Une inégalité de Cheeger pour le spectre de Steklov

Pierre Jammes

UNE INÉGALITÉ DE CHEEGER POUR LE SPECTRE DE STEKLOV

par

Pierre Jammes

Résumé. — On montre une inégalité de Cheeger pour la première valeur propre de Steklov. Elle fait intervenir deux constantes isopérimétriques.

Abstract. — We prove a Cheeger inequality for the first positive Steklov eigenvalue. It involves two isoperimetric constants.

Soit M une variété compacte à bord et $\gamma \in C^{1,1}(M)$, $\rho \in C^0(\partial M)$ deux fonctions densités strictement positives sur M et ∂M respectivement. Le problème aux valeurs propres de Steklov consiste à résoudre l'équation, d'inconnues $\sigma \in \mathbb{R}$ et $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{div}(\gamma \nabla f) = 0 & \text{dans } M \\ \gamma \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M \end{array} \right. \tag{1}$$

où ν est un vecteur unitaire sortant normal au bord. On parle de problème de Steklov homogène quand $\gamma \equiv 1$ et $\rho \equiv 1$, et le cas $\gamma \not\equiv 1$ se rattache au problème de Calderón. L'ensemble des réels σ solutions du problème forme un spectre discret positif noté

$$0 = \sigma_0(M, g, \rho, \gamma) < \sigma_1(M, g, \rho, \gamma) \leq \sigma_2(M, g, \rho, \gamma) \ldots \tag{2}$$

C'est le spectre d'un opérateur Dirichlet-Neumann $H^1(\partial M) \to L^2(\partial M)$ défini par $\Lambda_{\rho,\gamma} u = \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}_\gamma u}{\partial \nu}$, où $\mathcal{H}_\gamma u$ est le prolongement harmonique de u pour la densité γ, c'est-à-dire que $\mathrm{div}(\gamma \nabla(\mathcal{H}_\gamma u)) = 0$. Il est auto-adjoint pour la norme de Hilbert $\|u\|^2 = \int_{\partial M} u^2 \rho \, \mathrm{d}v_g$ (voir **[Ban80]**, **[SU90]** et **[Uhl09]**). Ce spectre possède une caractérisation variationnelle ; on a en particulier pour la première valeur propre :

$$\sigma_1(M, g, \rho, \gamma) = \inf_{\substack{f \in H^1(\overline{M}) \\ \int_{\partial M} f^2 \rho \, \mathrm{d}v_g = 0}} \frac{\int_M |\mathrm{d}f|^2 \, \gamma \, \mathrm{d}v_g}{\int_{\partial M} f^2 \, \rho \, \mathrm{d}v_g}. \tag{3}$$

L'objet de cet article est de donner une minoration de $\sigma_1(M)$ en fonction d'invariants isopérimétriques qui est analogue à l'inégalité de Cheeger pour la première valeur propre du laplacien. Pour ce faire, on introduit les notations suivantes : si D est un domaine de M, on note $\partial_E D = \partial D \cap \partial M$ le bord « extérieur » de D et $\partial_I D = \partial D \backslash \partial_E D$ son

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 35P15, 58J50.
Mots clefs. — inégalité de Cheeger, spectre de Steklov.

bord intérieur. Les volumes n et $(n-1)$-dimensionnels seront calculés relativement aux densités γ et ρ et notés $|\cdot|_\gamma$ et $|\cdot|_\rho$. On pose alors

$$h(M,g,\gamma) = \inf_{|D|_\gamma \le \frac{|M|_\gamma}{2}} \frac{|\partial_I D|_\gamma}{|D|_\gamma} \text{ et } h'(M,g,\rho,\gamma) = \inf_{|D|_\gamma \le \frac{|M|_\gamma}{2}} \frac{|\partial_I D|_\gamma}{|\partial_E D|_\rho}. \tag{4}$$

Quand $\gamma \equiv 1$, la constante h est la constante de Cheeger classique ; la première valeur propre non nulle du laplacien de Neumann sur M est minorée par $h^2/4$ ([**Che70**],[**Bus80**]). Des analogues dans le cas $\gamma \not\equiv 1$ ont été introduits dans [**Bro85**] et [**CO97**]. La constante h' intervient spécifiquement dans le problème de Steklov. Après avoir écrit la première version de cet article, j'ai appris que J. Escobar définit une constante presque identique à h' dans [**Esc97**] dans le but de minorer σ_1. Mais l'inégalité qui suit, plus simple et plus explicite que celle de [**Esc97**], semble avoir échappé aux recherches menées jusqu'à présent :

Théorème 1. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte à bord munie des densités ρ et γ sur ∂M et M. On a $h'(M) > 0$ et $\sigma_1(M) \ge \dfrac{h(M)\cdot h'(M)}{4}$.*

Remarque 2. — On peut en fait montrer deux inégalités différentes : si on modifie légèrement les définitions de h et h' en remplaçant la condition $|D|_\gamma \le |M|_\gamma/2$ par $|\partial_E D|_\rho \le |\partial M|_\rho/2$, la démonstration reste valide mais les constantes isopérimétriques ne sont plus les mêmes. En particulier, la constante h' est remplacée par la constante définie par Escobar.

Remarque 3. — Si on multiplie la métrique par λ^2 ($\lambda > 0$), alors σ_1 et h sont divisées par λ et h' est invariant. Pour des raisons d'homogénéité, on ne peut donc pas avoir une minoration de σ_1 de la forme $c \cdot h^\alpha \cdot h'^\beta$ où $c > 0$, $\alpha \ne 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ sont des constantes universelles. Le cas $\alpha = 1$ et $\beta < 1$ est exclu par l'exemple qui suit.

Exemple 4. — Soit (M,g) une variété close. Le spectre de Steklov (homogène) de $M_n = M \times [0, \frac{1}{n}]$ a été calculé dans [**CESG11**] (lemme 6.1) et $\sigma_1(M_n) \sim \frac{1}{n}$ quand $n \to \infty$. On peut encadrer $h(M_n)$ uniformément : étant donné un domaine D de M_n, on considère $2n$ copies de M_n qu'on recolle le long de leurs bords pour obtenir une variété $M \times S^1$ dont la métrique est indépendante de n, et on construit un domaine $D' \subset M \times S^1$ en recollant les domaines D par réflexion le long du bord. On obtient alors $|D'| = 2n|D|$ et $|\partial D'| = 2n|\partial_I D|$ donc $|\partial_I D|/|D| = |\partial D'|/|D'| \ge h(M \times S^1)$ et $h(M_n) \ge h(M \times S^1)$. En considérant un domaine de la forme $D = U \times [0, \frac{1}{n}]$ avec $U \subset M$, on voit que $h(M_n)$ est majoré par une constante.

On peut aussi estimer h' : l'exemple d'un domaine $U \times [0, \frac{1}{n}]$ montre que $h'(M_n) \le \frac{c}{n}$ pour une constante $c > 0$. Réciproquement, pour un domaine D fixé, $|\partial D_E|$ est indépendant de n et le volume de ∂D_I sur M_n vérifie $|\partial D_I|_n \ge |\partial D_I|_1/n$. Par conséquent, $h'(M_n) \ge h'(M_1)/n$.

On voit que sur cet exemple, l'exposant de h' dans l'inégalité est optimal.

Exemple 5. — On considère encore la variété $M \times [0, L]$ où M est une variété close, mais on suppose que $L \to +\infty$. Dans ce cas, on a $\sigma_1 = 1/L$. Parmi les domaines D de volume fixé suffisamment grand, l'aire de $\partial_I D$ est minimisée par les hypersurfaces $\partial_I D = M \times \{x\}$, par conséquent $h = 2/L$ et $h' = 1$. Dans cet exemple, c'est h qui tend vers 0 quand $\sigma_1 \to 0$ et pas h'.

Exemple 6. — Dans [**GP10**] (section 2), A. Girouard et I. Polterovich construisent une famille de domaines du plan (formés de deux disques reliés par une anse fine) pour lesquels σ_1, h et h' tendent vers zéro. Contrairement à la remarque et aux exemples qui précèdent, le volume reste borné inférieurement et supérieurement.

Exemple 7. — Les « haltères de Cheeger généralisées » construites par P. Guérini dans [**Gué04**] fournissent des exemples à mi-chemin entre les exemples 4 et 6 ; on va ici étudier le cas de la dimension 3. Étant donné un $\varepsilon > 0$, dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère $(Oxyz)$ on considère le cercle unité S^1 et le disque unité D^2 du plan (Oxy), et on définit les domaines $V_1 = \{p \in \mathbb{R}^3,\ d(p, S^1) < \frac{1}{4}\}$ et $V_2 = D^2\times]-\varepsilon,\varepsilon[$. La variété définie par $M_\varepsilon = V_1 \cup V_2$ est homéomorphe à une boule et sa constante isopérimétrique h' tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ (considérer un domaine $D \subset M_\varepsilon$ de la forme $U\times]-\varepsilon,\varepsilon[$ avec $U \subset (Oxy)$ contenu dans le disque de centre O et rayon $3/4$). On a aussi $\sigma_1(M_\varepsilon) \to 0$: il suffit de fixer une fonction test $(Oxy) \to \mathbb{R}$ d'intégrale nulle et à support dans le disque de centre O et rayon $3/4$ et de la relever à $\mathbb{R}^3$. Dans la formule (3), le numérateur sera proportionnel à ε tandis que le numérateur reste constant. En construisant de la même manière un espace test de dimension arbitrairement grande, on montre qu'en fait toutes les valeurs propres tendent vers 0. Ce phénomène d'« effondrement du spectre » avait déjà été observé par A. Girouard et I. Polterovich sur l'exemple précédent.

Démonstration du théorème. — On fixe une métrique g et des densités ρ et γ. Pour montrer que $h' > 0$ il suffit de traiter le cas homogène, le cas général s'y ramène car les densités sont continues, donc encadrées par des constantes strictement positives. On se donne un $\varepsilon \in]0, 1]$ dont la valeur précise sera fixée plus tard. Si $|\partial_E D| \leq (1-\varepsilon)|\partial M|$, où D est un domaine intervenant dans la définition de h', J. Escobar montre dans [**Esc99**] que le rapport $|\partial_I D|/|\partial_E D|$ est minoré par une constante $K(\varepsilon) > 0$ (il ne traite que le cas $\varepsilon = \frac{1}{2}$ mais sa démonstration se généralise immédiatement). Si $|\partial_E D| \geq (1-\varepsilon)|\partial M|$ on utilise le fait que le volume de $M\backslash D$ est minoré par $|M|/2$ pour tout D, et donc qu'il existe une constante $C(g) > 0$ telle que $|\partial(M\backslash D)| > C$. On a alors $|\partial_I D| = |\partial(M\backslash D)| - |\partial M\backslash\partial_E D| \geq C + |\partial_E D| - |\partial M| \geq C - \varepsilon|\partial M|$. En choisissant ε suffisamment petit par rapport à C et $|\partial M|$, on a donc $|\partial_I D| \geq \varepsilon|\partial M| \geq \varepsilon|\partial_E D|$ ce qui permet de conclure.

On montre maintenant la minoration de σ_1. Afin d'alléger les notations on n'explicitera pas les références aux densités, celles-ci étant généralement évidentes. Soit f une fonction propre sur M de la première valeur propre $\sigma_1(M)$. On choisit son signe de sorte que $M^+ = f^{-1}([0, +\infty[)$ vérifie $|M^+| \leq |M|/2$ (ou $|\partial_E M^+| \leq |\partial M|/2$ si on suit la remarque 2). La fonction f restreinte à M^+ est alors la première fonction propre du problème de Steklov sur M^+ avec condition de Dirichlet sur $\partial_I M^+$, pour la valeur propre σ_1. Rappelons que problème de Steklov avec condition de Dirichlet sur une partie du bord de la variété est bien défini, que son spectre est strictement positif et qu'on a aussi la relation $\sigma_1 = \int_{M^+} |\mathrm{d}f|^2 / \int_{\partial M^+} f^2$ (cf. [**Agr05**]). Par conséquent on peut écrire, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\int_{M^+} |\mathrm{d}f|^2}{\int_{\partial M^+} f^2} = \frac{\left(\int_{M^+} f^2\right)\left(\int_{M^+} |\mathrm{d}f|^2\right)}{\left(\int_{M^+} f^2\right)\left(\int_{\partial M^+} f^2\right)} \geq \frac{\left(\int_{M^+} f|\mathrm{d}f|\right)^2}{\left(\int_{M^+} f^2\right)\left(\int_{\partial M^+} f^2\right)} \\ &\geq \frac{1}{4}\frac{\left(\int_{M^+} |\mathrm{d}(f^2)|\right)^2}{\left(\int_{M^+} f^2\right)\left(\int_{\partial M^+} f^2\right)} = \frac{1}{4}\frac{\int_{M^+} |\mathrm{d}(f^2)|}{\int_{M^+} f^2} \cdot \frac{\int_{M^+} |\mathrm{d}(f^2)|}{\int_{\partial M^+} f^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

En posant $D_t = f^{-1}([\sqrt{t}, +\infty[)$, la formule de la co-aire (**[KP08]**, ch. 5) donne les trois relations

$$(2)\quad \int_{M^+} |\mathrm{d}(f^2)| = \int_{t\geq 0} |\partial_I D_t|\mathrm{d}t, \quad \int_{M^+} f^2 = \int_{t\geq 0} |D_t|\mathrm{d}t \text{ et } \int_{\partial M^+} f^2 = \int_{t\geq 0} |\partial_E D_t|\mathrm{d}t.$$

Comme $|D_t| \leq |M^+| \leq |M|/2$ (ou $|\partial_E D_t| \leq |\partial_E M^+| \leq |\partial M|/2$) pour tout $t \geq 0$, on en déduit que $\int_{M^+} |\mathrm{d}(f^2)| \geq h \int_{M^+} f^2$ et $\int_{M^+} |\mathrm{d}(f^2)| \geq h' \int_{\partial M^+} f^2$, et donc que $\sigma_1 \geq \frac{1}{4}hh'$. □

Références

[Agr05] M. S. Agranovich – « On a mixed Poincaré-Steklov Type Spectral Problem in a Lipschitz Domain », *Russ. J. Math. Phys.* **13** (2005), no. 3, p. 239–244.

[Ban80] C. Bandle – *Isoperimetric inequalities and applications*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 7, Pitman, 1980.

[Bro85] R. Brooks – « The bottom of the spectrum of a riemannian covering », *J. Reine Angew. Math.* **357** (1985), p. 101–114.

[Bus80] P. Buser – « On Cheeger inequality $\lambda_1 \geq h^2/4$ », in *Geometry of the Laplace operator*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., 1980, p. 29–77.

[CESG11] B. Colbois, A. El Soufi & A. Girouard – « Isoperimetric control of the Steklov spectrum », *J. Funct. Anal.* **261** (2011), no. 5, p. 1384–1399.

[Che70] J. Cheeger – « A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian », in *Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969)*, Princeton Univ. Press, 1970.

[CO97] S.-Y. Cheng & K. Oden – « Isoperimetric inequalities and the gap between the first and second eigenvalues of an Euclidean domain », *J. Geom. Anal.* **7** (1997), no. 2, p. 217–239.

[Esc97] J. F. Escobar – « The geometry of the first non-zero Stekloff eigenvalue », *J. Funct. Anal.* **150** (1997), no. 2, p. 544–556.

[Esc99] ———, « An isoperimetric Inequality and the first Steklov Eigenvalue », *J. Funct. Anal.* **165** (1999), no. 1, p. 101–116.

[GP10] A. Girouard & I. Polterovich – « On the Hersch-Payne-Schiffer inequalities for Steklov eigenvalues », *Functional Analysis and its Applications* **44** (2010), no. 2, p. 106–117.

[Gué04] P. Guérini – « Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham », *Ann. scient. Éc. norm. sup. (4)* **37** (2004), no. 2, p. 270–303.

[KP08] S. T. Krantz & H. R. Parks – *Geometric Integration Theory*, Birkäuser, 2008.

[SU90] J. Sylvester & G. Uhlmann – « The Dirichlet to Neumann map and applications », in *Inverse problems in partial differential equations (Arcata, CA, 1989)*, SIAM, 1990, p. 101–139.

[Uhl09] G. Uhlmann – « Electrical impedance tomography and Calderón's problem », *Inverse Problems* **25** (2009), no. 12, p. 123011, 39.

Pierre Jammes, Univ. Nice Sophia Antipolis, CNRS, LJAD, UMR 7351, 06100 Nice, France
E-mail : pjammes@unice.fr