendante de l'amplitude de sollicitation. De manière plus globale, nous pouvons exploiter les essais cycliques en traçant l'évolution d'une raideur définie comme étant la pente de la droite passant par les extrema de l'hystérésis ainsi que l'évolution de l'aire de l'hystérésis, liée à la dissipation sur un cycle. Ces grandeurs, représentée Fig.3, permettent d'illustrer la

dépendance à la fréquence et à l'amplitude du matériau. On constate un raidissement et une augmentation de la dissipation en fonction de la fréquence, un assouplissement et une augmentation de la dissipation en fonction de l'amplitude (effet Payne). Ces dépendances sont typiques des élastomères chargés. Elles sont complexes à modéliser mais il est nécessaire de les prendre en compte au vu des applications visées.

A l'heure actuelle, il existe dans la littérature un grand nombre de modèles et d'approches qui permettent de décrire un comportement visco-élastique, éventuellement non-linéaire, avec une dépendance à la fréquence proche de celle constatée expérimentalement [2], [5]. La dépendance à l'amplitude est plus rarement prise en compte [4] car il s'agit d'un effet réversible qui n'est pas naturellement intégré dans les modèles classiques. A notre connaissance, il n'existe pas d'approche visco-élastique traduisant à la fois les effets de la fréquence et de l'amplitude, et valable en multi-axial.

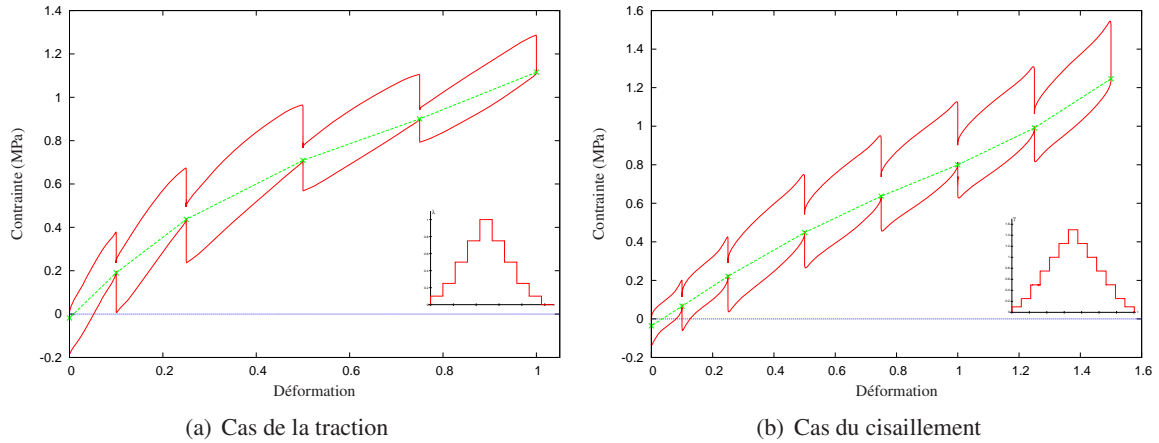


Fig. 2 – Essai de relaxation par paliers

3 Modélisation du comportement hyper-viscoélastique

3.1 Cadre thermodynamique

Le cadre thermodynamique adopté est basé sur la notion d'état local et sur l'introduction de variables internes permettant de décrire les phénomènes irréversibles observés. Pour simplifier, nous négligeons dans la suite les effets de la température. Nous notons \mathbf{F} le tenseur gradient de la transformation, J son déterminant, \mathbf{D} le tenseur taux de déformation eulérien. Dans la configuration eulérienne, l'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit :

$$\phi = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho_0 J^{-1} \dot{\psi} \geq 0 \quad (1)$$

Où ϕ est la dissipation intrinsèque, ρ_0 est la masse volumique dans la configuration de référence et ψ l'énergie libre de Helmholtz.

Afin de tenir compte du caractère faiblement compressible de notre matériau, le gradient de la transformation est décomposé en une partie volumique et une partie isochore :

$$\mathbf{F} = (J^{1/3} \mathbf{Id}) \cdot \bar{\mathbf{F}} \quad (2)$$

En utilisant la notion d'état intermédiaire introduite par Sidoroff ([7], [8]), on décompose la partie isochore du gradient de la transformation en une partie *élastique* et une partie *visqueuse* (Voir Fig.4(a)) :

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_v \quad (3)$$

L'énergie libre s'exprime alors :

$$\psi(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e, \omega, J) = \psi_0^{iso}(\bar{\mathbf{B}}) + \psi_v^{iso}(\bar{\mathbf{B}}_e, \omega) + \psi^{vol}(J) \quad (4)$$

Où $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^T$, $\bar{\mathbf{B}}_e = \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_e^T$ et $\omega \in [0, 1]$ est une variable interne représentant le nombre de liaisons chaines-charges rompues au cours du temps de l'essai (voir Fig.5). Ce phénomène de rupture des liaisons

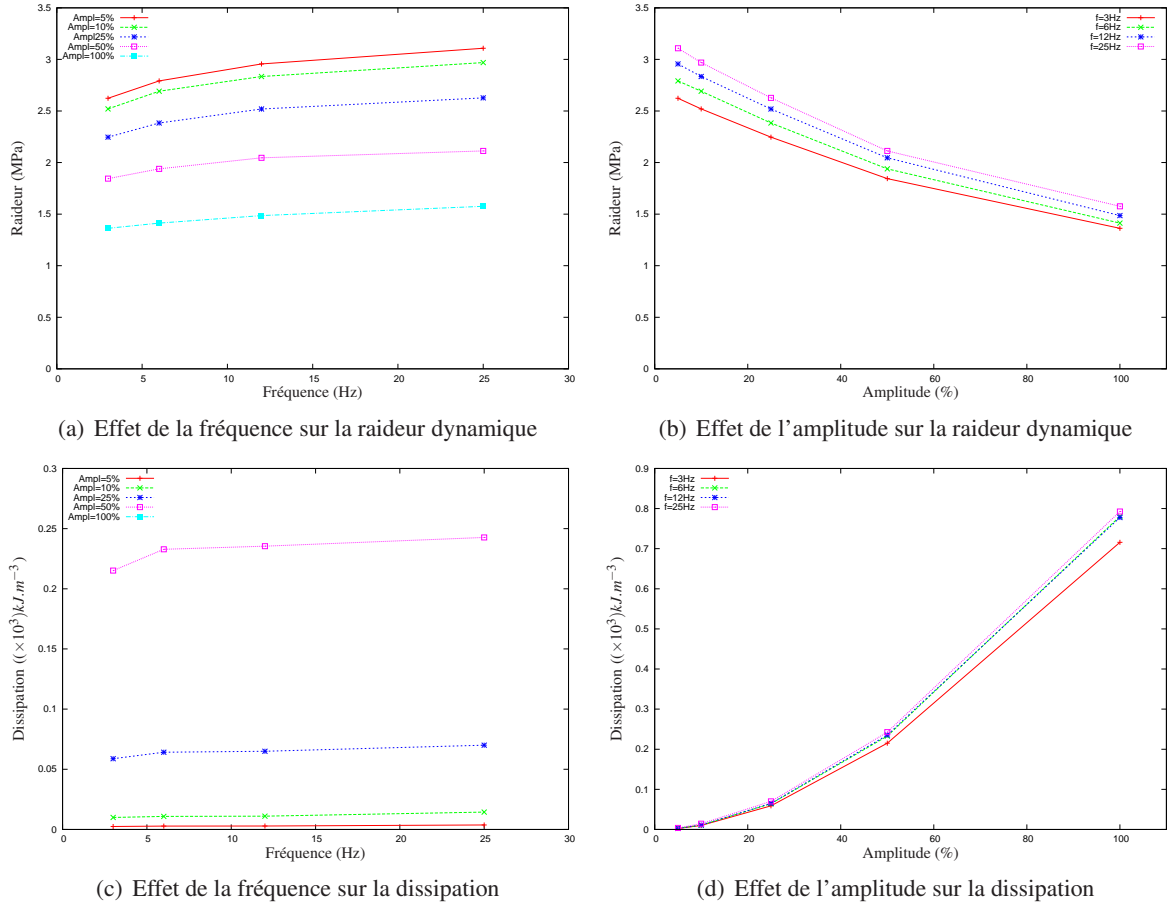


Fig. 3 – Effets de la fréquence et de l'amplitude de déformation sur la raideur dynamique et la dissipation au cours d'un cycle en cisaillement

entre les chaînes polymères constituant la matrice élastomère et les charges renforçantes (principalement des particules de noir de carbone) est un processus réversible, si bien qu'une fois que le matériau retrouve sa configuration initiale et qu'il est déchargé de toute contrainte, les liaisons peuvent se reformer.

On peut ainsi écrire ψ sous la forme suivante :

$$\psi(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e, J) = \frac{\partial \psi_0^{iso}(\bar{\mathbf{B}})}{\partial \bar{\mathbf{B}}} : \dot{\bar{\mathbf{B}}} + \frac{\partial \psi_v^{iso}(\bar{\mathbf{B}}_e, \omega)}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} : \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e + \frac{\partial \psi_v^{iso}(\bar{\mathbf{B}}_e, \omega)}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial \psi^{vol}(J)}{\partial J} \dot{J} \quad (5)$$

Avec :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{B}}} = \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{3} \text{Tr}(\mathbf{D}) \bar{\mathbf{B}} \\ \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e = \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{3} \text{Tr}(\mathbf{D}) \bar{\mathbf{B}}_e - 2 \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \bar{\mathbf{D}}_v^o \cdot \bar{\mathbf{V}}_e \\ \dot{J} = J \text{Tr}(\mathbf{D}) \end{cases} \quad (6)$$

Où $\bar{\mathbf{D}}_v^o$ est une mesure objective du taux de déformation visqueuse isochore et $\bar{\mathbf{V}}_e$ un tenseur de déformation pure élastique isochore.

Nous supposons que tous les termes de la dissipation intrinsèque sont indépendamment positifs, ce qui constitue une condition suffisante pour que l'inégalité de Clausius-Duhem soit vérifiée. De plus, sous l'hypothèse que chacune des forces thermodynamiques suit un principe de normalité par rapport à un potentiel de dissipation ϕ_v , on combine les équations (5), (6) et (1) pour obtenir l'équation constitutive

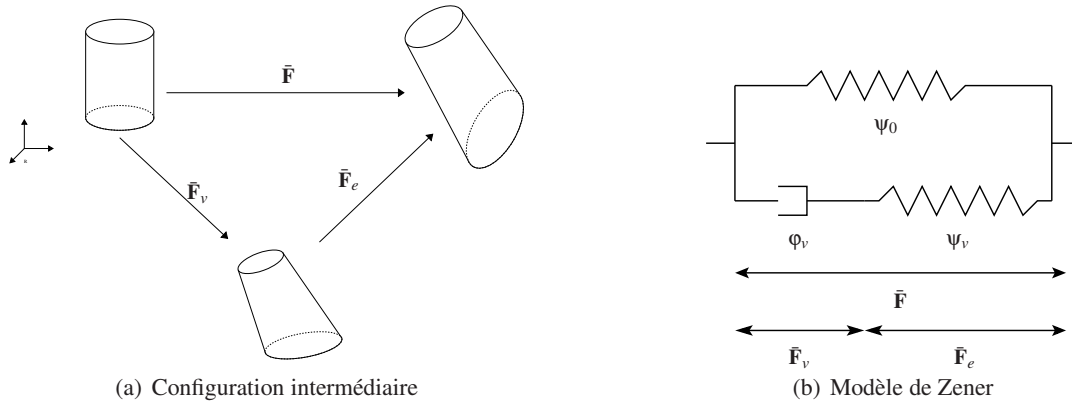


Fig. 4 – Configuration à un état intermédiaire et modèle de Zener

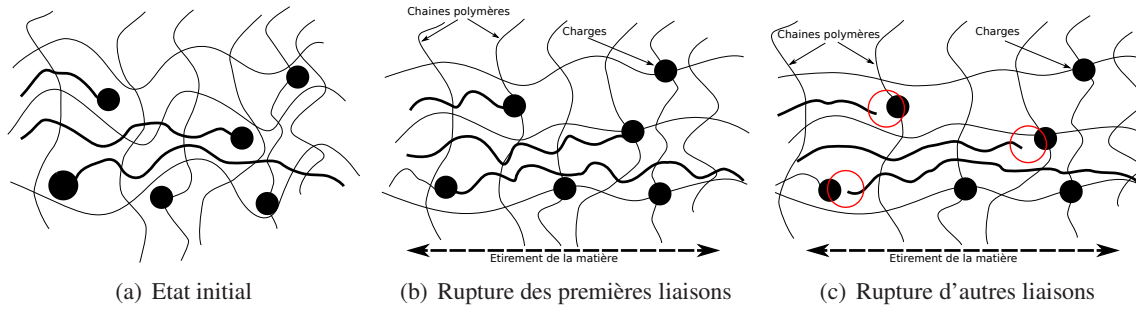


Fig. 5 – Rupture des liaisons chaines-charges à mesure que les déformations augmentent

et la loi d'évolution suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_0 + \sigma_v - \rho_0 \frac{\partial \psi^{vol}(J)}{\partial J} \mathbf{Id} \\ \frac{\partial \phi_v(\bar{\mathbf{D}}_v^o)}{\partial \bar{\mathbf{D}}_v^o} = 2\rho_0 J^{-1} \left[\bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial \psi_v^{iso}(\bar{\mathbf{B}}_e, \omega)}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e \right]^D \\ -\rho_0 J^{-1} \frac{\partial \psi_v^{iso}(\bar{\mathbf{B}}_e, \omega)}{\partial \omega} \dot{\omega} \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{Avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 = 2\rho_0 J^{-1} \left[\bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_0^{iso}(\bar{\mathbf{B}})}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right]^D \\ \sigma_v = 2\rho_0 J^{-1} \left[\bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_v^{iso}(\bar{\mathbf{B}}_e, \omega)}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \right]^D \end{array} \right. \quad (7)$$

3.2 Etablissement de la loi de comportement : choix des potentiels

On choisit pour expression de $\psi_0^{iso}(\bar{\mathbf{B}})$ la forme donnée dans [1] :

$$\psi_0^{iso}(I_1(\bar{\mathbf{B}}), I_2(\bar{\mathbf{B}})) = c_1 \int \exp \left[c_3 (I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3)^2 \right] dI_1 + 3c_2 \int \frac{1}{\sqrt{I_2(\bar{\mathbf{B}})}} dI_2 \quad (8)$$

Où $I_1(\bar{\mathbf{B}})$ et $I_2(\bar{\mathbf{B}})$ sont respectivement les premier et deuxième invariants de $\bar{\mathbf{B}}$, et c_1 , c_2 et c_3 sont des paramètres matériau.

En ce qui concerne la branche visqueuse, on prend pour expression de $\psi_v^{iso}(\bar{\mathbf{B}}_e, \omega)$ une forme néo-hookéenne dont le coefficient $G(\omega)$ varie linéairement avec ω , et pour le pseudo potentiel de dissipation $\phi_v(\bar{\mathbf{D}}_v^o)$ une forme quadratique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_v^{iso}(\bar{\mathbf{B}}_e, \omega) = G(\omega)(I_1(\bar{\mathbf{B}}_e) - 3) \quad \text{avec} \quad G(\omega) = G_0 \omega \\ \phi_v(\bar{\mathbf{D}}_v^o) = \frac{\eta}{2} \bar{\mathbf{D}}_v^o : \bar{\mathbf{D}}_v^o \end{array} \right. \quad (9)$$

Il s'agit également de se donner une expression de la loi d'évolution de $\omega(t)$. Sachant qu'il faut vérifier l'inégalité (7c) et que l'expression de $\psi_v^{iso}(\bar{\mathbf{B}}_e, \omega)$ dans l'équation (9a) nous assure la positivité de $\frac{\partial \psi_v^{iso}(\bar{\mathbf{B}}_e, \omega)}{\partial \omega}$, il faut nécessairement que $\dot{\omega} \leq 0$. On choisit :

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\tau} \left(\left(\frac{3}{I_1(\bar{\mathbf{B}})} \right)^r - \omega \right) \left\langle \omega - \left(\frac{3}{I_1(\bar{\mathbf{B}})} \right)^r \right\rangle \quad (10)$$

Où $\langle x \rangle$ est la partie positive de x , τ est un temps caractéristique et r une constante.

Enfin, la partie volumique de l'énergie libre s'écrit généralement sous la forme $\psi^{vol}(J) = k g(J)$, où k est une constante assimilable au module de compressibilité. On choisit ici :

$$\psi^{vol}(J) = k(J-1)^2 \quad (11)$$

Finalement, en injectant les équations (8) à (11) et l'équation (6) dans (7), on obtient la loi de comportement et les lois d'évolution suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_v - 2\rho_0 k(J-1) \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_0 = 2\rho_0 J^{-1} \left[c_1 \exp \left[c_3 (I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3)^2 \right] \bar{\mathbf{B}} + \frac{3c_2}{\sqrt{I_2(\bar{\mathbf{B}})}} (I_1(\bar{\mathbf{B}})\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{B}}^2) \right]^D \\ \boldsymbol{\sigma}_v = 2\rho_0 J^{-1} G(\omega) \bar{\mathbf{B}}_e^D \end{array} \right. \\ \dot{\omega} = \frac{1}{\tau} \left(\left(\frac{3}{I_1(\bar{\mathbf{B}})} \right)^r - \omega \right) \left\langle \omega - \left(\frac{3}{I_1(\bar{\mathbf{B}})} \right)^r \right\rangle \\ \dot{\bar{\mathbf{B}}}_e = \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{B}}_e + \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \mathbf{L}^T - \frac{2}{3} \text{Tr}(\mathbf{D}) \bar{\mathbf{B}}_e - \rho_0 J^{-1} \frac{4G(\omega)}{\eta} \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \bar{\mathbf{B}}_e^D \end{array} \right. \quad (12)$$

4 Résultats obtenus avec modèle

4.1 Généralisation du modèle à n branches visqueuses

On se propose maintenant d'étendre le modèle au cas à n branches visqueuses en parallèle de la branche élastique. En effet, les observations expérimentales, notamment ceux présentés Fig.1(a), nous montrent qu'il existe des effets liés à des phénomènes viscoélastiques plus ou moins rapides, et donc associés à plusieurs temps caractéristiques τ_i .

L'expression de l'énergie libre visqueuse devient alors :

$$\psi_v^{iso}(\bar{\mathbf{B}}_e, \omega_i) = \sum_{i=1}^n G_i(\omega_i) (I_1(\bar{\mathbf{B}}_e) - 3) \quad (13)$$

Avec :

$$G_i(\omega_i) = G_i \omega_i \quad (14)$$

et

$$\dot{\omega}_i = \frac{1}{\tau_i} \left(\left(\frac{3}{I_1(\bar{\mathbf{B}})} \right)^{r_i} - \omega_i \right) \left\langle \omega_i - \left(\frac{3}{I_1(\bar{\mathbf{B}})} \right)^{r_i} \right\rangle \quad (15)$$

4.2 Résultats d'identification

Le modèle tel qu'il est défini par les équations (12) et (13) comporte $3(n+1)$ paramètres à identifier. Il s'agit, pour déterminer leurs valeurs, de minimiser l'erreur au sens des moindres carrés entre les essais et le modèle. On utilise pour cela un algorithme génétique proposé dans le logiciel *Mathematica*.

Nous procéderons en deux temps :

1. Identification des coefficients de la partie élastique de l'énergie libre c_1 , c_2 et c_3 à partir des essais de relaxation par paliers, en traction et en cisaillement simultanément.

- En se donnant $n = 5$ branches visqueuses, identification des paramètres G_i , τ_i et r_i à partir d'essais de cyclage en cisaillement à plusieurs fréquences et plusieurs amplitudes, et d'essais de relaxation en traction à plusieurs niveaux de déformation.

On a représenté Fig.6 le résultat de l'identification de la branche élastique du modèle ainsi que les points de fins de relaxations en traction et en cisaillement. Le modèle parvient à rendre compte des non-linéarités dues aux grandes déformations pour les deux types de sollicitation.

Enfin, Fig.7 sont tracés les résultats d'identification des paramètres des branches visqueuses. On constate que le modèle rend compte des différents phénomènes observés expérimentalement, en particulier l'effet Payne.

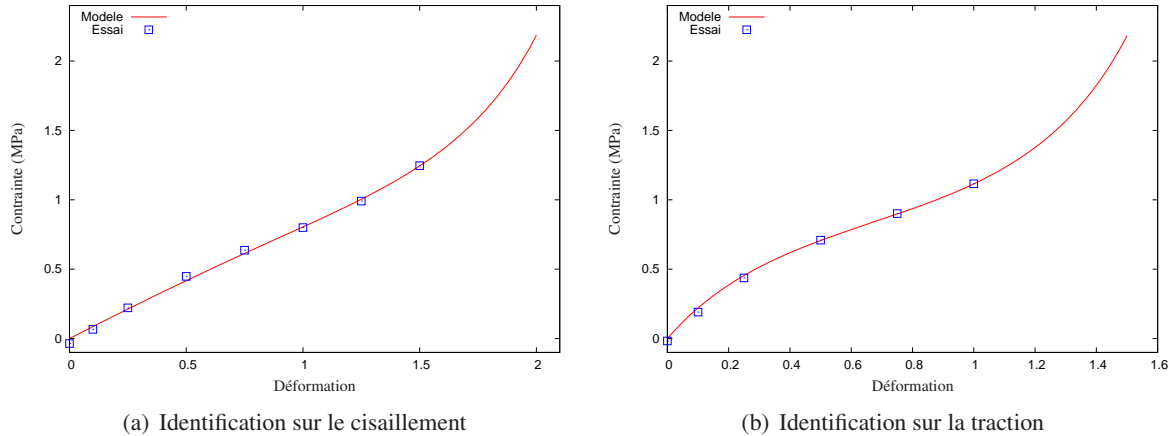


Fig. 6 – Résultats d'identification de la partie élastique de l'énergie libre

5 Discussions et perspectives

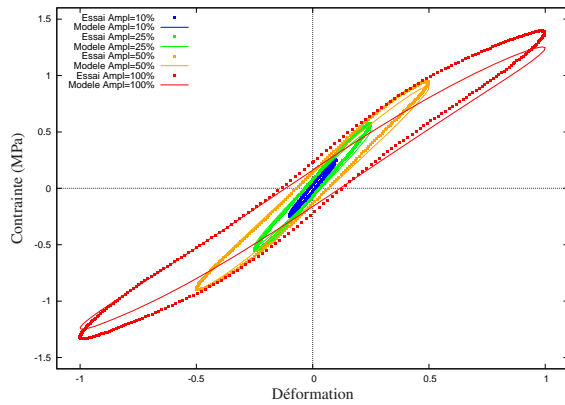
Dans cette étude, nous avons mis en place une loi de comportement d'un élastomère synthétique chargé. Pour cela, nous nous sommes basés sur les résultats de plusieurs types d'essais de caractérisation du matériau. Le comportement hyperélastique est mis en évidence par des essais de relaxation par paliers ; des essais de relaxation à différents niveaux de déformation démontrent le caractère visco-élastique fortement non-linéaire du matériau ; enfin, des essais de cyclage en cisaillement exhibent la dépendance de la raideur et de la dissipation à la fréquence et à l'amplitude de sollicitation.

A partir des constatations expérimentales, nous établissons un modèle phénoménologique qui décrit le comportement hyper-viscoélastique du matériau. En s'appuyant sur une décomposition du gradient de la transformation, nous mettons en place un modèle de type Maxwell généralisé enrichi par l'introduction de variables internes scalaires dans chaque branche visqueuse. Ces variables représentent le taux de ruptures de liaisons entre la matrice élastomère et les charges à l'origine de l'effet Payne.

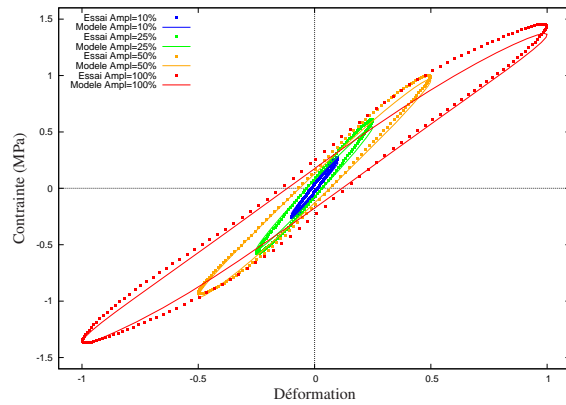
Les résultats d'identification des paramètres nous donnent une bonne corrélation entre les essais et le modèle. En effet, dans le cas du cisaillement dynamique, les effets de la fréquence et de l'amplitude de sollicitation sur la raideur et la dissipation sont pris en compte par le modèle. Celui-ci traduit également la forte dépendance de l'amplitude dans le cas de la relaxation en traction.

Cependant, la loi d'évolution des variables internes ne permet pas pour le moment de rendre compte du caractère réversible de l'effet Payne et donc d'une reformation des liaisons matrice-charges lorsque la matière retrouve un état libre de contraintes. De plus, le modèle devra être étendu à d'autres cas de chargement, notamment à des sollicitations de traction dynamique et à des sollicitations multi-axiales.

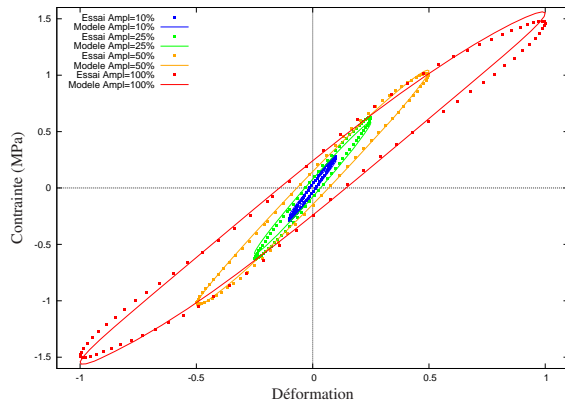
D'autre part, le modèle sera développé dans un code de calcul par éléments finis. Des simulations numériques seront confrontées aux résultats expérimentaux pour validation, en particulier dans le cas de chargements multi-axiaux.



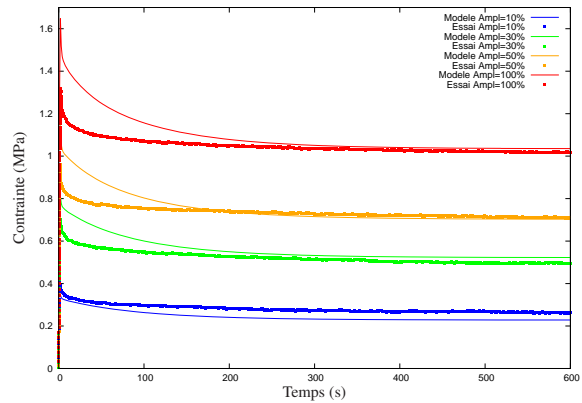
(a) Cisaillement à $\dot{\gamma} = 3\text{Hz}$



(b) Cisaillement à $\dot{\gamma} = 6\text{Hz}$



(c) Cisaillement à $\dot{\gamma} = 12\text{Hz}$



(d) Relaxation en traction

Fig. 7 – Résultats d'identification de la partie visqueuse de l'énergie libre

Références

- [1] L. Gornet, G. Marckmann, R. Desmorat, P. Charrier *A new isotropic hyperelastic strain energy function in terms of invariants and its derivation into a pseudo-elastic-model for Mullins effect : Application to finite element analysis*, In Constitutive Models for Rubbers VII, 265-271, 2012
- [2] P. Höfer, A. Lion *Modelling of frequency- and amplitude-dependent material properties of filler-reinforced rubber*, J.Mech.Phys.Solids,500-520, 2009
- [3] S. Lejeunes *Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèles*, Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, 2006.
- [4] J-M. Martinez *Modélisation et caractérisation du comportement hyper-visco-plastique d'un élastomère sous sollicitations multi-harmoniques et à différentes températures*, Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, 2005
- [5] C. Miehe, S. Göktepe *A micro-macro approach to rubber-like material, Part II : the micro-sphere model of finite rubber viscoelasticity*, J.Mech.Phys.Solids, 2231-2258, 2005
- [6] L. Mullins *Effect of stretching on the properties of rubber*, J. Rubber Res. 16, 275-289, 1947
- [7] F. Sidoroff *Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire*, J.Mec., 679-713, 1974
- [8] F. Sidoroff *Variables internes en viscoélasticité, 2. Milieux avec configuration intermédiaire*, J.Mec., 571-595, 1975