

DES SAVOIRS À LA MATERNELLE OUI, MAIS LESQUELS?

Claire MARGOLINAS

Maître de Conférences, Université Blaise Pascal

Laboratoire ACTé

claire.margolinas@univ-bpclermont.fr

Résumé

Personne ne doute que l'école maternelle soit un maillon essentiel dans la scolarisation des élèves, ni qu'elle soit un véritable lieu d'apprentissage, notamment en mathématiques. Pour autant, il n'est pas certain que les savoirs à enseigner et les connaissances à transmettre en maternelle soient décrits, dans les différentes didactiques, d'une façon suffisante pour répondre aux besoins des professeurs qui y enseignent.

Le cas de l'énumération, étudiée par Brousseau (1984) puis Briand (1993), est emblématique des nécessaires efforts à réaliser pour comprendre les connaissances qui sont en jeu dans les situations rencontrées par les élèves. Nous verrons que l'énumération permet d'analyser les difficultés des élèves dans de très nombreux cas, pas seulement en « mathématiques ». En regard de ces analyses, les actions des professeurs en situation montrent la difficulté qu'il y a à entrer dans le nécessaire processus d'institutionnalisation de ces connaissances, faute de savoirs disponibles dans l'institution scolaire.

I - DES SAVOIRS ET DES CONNAISSANCES

Dans le titre de cette conférence, c'est à dessein que j'ai utilisé le terme de « savoir ». En effet, dans le cadre de la théorie des situations, la distinction entre connaissances et savoir est tout à fait essentielle. Sans faire un historique de cette distinction, il est important de signaler qu'elle s'est quelque peu transformée au cours des travaux qui ont contribué à ce champ théorique.

Dans l'article fondateur de la théorie des situations (Brousseau, 1972), le terme de savoir n'apparaît pas et celui de connaissance rarement cependant, dès 1977 (voir Perrin-Glorian, 1994, page 107), le « savoir constitué ou en voie de constitution » devient le point de départ du projet social d'enseignement, alors que « les connaissances n'existent et n'ont de sens chez un sujet que parce qu'elles représentent une solution optimale dans un système de contraintes » (Brousseau, 1978 : page 2 dans la version déposée dans HAL). On voit donc se dessiner les sens différents qui seront stables par la suite dans le travail de Guy Brousseau, le savoir étant constitué (ou en voie de constitution) et les connaissances étant rencontrées en situation. Ce qui intéresse Brousseau, à la fois dans le travail théorique et dans les travaux d'ingénierie, ce sont surtout les connaissances : dans quelle(s) situation(s) les connaissances sont-elles rencontrées comme des solutions optimales ? En situation d'action, les connaissances sont d'abord implicites, néanmoins, dans d'autres types de situations (formulation, validation), les connaissances sont formulées et validées.

Conne (1992) adopte un point de vue différent : son travail prend sa source dans la résolution de :

« l'épineux problème des rapports qui lient le projet de la didactique des mathématiques avec ceux de l'épistémologie génétique et de la psychologie piagétienne de la connaissance » (p. 224).

La caractérisation à laquelle il arrive de la distinction entre savoir et connaissance est la suivante :

« Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible : il sait. Une connaissance ainsi

identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans le sens qu'elle permet au sujet d'agir sur sa représentation » (p. 225).

Suivant ce point de vue, la différence entre savoir et connaissance se déplace en quelque sorte vers le sujet en situation, puisque la reconnaissance de l'utilité d'une connaissance pour un sujet la qualifie pour lui comme savoir.

Dans les deux cas, il ne s'agit en tout état de cause jamais de délimitations étanches : tel ou tel concept n'est pas « en soi » une connaissance ou un savoir, en particulier, pour Brousseau, une connaissance acquière une fonction de savoir, au cours du processus d'institutionnalisation.

Depuis quelques temps (Laparra & Margolinas, 2010), j'ai été amenée à retravailler la distinction entre connaissance et savoir, dans le cadre notamment d'une collaboration avec Marceline Laparra (didactique du français). Le point de vue que j'ai adopté n'est pas, contrairement à François Conne, parti de l'intérêt pour un lien entre psychologie et didactique mais plutôt de celui de la nécessité d'une conception anthropologique et sociologique des savoirs et des connaissances. Pour clarifier la suite du texte, je donne ici d'emblée les définitions que j'ai adoptées : j'en donnerai les raisons dans un deuxième temps.

Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation. Il s'agit d'un concept très large, qui inclut à la fois des connaissances du corps, des connaissances dans l'action, des connaissances de l'interaction, des connaissances mémorisées, etc.

Un savoir est d'une autre nature, il s'agit d'une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution (Douglas, 2004) et qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé. Il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. Il peut être linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle.

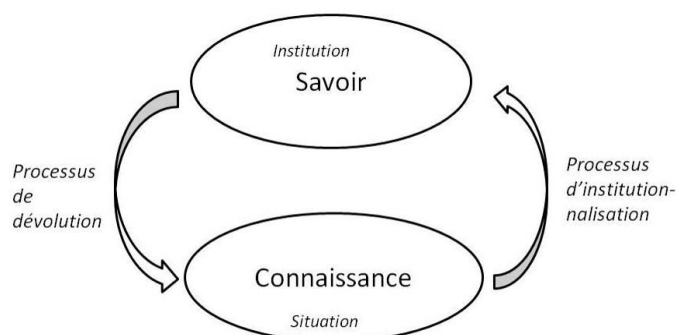


Figure 1 : Savoir et connaissance

Ce que l'on peut retenir schématiquement de ces distinctions, c'est déjà que la connaissance vit dans une situation, alors que le savoir vit dans une institution. Pour définir une connaissance donnée, il faut donc décrire les situations fondamentales de cette connaissance. Pour définir un savoir particulier, il faut dire quelle est l'institution qui produit et légitime ce savoir, ce qui conduit parfois à considérer plusieurs institutions et leurs éventuels conflits¹.

Pourquoi ces distinctions sont-elles essentielles pour la didactique des mathématiques ?

Le savoir mathématique, dont l'institution productrice est constituée des « mathématiciens »², est ainsi défini par avance comme ce qui doit être étudié (dans des

¹ Le cas est plutôt rare en mathématiques, mais est sans doute plus fréquent dans d'autres disciplines.

² Que l'on peut, en France, caractériser par exemple par les liens avec la Société Mathématique de France ou bien avec les sections 25 et 26 du Conseil National Universitaire ou encore avec la section 41 du Centre National de la Recherche Scientifique.

institutions spécialisées comme l'École ou non), alors que la connaissance est ce qui va émerger de « l'activité mathématique » en situation. Le processus de dévolution, pris dans un sens très large, part d'un savoir donné comme étant à transmettre, ce processus passe par la construction des situations de rencontre de la connaissance, il est basé, implicitement ou explicitement, sur le questionnement des *raisons d'être* d'un savoir. Remarquons que je ne fais ici aucune hypothèse particulière sur la méthode qui prévaut à une telle construction : chaque professeur, notamment, porte une certaine épistémologie du savoir qu'il doit enseigner, qui intervient (en lien avec d'autres considérations) dans la construction et la sélection des situations d'enseignement.

Inversement, tout élève et plus généralement tout sujet investit les situations qu'il rencontre, et cherche à trouver un équilibre : il rencontre des connaissances. Néanmoins, si ces connaissances ne restent que des modèles implicites d'action, elles ne pourront faire fonction de référence, elles restent fragiles et fugitives. C'est pourquoi le processus d'institutionnalisation (de nouveau au sens le plus général), qui établit un lien des connaissances vers les savoirs, passent par des étapes essentielles : reconnaissance d'une utilité de la connaissance, formulation, formalisation, mémorisation, mise à l'épreuve (validation), généralisation, reconnaissance d'une valeur culturelle et sociale.

L'étude du didactique se situe donc dans cette circulation entre connaissance et savoir.

Ce développement théorique sur les savoirs et les connaissances n'est pas né d'une volonté de développer la théorie des situations sur ce point, mais d'une nécessité rencontrée dans le cadre de nos recherches sur l'énumération (Margolinas, 2010 ; Margolinas & Rivière, 2008 ; Margolinas & Wozniak, 2012 ; Margolinas, Wozniak, Canivenc, De Redon, & Rivière, 2007), qui prolongent celles de Briand (1993) et Brousseau (1984), c'est donc d'énumération que nous allons parler maintenant.

II - L'ÉNUMÉRATION : QUELLES CONNAISSANCES ? QUELS SAVOIRS ?

1 Les origines du concept d'énumération

C'est en 1984 que Brousseau publie un premier texte qui regroupe une catégorie de connaissances sous le terme d'énumération. Il part des observations suivantes dans des situations de dénombrement, qui dénotent d'un déséquilibre et donc de connaissances erronées ou absentes dans certaines situations :

- « 1) À l'Université il est fréquent de voir des étudiants attendre la correction d'un exercice de combinatoire pour être sûrs que leur réponse est correcte. [...] »
- 2) Dans l'enseignement secondaire les dénombrements posent aussi des problèmes difficiles aux élèves : écrire tous les termes d'un produit de polynômes en troisième année ou faire la liste de tous les éléments d'un ensemble qui ont une certaine propriété en première année ne va pas sans mal parfois même pour de bons élèves.
- 3) À l'école élémentaire certains élèves n'arrivent pas à savoir quelle opération il convient de faire dans les problèmes même si les manipulations évoquées leur sont familières et s'il est clair qu'ils les conçoivent parfaitement.
- 4) En première année d'école primaire on peut observer des enfants qui « savent compter » mais qui ne mettent pas en œuvre ce savoir pour effectuer des tâches qu'ils comprennent bien pourtant et qui requièrent le comptage : Ils ne comptent qu'en réponse à une demande sociale bien précise et n'ont aucune idée de ce à quoi cette tâche sert ni ce qu'elle permet de maîtriser. » (Brousseau, 1984, p 2-3).

Il procède alors à une comparaison de ces difficultés :

« Quoique assez différents, ces divers problèmes peuvent être rapprochés intuitivement, il s'agit chaque fois de dénombrer mentalement un ensemble qui n'est pas concrètement présent ou réalisé. » (p. 3).

Il indique également la méthode qui lui permet d'établir ces comparaisons :

« Pour préciser ces ressemblances et les analyser il faut faire correspondre à chaque exemple, à chaque connaissance, sa situation fondamentale. » (p. 3).

Cette étude des situations fondamentales lui permet de donner une définition mathématique de ce qu'il appelle l'énumération :

« Une énumération d'un ensemble est une injection de cet ensemble sur une section commençante de $\mathbb{N}$. Ce serait donc la possibilité de produire et de contrôler la production effective de telles énumérations qui ferait défaut aux élèves en difficultés sur les questions évoquées plus haut. » (p. 4).

Il formule alors les hypothèses suivantes :

« i) Les élèves doivent passer très brutalement d'un contrôle perceptif de l'énumération de petites collections d'objets petits déplaçables mais immobiles à un contrôle complètement mental et verbal d'ensembles quelconques.

ii) Les professeurs ne disposent pas de situations d'enseignement qui leur permettraient de faire développer par leurs élèves des savoir-faire, des anticipations, des stratégies dans des rapports expérimentaux avec le milieu. Ils ne disposent pas non plus de ce fait de moyens de négocier avec eux des contrats didactiques raisonnables à propos de ces questions ni même d'évoquer avec eux ce genre de difficultés.

iii) Ces conditions seraient une cause principale des difficultés observées. » (p. 5).

C'est sur la base de ces hypothèses que (Briand, 1993) élabore sa thèse de doctorat, il étend l'énumération du dénombrement proprement dit au « mesurage des collections », développe et observe les situations sur ordinateur dont Brousseau donnait les grandes lignes à la fin du texte de 1984, y compris en formation d'enseignants. Il donne d'autres définitions³ mathématiques de l'énumération, qui font intervenir la notion de « chemin » (pp. 23-25).

2 L'énumération en situation de dénombrement de collections finies montrées

Appuyons-nous sur la caractérisation que Briand (1999) donne de l'énumération dans une situation très simple de dénombrement, dans laquelle il s'agit de dénombrer des arbres identiques imprimés sur une feuille, répartis aléatoirement sur une feuille blanche.

« J'ai montré [Briand 1993] que, pour contrôler une situation de comptage, l'enfant doit faire fonctionner une connaissance (l'énumération) qui se réfère à l'exploration de la collection et qui conditionne complètement le bon déroulement de l'activité. [...]

« [Briand observe un élève qui échoue dans le dénombrement] Il s'agit donc d'une absence de connaissance (l'énumération) qui se manifeste par une absence de synchronisation effective entre une connaissance numérique et une organisation conjointe de la collection et qui empêche l'inventaire de la collection.

Examinons l'activité en détail : pour compter le nombre d'éléments d'une collection finie montrée, l'élève doit nécessairement :

1- Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.

2- Choisir un élément d'une collection.

3- Énoncer un mot nombre. (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mots-nombres).

4- Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.

5- Concevoir la collection des objets non encore choisis.

6- Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.

7- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.

8- Énoncer le dernier mot nombre. » (p. 52-53)

Dans cette liste d'actions nécessaires, seules les étapes 3 et 8 font référence à la suite numérique, toutes les étapes en italiques (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8) nécessitent de parcourir la

³ Le lecteur intéressé par ces définitions pourra les retrouver dans la thèse publiée en ligne, voir bibliographie.

collection de manière à passer en revue chaque élément une fois et une seule, *l'énumération* est le nom donné à la connaissance qui permet de contrôler ce parcours en situation.

Alors que Brousseau plaçait les difficultés principales de l'énumération du côté du dénombrement mental d'un ensemble qui n'était pas concrètement présent ou réalisé, Briand a montré que des difficultés d'énumération existaient même quand l'ensemble était représenté et même quand l'élève était autorisé à tracer un chemin dessiné sur la collection représentée. Ainsi, l'énumération des collections représentées s'avère plus difficile que prévu.

3 Situations d'énumération

Briand (1993) a développé de nombreuses situations d'énumération sans dénombrement, non seulement sous forme informatique (création du logiciel « à nous les nombres »⁴), mais reposant également sur des situations matérielles simples (Briand, Lacave-Luciani, Harvouët, Bedere, & Goua de Baix, 2000 ; Briand, Loubet, & Salin, 2004).

Dans le cadre du groupe de développement INRP Démathé (voir §II - 4 pour des détails concernant ce groupe), nous en avons conçues d'autres, sur lesquelles je m'appuierai ici non pas parce qu'elles seraient meilleures que celles de Briand (ce qui n'est pas le cas) mais parce que je dispose des données que nous avons recueillies à leur propos.

Voici l'une d'entre-elles (dont je me servirai dans la suite de ce texte), qui concerne une collection finie montrée (sans dénombrement).

La consigne de la situation que j'appellerai « les chapeaux » est la suivante⁵ :

« Sur cette grande feuille, il y a des points. Sur chaque point nous allons mettre un sucre [cette action est réalisée avec l'aide des élèves]. Vous voyez ce bol à côté de la feuille, pour réussir il va falloir déposer tous les sucres dans ce bol. Mais c'est trop facile ! Pour que ça soit un peu plus intéressant, nous allons cacher les sucres avec des chapeaux [l'expérimentateur⁶ et les élèves posent un chapeau sur chaque sucre]. Alors voilà comment ça va se passer : vous devez soulever le chapeau, prendre le sucre, le déposer dans le bol et tout de suite remettre le chapeau sur le point [l'expérimentateur montre l'action en utilisant une petite feuille sur laquelle il y a seulement un point, un sucre et un chapeau, le sucre est déposé dans le bol]. Qu'est-ce qui peut se passer ? Il se peut que quand on soulève un chapeau [l'expérimentateur le fait] il n'y ait pas de sucre ! Et oui, il est déjà là [montre le bol]. Dans ce cas, le jeu s'arrête et on a perdu. Quand vous pensez avoir fini, vous devez le dire, on enlèvera alors tous les chapeaux, si vous avez mis tous les sucres dans le bol, vous avez gagné⁷. »

Au départ de notre travail, ces situations ont été créées uniquement dans le but de fournir des clips vidéos à un document, car notre ambition était modeste : partir de la recherche de Briand pour produire un développement destiné aux professeurs des écoles.

4 Recherche, développement, et retour à la recherche

En effet, quand j'ai eu l'occasion de réunir un groupe de développement à l'INRP, le groupe Développement des Mathématiques à l'École⁸, j'ai proposé de travailler à la constitution de

⁴ Une adaptation de ce logiciel est disponible sur http://www.abuledu.org/leterrier/a_nous_les_nombres

⁵ Il s'agit à quelques mots près, de l'interprétation qu'en donne Marie-Christine de Redon lors d'une expérimentation en 2005.

⁶ Il s'agit d'une situation observée et filmée hors classe.

⁷ Voir annexe 1.

⁸ Ce groupe de développement (Démathé) a fonctionné de 2003 à 2010, sous la direction de Claire Margolinas, avec Olivier Rivière et Floriane Wozniak et la collaboration technique de Bruno Mastellone : de 2003 à 2007 avec Bruno Canivenc et Marie-Christine de Redon ; de 2005 à 2007 avec Catherine Aurand ; de 2003 à 2004 avec Colette Andreucci et Alain Mercier. Ce groupe a été créé à l'UMR ADEF (INRP - Université de Provence - IUFM d'Aix-Marseille) puis soutenu par le projet EducMath (INRP) et l'IUFM d'Auvergne.

traités (Neyret, 1995) en destination des professeurs des écoles. Nous avons choisi comme premier thème l'énumération, parce qu'il me semblait que le travail de Briand était suffisamment complet (en plus d'être tout à fait remarquable) pour que notre développement ne concerne d'une certaine manière que la forme. C'est ainsi que nous avons réfléchi à une façon de faire partager les questions d'énumération au public des professeurs. Nous nous sommes assez rapidement aperçus (Margolinas & Rivière, 2008) qu'il serait nécessaire de montrer les gestes accompagnant l'énumération, qui sont toujours difficiles à expliquer par écrit. Nous avons recueilli un corpus filmé à cet effet, tout d'abord en filmant les mains des élèves dans les situations que nous avons construites. Mais, dans le même temps, j'observai aussi des classes ordinaires de maternelle ou de CP et nous avons décidé de reconstituer certaines des observations que nous ne pouvions pas montrer pour des raisons déontologiques (voir par exemple l'observation des ballons, § II - 5 et III - 3), en jouant nous-mêmes les rôles des enseignants et des élèves.

Au cours de ce cheminement (qui était prévu pour durer six mois, après quoi nous pensions passer à un autre sujet...), nous nous sommes rendu compte petit à petit que la question de l'énumération était beaucoup plus large et complexe que ce que nous avions supposé au départ (Margolinas & De Redon, 2008 ; Margolinas, et al., 2007) ! Au lieu de produire des documents, nous avons produit des recherches et même une nouvelle thèse (Olivier Rivière, en cours)...

5 Difficultés d'énumération avec des petites collections mobiles

En observant des classes d'école maternelle, de façon informelle d'abord, puis de façon plus systématique, en suivant un groupe d'élèves de la Grande Section au CP⁹, nous nous sommes aperçus tout d'abord que le dénombrement des collections dont on pouvait déplacer les éléments n'était pas toujours exempt de difficulté. Ainsi, alors qu'il est aisé de dénombrer par comptage une petite collection de jetons sur une table, en faisant passer chaque jeton déjà compté d'un bord à l'autre de la table, la situation peut être beaucoup plus complexe si l'on modifie certains paramètres de la situation.

Voici par exemple une observation dans une classe de grande section de maternelle. Au cours d'une activité motrice, les élèves sont répartis en deux équipes qui font une sorte de course de relais : un élève s'élance jusqu'au fond de la salle, saisit un ballon, revient vers son équipe et dépose son ballon dans un grand bidon puis le suivant se met à courir et ainsi de suite jusqu'à ce que la maîtresse siffle la fin de la course. L'équipe gagnante est celle qui a recueilli le plus de ballons dans son bidon. Il s'agit alors de savoir quelle équipe a gagné, en comptant les ballons récoltés. Un élève commence à compter les ballons de son équipe, sous l'œil attentif de toute la classe. Il sort un ballon du bidon, énonce « un », garde le ballon dans ses bras ; il prend un autre ballon, dit « deux », il a alors deux ballons dans ses bras ; au moment de saisir un nouveau ballon dans le bidon, un des ballons qu'il avait dans les bras tombe dans le bidon. L'élève continue imperturbablement, énonce « trois » et s'apprête à prendre un nouveau ballon sans qu'aucun élève ne proteste (même dans l'équipe adverse...) c'est alors le professeur qui l'arrête : « ça ne va pas ».

Quelles sont donc les variables didactiques qui interviennent et qui font qu'il est plus facile de compter des jetons sur une table que des ballons dans des bidons ? Intuitivement, on perçoit bien que les ballons sont trop gros pour tenir dans les bras d'un enfant et que de plus ils roulent alors que les jetons sont petits et stables. Néanmoins, cette description factuelle ne nous avance pas vraiment pour comprendre les structures qui différencient ces situations du

⁹ Avec Marceline Laparra, didacticienne du français (CREM, Université de Lorraine), dans le cadre du réseau RESEIDA (REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages), fondé par Jean-Yves Rochex et Elisabeth Bautier.

point de vue de l'énumération (étant qu'elles sont rigoureusement identiques du point de vue numérique : faible nombre d'objets, comptage de un en un possible).

Pour mieux comprendre les difficultés d'énumération dans le cas des collections dont on peut déplacer les éléments, nous avons conçu la situation suivante, que j'appellerai « les jetons marqués ».

« L'expérimentateur donne une boîte à l'élève [la partie couvercle et la partie récipient de la boîte sont quasiment identiques], lui demande de l'ouvrir et de renverser doucement sur la table tout ce qu'elle contient [les deux parties de la boîte sont posées par l'élève où il le souhaite, aucun commentaire n'est fait à ce propos]. L'expérimentateur demande à l'élève de dire ce qu'il voit (Figure 2) : « Des jetons où il n'y a rien et des jetons où il y a une gommette verte », dit Pauline. L'expérimentateur reprend alors la formulation de Pauline et lui demande de trier les jetons où il y a une gommette verte et les autres : tous les jetons avec gommette verte doivent être ensemble, et il ne doit rester aucun jeton avec gommette verte parmi les jetons sans gommette. ».



Figure 2 : les jetons marqués (Pauline, PS, temps 1)

6 Énumération et organisations spatiales

Décrivons le travail de Pauline (petite section de maternelle) avec les jetons marqués. Elle commence par déposer dans un petit tas des jetons dont la gommette est visible dans le tas de départ (Figure 3).



Figure 3 : constitution du tas des jetons marqués

Au début du travail, quand elle soulève un jeton et constate sur les deux faces qu'il est non marqué, elle le remet dans le tas de départ. Au bout d'un certain temps, elle commence à constituer un autre tas pour ces jetons non marqués (Figure 4).



Figure 4 : constitution du tas des jetons non marqués

Malheureusement, ce deuxième tas est très proche du tas des jetons non encore triés, et au cours du travail ces deux tas finiront pas se mélanger, ce qui conduira Pauline à l'échec.

Remarquons que Pauline n'utilise pas les parties de la boîte comme récipients, ce que font d'autres élèves spontanément (comme Brandon, MS, qui utilise immédiatement une partie de la boîte comme récipient pour les jetons marqués).

Il s'agit de réaliser des partitions successives de la collection des jetons, la partition finale étant constituée du sous-ensemble des jetons marqués et du sous-ensemble des jetons non-marqués. Au cours de l'activité de tri, l'ensemble est partitionné en deux sous-ensembles :

celui des objets déjà traités et celui des objets non traités, voire en trois (avec celui des objets en cours de traitement). Sur la Figure 4, on distingue ainsi les jetons traités qui sont proches de Pauline, les jetons non traités qui sont un peu plus loin sur la table et dans ses mains quelques jetons en cours de traitement. Cette partition se réalise dans des espaces : espace des objets traités, espace des objets non traités, espace de traitement. De plus, l'ensemble des objets traités est lui-même partitionné en deux sous-ensembles : celui des éléments correspondant au critère et celui des éléments ne correspondant pas au critère.

Revenons maintenant au problème des ballons. Puisqu'il s'agit d'un dénombrement, il suffit de faire des partitions successives en deux sous-ensembles : celui des ballons déjà comptés et celui des ballons encore à compter. Au début de l'activité, l'élève utilise son bras replié comme espace des objets traités, sa main comme espace de traitement et le bidon comme espace des objets non traités. Mais dans l'avancée des partitions successives, l'espace de son bras replié ne suffit pas à contenir tous les ballons déjà comptés, certains ballons déjà comptés retombent dans l'espace des ballons non encore traités, ce qui conduit à l'échec de la procédure, exactement comme dans le cas du travail de Pauline.

Les conditions matérielles de constitution stable des différents espaces sont donc des variables des situations d'énumération des collections à configuration modifiables (jetons, ballons) : les ballons peuvent rouler et passer d'un espace à l'autre, alors qu'un jeton, une fois posé, ne bouge plus s'il n'est pas touché ; mais encore, si l'on dispose d'une grande table, dans laquelle il est possible de bien séparer les espaces (c'était le cas pour Pauline, la photo étant réduite à l'espace dont elle fait usage), le problème ne sera pas le même que si l'espace est exigu, s'il y a des récipients ou non, etc.

Par rapport au travail de Brousseau puis de Briand, ce travail montre que, même avec de petites collections matérielles dont on peut déplacer les éléments, le problème de l'énumération n'est pas si simple que cela.

7 Configurations modifiable et non modifiable

Les configurations jouent un rôle de « macro-variables » : à partir de la situation fondamentale de l'énumération (désigner une fois et une seule chaque élément d'un ensemble), elles déterminent deux catégories de situations très différentes.

Si l'on peut modifier la configuration (ex : les jetons), il est possible de développer des stratégies qui reposent sur la distinction des partitions successives par des positions dans l'espace.

Si l'on ne peut pas modifier la configuration (ex : les chapeaux, situations dans laquelle les chapeaux et les sucres sont bien mobiles, mais la configuration imposée par la place des points sur la feuille ne l'est pas), alors il faut mémoriser un chemin qui permet de distinguer au fur et mesure du parcours les objets non traités et les objets traités.

Ces deux situations sont très différentes, bien qu'elles relèvent toutes les deux de l'énumération, les variables qui affectent chacune de ces deux situations seront également très différentes : la taille de la table n'a pas d'importance dans la situation des chapeaux pourvu que la feuille et le bol puisse tenir sur celle-ci, alors cette taille a une importance dans la situation des jetons marqués, parce qu'elle sert d'espace de travail et peut plus ou moins bien se reconfigurer.

8 Stratégies de constitution des chemins

Intéressons-nous maintenant à la situation des chapeaux, telle qu'elle a été expérimentée¹⁰ en 2006, avec 15 points (Figure 5), auprès d'élèves de GS au CE1.

¹⁰ Recueil de données réalisé par Marie-Christine de Redon et Bruno Canivenc.



Figure 5 : quinze chapeaux

Certains élèves, comme Olivia¹¹ (CE1), soulèvent les chapeaux sans qu'une stratégie de constitution de chemin ni de partition ne soit observable (elle commence par un point en bas à gauche puis en haut à droite, puis quelque part au milieu, etc. ce qui la conduit à l'échec – elle soulève un chapeau alors que le sucre a déjà été pris). D'autres, parfois beaucoup plus jeunes, comme Jena¹² (MS), réussissent pourtant.

Tous les élèves qui réussissent avec 15 chapeaux ont remarqué que la feuille (qui aurait dû être une feuille A3) était constituée de deux feuilles A4 scotchées, ce qui constituait une première partition de la collection des chapeaux.

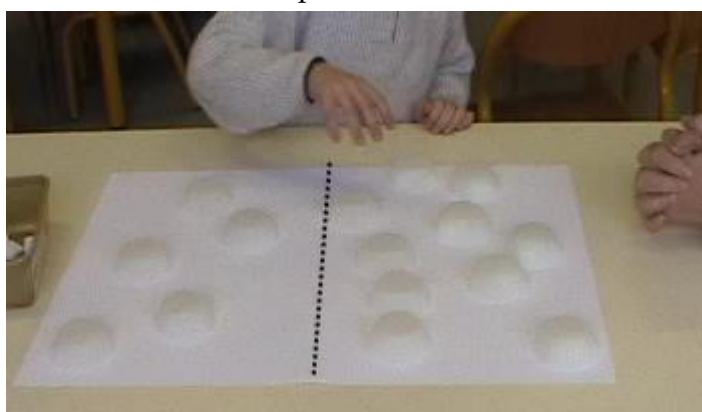


Figure 6 : partition en deux A4

Cette partition visuelle, facilitée par la configuration matérielle, leur a permis d'énumérer indépendamment la collection de 5 chapeaux situés à leur droite et la collection de 10 chapeaux à leur gauche. Tous les élèves ayant eu cette idée ont énuméré correctement la petite collection de 5 objets, pour laquelle un contrôle visuel simple suffit à réussir. Par contre, certains ont réussi et d'autres ont échoué à énumérer la collection des 10 chapeaux restants, ce qui nous intéresse maintenant.

Matérialisation le travail d'Audrey¹³ (GS, Figure 7) et celui d'Alexandre¹⁴ (CP, Figure 8) qui réussissent tous les deux.

¹¹ Annexe 2.

¹² Annexe 3.

¹³ Annexe 4.

¹⁴ Annexe 5.

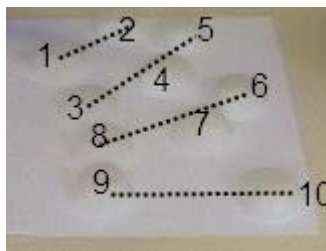


Figure 7 : Audrey GS (réussite)

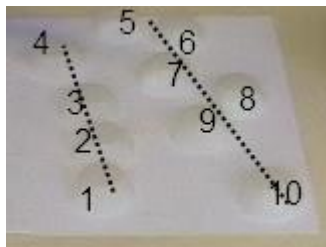


Figure 8 : Alexandre CP (réussite)

Cette organisation de l'espace qui nous est familière : l'organisation en ligne (Audrey) et en colonne (Alexandre), est en effet propre à la « raison graphique » (Goody, 1979) : elle organise l'écriture. Cette organisation est efficace car elle s'appuie sur un réseau de quasi-parallèles que nous avons appris à distinguer et à reproduire en lien avec l'écriture et plus généralement la littératie (Joigneaux, Laparra, & Margolinas, 2012). En s'appuyant sur la Figure 7, il est facile de voir d'où peuvent émerger certaines erreurs : le point 5, par exemple, pourrait être aussi bien dans une ligne 1, 2, 5 que dans la ligne 3, 4, 5 ; le point 8 peut être oublié car confondu avec le point 3 (déjà traité), etc. C'est ce que nous constatons dans certaines observations d'élèves en échec avec des procédures « lignes ». En effet, il ne s'agit que de quasi-parallèles, qui ne sont de plus pas matérialisées. Néanmoins, l'énumération en ligne ou en colonne est d'une façon générale la clé de la réussite dans ce genre de situation. Il s'agit là du premier lien entre énumération et entrée dans l'écrit, d'autres liens vont être établis maintenant.

9 Énumération en « français »

En travaillant avec Marceline Laparra sur des séances considérées par le professeur comme relevant du français, nous nous sommes aperçues que des connaissances d'énumération et plus exactement la non disponibilité de ces connaissances, intervenaient très fortement dans la réussite ou l'échec, à l'insu du professeur.

Voici un exemple assez typique, qui de plus va nous permettre d'évoquer la complexité des énumérations, qui sont très souvent imbriquées.

En grande section de maternelle, les élèves ont à remplir la fiche de la Figure 9.

T R A M P O L I N E

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Figure 9 : une fiche de grande section de maternelle

Ils ont à disposition un alphabet en écriture scripte, un récipient et des ciseaux (Figure 10) et un crayon.



Figure 10 : le matériel à disposition

Ils peuvent également se servir d'une règle de correspondance des graphies (Figure 11), qui est d'usage habituel dans cette classe (nous sommes au mois d'avril). Le mot « trampoline » écrit sur la fiche fait partie d'un album étudié dans la classe, les élèves l'ont déjà rencontré (cependant, rappelons qu'ils ne savent pas encore lire).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
à	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

Figure 11 : règle de correspondance des graphies

La consigne donnée par la maîtresse est la suivante : « Vous devez découper les lettres scriptes qui sont sur cette bande et les déposer dans la boîte. Vous allez coller les lettres dans les cases de la fiche pour écrire le mot qui correspond au modèle. Ensuite vous devez écrire ce mot au crayon en écriture cursive sur la ligne.¹⁵ ».

Suivons pas à pas ce que doivent faire les élèves et les situations qui sont ainsi générées. Ils doivent d'abord découper la bande des lettres pour obtenir des lettres-étiquettes (Figure 12).



Figure 12 : les lettres-étiquettes dans la boîte

Pour réussir à coller les étiquettes au bon endroit, les élèves doivent réaliser simultanément deux énumérations : l'énumération de la configuration fixe (en ligne) du mot TRAMPOLINE et l'énumération de la configuration modifiable dans lettres-étiquettes – de plus, s'ils n'ont pas mémorisé les correspondances entre écriture majuscule bâton et écriture scripte, ils doivent également énumérer le tableau de correspondance des graphies (je n'analyserai pas cette énumération ici). Il y a deux difficultés principales : trouver un moyen de garder en mémoire la lettre en cours de recherche dans le mot-modèle ; organiser l'énumération des lettres-étiquettes dans la boîte. Concernant cette dernière tâche, la plupart des élèves

¹⁵ Il ne s'agit pas d'une transcription de la consigne telle qu'elle a été donnée aux élèves.

saisissent une étiquette, l'examine, éventuellement en la comparant avec la lettre recherchée sur le mot-modèle, parfois en utilisant le tableau de correspondance et, si l'étiquette ne convient pas... la remet dans la boîte. Ils mélangent ainsi les étiquettes non encore traitées et l'étiquette traitée, ce qui allonge énormément le temps de recherche de la bonne étiquette, car ils finissent par retomber – sans s'en rendre compte – sur la même étiquette-lettre.

De fait, beaucoup d'élèves se trompent et avancent très lentement dans la partie de la tâche qui concerne les étiquettes scriptes.

Par contre, contrairement à ce qu'avait anticipé la maîtresse qui, du point de vue de la graphie, considère qu'il y a une hiérarchie de la difficulté entre écriture majuscule bâton, écriture scripte et écriture cursive, les élèves réussissent beaucoup plus facilement la transcription en écriture cursive. Du point de vue de l'énumération, la difficulté est diminuée, puisqu'il ne reste que l'énumération du mot-modèle et éventuellement du tableau des graphies.

Bien entendu, il pourrait y avoir bien d'autres causes à la lenteur des élèves avec les étiquettes, mais il se trouve qu'une élève, Angélique, qui n'écoute jamais bien les consignes et commence les activités toujours en retard, a oublié qu'il fallait d'abord découper toute la bande en mots-étiquettes (elle commence le travail au moment où les autres élèves ont déjà fini le découpage des lettres). Elle se sert donc directement de la bande pour reconstituer le mot-modèle en écriture scripte (Figure 13).



Figure 13 : le travail d'Angélique

La difficulté d'énumération est là aussi diminuée : au début, Angélique n'a qu'à énumérer la bande en ligne pour déterminer la bonne lettre à découper. Au fur et à mesure du découpage, la difficulté augmente, mais reste tout de même bien inférieure (du point de vue de l'énumération) au traitement de 26 étiquettes (à la fin Angélique obtient seulement 5 morceaux de bande, sans compter les étiquettes collées au fur et à mesure). A la grande surprise de la maîtresse (mais sans surprise pour l'observateur), Angélique, pour une fois, finit avant tout le monde et rend une fiche impeccable...

À l'école primaire, ces situations dans lesquelles l'énumération intervient dans les difficultés des élèves sans que le professeur n'ait conscience de l'origine de ces difficultés sont très fréquentes (Gilbert, 2012).

10 Retour sur des « mathématiques »

Comme dernier exemple, je vais décrire maintenant sur une observation en classe de grande section de maternelle, au mois de mai. Plusieurs observateurs¹⁶ ont pu suivre quelques élèves et filmer leurs gestes pendant la réalisation de la tâche demandée. Sur la Figure 14, on peut voir une fiche complétée par un élève.

¹⁶ Catherine Aurand, Claire Margolinas, Bruno Mastellone, les transcriptions de cette séance ont été réalisées, élève par élève, par Judith Margolinas.

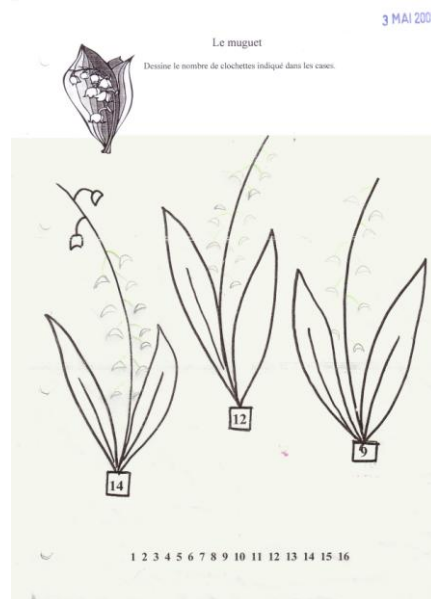


Figure 14 : le muguet

Dans la classe que nous avons observée (plusieurs fois durant l'année 2004-2005, dans le cadre du réseau RESEIDA, voir note 9), les élèves ne savent pas par cœur à quel nombre correspondent les écritures 14 et 12 (la plupart savent que 9 correspond à neuf), cette reconnaissance ne faisant pas partie des objectifs de la maîtresse¹⁷. C'est pourquoi la maîtresse a proposé une bande numérique au bas de la fiche, bande que les élèves peuvent énumérer en récitant la comptine. Quand ils énumèrent bien les nombres écrits de gauche à droite (ce qui n'est pas le cas pour l'une d'entre eux) et qu'ils énumèrent bien les nombres un à un en prononçant la comptine (que tout le monde connaît parfaitement), les élèves peuvent ainsi savoir que « 14 » correspond à « quatorze ». C'est ce que la plupart des élèves commencent par faire.

Sachant donc qu'il faut en dessiner quatorze, les élèves commencent à dessiner des fleurs, en essayant de respecter au mieux le modèle (deux fleurs sont déjà dessinées), mais il leur est impossible de compter les fleurs au fur et à mesure qu'ils les dessinent. Souvent ils en dessinent quelques unes (entre deux et quatre) puis s'arrêtent, attendent l'intervention d'un adulte (maîtresse titulaire ou assistante d'éducation) ou bien comptent les fleurs déjà dessinées. Sauf qu'entre temps ils ont oublié combien de fleurs ils devaient dessiner, ils doivent donc à nouveau énumérer la bande numérique pour retrouver le but (quatorze fleurs). Parfois, certains élèves prennent conscience qu'ils pourraient énumérer les deux collections (fleurs sur la tige et bande numérique) en même temps et pointent simultanément avec deux mains les deux collections (une fleur / un nombre écrit sur la bande). Le travail est très long (entre dix et vingt minutes pour les deux premiers muguets) et très hésitant (beaucoup de fleurs gommées puis redessinées). De plus, l'énumération des fleurs sur la branche de muguet est un peu compliquée s'ils ont (comme sur la Figure 14) dessiné les fleurs sur les deux côtés de la branche, comme c'est le cas pour les deux premières fleurs imprimées sur la fiche – certains élèves trouvent d'ailleurs une solution qui montre qu'ils cherchent à résoudre, entre autres, ce problème d'énumération (Figure 15).

¹⁷ En 2008, les programmes de l'école maternelle ont été modifiés et cette lecture est maintenant inscrite dans les compétences à acquérir en fin d'école maternelle. Ce n'était pas le cas en 2005, de plus, la maîtresse pouvait estimer que, pour des élèves faibles d'une classe de ZEP, ceci n'était pas prioritaire.

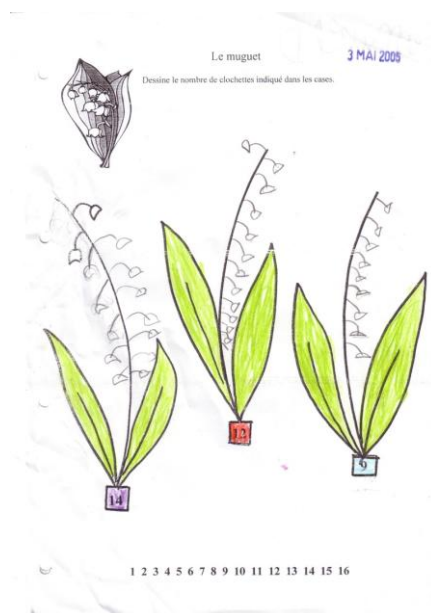


Figure 15 : évolution du dessin des fleurs qui facilite l'énumération

Une stratégie de résolution de ce problème existe, qui repose sur la prise de conscience (a) de l'impossibilité de mémoriser les arrêts successifs dans une suite orale (b) de l'importance de la fonction bureaucratique de l'écrit (Goody, 1986) dans l'organisation de cette tâche. En effet, il serait possible pour tous les élèves de dessiner d'abord rapidement (à un rythme compatible avec celui de l'énoncé de la comptine) le bon nombre de petits traits correspondant aux fleurs, fleurs qui pourraient être alors tranquillement dessinées dans un deuxième temps. Si personne n'y pense (ni les élèves, ni l'aide éducatrice, ni la maîtresse), c'est sans doute d'une part que les problèmes d'énumération ne sont pas identifiés mais d'autre part que la collection intermédiaire schématisée n'a aucun statut comme connaissance, le nombre oral dominant toutes les activités numériques (Laparra & Margolinas, 2009).

11 Conclusion concernant l'énumération

L'énumération intervient dans de très nombreuses situations, considérées ou non comme relevant des mathématiques. Les deux types d'énumération correspondant aux macro-variables (configurations modifiables ou non) se rencontrent parfois isolément et souvent simultanément. Dans tous les cas de nombreux élèves sont en difficulté dès que des connaissances d'énumération sont en jeu en situation, alors que les professeurs n'identifient pas ces difficultés comme ayant quelque chose en commun.

De ce fait, les connaissances d'énumération que les élèves rencontrent en situation et qui peuvent parfois évoluer en interaction avec le milieu (comme dans la Figure 15) restent implicites : elles ne sont pas reconnues comme utiles, et encore moins formulée, validée, formalisée, mémorisée, etc. Elle ne participe donc pas à un processus d'institutionnalisation. Ces connaissances non instituées sont éphémères, personnelles et finalement très différenciatrices.

III - LE TRAVAIL DU PROFESSEUR

1 Position du problème

Brousseau (1984) avait déjà constaté que :

« Les professeurs ne disposent pas de situations d'enseignement qui leur permettraient de faire développer par leurs élèves des savoir-faire, des anticipations, des stratégies dans des rapports

expérimentaux avec le milieu. Ils ne disposent pas non plus de ce fait de moyens de négocier avec eux des contrats didactiques raisonnables à propos de ces questions ni même d'évoquer avec eux ce genre de difficultés » (p.5)

Depuis 1984, la situation que décrit Brousseau a changée, en effet les travaux de Briand et de ses collaborateurs, de 1993 à 2004 (déjà cités), ont permis de construire de telles situations d'enseignement.

2 L'énumération comme savoir

En reprenant le schéma des savoirs et des connaissances (Figure 1), nous pouvons décrire l'historique du travail sur l'énumération. En pointant une connaissance qui réunissait un ensemble de difficultés constatées dans le domaine du dénombrement, Brousseau a amorcé le processus d'institutionnalisation : reconnaissance d'une connaissance utile, formulation, formalisation (en particulier définition), mise à l'épreuve, reconnaissance d'une valeur culturelle et sociale. Il a donc institutionnalisé l'énumération comme un savoir dans l'institution « didactique des mathématiques ».

Partant de ce savoir, Briand a montré qu'il existe des situations adidactiques issues de la situation fondamentale de l'énumération, et qu'il est donc possible d'apprendre des connaissances d'énumération. Il a donc montré qu'un processus de dévolution du savoir « énumération » était viable dans certaines situations.

Néanmoins, même si certains documents ministériels à la disposition de tous les enseignants (Emprin & Emprin, 2010, pp. 27-29) font référence à des situations inspirées des travaux de Briand, je n'ai rencontré en classe aucune situation inspirée de celles de Briand, même chez des maîtres-formateurs et même chez ceux dont je sais qu'ils se servent par ailleurs de certaines situations du cédérom (Briand, et al., 2004).

Tout se passe comme si ce savoir restait « transparent » pour les professeurs (Margolinas & Laparra, 2011), comme s'ils passaient à côté sans le voir, en quelque sorte. Pourtant, les professeurs ont eux-mêmes des connaissances d'énumération, et ils connaissent (en situation) les difficultés d'énumération.

3 Une observation en classe

Revenons au problème des ballons, observé en classe de grande section. La séance a lieu dans une salle de motricité, il s'agit d'une grande salle toute en longueur, les élèves qui sont réunis en deux équipes pour compter les ballons sont à un bout de cette salle. La maîtresse arrête l'élève qui compte les ballons « ça ne va pas » puis remet tous les ballons dans le bidon initial. Sans parler, elle traverse la salle et va chercher un bidon vide, puis elle revient avec ce bidon, qu'elle pose à côté du bidon contenant les ballons. Elle aide alors l'élève à compter les ballons, en prenant la main de l'élève pour qu'il dépose chaque ballon déjà compté dans le bidon vide. L'élève n'a plus qu'à saisir un ballon et compter.

La maîtresse sait bien entendu, en tant qu'adulte, que le dénombrement sera faux si des ballons retombent dans le bidon, elle sait aussi ce qu'il est possible de faire dans une telle situation puisqu'elle va chercher un bidon qui est une bonne solution pour servir d'espace pour les ballons déjà traités : elle manifeste des connaissances d'énumération en situation.

Néanmoins, elle ne produit aucun signe qui permettrait aux élèves d'interpréter ce qu'elle fait et d'en reconnaître l'utilité, en particulier, elle ne formule rien en traversant la salle à l'aller et au retour, alors qu'elle en aurait eu la possibilité sans perte de temps pour sa séance. Par exemple, elle aurait pu dire « je vais chercher un bidon pour mettre les ballons déjà comptés ». Elle aurait pu aussi (presque dans le même temps), au lieu de dire « ça ne va pas », dire « un ballon déjà compté est tombé dans le bidon où sont les ballons encore à compter, ça ne va pas ».

Par ailleurs, quand elle fait recommencer le dénombrement des ballons à l'élève, elle prend en charge l'énumération par le geste, alors que c'est ce qui posait problème à l'élève, ne lui laissant en charge que le comptage, alors que c'est ce qu'il savait déjà faire. Imaginons un instant que l'élève se soit trompé dans le comptage (en disant quatre six cinq, par exemple), elle n'aurait sans doute pas fait pour autant le comptage à la place de l'élève, car elle aurait eu le sentiment de faire à sa place ce qui était un objet d'enseignement légitime (la comptine pour dénombrer). Elle lui aurait peut-être montré (quatre cinq six) mais elle aurait ensuite exigé de l'élève qu'il réalise lui-même le dénombrement.

En ne décrivant pas ses actions et en agissant à la place de l'élève, cette maîtresse nous montre que l'énumération comme savoir n'est pas visible depuis la place qu'elle occupe dans l'institution scolaire, alors même qu'elle reconnaît implicitement l'énumération comme connaissance en situation.

4 La « manipulation » : une catégorie professionnelle qui fait obstacle à l'énumération ?

La « manipulation » est par contre une catégorie disponible dans la profession: un savoir sur les situations, dont l'intérêt peut être d'attirer l'attention sur des situations différentes, comme « donne moi six [vraies] pommes » et « dessine six pommes ».

L'analyse de la situation du muguet est révélatrice d'une grande différence entre ces deux situations, parce que l'énumération des six vraies pommes, comme celle que l'on aurait pu faire de quatorze vraies fleurs de muguet, est produite sur des collections à configurations modifiables, sur des objets assez faciles à énumérer (même si les pommes peuvent parfois rouler... et donc compliquer l'énumération). L'énoncé de la comptine permet le comptage de ces vrais objets parce qu'elle peut se faire simultanément avec l'énumération alors que ce n'est pas le cas si l'on dessine les pommes (surtout si on le fait avec un grand luxe de détail et de couleurs).

Malheureusement, la « manipulation » ne permet pas de distinguer les situations des unes des autres dès qu'il y a bien des objets à traiter. Ainsi, si la plupart du temps quand on « manipule » il s'agit de collections à configurations modifiables, ce n'est pas toujours le cas : l'élève manipule bien les chapeaux alors que dans cette situation la configuration n'est pas modifiable.

On peut se demander si la « manipulation » n'occupe pas écologiquement la niche que pourrait occuper l'énumération (Artaud, 1997) dans les savoirs de l'institution « profession enseignante ».

5 Énumération et disciplines scolaires

J'ai déjà montré sur un exemple (II - 9) que l'énumération intervenait en français, mais aussi que certaines fonctions de l'écrit permettaient de décrire des procédures efficaces d'énumération (à propos des muguets). Autrement dit, j'ai déjà commencé à brouiller les frontières des disciplines scolaires...

En effet, l'énumération, découverte et institutionnalisée en didactique des mathématiques, même si elle peut se définir mathématiquement, intervient au moins autant dans des exercices scolaires de français que de mathématiques. Les exemples ne manquent pas, l'un d'entre eux me semble particulièrement éclairant pour comprendre pourquoi une telle description n'est pas courante. Voici une fiche observée à l'école maternelle en grande section (Figure 16 : fiche chocolat).

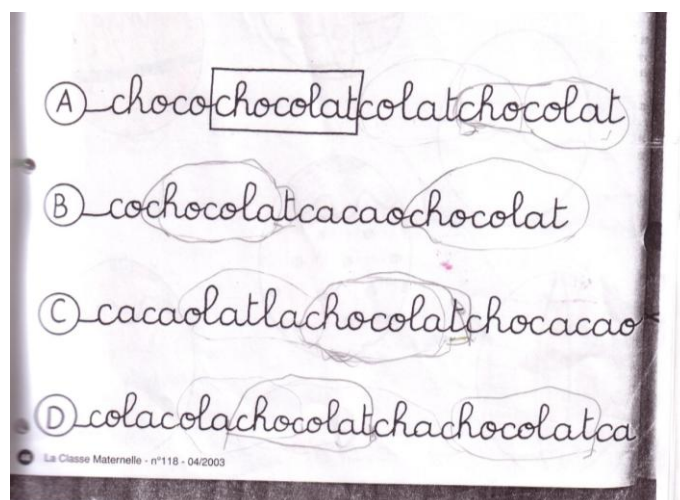


Figure 16 : fiche chocolat (grande section de maternelle)

L'observateur adulte a du mal à comprendre en quoi la reconnaissance du mot « chocolat » dans cette fiche est un problème d'énumération, car il sait lire et non seulement reconnaît le mot « chocolat » mais également des mots (première et troisième lignes « choco », « cola », deuxième et troisième lignes « cacao ») et quelques « syllabes » jouant le rôle de distracteur (deuxième ligne « co », troisième ligne « lat » et « la », quatrième ligne « cha » et « ca »). Notre capacité en lecture est telle que nous aurons même tendance à accepter plus facilement « colat » comme un mot bizarre plutôt que de considérer cette suite de lettres comme « cola » et « t » (première ligne).

L'élève de grande section de maternelle, même s'il sait reconnaître des lettres et identifier certains mots étudiés (ce qui peut être le cas de « chocolat » au moment où cette fiche est donnée), ne sait pas lire. Il est dans une situation que nous pouvons essayer d'évoquer avec la figure suivante (Figure 17).

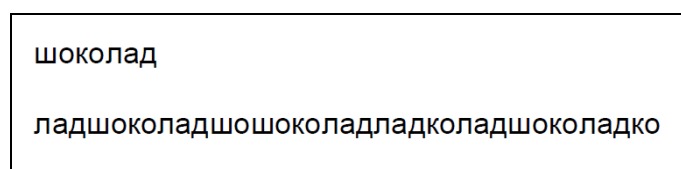


Figure 17 : fiche chocolat en russe

Pour réussir l'exercice de cette fiche, il devient visible à l'observateur que plusieurs stratégies sont possibles qui, sans donner de l'intelligibilité aux signes mis en ligne, permettent de retrouver la séquence modèle : rechercher la première lettre du modèle puis, si elle est trouvée, la seconde, etc. ou bien rechercher une lettre « qui dépasse » (la dernière) puis procéder de la droite vers la gauche, etc.

S'agit-il de « mathématiques » de « français » ? L'énumération, tout d'abord rencontrée comme une connaissance nécessaire au dénombrement, est aussi une connaissance nécessaire à la lecture. Les délimitations usuelles des disciplines scolaires ont besoin d'être reconfigurées pour correspondre aux connaissances en jeu en situation.

6 Enseigner l'énumération ?

Si « enseigner » correspond au double processus de dévolution et d'institutionnalisation, le professeur, pour investir ces processus, doit pouvoir partir d'un savoir pour développer des connaissances qui feront plus tard fonction de savoirs. Mais qui dit savoir dit institution, or l'institution « didactique des mathématiques » dans laquelle le savoir « énumération » a été produite et institutionnalisée n'est ni très visible depuis la position du professeur ni très légitime.

Même avec des professeurs formés ou informés (en formation initiale ou continue) de l'intérêt de l'énumération pour mieux comprendre certaines difficultés des élèves et pour mieux les résoudre, il paraît difficile d'enclencher le processus long et coûteux que représenterait un enseignement complet de l'énumération par adaptation (Brousseau, 1998) alors même que, comme Briand l'a montré, il est possible.

Il est possible que d'autres solutions existent, accessibles aux professeurs qui auraient une bonne connaissance de l'énumération. En effet, puisque l'énumération intervient dans un très grand nombre de situations scolaires¹⁸, il doit être possible au professeur de prendre le temps (souvent assez court) nécessaire pour établir des liens entre ces situations. Pour cela, il faut reconnaître la nature des situations d'énumération (configurations modifiables et non modifiables), et identifier les opérations élémentaires à réaliser : utiliser les configurations de l'espace pour faire des partitions, parcourir les collections à organisation fixe en ligne ou en colonne.

Par exemple, dans le cas du travail (très courant) de reproduction d'un modèle, comme dans le paragraphe II - 9, il faut distinguer (a) l'énumération des lettres du mot TRAMPOLINE, qui nécessite de garder la mémoire du parcours du mot (b) l'énumération des étiquettes-lettres de l'alphabet découpé.

Concernant la première énumération, le mot est par nature une ligne, qui est parcourue de gauche à droite, cette énumération est donc très simple. La seule difficulté consiste à repérer la lettre en cours de traitement. L'usage de l'écrit (fonction bureaucratique) dans ce repérage fait partie des procédures qu'il est important d'introduire de façon régulière dans la classe : barrer proprement les lettres déjà traitées, faire un point sous les lettres déjà traitées, etc. Dans le cas de cet exercice, si les élèves reconnaissent facilement les différentes graphies de chaque lettre, il est possible que cela ne soit pas nécessaire : on en est à la lettre qui n'a pas encore été posée dans une case juste en dessous.

Concernant la seconde énumération, il s'agit, comme toujours avec les configurations modifiables, d'insister sur les partitions opérées. La boîte peut être le réservoir des étiquettes non encore traitées, mais dans ce cas il faut déposer les étiquettes déjà traitées sur la table. Ce traitement étant répété pour chaque nouvelle lettre du modèle, il faut réunir à nouveau les étiquettes non collées dans la boîte une fois une étiquette trouvée (et ainsi de suite). C'est sans doute ce dernier point qui est le plus délicat, car il s'agit des mêmes objets dont le statut change. Si les partitions entre objets traités et non traités sont d'usage courant dans la classe, cet usage et un lexique stable peuvent permettre aux élèves de comprendre que l'organisation des étiquettes n'est pas une particularité de cette situation-là mais s'inscrit dans un cadre plus large.

Bien entendu, le professeur peut considérer que la partition objets traités / non traités pourrait faire l'objet d'une situation à part dans laquelle cette connaissance interviendrait de façon raisonnablement isolée (comme dans la situation des jetons marqués, par exemple), autrement dit, il peut savoir qu'il dispose de situations comme un outil à sa disposition, même si l'énumération comme savoir n'est pas visé officiellement.

Dans les cas des situations à configurations non modifiables, le travail systématique sur les lignes et les colonnes étant la ressource la plus importante, ces configurations peuvent être renforcées dans de nombreuses situations. Voici par exemple ce que j'ai pu observer chez Annie Cariat, maître-formatrice qui travaille depuis plusieurs années avec Olivier Rivière et

¹⁸ Eva Gilbert (2012) avait ainsi fait le « pari » qu'elle serait capable de rencontrer des difficultés d'énumération dans n'importe quelle situation de classe observée (quelque soit la discipline scolaire) puis de conseiller les professeurs sur ces difficultés, pari risqué, qu'elle a toujours réussi à tenir (8 observations de classes de la maternelle au CM2).

moi-même. Elle distribue aux élèves une « boîte d'œufs » (Figure 18) et leur demande d'aller chercher dans un panier éloigné juste ce qu'il faut d'œufs pour remplir complètement la boîte. Les élèves (grande section de maternelle), comptent les trous pour savoir combien d'œufs aller chercher. Depuis qu'elle a conscience de l'importance de l'énumération, elle prend le temps d'insister auprès de chaque élève (en atelier dirigé) sur la nécessité d'organiser l'énumération des trous, soit en ligne, soit en colonne, ce qui est bien entendu favorisé par la forme du plateau d'œufs. Les occasions ne manquent pas de renforcer cet apprentissage.



Figure 18 : boîte d'œufs

Pour être à même de réaliser ce travail, le professeur doit donc :

- Dans les situations à configurations modifiables
 - Distinguer à tout moment ce qui est déjà traité (compté, etc.) et ce qui n'est pas encore traité.
- Dans les situations à configurations non modifiables
 - Connaître les propriétés de l'espace graphique (lignes, colonnes) et leur usage pour savoir ce qui est déjà traité et ce qui n'est pas encore traité.

D'une façon générale, il doit prendre en considération les conditions effectives du travail de l'élève : le milieu de la situation de l'élève.

IV - CONCLUSION : LA MATERNELLE ET LES SAVOIRS

En guise de très courte conclusion, revenons à la question initialement posée : « Des savoirs à la maternelle, oui mais lesquels ? ». Je n'ai pas cherché à répondre d'une façon générale à cette question, puisque je n'ai traité que du cas particulier de l'énumération qui, en tant que savoir, présente la particularité de ne pas exister dans l'institution de production et d'institutionnalisation des mathématiques de référence « les mathématiciens ».

De ce fait, j'ai d'abord dû montrer ce que sont les connaissances d'énumération, comment en parler, comment définir ces connaissances, ce qui conduit à une première institutionnalisation d'un savoir d'énumération. Pour cela, je suis partie de difficultés très facilement observables.

Je me suis ensuite interrogée sur l'existence de situations d'énumération indépendantes (ou suffisamment indépendantes) d'autres connaissances. Je n'ai pas pour autant considéré ces situations issues de l'ingénierie comme étant directement les outils du professeur dans la transmission de l'énumération, et j'ai alors cherché quelles étaient les catégories descriptives qui pouvaient permettre au professeur d'accéder à une intelligibilité des nombreuses situations dans lesquelles les connaissances d'énumération interviennent. De telles catégories, associées à la connaissance des situations issues de l'ingénierie, me semblant permettre de « négocier des contrats didactiques raisonnables » (en référence à la citation de Guy Brousseau, 1984, qui se trouve dans le paragraphe II - 1).

Il me semble que nous sommes typiquement dans le cas de connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (Ball, Thames, & Phelps, 2008 ; Clivaz, 2011), qui constituent une catégorie de connaissances du professeur dont l'énumération n'est qu'un exemple paradigmatique, dans la mesure où cette connaissance de l'énumération ne peut pas être confondue avec une « connaissance mathématique commune » (Id.).

D'autres savoirs mathématiques plus ou moins transparents, correspondant ou non à des savoirs reconnus dans l'institution des mathématiques, sont sans doute à mettre en évidence à la maternelle, le nombre comme mémoire de la position (qui est pourtant dans les programmes) en est sans doute un (voir Margolinas & Wozniak, 2012, chapitre 2 et la thèse d'Agnès Surjous-Malet, en cours).

V - BIBLIOGRAPHIE

- Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In M. Bailleul (Ed.), *IXe École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139). Houlgate: IUFM de Caen et ARDM
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407
- Briand, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections*. Université de Bordeaux I, Bordeaux, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00494623>.
- Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 41-76
- Briand, J., Lacave-Luciani, M.-J., Harvouët, M., Bedere, D., & Goua de Baix, V. (2000). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N, Numéro spécial maternelle, approche du nombre*, T1, 123-138
- Briand, J., Loubet, M., & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris: Hatier.
- Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. *La mathématique à l'Ecole Élémentaire* (pp. 428-442). Paris: APMEP, http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Processus_de_mathematisationVO.pdf.
- Brousseau, G. (1978). L'observation des activités didactiques. *Revue Française de Pédagogie*, 45, 130-140, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515106>.
- Brousseau, G. (1984). *L'enseignement de l'énumération*. Paper presented at the International Congress on Mathematical Education. from <http://guy-brousseau.com/2297/1%E2%80%99enseignement-de-1%E2%80%99enumeration-1984/>
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Clivaz, S. (2011). *Analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de doctorat en sciences de l'éducation, Faculté des sciences de l'éducation, Genève, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00626935>.
- Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(2-3), 221-270
- Douglas, M. (2004). *Comment pensent les institutions* (A. Abeillé, Trans.). Paris: La découverte.
- Emprin, F., & Emprin, F. (2010). Premières compétences pour accéder au dénombrement. In J.-L. Durpaire & M. Mégard (Eds.), *Le nombre au cycle 2* (pp. 23-34). Poitiers: Scérén
- Gilbert, E. (2012). *L'impact des entretiens de conseil pédagogique sur les modifications de pratique des maîtres dans un domaine particulier : l'énumération*. Master International Francophone des Métiers de la Formation, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand
- Goody, J. (1979). *La raison graphique* (J. Bazin & A. Bensa, Trans. 1977 ed.). Paris: Les éditions de minuit.
- Goody, J. (1986). *La logique de l'écriture. Aux origines des sociétés humaines*. Paris: Armand Colin.
- Joigneaux, C., Laparra, M., & Margolinas, C. (2012). *Une dimension cachée du curriculum réel de l'école maternelle: la littérature émergente?* Actes de Colloque sociologie et didactiques, Lausanne, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00738656>.
- Laparra, M., & Margolinas, C. (2009). Le schéma: un écrit de savoir? *Pratiques*, 143-144, 51-82
- Laparra, M., & Margolinas, C. (2010). Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. *Pratiques*, 145-146, 141-160, http://www.pratiques-cresef.com/p145_la1.pdf.
- Margolinas, C. (2010). Recherches en didactiques des mathématiques et du français: par-delà les différences. Table ronde - Recherches et didactique. *Pratiques*, 145-146, 21-36
- Margolinas, C., & De Redon, M.-C. (2008). Connaissances naturalisées dans le champ du numérique à l'articulation école maternelle / école primaire. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques* (pp. cédérom). Grenoble: La pensée sauvage

- Margolinas, C., & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires* (pp. 19-32). Rennes: Presses universitaires de Rennes
- Margolinas, C., & Rivière, O. (2008). *Les dessous du numérique*. Actes de XXXVème colloque national des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques, Bombannes
- Margolinas, C., & Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique*. Bruxelles: De Boeck.
- Margolinas, C., Wozniak, F., Canivenc, B., De Redon, M.-C., & Rivière, O. (2007). Les mathématiques à l'école ? Plus complexe qu'il n'y paraît ! Le cas de l'énumération de la maternelle... au lycée *Bulletin de l'APMEP*, 471, 483-496
- Neyret, R. (1995). *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants: nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts de Formation des Maîtres*. Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I, Grenoble
- Perrin-Glorian, M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développements, perspectives. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavnignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 97-147). Grenoble La Pensée Sauvage

VI - ANNEXE

Vous trouverez dans le cédérom les clips vidéos tournés dans le cadre du projet Démathé de l'INRP montrés lors de la conférence (annexes 1, 2 et 3) ou cités dans le texte (annexes 4 et 5).

1 Annexe 1

Clip de la consigne de la situation « les sucres »

2 Annexe 2

Clip de l'échec d'une élève de CE1 (Olivia) avec 15 sucres

3 Annexe 3

Clip de la réussite d'une élève de MS (Jena) avec 11 sucres

4 Annexe 4

Clip de la réussite d'une élève de GS (Audrey) avec 15 sucres (la vidéo démarre alors que les 5 sucres à la droite de l'élève ont déjà été énumérés)

5 Annexe 5

Clip de la réussite d'un élève de CP (Alexandre) avec 15 sucres (la vidéo démarre alors que les 5 sucres à la droite de l'élève ont déjà été énumérés).