Note sur les formules de saut de Guillemin-Kalkman

A note on the formulas of Guillemin-Kalkman

Paul-Émile Paradan

UMR 5582, Institut Fourier, B.P. 74, 38402, Saint-Martin-d'Hères cedex, France

Abstract

The purpose of this note is to recover the formulas of Guillemin-Kalkman [2] from jump formulas in equivariant cohomology.

Résumé

Le but de cette note est de donner une formule de saut en cohomologie équivariante qui entraîne les formules de saut de Guillemin-Kalkman [2].

Abridged English version

Let (M, ω) be a symplectic manifold equipped with a Hamiltonian action of a torus T , with Lie algebra $\mathfrak{t}$. We denote by $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ the moment map of this action. Let us assume that Φ is *proper*, and that the T -action on M is *effective*. For every regular value ξ of Φ , we consider the reduction $\mathcal{M}_\xi := \Phi^{-1}(\xi)/T$ which is a compact symplectic orbifold. Let $\mathcal{H}_T^*(M)$ be the T -equivariant cohomology of M . Associated to the data (M, T, Φ) we have, for every regular value ξ of Φ , the Kirwan morphism $\mathbf{Kir}_{M,\xi} : \mathcal{H}_T^*(M) \rightarrow \mathcal{H}^*(\mathcal{M}_\xi)$ [4]. We are interested here in $I(M, \eta, \xi) := \frac{1}{|S_\xi|} \int_{\mathcal{M}_\xi} \mathbf{Kir}_{M,\xi}(\eta)$, $\eta \in \mathcal{H}_T^*(M)$, where $|S_\xi|$ is the cardinal of the generic stabilizer of T on $\Phi^{-1}(\xi)$.

We introduce for every $\xi \in \mathfrak{t}^*$ an equivariant cohomology class with compact support $P_\xi \in \mathcal{H}_{T,c}^{-\infty}(M)$, and show that $I(M, \eta, \xi)$ is computed by means of P_ξ . If ξ is a regular value of Φ , the integral $\int_M P_\xi \eta$ is a generalized function on $\mathfrak{t}$ supported at 0. The quantity $I(M, \eta, \xi)$ is equal to the value of $\int_M P_\xi \eta$ against $(2i\pi)^{-\dim T} \frac{dX}{\text{vol}(T, dX)}$. The study of the map $\xi \mapsto P_\xi$ gives a new way to recover two properties of the map $\xi \rightarrow I(M, \eta, \xi)$. First we show that $\xi \mapsto P_\xi$ is locally constant on the open subset of regular values

Email address: Paul-Emile.Paradan@ujf-grenoble.fr (Paul-Émile Paradan).

of Φ , so $\xi \rightarrow I(M, \eta, \xi)$ is also locally constant. After we obtain a formula for $P_{\xi^+} - P_{\xi^-}$ when $\xi^\pm$ belong respectively to two connected components of regular values of Φ separated by an hyperplane of $\mathfrak{t}^*$. By this way we recover the formulas of Guillemin-Kalkman [2]. Let us write down these formulas.

Let Δ be an hyperplane of $\mathfrak{t}^*$, equipped with an orientation o , and which separates two connected components of regular values of Φ . Let $T_\Delta \subset T$ be the subtorus of dimension 1, with Lie algebra $\mathfrak{t}_\Delta := \{X \in \mathfrak{t} \mid \langle \xi - \xi', X \rangle = 0, \forall \xi, \xi' \in \Delta\}$. We make the choice of a decomposition $T = T_\Delta \times T/T_\Delta$, where T/T_Δ denotes a subtorus of T . Let M^{T_Δ} be the submanifold of points fixed by T_Δ , and let M_Δ be the open subset of $M^{T_\Delta} \cap \Phi^{-1}(\Delta)$ on which T/T_Δ acts locally freely. The symplectic manifold M_Δ carries a Hamiltonian action of T/T_Δ with moment map $\Phi_\Delta : M_\Delta \rightarrow \Delta$ equal to the restriction of Φ on M_Δ .

Let $\xi \in \Delta$ be a regular value of Φ_Δ and let $P_\xi^\Delta \in \mathcal{H}_{T/T_\Delta, c}^{-\infty}(M_\Delta)$ be the associated cohomology class. Let $\xi^\pm \in \mathfrak{t}^*$ be two regular values of Φ belonging respectively to two connected components of regular values of Φ separated by Δ , with the condition that the line (ξ^+, ξ^-) intersects Δ at ξ and $\xi^- - \xi^+$ is compatible with the orientation o . We prove in this note that

$$P_{\xi^+} - P_{\xi^-} = (i_\Delta)_* \left(P_\xi^\Delta \delta_\Delta^o \right) \quad \text{in } \mathcal{H}_{T, c}^{-\infty}(M). \quad (1)$$

Here $(i_\Delta)_* : \mathcal{H}_{T, c}^{-\infty}(M_\Delta) \rightarrow \mathcal{H}_{T, c}^{-\infty}(M)$ is the direct image map, and $\delta_\Delta^o \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}_\Delta, \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas})$ where $\mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas}$ is the sub-algebra of $\mathcal{H}^*(M_\Delta)$ formed by the T -basic elements. With δ_Δ^o one defines a *residue map* $\text{Res}_\Delta^o : \mathcal{H}_T^*(M) \rightarrow \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^*(M_\Delta)$, and from (1) we get the formulas of Guillemin-Kalkman

$$I(M, \eta, \xi^+) - I(M, \eta, \xi^-) = I(M_\Delta, \text{Res}_\Delta^o(\eta), \xi), \quad (2)$$

for every $\eta \in \mathcal{H}_T^*(M)$. The class δ_Δ^o and the map Res_Δ^o are defined in Section 2.

1. Introduction

Soit (M, ω) une variété symplectique munie de l'action hamiltonienne d'un tore T d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. L'application moment $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ satisfait les relations $d\langle \Phi, X \rangle + \omega(X_M, -) = 0, \forall X \in \mathfrak{t}$. On suppose dans cette note que Φ est *propre*, et que l'action de T sur M est *effective*. Pour toute valeur régulière ξ de Φ , on considère la réduction symplectique $\mathcal{M}_\xi := \Phi^{-1}(\xi)/T$ qui est une V -variété différentiable compacte. Soit $\mathcal{H}_T^*(M)$ la cohomologie T -équivariante de M . Sur la variété hamiltonienne (M, T, Φ) nous avons le morphisme de Kirwan $\mathbf{Kir}_{M, \xi} : \mathcal{H}_T^*(M) \rightarrow \mathcal{H}^*(\mathcal{M}_\xi)$, défini pour toute valeur régulière ξ de Φ , comme le composé du morphisme de restriction $\mathcal{H}_T^*(M) \rightarrow \mathcal{H}_T^*(\Phi^{-1}(\xi))$ avec l'isomorphisme de Chern-Weil $\mathcal{H}_T^*(\Phi^{-1}(\xi)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^*(\mathcal{M}_\xi)$. Nous nous intéressons ici à $I(M, \eta, \xi) := \frac{1}{|S_\xi|} \int_{\mathcal{M}_\xi} \mathbf{Kir}_{M, \xi}(\eta), \eta \in \mathcal{H}_T^*(M)$, où $|S_\xi|$ est le cardinal du stabilisateur générique de T sur $\Phi^{-1}(\xi)$.

On introduit à la section 2 une classe $P_\xi \in \mathcal{H}_{T, c}^{-\infty}(M)$ pour tout $\xi \in \mathfrak{t}^*$, et on montre que $I(M, \eta, \xi)$ se calcule au moyen de P_ξ . L'étude de l'application $\xi \mapsto P_\xi$ entreprise à la section 3 permet de redémontrer deux propriétés de $\xi \mapsto I(M, \eta, \xi)$. On montre tout d'abord que $\xi \mapsto P_\xi$ est localement constante sur l'ouvert des valeurs régulières de Φ . On obtient ensuite des *formules de saut* pour les classes P_ξ qui induisent celles pour $I(M, \eta, \xi)$ obtenues par Guillemin-Kalkman [2]. Ces formules s'énoncent ainsi.

Soit Δ un hyperplan de $\mathfrak{t}^*$, muni d'une orientation o , séparant deux composantes connexes de l'ouvert des points réguliers de Φ . Soit $T_\Delta \subset T$ le sous-tore de dimension 1, d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_\Delta := \{X \in \mathfrak{t} \mid \langle \xi - \xi', X \rangle = 0, \forall \xi, \xi' \in \Delta\}$. Nous faisons le choix d'une décomposition $T = T_\Delta \times T/T_\Delta$, où T/T_Δ désigne un sous-tore de T . Considérons la sous-variété M^{T_Δ} des points fixés par T_Δ , et l'ouvert T -invariant M_Δ de $\Phi^{-1}(\Delta) \cap M^{T_\Delta}$ sur lequel T/T_Δ agit localement librement. La variété symplectique M_Δ est munie de l'action hamiltonienne de T/T_Δ et a pour application moment la restriction de Φ à M_Δ , que l'on note $\Phi_\Delta : M_\Delta \rightarrow \Delta$.

Considérons une valeur régulière $\xi \in \Delta$ de Φ_Δ et la classe de cohomologie équivariante associée $P_\xi^\Delta \in \mathcal{H}_{T/T_\Delta, c}^\infty(M_\Delta)$. Soient $\xi^\pm \in \mathfrak{t}^*$ deux valeurs régulières de Φ appartenant à deux composantes connexes de valeurs régulières de Φ séparées par Δ : on suppose que le segment (ξ^+, ξ^-) intersecte Δ en ξ et que $\xi^- - \xi^+$ est compatible avec l'orientation o . On montre à la proposition 1 que

$$P_{\xi^+} - P_{\xi^-} = (i_\Delta)_* \left(P_\xi^\Delta \delta_\Delta^o \right) \quad \text{dans } \mathcal{H}_{T, c}^{-\infty}(M). \quad (3)$$

Ici $(i_\Delta)_* : \mathcal{H}_{T, c}^{-\infty}(M_\Delta) \rightarrow \mathcal{H}_{T, c}^{-\infty}(M)$ est le morphisme image directe associé à l'inclusion $i_\Delta : M_\Delta \hookrightarrow M$, et δ_Δ^o est une fonction généralisée sur $\mathfrak{t}_\Delta$ à valeurs dans la sous-algèbre $\mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas}$ de $\mathcal{H}^*(M_\Delta)$ formée des éléments T -basiques. On définit au moyen de δ_Δ^o on définit une *application résidu* $\text{Res}_\Delta^o : \mathcal{H}_T^*(M) \rightarrow \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^*(M_\Delta)$, et on déduit de (3) les formules de sauts de Guillemin-Kalkman

$$I(M, \eta, \xi^+) - I(M, \eta, \xi^-) = I(M_\Delta, \text{Res}_\Delta^o(\eta), \xi), \quad (4)$$

pour tout $\eta \in \mathcal{H}_T^*(M)$. La fonction δ_Δ^o et l'application Res_Δ^o sont définis à la prochaine section.

2. Cohomologie équivariante : localisation et définition de l'application Res_Δ^o

Rappelons le modèle de Cartan de la cohomologie équivariante à coefficients polynomiaux, et l'extension aux coefficients généralisés définie par Kumar-Vergne [5]. Nous donnons ensuite un bref aperçu de la méthode de localisation développée dans [6, 7], et donnons la définition de l'application Res_Δ^o .

Soit K un groupe de Lie compact connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, agissant de manière $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété différentiable M . On note $\mathcal{A}(M)$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ et d la dérivation de de Rham. On note $c(V) : \mathcal{A}(M) \rightarrow \mathcal{A}(M)$ la contraction par un champ de vecteurs V . L'action de K sur M détermine un morphisme $X \rightarrow X_M$ de $\mathfrak{k}$ dans l'algèbre des champs de vecteurs de M .

On considère l'espace des applications K -équivariantes $\mathfrak{k} \rightarrow \mathcal{A}(M)$, $X \mapsto \eta(X)$, muni de la dérivation $(D\eta)(X) := (d - c(X_M))(\eta(X))$, $X \in \mathfrak{k}$. Comme $D^2 = 0$, on peut considérer l'espace de cohomologie $\text{Ker} D / \text{Im} D$. Le modèle de Cartan [1, 3] considère des applications *polynomiales*, et l'espace de cohomologie associé est noté $\mathcal{H}_K^*(M)$. Kumar et Vergne [5] ont étudié les espaces de cohomologie $\mathcal{H}_K^{\pm\infty}(M)$ obtenus en considérant des applications $X \mapsto \eta(X)$ qui sont $\mathcal{C}^{\pm\infty}$. Rappelons la construction de $\mathcal{H}_K^{-\infty}(M)$.

Soit $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))$ l'espace des fonctions généralisées sur $\mathfrak{k}$ à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$. C'est, par définition, l'espace des applications $\mathbb{C}$ -linéaires continues de l'espace des densités $\mathcal{C}^\infty$ à support compact de $\mathfrak{k}$ dans $\mathcal{A}(M)$. L'image de la densité $\phi(X)dX$ par $\eta \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))$ est une forme différentielle sur M notée $\int_{\mathfrak{k}} \eta(X)\phi(X)dX$. La différentielle D définie sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))$ se prolonge à $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))$, et on montre que $D^2 = 0$ sur le sous-espace $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))^K$ des éléments K -invariants [5]. L'espace de cohomologie associé est la cohomologie K -équivariante à coefficients généralisés de M , que l'on note $\mathcal{H}_K^{-\infty}(M)$. Si nous considérons des formes équivariantes à valeurs dans l'espace $\mathcal{A}_c(M)$ des formes différentielles à support compact on obtient l'espace de cohomologie $\mathcal{H}_{K, c}^{-\infty}(M)$. Dans cette note, on note $\text{vol}(K, dX)$ le volume du groupe K pour la mesure de Haar compatible avec dX .

Procédé de localisation. On suppose désormais que M est munie d'une 1-forme λ K -invariante. On note $\Phi_\lambda : M \rightarrow \mathfrak{k}^*$ l'application équivariante définie par $\langle \Phi_\lambda(m), X \rangle = \lambda(X_M)_m$: on a donc $D\lambda(X) = d\lambda - \langle \Phi_\lambda, X \rangle$. Le procédé de localisation développé en [6, 7] repose sur l'existence d'un inverse $[D\lambda]^{-1}$ de la forme K -équivariante $D\lambda$: c'est une forme K -équivariante fermée à coefficients généralisés définie sur l'ouvert $M - \Phi_\lambda^{-1}(0)$. Un ouvert K -invariant $\mathcal{U}$ est dit *adapté* à λ si $(\partial\mathcal{U}) \cap \Phi_\lambda^{-1}(0) = \emptyset$. Dans [7], on associe à tout ouvert $\mathcal{U}$ adapté à λ , la forme K -équivariante fermée à coefficients généralisés

$$P_\lambda^\mathcal{U} = \chi^\mathcal{U} + d\chi^\mathcal{U}[D\lambda]^{-1}\lambda. \quad (5)$$

Ici $\chi^{\mathcal{U}} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ désigne une fonction K -invariante supportée par $\mathcal{U}$ qui est égale à 1 au voisinage de $\mathcal{U} \cap \Phi_\lambda^{-1}(0)$. La classe définie par $P_\lambda^{\mathcal{U}}$ dans $\mathcal{H}_K^{-\infty}(M)$ ne dépend pas du choix de $\chi^{\mathcal{U}}$. Si $\mathcal{U} \cap \Phi_\lambda^{-1}(0)$ est compact, on considère une fonction $\chi^{\mathcal{U}}$ à support compact : ainsi $P_\lambda^{\mathcal{U}}$ définit une classe dans $\mathcal{H}_{K,c}^{-\infty}(M)$. La correspondance $\mathcal{U} \rightarrow P_\lambda^{\mathcal{U}}$ est *additive* dans le sens suivant. Si $\mathcal{U}$ contient deux ouverts $\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2$ K -invariants tels que $\overline{\mathcal{U}^1} \cap \overline{\mathcal{U}^2} \cap \Phi_\lambda^{-1}(0) = \emptyset$ et $(\mathcal{U}^1 \cup \mathcal{U}^2) \cap \Phi_\lambda^{-1}(0) = \mathcal{U} \cap \Phi_\lambda^{-1}(0)$, alors les $\mathcal{U}^i$ sont adaptés à λ et $P_\lambda^{\mathcal{U}} = P_\lambda^{\mathcal{U}^1} + P_\lambda^{\mathcal{U}^2}$ dans $\mathcal{H}_T^{-\infty}(M)$. Pour l'étude des classes de cohomologies définies par les $P_\lambda^{\mathcal{U}}$ on a le

Lemme 2.1 ([7]) *Soient λ_0, λ_1 deux 1-formes K -invariantes sur M , et $\mathcal{U}$ un ouvert K -invariant relativement compact de M . S'il existe une application continue $f : M \rightarrow \mathfrak{k}$ telle que les fonctions $\langle \Phi_{\lambda_0}, f \rangle$ et $\langle \Phi_{\lambda_1}, f \rangle$ ne s'annulent pas sur $\partial\mathcal{U}$, alors $\mathcal{U}$ est adapté à λ_0 et à λ_1 , et $P_{\lambda_1}^{\mathcal{U}} = P_{\lambda_0}^{\mathcal{U}}$ dans $\mathcal{H}_{K,c}^{-\infty}(M)$.*

Définitions de δ_Δ^o et de l'application $\text{Res}_\Delta^o : \mathcal{H}_T^(M) \rightarrow \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^*(M_\Delta)$.* On revient au cadre de l'introduction. La décomposition $T = T_\Delta \times T/T_\Delta$, l'action triviale de T_Δ sur M_Δ et l'action localement libre de T/T_Δ sur M_Δ induisent les isomorphismes $j_\Delta : \mathcal{H}_T^*(M_\Delta) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^*(\mathfrak{t}_\Delta) \otimes \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^*(M_\Delta)$ et $\mathbf{cv}_\Delta : \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^*(M_\Delta) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas}$. Ici $\mathcal{S}^*(\mathfrak{t}_\Delta)$ désigne l'algèbre des applications polynomiales sur $\mathfrak{t}_\Delta$ et $\mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas}$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}^*(M_\Delta)$ formée des éléments T -basiques. On note $\mathbf{Kir}^\Delta : \mathcal{H}_T^*(M) \rightarrow \mathcal{S}^*(\mathfrak{t}_\Delta) \otimes \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas}$ le composé du morphisme de restriction $\mathcal{H}_T^*(M) \rightarrow \mathcal{H}_T^*(M_\Delta)$ avec l'isomorphisme $\mathbf{cv}_\Delta \circ j_\Delta$.

Soient N_Δ le fibré normal T -équivariant de M_Δ dans M , et $\text{Eul}(N_\Delta) \in \mathcal{H}_T^*(M_\Delta)$ la classe d'Euler T -équivariante de N_Δ . À travers l'isomorphisme $\mathbf{cv}_\Delta \circ j_\Delta$ on peut considérer $\text{Eul}(N_\Delta)$ comme un élément de $\mathcal{S}^*(\mathfrak{t}_\Delta) \otimes \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas}$. Suivant [6], on définit des inverses $\text{Eul}_\pm^{-1}(N_\Delta) \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}_\Delta, \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas})$ en posant $\text{Eul}_\pm^{-1}(N_\Delta)(X) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{Eul}(N_\Delta)(X \pm is\beta)}$, où $\beta \in \mathfrak{t}_\Delta - \{0\}$ est compatible avec l'orientation o de Δ . Comme le polynôme $\text{Eul}(N_\Delta)$ est inversible de manière $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathfrak{t}_\Delta - \{0\}$, la différence

$$\delta_\Delta^o := \text{Eul}_-^{-1}(N_\Delta) - \text{Eul}_+^{-1}(N_\Delta) \quad (6)$$

est une fonction généralisée sur $\mathfrak{t}_\Delta$ qui est supportée en 0 (à valeurs dans $\mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas}$). Soit $r_\Delta^o : \mathcal{S}^*(\mathfrak{t}_\Delta) \otimes \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas} \rightarrow \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas}$ définie par $r_\Delta^o(P) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathfrak{t}_\Delta} \delta_\Delta^o(X) P(X) \frac{dX}{\text{vol}(T_\Delta, dX)}$. L'application $\text{Res}_\Delta^o : \mathcal{H}_T^*(M) \rightarrow \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^*(M_\Delta)$ est définie par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_T^*(M) & \xrightarrow{\mathbf{Kir}^\Delta} & \mathcal{S}^*(\mathfrak{t}_\Delta) \otimes \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas} \\ \text{Res}_\Delta^o \downarrow & & \downarrow r_\Delta^o \\ \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^*(M_\Delta) & \xrightarrow{\mathbf{cv}_\Delta} & \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas} \end{array} \quad (7)$$

3. Quelques propriétés de l'application $\xi \mapsto \text{I}(M, \eta, \xi)$

Nous revenons au contexte d'une action hamiltonienne d'un tore T sur une variété symplectique (M, ω) . On garde les mêmes notations et hypothèses que dans l'introduction. On fixe un produit scalaire sur $\mathfrak{k}^*$ qui induit une identification $\mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$. On fixe sur M une structure riemannienne T -invariante, notée $(-, -)_M$.

3.1. Caractérisation de $\text{I}(M, \eta, \xi)$

Soit $\mathcal{H}$ le champ de vecteurs hamiltonien de la fonction $\frac{1}{2}\|\Phi\|^2$. Alors, pour tout $\xi \in \mathfrak{k}^*$, le champ de vecteurs hamiltonien de la fonction $\frac{1}{2}\|\Phi - \xi\|^2$ est $\mathcal{H} - \xi_M$. Considérons la 1-forme T -invariante $\lambda_\xi =$

$(\mathcal{H} - \xi_M, -)_M$ et l'application $\Phi_{\lambda_\xi} : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ associée (voir section 2). Ici $\Phi_{\lambda_\xi}^{-1}(0)$ coïncide avec le sous-ensemble $\text{Cr}(\|\Phi - \xi\|^2) \subset M$ des points critiques de la fonction $\|\Phi - \xi\|^2$, et d'autre part $m \in \text{Cr}(\|\Phi - \xi\|^2)$ si et seulement si $(\Phi(m) - \xi)_M$ s'annule en m . Considérons la classe de cohomologie

$$P_\xi \in \mathcal{H}_{T,c}^{-\infty}(M) \quad (8)$$

définie par $P_{\lambda_\xi}^\mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est un voisinage ouvert T -invariant relativement compact de $\Phi^{-1}(\xi)$ tel que $\overline{\mathcal{U}} \cap \text{Cr}(\|\Phi - \xi\|^2) = \Phi^{-1}(\xi)$.

On rappelle maintenant le calcul de P_ξ lorsque ξ est une valeur régulière de Φ [6, 7]. Soit $\Omega_\xi \in \mathcal{H}^2(\mathcal{M}_\xi) \otimes \mathfrak{t}$ la courbure du T -fibré principal $\Phi^{-1}(\xi) \rightarrow \mathcal{M}_\xi$. Pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{t})$, on désigne par $\psi(\Omega_\xi) \in \mathcal{H}^*(\mathcal{M}_\xi)$ la valeur de l'opérateur différentiel $e^{\Omega_\xi(\frac{\partial}{\partial X}|_0)}$ contre la fonction ψ . D'après [7][Prop. 3.11], la fonction généralisée $\int_M P_\xi \eta$ est supportée en 0 pour tout $\eta \in \mathcal{H}_T^*(M)$ et

$$\int_{M \times \mathfrak{t}} P_\xi(X) \eta(X) \psi(X) dX = \frac{(2i\pi)^{\dim T} \text{vol}(T, dX)}{|S_\xi|} \int_{\mathcal{M}_\xi} \mathbf{Kir}_{M,\xi}(\eta) \psi(\Omega_\xi). \quad (9)$$

Pour une fonction généralisée $g \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t})$ supportée en 0, on définit *sa multiplicité par rapport à la masse de Dirac en 0* comme la quantité $\int_{\mathfrak{t}} g(X) \frac{dX}{\text{vol}(T, dX)} \in \mathbb{C}$. Sachant que $\psi(\Omega_\xi) = 1$ si $\psi = 1$, on obtient

Lemme 3.1 *Pour toute valeur régulière ξ de Φ , l'intégrale $I(M, \eta, \xi)$ est égale à la multiplicité par rapport à la masse de Dirac en 0 de la fonction généralisée $(2i\pi)^{-\dim T} \int_M P_\xi \eta$.*

On ramène ainsi l'étude de l'application $\xi \mapsto I(M, \eta, \xi)$ à celle de l'application $\xi \mapsto P_\xi$.

3.2. Deux propriétés de l'application $\xi \mapsto P_\xi$.

Fixons $\xi \in \mathfrak{t}^*$ et considérons l'application $f = \Phi - \xi$. Pour $\xi' \in \mathfrak{t}^*$ on a $\langle \Phi_{\lambda_{\xi'}}, f \rangle = (\mathcal{H} - \xi'_M, \mathcal{H} - \xi_M)_M = \|\mathcal{H} - \xi_M\|^2 + ((\xi - \xi')_M, \mathcal{H} - \xi_M)_M$ ce qui donne $\langle \Phi_{\lambda_{\xi'}}, f \rangle \geq \|\mathcal{H} - \xi_M\|(\|\mathcal{H} - \xi_M\| - \|(\xi - \xi')_M\|)$ (*). Soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert, relativement compact et T -invariant de $\Phi^{-1}(\xi)$ tel que $\overline{\mathcal{U}} \cap \text{Cr}(\|\Phi - \xi\|^2) = \Phi^{-1}(\xi)$: alors $P_\xi = P_{\lambda_\xi}^\mathcal{U}$ dans $\mathcal{H}_{T,c}^{-\infty}(M)$. Sur $\partial\mathcal{U}$ (une partie compacte de M), le champ de vecteurs $\mathcal{H} - \xi_M$ ne s'annulant pas, on a des encadrements de la forme $\|\mathcal{H} - \xi_M\| \geq c_1 > 0$ et $\|a_M\| \leq c_2 \|a\|$, $\forall a \in \mathfrak{t}$. Finalement, avec (*) on obtient sur $\partial\mathcal{U}$ la minoration $\langle \Phi_{\lambda_{\xi'}}, f \rangle \geq c_1(c_1 - c_2\|\xi - \xi'\|)$, et donc $\langle \Phi_{\lambda_{\xi'}}, f \rangle \geq c_3 > 0$, pour ξ' suffisamment proche de ξ . Le lemme 2.1 montre alors que $\mathcal{U}$ est adapté à $\lambda_{\xi'}$ et que

$$P_{\lambda_{\xi'}}^\mathcal{U} = P_{\lambda_\xi}^\mathcal{U} = P_\xi \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}_{T,c}^{-\infty}(M) \quad \text{pour } \xi' \text{ suffisamment proche de } \xi. \quad (10)$$

Considérons tout d'abord le cas où ξ est une valeur régulière de Φ . Alors $\overline{\mathcal{U}} \subset M$ peut être pris dans l'ouvert des points réguliers de Φ . Ainsi pour ξ' suffisamment proche de ξ , $\mathcal{U} \cap \text{Cr}(\|\Phi - \xi'\|^2) = \Phi^{-1}(\xi')$ et $\partial\mathcal{U} \cap \text{Cr}(\|\Phi - \xi'\|^2) = \emptyset$, ce qui entraîne $P_{\xi'} = P_{\lambda_{\xi'}}^\mathcal{U}$ dans $\mathcal{H}_{T,c}^{-\infty}(M)$. On a démontré le

Lemme 3.2 *Soit ξ une valeur régulière de Φ . Pour ξ' suffisamment proche de ξ on a $P_{\xi'} = P_\xi$ dans $\mathcal{H}_{T,c}^{-\infty}(M)$.*

En utilisant les lemmes 3.1 et 3.2, on constate que $I(M, \eta, \xi') = I(M, \eta, \xi)$ si ξ' et ξ appartiennent à la même composante connexe de valeurs régulières de Φ .

Considérons maintenant le cas où $\xi \in \Delta$ est une valeur régulière de Φ_Δ . Ici Δ est un hyperplan séparant deux ouverts connexes de valeurs régulières de Φ , et $(M_\Delta, T/T_\Delta, \Phi_\Delta)$ est la sous-variété hamiltonienne définie dans l'introduction. On choisit le voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $\Phi^{-1}(\xi)$ de telle manière que tout $m \in \mathcal{U}$

a un stabilisateur $\mathfrak{t}_m$ soit égal à $\mathfrak{t}_\Delta$, soit réduit à $\{0\}$. On a alors $\mathcal{U} \cap \text{Cr}(\|\Phi - \xi'\|^2) = \Phi^{-1}(\xi') \cup \Phi_\Delta^{-1}(\xi'_\Delta)$ pour ξ' suffisamment proche de ξ , où ξ'_Δ désigne le projeté orthogonal de ξ' sur Δ (voir la décomposition de $\text{Cr}(\|\Phi - \xi'\|^2)$ obtenue dans [6][Prop. 6.8]). Soient $\xi^\pm$ deux valeurs régulières de Φ qui sont séparées par Δ , choisies suffisamment proches de ξ , et telles que leurs projetés orthogonaux sur Δ sont tous deux égaux à $\xi \in \Delta$. Comme $\mathcal{U} \cap \text{Cr}(\|\Phi - \xi^\pm\|^2) = \Phi^{-1}(\xi^\pm) \cup \Phi_\Delta^{-1}(\xi)$, la *propriété d'additivité* vue à la section 2 donne $P_{\lambda_{\xi^\pm}}^{\mathcal{U}} = P_{\xi^\pm} + P_{\lambda_{\xi^\pm}}^{\mathcal{V}}$ où $\mathcal{V}$ est un ouvert adapté à $\lambda_{\xi^\pm}$ tel que $\mathcal{V} \cap \text{Cr}(\|\Phi - \xi^\pm\|^2) = \Phi_\Delta^{-1}(\xi)$. Comme les formes $P_{\lambda_{\xi^\pm}}^{\mathcal{U}}$ sont égales à P_ξ (voir (10)), on obtient $P_{\xi^+} - P_{\xi^-} = P_{\lambda_{\xi^-}}^{\mathcal{V}} - P_{\lambda_{\xi^+}}^{\mathcal{V}}$ dans $\mathcal{H}_{T,c}^{-\infty}(M)$.

Rappelons l'expression de $P_{\lambda_{\xi^\pm}}^{\mathcal{V}}$ obtenue en [6]. Sur la T/T_Δ -variété hamiltonienne (M_Δ, Φ_Δ) , l'élément $\xi \in \Delta$ permet de définir la classe $P_\xi^\Delta \in \mathcal{H}_{T/T_\Delta,c}^{-\infty}(M_\Delta)$. D'après [6][Section 6.4], on a $P_{\lambda_{\xi^\pm}}^{\mathcal{V}} = (i_\Delta)_* \left(P_\xi^\Delta \text{Eul}_\pm^{-1}(N_\Delta) \right)$, où les inverses $\text{Eul}_\pm^{-1}(N_\Delta) \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}_\Delta, \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas})$ sont définis à la section 2 : le produit de $P_\xi^\Delta \in \mathcal{H}_{T/T_\Delta,c}^{-\infty}(M_\Delta)$ avec $\text{Eul}_\pm^{-1}(N_\Delta)$ détermine une classe $P_\xi^\Delta \text{Eul}_\pm^{-1}(N_\Delta) \in \mathcal{H}_{T,c}^{-\infty}(M_\Delta)$. En utilisant la classe $\delta_\Delta^\circ = \text{Eul}_-^{-1}(N_\Delta) - \text{Eul}_+^{-1}(N_\Delta)$ définie en (6) on obtient la formule de saut suivante

Proposition 1 $P_{\xi^+} - P_{\xi^-} = (i_\Delta)_*(P_\xi^\Delta \delta_\Delta^\circ)$ dans $\mathcal{H}_{T,c}^{-\infty}(M)$.

Considérons le T/T_Δ -fibré principal $\pi : \Phi_\Delta^{-1}(\xi) \rightarrow \mathcal{M}_\xi^\Delta$ et la restriction $\delta_\Delta^\circ|_{\Phi_\Delta^{-1}(\xi)}$ de la classe $\delta_\Delta^\circ \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}_\Delta, \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{bas})$: on a $\delta_\Delta^\circ|_{\Phi_\Delta^{-1}(\xi)} = \pi^*(\delta_\xi^\circ)$ où $\delta_\xi^\circ \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}_\Delta, \mathcal{H}^*(\mathcal{M}_\xi^\Delta))$ est supportée en 0. Pour tout $\eta \in \mathcal{H}_T^*(M)$, la proposition 1 donne après intégration

$$\int_{M \times \mathfrak{t}} (P_{\xi^+} - P_{\xi^-})(X) \eta(X) \psi(X) dX = \frac{c_\Delta}{|S_\xi^\Delta|} \int_{\mathcal{M}_\xi^\Delta \times \mathfrak{t}_\Delta} \mathbf{Kir}_\xi^\Delta(\eta \psi)(X_1) \delta_\xi^\circ(X_1) dX_1, \quad (11)$$

avec $c_\Delta = (2i\pi)^{\dim T - 1} \text{vol}(T/T_\Delta, dX_2)$ et $dX = dX_1 dX_2$. Ici $\mathbf{Kir}_\xi^\Delta : \mathcal{H}_T^\infty(M) \rightarrow \mathcal{H}_{T_\Delta}^\infty(\mathcal{M}_\xi^\Delta)$ est le composé du morphisme de restriction $\mathcal{H}_T^\infty(M) \rightarrow \mathcal{H}_T^\infty(\Phi_\Delta^{-1}(\xi))$ avec l'isomorphisme de Chern-Weil $\mathcal{H}_T^\infty(\Phi_\Delta^{-1}(\xi)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{T_\Delta}^\infty(\mathcal{M}_\xi^\Delta)$. L'élément δ_ξ° détermine l'application $\text{Res}_\xi^\circ : \mathcal{H}_{T_\Delta}^*(\mathcal{M}_\xi^\Delta) \rightarrow \mathcal{H}^*(\mathcal{M}_\xi^\Delta)$ en posant $\text{Res}_\xi^\circ(\eta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathfrak{t}_\Delta} \delta_\xi^\circ(X_1) \eta(X_1) \frac{dX_1}{\text{vol}(T_\Delta, dX_1)}$. En prenant $\psi = 1$ dans (11) on obtient $I(M, \eta, \xi^+) - I(M, \eta, \xi^-) = \frac{1}{|S_\xi^\Delta|} \int_{\mathcal{M}_\xi^\Delta} \text{Res}_\xi^\circ \circ \mathbf{Kir}_\xi^\Delta(\eta)$. Pour s'assurer que cette formule de saut correspond à (4) il suffit de vérifier que $\text{Res}_\xi^\circ \circ \mathbf{Kir}_\xi^\Delta = \mathbf{Kir}_{M_\Delta, \xi} \circ \text{Res}_\Delta^\circ$ où $\mathbf{Kir}_{M_\Delta, \xi}$ est le morphisme de Kirwan sur $(M_\Delta, T/T_\Delta, \Phi_\Delta)$ et Res_Δ° est l'application résidu définie par (7).

Références

- [1] N. BERLINE, E. GETZLER and M. VERGNE, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren, vol. 298, Springer, Berlin, 1991.
- [2] V. GUILLEMIN and J. KALKMAN, The Jeffrey-Kirwan localization theorem and residue operations in equivariant cohomology, *J. Reine Angew. Math.*, **470**, (1996), p. 123-142.
- [3] V. GUILLEMIN and S. STERNBERG, *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*. With an appendix containing two reprints by Henri Cartan. Mathematics Past and Present. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [4] F. KIRWAN, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1984.
- [5] S. KUMAR and M. VERGNE, Equivariant cohomology with generalized coefficients, *Astérisque*, **215**, 1993, p. 109-204.
- [6] P-E. PARADAN, Formules de localisation en cohomologie équivariante, *Compositio Mathematica*, **117**, 1999, p. 243-293.
- [7] P-E. PARADAN, The moment map and equivariant cohomology with generalized coefficients, *Topology*, **163**, 2000, p. 401-444.