Diagnostic de défauts par l'approche RBC ratio

Baligh Mnassri, Mustapha Ouladsine, El Mostafa El Adel

▶ **To cite this version:**

Baligh Mnassri, Mustapha Ouladsine, El Mostafa El Adel. Diagnostic de défauts par l'approche RBC ratio. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Jul 2012, Grenoble, France. pp.114-119. hal-00749745

HAL Id: hal-00749745
https://hal.science/hal-00749745

Submitted on 8 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Diagnostic de défauts par l'approche *RBC ratio*

Baligh Mnassri * **Mustapha Ouladsine** * **El Mostafa El Adel** *

* *Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes, UMR 7296 – Aix-Marseille Université, CNRS Avenue Escadrille Normandie-Niemen, 13397 Marseille Cedex 20, France.*
{baligh.mnassri, mustapha.ouladsine, mostafa.eladel}@lsis.org

Résumé : Dans le cadre de l'ACP, les concepts de détectabilité et d'isolabilité de défauts ont été développés plus particulièrement pour quelques indices de détection. Dans ce papier, nous avons étendu ces concepts afin d'être unifiés et valables pour tout indice ayant une forme quadratique. L'approche *RBC* a été utilisée pour le diagnostic de défauts unidimensionnels de grandes amplitudes. En revanche, les défauts peuvent être dans plusieurs directions. Pour cala, nous avons proposé une *RBC* multidimensionnelle. Ce papier présente également une nouvelle approche nommée *RBC ratio* (*RBCr*). Elle est dédiée au diagnostic des défauts détectables de faibles amplitudes. Une diagnosabilté qui s'appuie sur cette méthode garantit l'identification de tels défauts. Toutefois, l'isolation de ces derniers n'est garantie que si leurs amplitudes satisfassent une condition suffisante d'isolabilité. Un exemple simulé est présenté afin d'illustrer la théorie d'une telle diagnosabilité.

Mots-clés: ACP, Détectabilité, Isolabilité, Diagnosabilité, *RBC*, *RBCr*.

1. INTRODUCTION

La détection et le diagnostic de défauts forment une démarche essentielle pour l'assurance d'un fonctionnement sûr et efficace de nombreux processus industriels. Selon Kariwala et al. (2010), une telle démarche se base généralement sur des modèles quantitatifs, des modèles qualitatifs ou l'historique de processus qui représente l'intérêt de ce papier. Dans ce contexte, le contrôle statistique de procédés a reçu une attention considérable par la communauté scientifique ainsi qu'aux niveaux des applications industrielles. Ce succès peut être attribué à la disponibilité en permanence d'une grande quantité de données historiques de processus. Ainsi, ces données favorisent le développement des modèles statistiques qui peuvent atteindre une grande précision dans la détection de toutes déviations par rapport à un fonctionnement normal.

Dans ce cadre, l'analyse en composantes principales (ACP) est une approche très convenable pour un contrôle statistique de processus. Ainsi, elle a été intensément explorée pour le suivi et le diagnostic de plusieurs processus industriels (Nomikos et MacGregor, 1995; Dunia et Qin, 1998b; Qin, 2003; Tharrault et al., 2008). L'ACP est prouvée comme une approche de modélisation en générant un modèle statistique qui s'appuie sur les données historiques. En outre, le développement d'un modèle ACP se résume dans la partition d'un tel modèle statistique en deux parties. La première représente ce qu'on appelle le sous-espace principal, alors que la deuxième partie est associée à un sous-espace résiduel. Bien que l'ACP a été largement utilisée, l'optimalité de la partition est plutôt subjective et n'est pas unique (Dunia et Qin, 1998b,c; Valle et al., 1999; Qin et Dunia, 2000; Mnassri et al., 2010a,b, 2011).

Plusieurs indices de détection ont été largement utilisés pour un contrôle de processus en se basant sur l'ACP. Dans le sous-espace principal, la statistique $T2$ de Hotelling mesure la variation de l'observation étudiée par rapport au modèle ACP. Dans le sous-espace résiduel, l'erreur quadratique de prédiction (SPE) et le T_H^2 de Hawkins ou SWE indiquent la déviation de l'observation par rapport au modèle résiduel. Afin de mieux faciliter la tâche de détection, il a été suggéré de combiner les statistiques SPE et $T2$ de Hotelling en un seul indice combiné φ. Il est bien connu que tous les indices de détection ont une forme quadratique (Yue et Qin, 2001; Qin, 2003; Alcala et Qin, 2009, 2011).

Dans la littérature, le thème du diagnostic de défauts a quand même reçu une attention moins considérable que celui de la détection de défauts. L'approche classique la plus populaire pour un diagnostic est basée sur l'analyse de la contribution (Nomikos et MacGregor, 1995; Yue et Qin, 2001; Qin, 2003; Alcala et Qin, 2009, 2011; Kariwala et al., 2010; Mnassri et al., 2008, 2009). Cette technique permet de quantifier la contribution de chaque variable dans l'indice de détection considéré. Toutefois, si la contribution identifie plusieurs variables, il est difficile d'isoler celles en défaut. Ainsi, la décision est généralement confiée à un expert. En outre, la contribution ne permet pas d'isoler plusieurs variables simultanément en défaut en raison de la corrélation entre les variables. Par contre, une telle corrélation présente la clé d'un diagnostic mieux efficace basé sur l'approche de la reconstruction des variables (Dunia et al., 1996; Dunia et Qin, 1998b,c,a; Yue et Qin, 2001; Qin, 2003; Alcala et Qin, 2009, 2011). Le principe de cette méthode s'appuie sur l'élimination de l'influence

des défauts sur l'indice de détection considéré par une reconstruction des variables défectueuses à l'aide d'un modèle ACP.

Le succès de l'utilisation de l'ACP pour la surveillance et le diagnostic de processus en se basant sur l'approche de reconstruction a été enrichi par le développement de certains concepts fondamentaux comme la détectabilité et l'isolabilité de défauts (Dunia et Qin, 1998b,c,a; Yue et Qin, 2001; Qin, 2003). Dans le contexte de l'ACP, la détectabilité représente la capacité d'un indice donné à détecter la présence de défauts. Par ailleurs, l'isolabilité est la capacité du système de diagnostic à retrouver les origines de ces défauts. Dans la littérature, le concept de la détectabilité a été établi pour les statistiques SPE et $T2$ de Hotelling. Cependant, l'isolabilité de défauts a été négligemment étudiée en la développant uniquement pour l'indice SPE. Ce travail a pour objectif d'étendre et d'unifier de tels concepts à tout indice de détection ayant une forme quadratique.

La contribution basée sur la reconstruction (*reconstruction based contribution* : RBC) a été récemment proposée pour l'isolation de défauts (Alcala et Qin, 2009, 2011). En revanche, cette approche garantit un diagnostic correct uniquement dans le cas de défauts unidimensionnels de grandes amplitudes. L'objectif de ce papier représente la proposition d'une nouvelle approche basée sur la méthode RBC afin de garantir une identification, et isolation correctes de défauts évidemment détectables et de faibles amplitudes. Généralement, l'isolation de ces catégories de défauts s'appuie sur des seuils de validation. Pour cela, nous avons proposé une approche dite *RBC ratio* ($RBCr$). La diagnosabilité basée sur cette nouvelle méthode garantit un diagnostic correct sous la contrainte de la satisfaction d'une condition suffisante d'isolabilité.

2. MODÉLISATION PAR ACP

Le suivi statistique de processus basé sur l'ACP repose sur une exploitation de données historiques issues d'un fonctionnement normal. L'ACP définit les directions, souvent appelées composantes principales ayant le maximum de variabilités. Un vecteur d'observation composé des mesures de m variables est noté $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Ainsi, un ensemble de N observations, représentant l'historique d'un fonctionnement normal du processus forme une matrice de données $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N\times m}$. Nous considérons que cette matrice est centrée et réduite. L'ACP transforme linéairement les données originelles de $\mathbf{X}$ en des nouvelles données $\mathbf{T}$ en utilisant une matrice de projection $\mathbf{P}$ comme suit :

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{P}^T \tag{1}$$

où $\mathbf{T} = [\mathbf{t}(1), \cdots, \mathbf{t}(k), \cdots, \mathbf{t}(N)]^T \in \mathbb{R}^{N\times m}$. Les variables constituant le vecteur d'observation $\mathbf{t}(k) \in \mathbb{R}^m$, où $k = \{1, \cdots, N\}$, sont appelées composantes principales. $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ est une matrice orthonormée composée des vecteurs propres qui sont associés aux valeurs propres de la matrice de corrélation Σ des données $\mathbf{X}$ avec :

$$\Sigma = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}_m \tag{2}$$

où $\mathbf{I}_m$ est la matrice identité. $\Lambda = diag\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ représente la matrice diagonale des valeurs propres mises dans l'ordre décroissant.

La modélisation par ACP est basée sur la sélection d'un nombre optimal de composantes principales noté ℓ qui permet la partition de la matrice $\mathbf{P}$ comme suit :

$$\mathbf{P} = [\hat{\mathbf{P}} \mid \tilde{\mathbf{P}}] \tag{3}$$

Souvent, les ℓ premiers vecteurs propres constituent le sous-espace principal $\hat{\mathcal{S}} = span\{\hat{\mathbf{P}}\}$. Cependant, le reste des vecteurs forme le sous-espace résiduel $\tilde{\mathcal{S}} = span\{\tilde{\mathbf{P}}\}$. Par conséquent, les données estimées et résiduelles de celles originelles du vecteur $\mathbf{x}$ sont respectivement représentées par :

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{P}}^T\mathbf{x} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{x} \in \hat{\mathcal{S}} \tag{4}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^T\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{S}} \tag{5}$$

où $\hat{\mathbf{C}}$ et $\tilde{\mathbf{C}} = (\mathbf{I}_m - \hat{\mathbf{C}})$ représentent les matrices de projection respectivement dans $\hat{\mathcal{S}}$ et $\tilde{\mathcal{S}}$.

3. DÉTECTION ET DÉTECTABILITÉ DE DÉFAUTS

Quelques indices typiques pour la détection des conditions anormales ont été proposés dans la littérature. Les plus populaires sont les statistiques SPE et $T2$ de Hotelling qui sont également connues par les statistiques Q et D respectivement. Dans le cadre de l'ACP, tous les indices de détection ont une forme quadratique (Yue et Qin, 2001; Qin, 2003; Alcala et Qin, 2009, 2011). Par conséquent, les études de détection, isolation et diagnostic de défauts peuvent être généralisées en considérant un seul indice général ou unifié. Dans la littérature, le concept de la détectabilité a été développé pour les indices SPE et $T2$ de Hotelling (Dunia et Qin, 1998b,c,a; Yue et Qin, 2001; Qin, 2003). Pour cela, nous proposons une étude de détectabilité unifiée afin qu'elle soit valable pour tout indice quadratique.

Considérons γ et Γ^2 respectivement un indice de détection ayant une forme quadratique et son seuil de contrôle correspondant. Evidemment, γ peut être n'importe quel indice de détection parmi ceux qui existent dans la littérature (voir tableau 1). Mathématiquement, γ est égal le carré de la norme euclidienne du vecteur $\mathbf{x}$ projeté dans le sous-espace $\mathcal{S}_\gamma = span\{\Upsilon^{\frac{1}{2}}\}$:

$$\gamma(k) = \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}(k)\|^2 = \mathbf{x}^T(k)\Upsilon\mathbf{x}(k) \tag{6}$$

où $\Upsilon^{\frac{1}{2}}$ est une matrice semi-définie positive. k est le numéro de l'observation considérée. Lorsque les données suivent une distribution multinormale, la distance quadratique γ peut être approximée par une distribution de la forme $g_\gamma\chi^2_{(h_\gamma,\alpha)}$ avec h_γ degrés de liberté et un niveau de confiance α (Box, 1954). En se basant sur une telle distance, le processus est considéré sous contrôle à la $k$ème observation si

$$\gamma(k) \leq \Gamma^2 = g_\gamma\chi^2_{(h_\gamma,\alpha)} \tag{7}$$

Les paramètres g_γ et h_γ peuvent être déterminés en s'appuyant sur les travaux de Box (1954) comme suit :

$$g_\gamma = \frac{tr[(\Sigma\Upsilon)^2]}{tr[\Sigma\Upsilon]} \tag{8}$$

$$h_\gamma = \frac{(tr[\Sigma\Upsilon])^2}{tr[(\Sigma\Upsilon)^2]} \tag{9}$$

où Σ est la matrice de corrélation des données de $\mathbf{X}$. L'expression $tr[\Delta]$ représente la trace de la matrice Δ.

TABLE 1. Indices de détection

Indice γ	Matrice caractéristique $\Upsilon^{\frac{1}{2}}$	Limite de contrôle Γ^2
SPE	$\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^T = \tilde{\mathbf{C}}$	δ^2
SWE	$\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{P}}^T$	ϵ^2
$T2$	$\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{P}}^T$	τ^2
φ	$\delta^{-1}\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^T + \tau^{-1}\hat{\mathbf{P}}\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{P}}^T$	β^2

Dans ce papier, nous considérons les défauts multidimensionnels. Ainsi, nous notons par $\mathcal{S}_j$ le sous-espace du défaut réel $\mathcal{F}_j$ affectant le *jème* ensemble de variables. Un tel ensemble est composé de r variables en défaut où $r = dim(\mathcal{S}_j)$. Egalement, nous considérons $\Xi_j \in \mathbb{R}^{m\times r}$ une base orthonormée pour le sous-espace $\mathcal{S}_j$. Les colonnes de Ξ_j sont celles de la matrice identité et qui correspondent aux variables en défaut.

Considérons $\mathbf{x}^*$ le vecteur d'observation sous des conditions normales. Evidemment, un tel vecteur est supposé inconnu lorsqu'un défaut se produit. En présence du défaut $\mathcal{F}_j$, le vecteur de données $\mathbf{x}$ peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \Xi_j f \tag{10}$$

où $f \in \mathbb{R}^r$ représente le vecteur d'amplitude de défaut. A partir des équations (6) et (10), le vecteur menant au calcul de l'indice γ peut être exprimé par :

$$\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x} = \Upsilon^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}^* + \Xi_j f) = \Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}^* + \Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f \tag{11}$$

Deux conditions nécessaires doivent être considérées afin que le défaut $\mathcal{F}_j$ soit détectable par l'indice γ. Notamment, la projection du défaut dans le sous-espace caractéristique de l'indice de détection ne doit pas être nulle. En outre, son amplitude doit être suffisamment large afin qu'un tel indice dépasse la limite correspondante de contrôle, i.e. $\gamma > \Gamma^2$. Dans ce contexte, la norme euclidienne du vecteur $\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}$ peut être exprimée comme suit :

$$\|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}\| = \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}^* + \Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| \geq \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| - \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}^*\| \tag{12}$$

Puisque $\mathbf{x}^*$ représente des mesures sous des conditions normales, alors

$$\|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}^*\| \leq \Gamma \tag{13}$$

En considérant la positivité de la norme euclidienne, la substitution de (13) dans (12) mène à l'inégalité suivante :

$$\begin{cases} \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}\| \geq \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| - \Gamma \\ \text{avec} \quad \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| \geq \Gamma \end{cases} \tag{14}$$

Afin que le défaut soit suffisamment détectable, la condition $\gamma > \Gamma^2$ doit être satisfaite. Autrement dit, on doit imposer les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|^2 \geq (\|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| - \Gamma)^2 > \Gamma^2 \\ \text{avec} \quad \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| \geq \Gamma \end{cases} \tag{15}$$

ce qui nécessite

$$\|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| > 2\Gamma \tag{16}$$

D'une façon générale, un défaut $\mathcal{F}_j$ est garanti détectable par un indice de détection γ si son amplitude satisfait l'inégalité (16). Cette condition est généralisée à tout indice de détection ayant une forme quadratique.

4. ISOLATION ET ISOLABILITÉ DE DÉFAUTS PAR RECONSTRUCTION

Afin d'identifier le défaut réel $\mathcal{F}_j$ qui est inconnu, le principe de l'approche de reconstruction suppose l'existence d'un autre défaut $\mathcal{F}_i$ affectant un *ième* ensemble de variables. Ainsi, des reconstructions basées sur un modèle ACP peut conduire à l'isolation du défaut réel $\mathcal{F}_j$. En effet, la reconstruction consiste à estimer un vecteur de données reconstruites $\mathbf{x}_i$ en éliminant l'effet du défaut assumé $\mathcal{F}_i$:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x} - \Xi_i f_i \tag{17}$$

où f_i représente une estimation du vecteur f. Ainsi, la meilleure estimation est obtenue par la minimisation de l'indice reconstruit de détection γ_i :

$$f_i = \arg\min_{f_i} \{\gamma_i\} \tag{18}$$

avec

$$\gamma_i = \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i\|^2 \tag{19}$$

Par conséquent, l'estimé du vecteur d'amplitude du défaut ainsi que le vecteur reconstruit de données exprimé dans le sous-espace caractéristique de γ sont respectivement donnés par :

$$f_i = (\Xi_i^T\Upsilon\Xi_i)^{-1}\Xi_i^T\Upsilon\mathbf{x} \tag{20}$$

$$\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i = (\mathbf{I}_m - \Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_i(\Xi_i^T\Upsilon\Xi_i)^{-1}\Xi_i^T\Upsilon^{\frac{1}{2}})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x} \tag{21}$$

Dans ce cadre, une décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice $\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_i$ peut être exprimée de la façon suivante :

$$\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_i = \Xi_i^o\mathbf{D}_i\mathbf{V}_i^T \tag{22}$$

où $\Xi_i^o \in \mathbb{R}^{m\times r}$ et $\mathbf{V}_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$ sont des matrices orthonormées. $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$ est une matrice diagonale contenant les r valeurs propres de la matrice $\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_i$. Ainsi, l'équation (21) peut être réécrite comme suit :

$$\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i = (\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x} \tag{23}$$

Puisque l'index i correspond à un ensemble composé de r variables supposées en défaut, il représente alors un numéro de scénario :

$$i = \{1, \ldots, \frac{m!}{r!(m-r)!}\} \tag{24}$$

où ! représente l'opérateur factoriel.

D'après le principe de la reconstruction, le défaut assumé $\mathcal{F}_i$ ne peut pas être identifié comme un candidat si :

$$\gamma_i = \|(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|^2 > \Gamma_i^2 \tag{25}$$

où Γ_i^2 représente une limite de contrôle de l'indice reconstruit γ_i. Ainsi, l'expression appropriée d'un tel seuil peut être déterminée en s'appuyant sur les théories de Box (1954) :

$$\Gamma_i^2 = g_{\gamma_i}\chi^2_{(h_{\gamma_i},\alpha)} \tag{26}$$

$$g_{\gamma_i} = \frac{tr[(\Sigma\Upsilon^{\frac{1}{2}}(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}})^2]}{tr[\Sigma\Upsilon^{\frac{1}{2}}(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}]} \tag{27}$$

$$h_{\gamma_i} = \frac{(tr[\Sigma\Upsilon^{\frac{1}{2}}(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}])^2}{tr[(\Sigma\Upsilon^{\frac{1}{2}}(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}})^2]} \tag{28}$$

Dans le cadre de l'isolabilité, l'amplitude du défaut réel $\mathcal{F}_j$ doit être suffisamment importante afin de garantir que les valeurs de γ_i soient supérieures à Γ_i^2. Cette contrainte peut nous mener à la détermination d'une condition suffisante

d'isolabilité. Dans la littérature, ce concept a été établi uniquement pour l'indice SPE (Dunia et Qin, 1998b,c,a; Yue et Qin, 2001; Qin, 2003). Puisque le défaut réel étant $\mathcal{F}_j$ et en se référant aux équations (23) et (11), on peut établir ce qui suit :

$$\begin{aligned}\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i &= (\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})(\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}^* + \Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f) \\ &= (\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}^* + (\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f \end{aligned} \quad (29)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i\| \geq \|(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| - \|(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}^*\| \quad (30)$$

Avec $(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})$ est une matrice idempotente. En se basant sur (13), on peut prouver l'inégalité suivante :

$$\|(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}^*\| \leq \|(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\| \cdot \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}^*\| \leq \Gamma \quad (31)$$

Ainsi, la substitution de (31) dans (30) en considérant la positivité de la norme euclidienne mène à l'inégalité suivante :

$$\begin{cases} \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i\| \geq \|(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| - \Gamma \\ \quad \text{avec} \quad \|(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| \geq \Gamma \end{cases} \quad (32)$$

Afin que le défaut actuel $\mathcal{F}_j$ soit suffisamment isolable de celui assumé $\mathcal{F}_i$, l'inégalité (25) doit être satisfaite. Par conséquent, on doit imposer ce qui suit :

$$\begin{cases} \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i\|^2 \geq (\|(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| - \Gamma)^2 > \Gamma_i^2 \\ \quad \text{avec} \quad \|(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| \geq \Gamma \end{cases} \quad (33)$$

On déduit que

$$\|(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| > \Gamma + \Gamma_i \quad (34)$$

En revanche, le concept de l'isolabilité d'un défaut doit être établi lorsque celui-ci est garanti détectable. Dans ce cadre, on montre que :

$$\|(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| \leq \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| \quad (35)$$

En se référant à l'inégalité (34), nous pouvons déduire ce qui suit :

$$\|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| > \Gamma + \Gamma_i \quad (36)$$

Puisque $\Gamma \geq \Gamma_i$ et d'après l'inégalité (16), le défaut $\mathcal{F}_j$ n'est pas garanti détectable. Pour cela, l'hypothèse

$$\gamma_i > \Gamma^2 \quad (37)$$

représente la condition nécessaire qui doit être considérée au lieu de celle donnée par (25). Par conséquent, le défaut réel $\mathcal{F}_j$ est suffisamment isolable de celui assumé $\mathcal{F}_i$ en se basant sur un indice quadratique γ si

$$\|(\mathbf{I}_m - \Xi_i^o\Xi_i^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_j f\| > 2\Gamma \quad (38)$$

Une telle inégalité représente la condition suffisante de l'isolabilité d'un défaut tout en satisfaisant également sa détectabilité. Evidemment, elle représente une expression unifiée à tout indice de détection ayant une forme quadratique.

5. DIAGNOSTIC ET DIAGNOSABILITÉ DE DÉFAUTS PAR L'APPROCHE *RBC RATIO*

Parmi les méthodes dédiées au diagnostic de défauts, nous avons choisi de travailler avec une approche récente dite *RBC*. Elle est basée sur l'utilisation simultanée de la contribution et la reconstruction. Une telle méthode est exceptionnellement proposée pour diagnostiquer les défauts unidimensionnels de grandes amplitudes (Alcala et Qin, 2009, 2011). Dans ce cadre, le but de ce papier est d'étendre le diagnostic basé sur cette approche aux cas de défauts multidimensionnels.

Par extension, la *RBC* multidimensionnelle d'un ensemble i de variables assumées en défaut est donnée par :

$$\begin{aligned} RBC_i^\gamma &= \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_i f_i\|^2 = \|\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_i(\Xi_i^T\Upsilon\Xi_i)^{-1}\Xi_i^T\Upsilon\mathbf{x}\|^2 \\ &= \|\Xi_i^o\Xi_i^{oT}\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}\|^2 \end{aligned} \quad (39)$$

Etant donné que l'indice *RBC* présente une forme quadratique, nous pouvons ainsi lui proposer une limite de contrôle en se basant sur les travaux de Box (1954) :

$$\eta_{RBC_i^\gamma}^2 = g_{RBC_i^\gamma}\chi^2_{(h_{RBC_i^\gamma},\alpha)} \quad (40)$$

avec

$$g_{RBC_i^\gamma} = \frac{tr[(\Sigma\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_i^o\Xi_i^{oT}\Upsilon^{\frac{1}{2}})^2]}{tr[\Sigma\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_i^o\Xi_i^{oT}\Upsilon^{\frac{1}{2}}]} \quad (41)$$

$$h_{RBC_i^\gamma} = \frac{(tr[\Sigma\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_i^o\Xi_i^{oT}\Upsilon^{\frac{1}{2}}])^2}{tr[(\Sigma\Upsilon^{\frac{1}{2}}\Xi_i^o\Xi_i^{oT}\Upsilon^{\frac{1}{2}})^2]} \quad (42)$$

On montre qu'un diagnostic correct basé sur la *RBC* multidimensionnelle n'est garanti que pour les cas des défauts de grandes amplitudes. En outre, une telle approche ne peut pas être comparée à sa limite de contrôle. Afin de remédier aux problèmes de diagnostic liés aux défauts détectables de moyennes et faibles amplitudes, nous proposons une nouvelle méthode de diagnostic plus performante qui s'appuie sur la *RBC* multidimensionnelle et également un seuil valide comme suit :

$$RBCr_i^\gamma = \frac{\gamma}{RBC_i^\gamma + \Gamma_i^2} \quad (43)$$

Cette approche est appelée *RBC ratio*. Elle dispose de l'indice γ au numérateur comme un facteur commun pour les *RBC ratio* de tous les ensembles de variables. Cependant, les termes de son dénominateur dépendent de l'ensemble étudié de variables.

La théorie de la diagnosabilité de défauts par cette approche se déroule en deux étapes. Pour cette raison, nous proposons tout d'abord d'exprimer la *RBCr* en fonction des indices γ et γ_i :

$$RBCr_i^\gamma = \frac{\gamma}{\gamma - \gamma + RBC_i^\gamma + \Gamma_i^2} = \frac{\gamma}{\gamma - (\gamma_i - \Gamma_i^2)} \quad (44)$$

– 1$^{\text{er}}$ cas : $i = j$

A partir des équations (19) et (29), l'indice reconstruit peut être réécrit en vérifiant l'inégalité suivante :

$$\gamma_{i=j} = \|(\mathbf{I}_m - \Xi_j^o\Xi_j^{oT})\Upsilon^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}^*\|^2 \leq \Gamma_{i=j}^2 \quad (45)$$

ce qui nous permet d'écrire également

$$\gamma - (\gamma_{i=j} - \Gamma_{i=j}^2) \geq \gamma \quad (46)$$

Puisque $\gamma \geq 0$, l'inégalité suivante est vraie

$$\frac{\gamma}{\gamma - (\gamma_{i=j} - \Gamma_{i=j}^2)} \leq \frac{\gamma}{\gamma} = 1 \quad (47)$$

ainsi

$$RBCr_{i=j}^\gamma \leq 1 \quad (48)$$

– $2^{\text{ème}}$ cas : $i \neq j$

L'inégalité (37) présente une condition nécessaire afin que le défaut réel $\mathcal{F}_j$ soit isolable d'un défaut assumé $\mathcal{F}_i$. Par conséquent, on montre que

$$0 \leq \Gamma^2 - \Gamma_i^2 < \gamma_i - \Gamma_i^2 \leq \gamma \tag{49}$$

et

$$0 \leq \gamma - (\gamma_i - \Gamma_i^2) < \gamma - (\Gamma^2 - \Gamma_i^2) \leq \gamma \tag{50}$$

Puisque $\gamma \geq 0$, alors

$$\frac{\gamma}{\gamma - (\gamma_i - \Gamma_i^2)} > \frac{\gamma}{\gamma - (\Gamma^2 - \Gamma_i^2)} \geq \frac{\gamma}{\gamma} = 1 \tag{51}$$

ce qui implique que

$$RBCr_{i \neq j}^{\gamma} > 1 \tag{52}$$

Il est clair que la limite de contrôle de l'approche proposée est égale à l'unité. La diagnosabilité de défauts par cette approche montre que la valeur de $RBCr$ des variables réellement en défaut est garantie inférieure à un tel seuil. Autrement dit, le défaut réel est garanti identifiable. En outre, elle garantit le rejet de la possibilité qu'un défaut assumé soit considéré comme candidat si la condition nécessaire d'isolabilité (37) est satisfaite. Une telle condition est équivalente à celle donnée par (38).

Par conséquent, les défauts détectables de faibles amplitudes sont garantis identifiables par l'approche $RBCr$. Ainsi, ils sont garantis isolables si leurs amplitudes satisfassent l'inégalité (38).

6. EXEMPLE SIMULÉ

Afin d'illustrer notre étude, nous avons simulé un exemple de processus (Tharrault et al., 2008) dont les variables sont générées par les équations présentées dans le tableau 2. ϑ est une variable aléatoire normale ayant une moyenne nulle et un écart type de $0,35$. Un bruit de mesures sous forme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyennes nulles et un écart type de $0,02$ ont été superposées aux variables du tableau 2. La matrice de données est constituée de $N = 1150$ observations dont les 650 premières représentent un historique d'un fonctionnement normal du processus pour la construction du modèle ACP. Pour ce même exemple, il a été montré que son modèle optimal doit être constitué de 3 composantes principales (Tharrault et al., 2008; Mnassri et al., 2010a,b, 2011).

A partir de la $700ème$ jusqu'à la $1100ème$ observation, nous avons intégré un défaut $\mathcal{F}_j = \Xi_{j=\{1,2\}} f$ affectant l'ensemble $j = \{1, 2\}$ composé de la $1ère$ et la $2ème$ variable. Ainsi, la matrice orthonormée $\Xi_{j=\{1,2\}} \in \mathbb{R}^{m \times 2}$ est constituée de la $1ère$ et la $2ème$ colonne de la matrice identité. Le vecteur $f \in \mathbb{R}^2$ représente une dérive ayant deux pentes (voir (54)). La première désigne une dérive lente qui commence à partir de la $700ème$ jusqu'à la $1000ème$ observation. Cependant, la deuxième pente exprime une forte dérive durant le reste des observations défectueuses. En outre, nous avons proposé que les éléments du vecteur

$$f = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \end{bmatrix}^T \tag{53}$$

prennent les mêmes valeurs comme suit :

$$f_{x_1} = f_{x_2} = \begin{cases} 0.0015(k - 700) & \text{pour } 700 \leq k \leq 1000 \\ 0.15(k - 700) & \text{pour } 1001 \leq k \leq 1100 \end{cases} \tag{54}$$

Table 2. Données simulées

$x_1(k) = 1 + \vartheta(k)^2 + \sin(\frac{k}{3})$ avec $\vartheta(k) \approx \mathcal{N}(0, (0.35)^2)$
$x_2(k) = 2\sin(\frac{k}{6})\cos(\frac{k}{4})\exp(\frac{-k}{N})$
$x_3(k) = \log(x_2(k)^2)$
$x_4(k) = x_1(k) + x_2(k)$
$x_5(k) = x_1(k) - x_2(k)$
$x_6(k) = 2x_1(k) + x_2(k)$
$x_7(k) = x_1(k) + x_3(k)$

Le choix de ce type de défaut a pour objectif de savoir laquelle des deux approches proposées est capable d'identifier et d'isoler correctement les variables réellement responsables en considérant des défaut de faibles amplitudes. L'intérêt de ce papier s'est limité à un diagnostic basé uniquement sur l'indice SPE. Afin de mieux faciliter les interprétations, cet indice est pondéré par sa limite de contrôle. Notamment, la présence de défauts se manifeste par un dépassement du signal pondéré de la valeur unité. D'autre part, un diagnostic utilisant l'approche RBC est basé sur la sélection de l'ensemble de variables ayant la plus grande valeur de RBC. A cause des problèmes d'échelles, nous avons préféré d'interpréter des courbes qui représentent la différence entre les RBC de l'ensemble $j = \{1, 2\}$ composé des variables en défaut et celles des autres ensembles $i \neq j$. Nous avons également amplifié toutes les valeurs $RBCr$ y compris son seuil de contrôle par 10^6.

La figure 1 présente les deux méthodes de diagnostic basées sur l'indice SPE. Le défaut a été détecté par un tel indice à partir de la $740ème$ observation. Selon la troisième case de la même figure, l'approche $RBCr$ a identifié l'ensemble des variables réellement en défaut ainsi que d'autres ensembles. Nous remarquons également qu'une telle approche a définitivement isolé le défaut à partir de la $860ème$ observation car certainement l'amplitude de défaut a satisfait la condition suffisante d'isolabilité. Notamment, la méthode RBC ne présente pas une étape d'identification. Son principe est d'isoler directement le défaut en considérant que l'ensemble de variables ayant la plus grande valeur de RBC est celui en défaut. Cette approche peut mener à des résultats incorrects. La preuve se manifeste entre l'instant de la détection du défaut et la $747ème$ observation en se référant à la $2ème$ case de la figure 1. Dans cet ensemble d'observations, la valeur de la RBC d'un groupe de variables réellement non défectueuses est plus grande que celles des autres ensembles. Evidemment, ceci est dû à l'amplitude du défaut qui se caractérise par des faibles valeurs durant de telles observations.

Bien que l'approche $RBCr$ isole le défaut en s'appuyant sur un seuil de contrôle, la méthode RBC semblerait visiblement plus avantageuse dans l'isolation même des défauts de faibles amplitudes. Cependant, une identification de quelques groupes de variables comme candidats en assurant que le véritable ensemble de variables en défaut est identifié (le cas de la $RBCr$) mène généralement à un diagnostic plus correct car la décision finale peut se rendre à un expert. Néanmoins, la méthode RBC soupçonne un unique ensemble de variables, ce qui peut conduire à un diagnostic erroné.

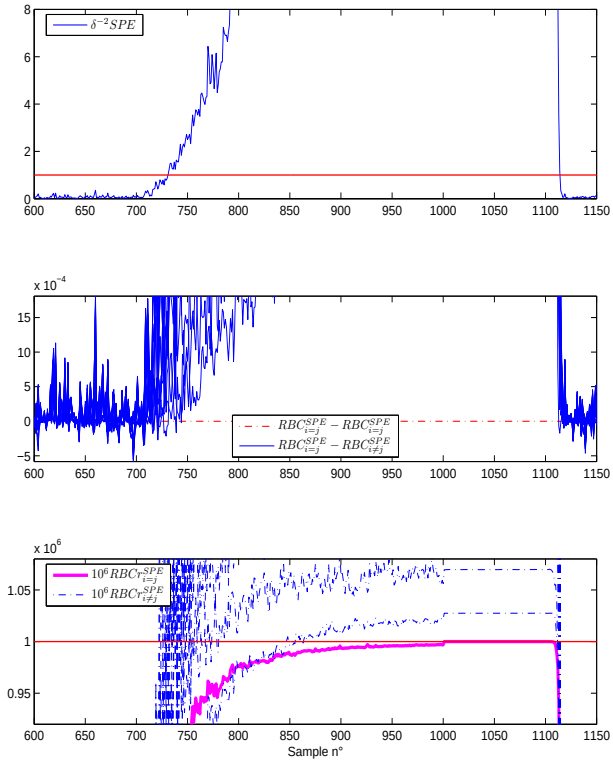

FIGURE 1. Diagnostic de défauts basé sur l'indice SPE

7. CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons étendu et généralisé les concepts de détectabilité et d'isolabilité de défauts basées sur l'ACP. Nous avons également étendu la méthode RBC pour le diagnostic de défauts multidimensionnels de grandes amplitudes. En outre, nous avons proposé une nouvelle approche appelée $RBCr$ qui s'appuie sur un seuil de contrôle pour le diagnostic de défauts. La diagnosabilité théorique basée sur une telle approche prouve qu'un défaut est garanti identifiable. Cependant, il est garanti isolable si son amplitude satisfait une condition suffisante d'isolabilité. En se basant sur un exemple simulé, les deux approches garantissent un diagnostic correct dans le cas des défauts de grandes amplitudes. En revanche, les défauts détectables qui sont caractérisés par des faibles amplitudes sont garantis uniquement identifiables par la méthode $RBCr$. L'approche RBC n'est capable ni d'identifier ni d'isoler correctement cette catégorie de défauts. Pour un diagnostic mieux décisif, la méthode $RBCr$ est plus avantageuse que l'approche RBC.

RÉFÉRENCES

Alcala, C.F. et Qin, S.J. (2009). Reconstruction-based Contribution for Process Monitoring. *Automatica*, 45(7), 1593–1600.

Alcala, C.F. et Qin, S.J. (2011). Analysis and generalization of fault diagnosis methods for process monitoring. *Journal of Process Control*, 21(3), 322–330.

Box, G.E.P. (1954). Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems, I. Effect of Inequality of Variance in the One-Way Classification. *Ann. Math. Statist.*, 25(2), 290–302.

Dunia, R. et Qin, S.J. (1998a). A unified geometric approach to process and sensor fault identification and reconstruction : The unidimensional fault case. *Computers & Chemical Engineering*, 22(7-8), 927–943.

Dunia, R. et Qin, S.J. (1998b). Joint diagnosis of process and sensor faults using principal component analysis. *Control Engineering Practice*, 6(4), 457–469.

Dunia, R. et Qin, S.J. (1998c). Subspace Approach to Multidimensional Fault Identification and Reconstruction. *AIChE Journal*, 44(8), 1813–1831.

Dunia, R., Qin, S.J., Edgar, T.F., et McAvoy, T.J. (1996). Identification of faulty sensors using principal component analysis. *AIChE Journal*, 42(10), 2797–2812.

Kariwala, V., Odiowei, P.E., Cao, Y., et Chen, T. (2010). A branch and bound method for isolation of faulty variables through missing variables analysis. *Journal of Process Control*, 20(10), 1198–1206.

Mnassri, B., El Adel, E.M., Ananou, B., et Ouladsine, M. (2009). Fault Detection and Diagnosis Based on PCA and a New Contribution Plots. In *7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, 834–839. Barcelona, Spain.

Mnassri, B., El Adel, E.M., Ananou, B., et Ouladsine, M. (2010a). A Generalized Variance of Reconstruction Error Criterion for Determining the Optimum Number of Principal Components. In *18th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 868–873. Marrakech, Morocco.

Mnassri, B., El Adel, E.M., Ananou, B., et Ouladsine, M. (2010b). Selection of the Number of Principal Components Based on the Fault Reconstruction Approach Applied to a New Combined Index. In *49th IEEE Conference on Decision and Control*, 3307–3312. Atlanta, Georgia, USA.

Mnassri, B., El Adel, E.M., et Ouladsine, M. (2008). Fault Localization Using Principal Component Analysis Based on a New Contribution to the Squared Prediction Error. In *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 65–70. Ajaccio, France.

Mnassri, B., El Adel, E.M., et Ouladsine, M. (2011). Inverse-Variance Weighting PCA-based VRE criterion to select the optimal number of PCs. In *18th IFAC World Congress*, 2851–2856. Milano, Italy.

Nomikos, P. et MacGregor, J.F. (1995). Multivariate SPC charts for monitoring bach processes. *Technometrics*, 37(1), 41–59.

Qin, S.J. (2003). Statistical process monitoring : basics and beyond. *Journal of Chemometrics*, 17(8–9), 480–502.

Qin, S.J. et Dunia, R. (2000). Determining the number of principal components for best reconstruction. *Journal of Process Control*, 10(2), 245–250.

Tharrault, Y., Mourot, G., Ragot, J., et Maquin, D. (2008). Fault detection and isolation with robust principal component analysis. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 18(4), 429–442.

Valle, S., Li, W., et Qin, S.J. (1999). Selection of the Number of Principal Components : The Variance of the Reconstruction Error Criterion with a Comparison to Other Methods. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 38(11), 4389–4401.

Yue, H.H. et Qin, S.J. (2001). Reconstruction-Based Fault Identification Using a Combined Index. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 40(20), 4403–4414.