# La conjecture de Casas Alvero pour les degrés $5p^e$

Mustapha Chellali

# La conjecture de Casas Alvero pour les degré $5p^e$

Mustapha CHELLALI & Alain SALINIER

**Résumé :** Selon la conjecture de Casas Alvero, si un polynôme à une variable de degré $n$ sur un corps commutatif de caractéristique 0 est non premier avec chacune de ses $n-1$ premières dérivés, alors il est de forme $c(X-r)^n$. Soient $p$ un nombre premier et $e$ un entier, la conjecture a été démontrée pour les polynômes de degré $p^e, 2p^e, 3p^e$ $(p \neq 2)$ *et* $4p^e$ $(p \neq 3, 5, 7)$. Dans ce travail on montre que la conjecture est vrai pour les polynômes de degré $5p^e$ $(p \neq 2, 3, 7, 11, 131, 193, 599, 3541, 8009)$. On corrige aussi une erreur dans [4] pour les degré $4p^e$

## 1 Introduction

Soit $k$ un corps commutatif, $P \in k[X]$ un polynôme de degré $n$, la conjecture de Casas-Alvero veut que si $P$ est non premier avec chacune de ses $n-1$ premières dérivées, alors c'est un monôme, c'est-á-dire de la forme $c(X-r)^n$. Cette conjecture est évidement fausse si la caractéristique de $k$ est $\neq 0$ comme le montre l'exemple $P = X^{p+1} - X^p$ en caractéristique $p$. Suivant [6], il importe de modifier l'énoncé de la conjecture en caractéristique $\neq 0$, en remplaçant les dérivés ordinaire $P^{(i)}$ par les dérivés de Hasse définies par $P(X+h) = \sum_i P_i(h)X^i$ (en caractéristique 0 on a simplement $P_i = P^{(i)}/i!$). Un lien intéressant a été trouvé entre la conjecture en caractéristique 0 et la conjecture en caractéristique $p \neq 0$ (cf [6] voir aussi [4] pour une preuve élémentaire), en notons $\overline{\mathbb{F}}_p$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$, il s'énonce comme suit :

**Proposition 1.1** *Soit $n$ un entier $\geq 1$*

- *Si pour un nombre premier donné $p$ la conjecture de Casas-Alvero est vrai sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour tout polynôme de degré $n$, alors elle est vrai en caractéristique 0 pour tout polynôme de degré de la forme $np^e$ $(e \in \mathbb{N})$*
- *Inversement si la conjecture est vrai en caractéristique 0 pour tout polynôme de degré $n$, alors elle est vrai sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour tout polynôme de degré $n$, sauf peut être pour un nombre fini de $p$.*

Comme conséquence on obtient :

- Pour $n = 1$, il n'y a aucun mauvais nombre premier, par conséquent la conjecture est vrai pour tout polynôme de degré $p^e$ ($p$ *premier*)

- Pour $n=2$, si un polynôme de degré 2 vérifie les hypothèses de Casas-Alvero, comme il a une racine double, c'est un monôme, par suite la conjecture est vrai pour tout polynôme de degré $2p^e$ ($p$ *premier*)

- Pour $n=3$, cherchons les mauvais nombres premiers, soit $p$ un nombre premier , soit $P$ un polynôme de degré 3 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ vérifiant les hypothèses de Casas-Alvero , après transformation affine on se ramène à $P$ de la forme $X^3-aX^2$, écartons d'abord les cas $p=2,3$ puisque la conjecture de Casas-Alvero est vérifiée pour $3^e$ et que on sait que $X^3-X^2$ est un contre exemple en caractéristique 2

$$\begin{cases} P' = 3X^2 - 2aX \\ P_2 = 3X - a \end{cases}$$

  Si 0 est racine de $P'' \longrightarrow a=0 \longrightarrow P=X^3$, sinon la racine de $P''$ en commun avec $P$ est $a \longrightarrow 2a=0 \longrightarrow a=0$. Ainsi 2 est le seul mauvais nombre premier.

  Conclusion : Si $p$ est nombre premier $\neq 2$ la conjecture de Casas-Alvero est vrai pour les polynômes de degré $3p^e$

- Pour $n=4$, cherchons les mauvais nombres premiers, soit $p$ un nombre premier , soit $P$ un polynôme de degré 4 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ vérifiant les hypothèses de Casas-Alvero , après transformation affine on se ramène à $P$ de la forme $X^4-aX^3+bX^2$, écartons d'abord les cas $p=2,3$ puisque la conjecture de Casas-Alvero est vérifiée pour $2^e$ et que on sait que $X^4-X^3$ est un contre exemple en caractéristique 3.

$$\begin{cases} P' = 4X^3 - 3aX^2 + 2bX \\ P_2 = 6X^2 - 3aX + b \\ P_3 = 4X - a \end{cases}$$

  Supposons d'abord que 0 n'est pas racine de $P''$ et $P'''$ soit $ab \neq 0$, écrivons $P = X^2(X-x_1)(X-x_2)$, soient $\alpha, \beta$ les racines de $P''$ et $P'''$ en commun avec $P$, on peut supposer que $\beta = x_1$, deux cas sont alors possibles $(\alpha,\beta) = (x_1,x_1)$ ou $(\alpha,\beta)=(x_2,x_1)$

  - 1 er cas : $(\alpha,\beta)=(x_1,x_1)$

$$\begin{cases} 4x_1 = a = x_1 + x_2 \longrightarrow x_2 = 3x_1 \\ 6x_1^2 - 12x_1^2 + b = 0 \longrightarrow b = 6x_1^2 \ soit \ 6x_1^2 = x_1x_2 = 3x_1^2 \longrightarrow x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

  - 2 ème cas : $(\alpha,\beta)=(x_2,x_1)$

$$\begin{cases} 4x_1 = a = x_1 + x_2 \longrightarrow x_2 = 3x_1 \\ 6x_2^2 - 12x_1x_2 + b = 0 \longrightarrow b = -2x_2^2 \ soit \ -2x_2^2 = x_1x_2 = 3x_1^2 \longrightarrow 21x_1^2 = 0 \longrightarrow p = 7 \end{cases}$$

    Inversement si $p=7$, prenons $x_1=1$ et $x_2=3x_1=3$ et $P=X^2(X-1)(X-3)$ on a $P'''(1)=0$ et $P''(3)=0$, donc $P$ vérifie les hypothèses de Casas-Alvero dans $\overline{\mathbb{F}_7}$ et n'est pas monôme, ainsi 7 est un mauvais nombre premier.

Supposons maintenant que 0 est racine de $P''$ ou $P'''$ soit $a$ *ou* $b=0$ (mais pas les deux car dans ce cas $P$ serait monôme et $p$ un bon nombre premier )

- $a = 0 \longrightarrow x_1 + x_2 = 0$, on peut supposer que la racine de $P''$ est alors $x_1 \neq 0 \longrightarrow 6x_1^2 + b = 0 \longrightarrow b = -6x_1^2 = x_1x_2 = -x_1^2 \longrightarrow 5x_1^2 = 0 \longrightarrow p = 5$. Inversement si $p = 5$, posons $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$ et $P = X^2(X-1)(X+1)$ on a $P'(0) = P'''(0) = 0$ et $P''(1) = 6 - 1 = 0$, donc $P$ vérifie les hypothèses de Casas-Alvero dans $\overline{\mathbb{F}}_5$ et n'est pas monôme, ainsi 5 est un mauvais nombre premier. Ce cas est passé inaperçu dans [4] suite a une erreur de considération de déterminant (cf page 33)

- $b = 0 \longrightarrow x_1x_2 = 0$, on peut supposer que la racine de $P'''$ est alors $x_1 \neq 0 \longrightarrow 4x_1 - a = 0 \longrightarrow a = 4x_1 = x_1 + x_2 \longrightarrow 3x_1^2 = 0 \longrightarrow x_1 = x_2 = 0$.

Conclusion : Si $p$ est nombre premier $\neq 3, 5, 7$ la conjecture de Casas-Alvero est vrai pour les polynômes de degré $4p^e$

## 2 Cas des degrés $5p^e$

Notre résultat principal est :

**Proposition 2.2** *La conjecture de Casas-Alvero est vrai pour les polynômes de degré* $5p^e$, *e entier et p premier* $\neq 2, 3, 7, 11, 131, 193, 599, 3541, 8009$

Preuve : Nous allons poursuivre les méthodes ci-dessus pour déterminer les mauvais nombres premiers pour les polynômes de degré 5. Soit $P$ un polynôme de degré 5 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ vérifiant les hypothèses de Casas-Alvero , après transformation affine on se ramène à $P$ de la forme $X^5 - aX^4 + bX^3 - cX^2$, écartons d'abord les cas $p = 2, 3, 5$ puisque la conjecture de Casas-Alvero est vérifiée pour $5^e$ et que $X^5 - X^4$ est un contre exemple en caractéristique 2 et $X^5 + X^4$ est un contre exemple en caractéristique 3.

$$\begin{cases} P' = 5X^4 - 4aX^3 + 3bX^2 - 2cX \\ P_2 = 10X^3 - 6aX^2 + 3bX - c \\ P_3 = 10X^2 - 4aX + b \\ P_4 = 5X - a \end{cases}$$

Soient $\alpha, \beta, \gamma$ les racines de $P'', P''', P^{(4)}$ en commun avec $P$, nous distinguons deux cas :

- 1 er cas : $0 \notin \{\alpha, \beta, \gamma\}$

  Ecrivons $P = X^2(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, on peut supposer $\gamma = x_1$

  - Cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (x_1, x_1, x_1)$

$$\begin{cases} P_4(x_1) = 5x_1 - a = 0 \longrightarrow 5x_1 = a = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow 4x_1 = x_2 + x_3 \\ P_3(x_1) = 0 \longrightarrow 10x_1^2 - 20x_1^2 + b = 0 \\ \longrightarrow b = 10x_1^2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4x_1^2 + x_2(4x_1 - x_2) \longrightarrow \boxed{6x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 0} \\ P_2(x_1) = 0 \longrightarrow 10x_1^3 - 30x_1^3 + 30x_1^3 - x_1x_2x_3 = 0 \longrightarrow 10x_1^2 = x_2x_3 = x_2(4x_1 - x_2) \\ \longrightarrow \boxed{10x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 0} \end{cases}$$

  Comme $x_1$ est supposé $\neq 0$, posons $r = x_2/x_1$, on a le système :

$$\begin{cases} r^2 - 4r + 6 = 0 \\ r^2 - 4r + 10 = 0 \end{cases}$$

Le resultant de ces deux équations est $16 \neq 0$ puisque $p \neq 2$, par suite ce cas est impossible.

- Cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (x_3, x_2, x_1)$

$$\begin{cases} P_4(x_1) = 5x_1 - a = 0 \longrightarrow 5x_1 = a = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow 4x_1 = x_2 + x_3 \\ P_3(x_2) = 0 \longrightarrow 10x_2^2 - 20x_1x_2 + b = 0 \\ \longrightarrow b = -10x_2^2 + 20x_1x_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4x_1^2 + x_2(4x_1 - x_2) \\ \longrightarrow \boxed{4x_1^2 - 16x_1x_2 + 9x_2^2 = 0} \\ P_2(x_3) = 0 \longrightarrow 10x_3^3 - 30x_1x_3^2 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2)x_3 - x_1x_2x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_3^2 - 30x_1x_3 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2) - x_1x_2 = 0 \\ \longrightarrow 10(4x_1 - x_2)^2 - 30x_1(4x_1 - x_2) + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2) - x_1x_2 = 0 \\ \longrightarrow \boxed{40x_1^2 + 9x_1x_2 - 20x_2^2 = 0} \end{cases}$$

Comme $x_1$ est supposé $\neq 0$, posons $r = x_2/x_1$, on a le système :

$$\begin{cases} 9r^2 - 16r + 4 = 0 \\ -20r^2 + 9r + 40 = 0 \end{cases}$$

Le resultant de ces deux équations est $32036 = 2^2.8009$ puisque $p \neq 2$ cela n'est possible que si $p = 8009$. Inversement si $p = 8009$ on va remonter ces équations pour construir un contre exemple modulo $p$. eliminon $r$ entre ces deux equations on obtient $r = 440/239 = 2113 \ mod \ 8009$. En fixant $x_1 = 1$ alors $x_2 = r$ et $x_3 = 4x_1 - x_2 = 4 - r$, cela doone le contre exemple :

$$P = x^2(x-1)(x-r)(x-4+r) = x^5 - 5x^4 - 3309x^3 + 3313x^2 \qquad mod \ 8009$$

On vérifie bien que modulo 8009 on a

$$\begin{aligned} P_4(1) &= 0 \\ P_3(r) &= 0 \\ P_2(4-r) &= 0 \end{aligned}$$

- Cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (x_2, x_1, x_1)$

$$\begin{cases} P_4(x_1) = 5x_1 - a = 0 \longrightarrow 5x_1 = a = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow 4x_1 = x_2 + x_3 \\ P_3(x_1) = 0 \longrightarrow 10x_1^2 - 20x_1^2 + b = 0 \\ \longrightarrow b = 10x_1^2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4x_1^2 + x_2(4x_1 - x_2) \longrightarrow \boxed{6x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 0} \\ P_2(x_2) = 0 \longrightarrow 10x_2^3 - 30x_1x_2^2 + 30x_1^2x_2 - x_1x_2x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_2^2 - 30x_1x_2 + 30x_1^2 - x_1x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_2^2 - 30x_1x_2 + 30x_1^2 - x_1(4x_1 - x_2) = 0 \\ \longrightarrow \boxed{26x_1^2 - 29x_1x_2 + 10x_2^2 = 0} \end{cases}$$

Comme $x_1$ est supposé $\neq 0$, posons $r = x_2/x_1$, on a le système :

$$\begin{cases} r^2 - 4r + 6 = 0 \\ 10r^2 - 29r + 26 = 0 \end{cases}$$

Le resultant de ces deux équations est $386 = 2.193$ puisque $p \neq 2$ cela n'est possible que si $p = 193$. Inversement si $p = 193$ on va remonter ces équations pour construir un contre exemple modulo $p$. eliminon $r$ entre ces deux equations on obtient $r = 34/11 = 161 \; mod \; 193$. En fixant $x_1 = 1$ alors $x_2 = r$ et $x_3 = 4x_1 - x_2 = 4 - r$, cela doone le contre exemple :

$$P = x^2(x-1)(x-r)(x-4+r) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 6x^2 \qquad mod \; 193$$

On vérifie bien que modulo 193 on a

$$\begin{aligned} P_4(1) &= 0 \\ P_3(r) &= 0 \\ P_2(4-r) &= 0 \end{aligned}$$

- Cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (x_1, x_2, x_1)$

$$\begin{cases} P_4(x_1) = 5x_1 - a = 0 \longrightarrow 5x_1 = a = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow 4x_1 = x_2 + x_3 \\ P_3(x_2) = 0 \longrightarrow 10x_2^2 - 20x_1x_2 + b = 0 \\ \longrightarrow b = -10x_2^2 + 20x_1x_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4x_1^2 + x_2(4x_1 - x_2) \\ \longrightarrow \boxed{4x_1^2 - 16x_1x_2 + 9x_2^2 = 0} \\ P_2(x_1) = 0 \longrightarrow 10x_1^3 - 30x_1x_1^2 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2)x_1 - x_1x_2x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_1^2 - 30x_1x_1 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2) - x_2x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_1^2 - 30x_1x_1 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2) - x_2(4x_1 - x_2) = 0 \\ \longrightarrow \boxed{-20x_1^2 + 56x_1x_2 - 29x_2^2 = 0} \end{cases}$$

Comme $x_1$ est supposé $\neq 0$, posons $r = x_2/x_1$, on a le système :

$$\begin{cases} 9r^2 - 16r + 4 = 0 \\ 29r^2 - 56r + 20 = 0 \end{cases}$$

Le resultant de ces deux équations est $256 = 2^8$ puisque $p \neq 2$ ce cas est impossible.

- Cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (x_2, x_2, x_1)$

$$\begin{cases} P_4(x_1) = 5x_1 - a = 0 \longrightarrow 5x_1 = a = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow 4x_1 = x_2 + x_3 \\ P_3(x_2) = 0 \longrightarrow 10x_2^2 - 20x_1x_2 + b = 0 \\ \longrightarrow b = -10x_2^2 + 20x_1x_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4x_1^2 + x_2(4x_1 - x_2) \\ \longrightarrow \boxed{4x_1^2 - 16x_1x_2 + 9x_2^2 = 0} \\ P_2(x_2) = 0 \longrightarrow 10x_2^3 - 30x_1x_2^2 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2)x_2 - x_1x_2x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_2^2 - 30x_1x_2 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2) - x_1x_3 = 0 \\ \longrightarrow 10x_2^2 - 30x_1x_2 + 3(-10x_2^2 + 20x_1x_2) - x_1(4x_1 - x_2) = 0 \\ \longrightarrow \boxed{-4x_1^2 + 31x_1x_2 - 20x_2^2 = 0} \end{cases}$$

Comme $x_1$ est supposé $\neq 0$, posons $r = x_2/x_1$, on a le système :

$$\begin{cases} 9r^2 - 16r + 4 = 0 \\ 20r^2 - 31r + 4 = 0 \end{cases}$$

Le resultant de ces deux équations est $-524 = -2^2.131$ puisque $p \neq 2$ cela n'est possible que si $p = 131$. Inversement si $p = 131$ on va remonter ces équations pour construir un contre exemple modulo $p$. eliminon $r$ entre ces deux equations on obtient $r = 44/41 = 49 \ mod\ 131$. En fixant $x_1 = 1$ alors $x_2 = r$ et $x_3 = 4x_1 - x_2 = 4 - r$, cela doone le contre exemple :

$$P = x^2(x-1)(x-r)(x-4+r) = x^5 - 5x^4 + 26x^3 - 22x^2 \qquad mod\ 131$$

On vérifie bien que modulo 131 on a

$$\begin{aligned} P_4(1) &= 0 \\ P_3(r) &= 0 \\ P_2(4-r) &= 0 \end{aligned}$$

- 2 ème cas : $0 \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$

  Autrement dit $a\ ou\ b\ ou\ c = 0$, on a les resultants

$$Res_x(P, P_2) = 100\, a^3\, c^4 - 24\, a^2\, b^2\, c^3 - 459\, a\, b\, c^4 + 98\ \ b^3\, c^3 + 729\, c^5$$

$$Res_x(P, P_3) = 96\, a^3\, b^2\, c - 18\, a^2\, b^4 - 480\, a\, b^3\, c + 81\, b^{\ 5} + 1000\, b^2\, c^2$$

$$Res_x(P, P^{(4)}) = 4\, a^5 - 25\, b\, a^3 + 125\, c\, a^2$$

  - 1er cas : $a = 0$

    Dans ce cas les resultants ci-dessus deviennent :

$$\begin{aligned} Res_x(P, P_2) &= c^3(98\, b^3\ + 729\, c^2) \\ Res_x(P, P_3) &= b^2(81\, b^3 + 1000\ c^2) \end{aligned}$$

    Si $P$ vérifie les hypothèses de Casas-Alvero on aura alors

$$\begin{aligned} c^3(98\, b^3\ + 729\, c^2) &= 0 \\ b^2(81\, b^3 + 1000\ c^2) &= 0 \end{aligned}$$

    Si $c = 0 \longrightarrow 81b^5 = 0 \longrightarrow b = 0$ car $p \neq 3$. Si $b = 0 \longrightarrow 729c^5 = 0$, soit $9^3c^5 = 0 \longrightarrow c = 0$. si $bc \neq 0$ le système ci-dessus a un déterminant nul :

$$98.1000 - 81.729 = 0$$

    Soit $11.3541 = 0 \longrightarrow p = 11\ ou\ p = 3541$

* Cas $p = 11$ prenons $c = 1$ if faut que $b^3 = -729/98 = 3 \; mod \; 11 \longrightarrow b = -2$, d'où :

$$P = x^5 - 10x^3 - 3x^2$$

On vérifie que

$$P = x^2(x+1)(x+3)(x-4) \qquad mod \; 11$$

On vérifie que

$$\begin{array}{l} P_2(-3) = 0 \; mod \; 11 \\ P_3(-3) = 0 \; mod \; 11 \\ P_4(0) = 0 \; mod \; 11 \end{array}$$

* Cas $p = 3541$ pour réaliser $81\,b^3 + 1000\,c^2 = 0$ il suffit de prendre $b = -10$ et $c = 9$ :

$$P = x^5 - 10x^3 - 9x^2$$

On vérifie que

$$P = x^2(x+1)(x-1567)(x+1566) \qquad mod \; 3541$$

On vérifie que

$$\begin{array}{l} P_2(1567) = 0 \; mod \; 3541 \\ P_3(-1) = 0 \; mod \; 3541 \\ P_4(0) = 0 \; mod \; 3541 \end{array}$$

- 2ème cas : $b = 0$

  Dans ce cas les resultants ci-dessus deviennent :

$$\begin{array}{l} Res_x(P, P_2) = c^4 \cdot (100\,a^3 + 729\,c) \\ Res_x(P, P_4) = a^2 \cdot (4\,a^3 + 125\,c) \end{array}$$

  Si $P$ vérifie les hypothèses de Casas-Alvero on aura alors

$$\begin{array}{l} c^4 \cdot (100\,a^3 + 729\,c) = 0 \\ a^2 \cdot (4\,a^3 + 125\,c) = 0 \end{array}$$

  Si $c = 0 \longrightarrow 4a^5 = 0 \longrightarrow a = 0$ car $p \neq 2$. Si $a = 0 \longrightarrow 729c^5 = 0$, soit $9^3c^5 = 0 \longrightarrow c = 0$. si $ac \neq 0$ le système ci-dessus a un déterminant nul :

$$100.125 - 4.729 = 0$$

  Soit $9584 = 2^4.599 = 0 \longrightarrow p = 599$. Pour réaliser $a^2 \cdot (4\,a^3 + 125\,c) = 0$ prenons $c = 4$ et $a = -5$ d'où :

$$P = x^5 + 5x^4 - 4x^2$$

On vérifie que

$$P = x^2(x+1)(x+269)(x-265) \qquad mod\ 599$$

et

$$\begin{array}{l} P_2(-269) = 0\ mod\ 599 \\ P_3(0) = 0\ mod\ 599 \\ P_4(-1) = 0\ mod\ 599 \end{array}$$

– 3ème cas : $c = 0$
Dans ce cas les resultants ci-dessus deviennent :

$$\begin{array}{l} Res_x(P, P_3) = (-9) \cdot b^4 \cdot (2\,a^2 - 9\,b) \\ Res_x(P, P_4) = a^3 \cdot (4\,a^2 - 25\,b) \end{array}$$

Si $P$ vérifie les hypothèses de Casas-Alvero on aura alors

$$\begin{array}{l} (-9) \cdot b^4 \cdot (2\,a^2 - 9\,b) = 0 \\ a^3 \cdot (4\,a^2 - 25\,b) = 0 \end{array}$$

Si $b = 0 \longrightarrow 4a^5 = 0 \longrightarrow a = 0$ car $p \neq 2$. Si $a = 0 \longrightarrow 9^2 b^5 = 0 \longrightarrow b = 0$. si $ab \neq 0$ le système ci-dessus a un déterminant nul :

$$2.(-25) + 4.9 = 0$$

Soit $-14 = -2.7 = 0 \longrightarrow p = 7$. Pour réaliser $(-9) \cdot b^4 \cdot (2\,a^2 - 9\,b) = 0$ prenons $b = 2$ et $a = 3$ d'où :

$$P = x^5 - 3x^4 + 2x^3$$

On vérifie que

$$P = x^3(x-1)(x-2) \qquad mod\ 7$$

et

$$\begin{array}{l} P_2(0) = 0\ mod\ 7 \\ P_3(1) = 0\ mod\ 7 \\ P_4(2) = 0\ mod\ 7 \end{array}$$

## 3 Conclusion

- Les resulats ci dessus ne permettent pas de décider pour les degrés : 12,20,24,28,30,35,36,...
- Les méthode ci dessus ne semblent pas s'étendre au cas du degrés 6, le contre exemple de [6]

$$P = X^6 + 3144481702696843X^4 + X^3 + 2707944513497181X^2$$

$$p = 7390044713023799$$

laisse supposer que les mauvais nombres premiers de ce cas sont trés grands et leur nombre est grand

## References


[1] Casas Alvero., *Higher order polar germs,* Journal of Algebra 240,. (2001) 240, 1, 326-337,

[2] G. Diaz-Toca and L. Gonzalez-Vega *On a conjecture about univariate polynomials and their roots.* In A. Dolzmann, A. Seidl, and T. Sturm, editors, Algorithmic Algebra and Logic 2005, pages 83 -90, Norderstedt, Germany, 2005. Books on Demand.

[3] Jan Draisma,*On the Casas-Alvero conjecture* http://www.win.tue.nl/_jdraisma/talks/casasalverotalk.pdf

[4] Draisma, Jan; and Jong, Johan P.*On the Casas-Alvero conjecture. (English)* Eur. Math. Soc. Newsl. 80, 29-33 (2011). MSC2000: *37-99 30-99 .

[5] Duong Hoang Dung, *On the Cassa-Alvero Conjecture* http://www.math.leidenuniv.nl/_edix/tag 2009/duong 2.pdf

[6] Hans-Christian graf von bothmer, Oliver Labs, Josef Schicho, and Christiaan Van de woestijne ,*The Casas-Alvero conjecture for infnitely many degrees,* http://arxiv.org/abs/math/0605090v2



Polynomials over commutative rings
MSC-numbers 2000: 13M10 13P05 13P10 P


*************


Adresses des auteurs

*************

Prof M.Chellali
Département de mathématiques
Faculté des sciences, Université Mohammed 1
Oujda, Maroc.

*************
Prof Alain Salinier
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences et Techniques de Limoges
123, avenue Albert Thomas
87060 LIMOGES Cedex (FRANCE)
*************
email : mustapha.chellali@gmail.com
alain.salinier@unilim.fr