Minimisation du coût de setup pour des lignes d'usinage multi-produits

Sergey Kovalev, Xavier Delorme, Alexandre Dolgui

9e *Conférence Internationale de Modélisation, Optimisation et SIMulation - MOSIM'12*
06 au 08 juin 2012 - Bordeaux - France
« Performance, interopérabilité et sécurité pour le développement durable »

MINIMISATION DU COÛT DE MISES EN SERVICE POUR DES LIGNES D'USINAGE MULTI-PRODUITS

Sergey KOVALEV, Xavier DELORME, Alexandre DOLGUI

École Nationale Supérieure des Mines, FAYOL-EMSE, CNRS UMR 6158, LIMOS
158, cours Fauriel
42023 Saint-Étienne cedex 2 - France
kovalev@emse.fr, delorme@emse.fr, dolgui@emse.fr

RÉSUMÉ : *Le problème étudié correspond à la configuration optimale d'une ligne d'usinage destinée à la production de f types de pièces usinées. Il s'agit d'une séquence de stations, sur lesquelles les opérations d'usinage sont exécutées en parallèle. Chaque pièce à usiner requiert l'exécution un ensemble d'opérations spécifiques dépendant de son type. Le nombre total d'opérations par station ne peut pas excéder une borne supérieure donnée. Les pièces sont transportées le long des stations dans la même direction l'une après l'autre. S'il y a au moins une opération affectée à une station qui correspond au type de pièce en production, alors cette station est mise en service. Les coûts de préparation liés à ces mises en service dépendent du type de pièce et ils apparaissent en raison de ressources supplémentaires requises pour le traitement d'une pièce sur des stations. Il y a deux critères : la minimisation du nombre de stations et la minimisation du coût total de mises en courses. Une solution du problème implique le nombre de stations et l'affectation des opérations à ces stations. Les propriétés d'une solution optimale ont été établies. En s'appuyant sur ces propriétés, des algorithmes optimaux ont été développés pour les cas $f = 2$, $f = 3$, et un f arbitraire.*

MOTS-CLÉS : *équilibrage de lignes, ligne d'usinage multi-produit, mises en course, optimisation combinatoire*

1 INTRODUCTION

Nous étudions un problème d'optimisation pour lequel une ligne d'usinage qui se compose de plusieurs stations doit être configurée pour la production de f types de pièces usinées, $f \geq 2$. Soit $F = \{1, \dots, f\}$. Un ensemble d'opérations donné N_t est affecté à chaque pièce du type $t \in F$. Des ensembles différents N_t peuvent contenir des opérations communes. Notons $\mathcal{N} := \cup_{t=1}^{f} N_t = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble de toutes les opérations nécessaires. Le nombre d'opérations sur chaque station est limité par une borne supérieure r. Chaque opération doit être exécutée exactement une seule fois. Les pièces à usiner sont transportées le long des stations dans la même direction l'une après l'autre, et une station est mise en service si au moins une opération doit être exécutée sur cette station. Un coût de mises en service a_t est associé au type de pièce t, $t = 1, \dots, f$. Les coûts de mises en service apparaissent en raison de ressources supplémentaires requises pour le commencement et la terminaison du traitement d'une pièce sur une station. Dans l'industrie les coûts de mises en service sont souvent liés aux opèrateurs qui effectuent les tâches comme le chargement, le positionnement, le déchargement et le nettoyage d'une pièce. En conséquence, ces coûts de mises en service ne dépendent pas du nombre d'opérations affectées à la station. Soit x_t le nombre de mises en service pour une pièce à usiner de type t, $t = 1, \dots, f$. Une solution du problème étudié implique le nombre de stations et l'affectation des opérations à ces stations. Le critère principal est la minimisation du nombre de stations et le critère secondaire est la minimisation du coût total de mises en service, $a_1x_1 + \cdots + a_fx_f$. Notons ce problème comme P.

Le problème P appartient à la classe des problèmes d'équilibrage des lignes d'assemblage pour laquelle la minimisation du temps de cycle de production et la minimisation du nombre des stations sont des critères courramment étudiés. Différents états de l'art sur les problèmes d'équilibrage des lignes d'assemblage ont été proposés par Erel et Sarin, 1998, Rekiek et al., 2002, et Boysen et al., 2007. Dans le problème P nous supposons que n'importe quelle opération peut être affectée à n'importe quelle station, toutes les opérations de même type sont executées simultanément sur la même station après la mise en service, et, s'il y a une borne supérieure sur le temps de cycle de production, alors le temps maximal d'exécution des opérations avec le temps maximal de mise en service ne dépasse pas cette borne. Ainsi, les temps d'exécution des opérations et les temps de mises en service sont omis de la formulation du problème. Une exécution parallèle des opérations est par exemple typique pour des boîtiers multibroches dans l'industrie mécanique, voir Dolgui et al., 2008, et Guschinskaya et Dolgui, 2009.

Remarquons que le nombre minimal de stations, m^*, peut être déterminé comme $m^* = \lceil \frac{n}{r} \rceil$, où $\lceil \cdot \rceil$ est l'opérateur d'arrondissement. Ainsi, le problème P se réduit à trouver une affectation d'opérations de l'ensemble $\mathcal{N}$ à m^* stations de sorte que le coût total de mises en service $a_1x_1 + \cdots + a_fx_f$ soit minimisé.

Dans la section suivante, les propriétés d'une solution optimale du problème P sont données. La section 3 décrit les algorithmes de résolution pour les cas $f = 2$, $f = 3$ et f arbitraire. La section 4 contient les conclusions et les perspectives de recherche future.

2 PROPRIÉTÉS D'UNE SOLUTION OPTIMALE

Considérons un sous-ensemble de types $S \subseteq F$. Nous appelons une opération i une *S-opération* si i est nécessaire pour les pièces de types $t \in S$ mais n'est pas nécessaire pour les pièces d'autres types. Dans le cas de deux types de pièces, il pourrait y avoir des {1}-opérations, {2}-opérations et {1,2}-opérations. Nous introduisons un ensemble de sous-ensembles de types $Z = \{S \in F \mid$ il existe au moins une S-opération$\}$. Il y a $|Z| \leq 2^f - 1$ où $|Z|$ est la cardinalité de Z.

Nous appelons une station une *station complète* si on lui affecte r opérations. Nous appelons une station une *S-station* si on lui affecte S-opérations. Ainsi, la même station peut être S-station et S'-station, $S \neq S'$, en même temps. Nous appelons une station une *S-station pure* si on ne lui affecte que des S-opérations.

En ayant une affectation d'opérations aux stations, notons $T(u)$ l'ensemble des types de pièces associés avec les opérations affectées à une station u, et $k_S(u)$ le nombre de S-opérations affectées à une station u. Par exemple, si on affecte à une station u deux $\{1,2\}$-opérations et trois $\{1,3\}$-opérations, alors $T(u) = \{1,2,3\}$, $k_{\{1,2\}}(u) = 2$ et $k_{\{1,3\}}(u) = 3$.

Considérons un ensemble $S \in Z$. Le lemme suivant établie une condition sous laquelle le nombre de S-stations non-complètes ou non-pures dans une solution optimale peut être réduit.

Lemme 1 *Une solution optimale avec $h \geq 2$ S-stations non-complètes ou non-pures peut être transformée à une solution optimale avec $h-1$ S-stations non-complètes ou non-pures s'il y a deux S-stations non-complètes ou non-pures v et u telles que $T(v) \subseteq T(u)$. La transformation n'affecte pas les stations pures complètes.*

Preuve: Remplaçons $\min\{k_S(u), r - k_S(v)\}$ S-opérations de la station u par le même nombre de non-S-opérations arbitraires de la station v. Ce remplacement n'augmente pas le nombre de mises en service parce qu'aucun nouveau type de pièce n'apparaît pas sur l'une des deux stations. Le nombre de S-stations non-complètes ou non-pures se réduit par un et les stations pures complètes ne sont pas affectées, comme exigé. ∎

Une application répétitive du Lemme 1 justifie le lemme suivant qui caractérise une solution optimale.

Lemme 2 *Il existe une solution optimale qui ne contient aucune paire de S-stations non-complètes ou non-pures v et u telles que $T(v) \subseteq T(u)$.*

En ayant l'ensemble $S \in Z$, soit n_S le nombre de S-opérations dans le problème P. Pour le cas de deux ou trois types de pièces, le Lemme 2 peut être utilisé pour prouver la propriété suivante qui décrit partiellement la structure d'une solution optimale.

Propriété 1 *Pour $f = 2$ et $f = 3$, il existe une solution optimale qui contient au moins $\lfloor \frac{n_S}{r} \rfloor$ S-stations pures complètes pour chaque $S \in Z$.*

Preuve: Considérons $S = \{1\}$. Observons que {1}-station non-pure quelconque est une S'-station pour $S' \in \Big\{\{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}$. Pour une solution optimale vérifiant le Lemme 2 et $S = \{1\}$, il y a au plus deux {1}-stations non-complètes ou non-pures, parce que parmi trois {1}-stations non-complètes ou non-pures quelconques il y a au moins deux stations v et u telles que $T(v) \subseteq T(u)$ ou $T(u) \subseteq T(v)$. Soient v et u les seules {1}-stations non-complètes ou non-pures. Si $k_1(v) + k_2(u) < r$, alors la solution optimale contient $\lfloor \frac{n_1}{r} \rfloor$ {1}-stations pures complètes. Si $k_1(v) + k_2(u) \geq r$, alors les opérations des stations v et u peuvent être ré-arrangées de sorte qu'une des stations devienne {1}-station pure complète et que l'optimalité de solution soit maintenue. La nouvelle solution contient $\lfloor \frac{n_1}{r} \rfloor$ {1}-stations pures complètes.

Considérons une solution optimale avec $\lfloor \frac{n_1}{r} \rfloor$ {1}-stations pures complètes. Soit $S := \{2\}$. Rappelons que la modification de solution dans le Lemme 1 n'affecte pas des stations pures complètes. Donc, il existe une solution optimale avec $\lfloor \frac{n_1}{r} \rfloor$ {1}-stations pures complètes qui vérifie le Lemme 2 pour $S = \{2\}$. Comme dans le cas $S = \{1\}$, nous en déduisons qu'il existe une solution optimale avec $\lfloor \frac{n_1}{r} \rfloor$ $\{1\}$-stations pures complètes et $\lfloor \frac{n_2}{r} \rfloor$ $\{2\}$-stations pures complètes. La même argumentation s'applique à tous les autres ensembles $S \in Z$ afin de compléter la preuve. ∎

Considérons le cas $f \geq 4$. En ayant une solution optimale, soit M_S le nombre maximal de S-stations non-complètes ou non-pures, parmi lesquelles il n'y a aucune paire de stations v et u telles que $T(v) \subseteq T(u)$. Le lemme suivant montre que M_S est borné par une fonction dépendant uniquement de f.

Lemme 3 *Il existe une solution optimale pour laquelle $M_S \leq U_f := 2^f - 2^{f/2+1} + 2$.*

Preuve: Soit u^0 une S-station non-complète ou non-pure arbitraire donnée. Il est clair que $M_S \leq U_f$, où U_f est une borne supérieure sur le nombre maximal de S-stations non-complètes ou non-pures (y compris la station u^0) parmi lesquelles il n'y a aucune station v telle que $T(v) \subseteq T(u^0)$ ou $T(v) \subseteq T(u^0)$. Notons $X := T(u^0)\backslash\{S\}$ et $x := |X|$, $1 \leq x \leq f$. Si $X = \phi$, alors pour S-station quelconque $v \neq u^0$, nous avons $T(u^0) \subseteq T(v)$. Supposons que $X \neq \phi$. Il y a $2^x - 1$ sous-ensembles propres de X (y compris l'ensemble vide et hors l'ensemble X) et $2^{f-x} - 1$ sur-ensembles propres de X (hors l'ensemble X) dans l'ensemble F de tous les types de pièces. Si un de ces sous-ensembles est égal à $T(v)\backslash\{S\}$ pour une S-station S-station non-complète ou non-pure $v \neq u^0$, alors soit $T(v) \subseteq T(u^0)$ soit $T(u^0) \subseteq T(v)$. Il y a au plus $2^f - 1$ candidats pour l'ensemble $T(v)\backslash\{S\}$ (le nombre de sous-ensembles de l'ensemble F moins un parce que l'ensemble S ne doit pas être compté ici). Donc, il y a au plus $2^f - 1 - (2^x - 1 + 2^{f-x} - 1) = 2^f - 2^x - 2^{f-x} + 1$ candidats pour un ensemble $T(v)\backslash\{S\}$ tel que $T(v) \not\subseteq T(u^0)$ et $T(u^0) \not\subseteq T(v)$. En comptant pour l'ensemble X, nous en déduisons qu'il y a au plus $g(x) := 2^f - 2^x - 2^{f-x} + 2$ S-stations non-complètes ou non-pures parmi lesquelles il n'y a aucune station v telle que $T(u^0) \subseteq T(v)$ ou $T(v) \subseteq T(u^0)$. La fonction $g(x)$ est maximisée au minimum de la fonction $2^x - 2^{f-x}$ pour $1 \leq x \leq f$. La dernière fonction est convexe et minimisée au point $x = f/2$. Ainsi, il existe une solution optimale pour laquelle $M_S \leq U_f = 2^f - 2^{f/2+1} + 2$. ∎

Les Lemmes 2 et 3 impliquent la propriété suivante qui donne une borne inférieure sur le nombre de S-stations pures complètes dans une solution optimale.

Propriété 2 *Pour $f \geq 4$, il existe une solution optimale qui contient au plus U_f S-stations non-complètes ou non-pures et au moins $m_S := \max\left\{0, \left\lceil \frac{n_S - U_f(r-1)}{r} \right\rceil\right\}$ S-stations pures complètes pour chaque $S \in Z$.*

Preuve: Seulement la deuxième partie de la propriété exige une explication. Il existe une solution optimale pour laquelle au plus $U_f(r-1)$ S-opérations sont affectées à des S-stations non-complètes ou non-pures. Ainsi, au moins $n_S - U_f(r-1)$ S-opérations sont affectées à des S-stations pures complètes et la deuxième partie de la propriété suit. ∎

3 ALGORITHMES

Cette section contient les descriptions des algorithmes pour les cas $f = 2$, $f = 3$ et $f \geq 4$ du problème P. Supposons, sans perte de généralité, que $a_1 \geq \cdots \geq a_f$.

3.1 Deux types de pièces

La Propriété 1 justifie l'algorithme de résolution suivant pour le cas $f = 2$.

Algorithme AE-2 (Arrondir et Énumérer pour le cas $f = 2$)

Étape 1. Affecter S-opérations aux $k_S := \lfloor \frac{n_S}{r} \rfloor$ S-stations complètes pures pour $S \in Z \subseteq \left\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\right\}$. Notons que les opérations affectées occupent le nombre minimal de stations.

Calculer les nombres de S-opérations non-affectées: $u_S = n_S - k_S r$ pour $S \in Z$. Notons que $u_S < r$ pour $S \in Z$. Donc, il y a au plus trois stations à remplir par des opérations non-affectées.

Étape 2. Si $\sum_{S \in Z} u_S \leq r$, alors affecter les opérations restantes à la même seule station.

Si $r < \sum_{S \in Z} u_S \leq 2r$, alors affecter des opérations restantes à deux stations. Il y a trois cas à considérer:

(i) $u_{\{1,2\}} + u_{\{1\}} \leq r$. Dans ce cas, affecter toutes $\{1,2\}$-opérations et $\{1\}$-opérations à une station, et affecter toutes $\{2\}$-opérations à une autre station.

(ii) $u_{\{1,2\}} + u_{\{1\}} > r$ et $u_{\{1,2\}} + u_{\{2\}} \leq r$. Dans ce cas, affecter toutes $\{1,2\}$-opérations et $\{2\}$-opérations à une station, et affecter toutes $\{1\}$-opérations à une autre station.

(iii) $u_{\{1,2\}} + u_{\{1\}} > r$ et $u_{\{1,2\}} + u_{\{2\}} > r$. Dans ce cas, affecter des opérations arbitrairement à deux stations.

Si $u_{\{1\}} + u_{\{2\}} + u_{\{1,2\}} > 2r$, alors affecter des $\{1,2\}$-opérations restantes à une station, toutes les $\{1\}$-opérations restantes à une deuxième station et toutes les $\{2\}$-opérations restantes à une troisième station.

Cette affectation minimise le nombre de stations comme le critère principal et minimise $a_1x_1 + a_2x_2$ comme critère secondaire si $a_1 \geq a_2$.

Notons que le temps de résolution de l'algorithme RE-2 et la longueur de la description de la solution optimale correspondante sont des nombres constants.

3.2 Trois types de pièces

La Propriété 1 peut aussi être utilisée pour résoudre le problème P dans le cas $f = 3$. Pourtant, nous avons vérifié que dans ce cas, les calculs similaires à l'étape 2 de l'algorithme RE-2 doivent considérer de trop nombreux cas, qui contiennent diverses affectations de S-opérations, $S \in Z \subseteq \Big\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\Big\}$ à au plus sept stations non-complètes ou non-pures. Pour cette raison, nous avons décidé d'utiliser une formulation de programmation en nombres entiers du problème P et de montrer que sa solution peut être obtenue par un algorithme énumératif en combinaison avec des outils de l'algèbre linéaire.

Algorithme AE-3 (Arrondir et Énumérer pour le cas $f = 3$)

Étape 1. Affecter des S-opérations à $k_S := \lfloor \frac{n_S}{r} \rfloor$ S-stations complètes pures pour $S \in Z \subseteq \Big\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\Big\}$.

Étape 2. Le nombre de stations nécessaires pour affecter des opérations restantes est égal à $m := m^* - \sum_{S\in Z} k_S \leq 7$. Numéroter ces stations $1,\ldots,m$. Il est facile de montrer qu'il existe une solution optimale, dans laquelle $u_{\{1,2,3\}} := n_{\{1,2,3\}} - k_{\{1,2,3\}}r$ $\{1,2,3\}$-opérations restantes sont affectées à la même station. Supposons, sans perte de généralité, qu'elles sont affectées à la station 1. Réinitialiser $Z := Z\backslash\{1,2,3\}$ et renuméroter les sous-ensembles de cet ensemble. Si l'ensemble initial Z contient sept sous-ensembles, alors réinitialiser $Z := \{1,\ldots,6\}$, voir Tableau 1. S'il contient $q < 7$ sous-ensembles, alors réinitialiser $Z := \{1,\ldots,q-1\}$. Dans ce qui suit, nous supposons que l'ensemble initial Z contient sept sous-ensembles.

Tableau 1: Sous-ensembles $S \in Z$ et leur notation.

{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}
1	2	3	4	5	6

Étape 3. Calculer les nombres de i-opérations non-affectées: $u_i = n_i - k_i r$, $i = 1,\ldots,6$.

Soit la variable y_{ij} le nombre de i-opérations affectées à une station j, $i = 1,\ldots,6$, $j = 1,\ldots,m$. Pour $y \geq 0$ définir une fonction $\mathrm{sgn}(y) = 0$ si $y = 0$ et $\mathrm{sgn}(y) = 1$ si $y > 0$. En ayant y_{ij}, le nombre de mises en service associées aves les opérations restantes, x'_t, $t = 1,2,3$, peuvent être calculés de la manière suivante:

$$x'_1 = \sum_{j=2}^{m} \mathrm{sgn}(y_{1j} + y_{4j} + y_{5j}),$$

$$x'_2 = \sum_{j=2}^{m} \mathrm{sgn}(y_{2j} + y_{4j} + y_{6j}),$$

$$x'_3 = \sum_{j=2}^{m} \mathrm{sgn}(y_{3j} + y_{5j} + y_{6j}).$$

Le problème d'affectation optimale (à l'égard du problème P) de i-opérations, $i = 1,\ldots,6$, à m stations peut être formulé comme le problème en nombres entiers suivant (notons ce problème comme IP-3).

Problème IP-3:

$$\min\Big\{a_1 \sum_{j=2}^{m} \mathrm{sgn}(y_{1j} + y_{4j} + y_{5j}) +$$

$$+ a_2 \sum_{j=2}^{m} \mathrm{sgn}(y_{2j} + y_{4j} + y_{6j}) +$$

$$+ a_3 \sum_{j=2}^{m} \mathrm{sgn}(y_{3j} + y_{5j} + y_{6j})\Big\}, \quad (1)$$

S.c.:

$$\sum_{i=1}^{6} y_{i1} \leq r - u_{\{1,2,3\}},$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_{ij} \leq r,\ j = 2,3,\ldots,m, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = u_i,\ i = 1,\ldots,6, \quad (3)$$

$$y_{ij} \geq 0,\ i = 1,\ldots,6,\ j = 1,\ldots,m. \quad (4)$$

En ayant les valeurs admissibles y_{ij} à l'égard de (2)-(4), considérons une collection $c(y)$ de triplets $3(m-1)$:

$$c(y) = \{(y_{1j}, y_{4j}, y_{5j}), (y_{2j}, y_{4j}, y_{6j}),$$

$$(y_{3j}, y_{5j}, y_{6j}) \mid j = 2,3,\ldots,m\}.$$

Notons que la fonction objectif (1) n'est pas linéaire. L'information importante concernant sa minimisation correspond aux triplets de la collection $c(y)$ qui sont égaux à (0,0,0). Si un triplet de $c(y)$ n'est pas égal à (0,0,0), alors son contenu spécifique n'influence pas la valeur de la fonction objective. Soit C l'ensemble des collections $c(y)$ avec divers triplets spécifiés (0,0,0). Il y en a $|C| \leq 2^{3(m-1)} \leq 2^{18}$.

Le problème se réduit donc à trouver une solution arbitraire du système d'inégalités linéaires (2)-(4) pour chaque $c(y) \in C$ et choisir $c(y)$ avec les valeurs correspondantes de y_{ij} qui minimise la fonction objectif (1).

Le temps de résolution de l'algorithme RE-3 est deteminé par le temps de résolution du problème IP-3, qui est égal à $O(2^{3(m-1)}T)$, où T est le temps pour trouver une solution basique admissible de (2)-(4). Puisque $m \leq 7$, l'algorithme RE-3 s'exécute en temps constant.

3.3 f types de pièces

Un algorithme similaire à l'algorithme RE-3 peut être développé pour le cas de f arbitraire. Il emploie la Propriété 2.

Rappelons que $|Z| \leq 2^f - 1$. Soit Z_t, $Z_t \subseteq Z$ l'ensemble de sous-ensembles dans Z dont chaqun contient un type de pièces t. Par exemple, l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ appartient à Z_1, Z_2 et Z_3.

Algorithme AE (Arrondir et Énumérer pour le cas de f arbitraire)

Étape 1. Affecter des S-opérations à m_S S-stations complètes pures pour $S \in Z$, voir la Propriété 2.

Étape 2. Le nombre de stations nécessaires pour affecter les opérations restantes est égal à

$$m := m^* - \sum_{S \in Z} m_S \leq 1 + \frac{|Z| U_f (r-1)}{r}.$$

Notons que m est borné par une fonction qui dépend exclusivement de f.

Numéroter ces stations $1, \ldots, m$. Re-numéroter les sous-ensembles de l'ensemble Z de sorte que $Z := \{1, \ldots, |Z|\}$.

Étape 3. Calculer les nombres de i-opérations non-affectées:: $u_i = n_i - m_i r$, $i = 1, \ldots, |Z|$.

Soit y_{ij} le nombre de i-opérations affectées à une station j, $i = 1, \ldots, |Z|$, $j = 1, \ldots, m$. Le problème P peut être formulé comme le problème en nombres entiers suivant (notons ce problème comme IP).

Problème IP:

$$\min \Big\{ \sum_{t=1}^{f} a_t \sum_{j=1}^{m} \operatorname{sgn}\Big(\sum_{i \in Z_t} y_{ij} \Big) \Big\}, \tag{5}$$

S.c.:

$$\sum_{i \in Z} y_{ij} \leq r, \; j = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = u_i, \; i = 1, \ldots, |Z|, \tag{7}$$

$$y_{ij} \geq 0, \; i = 1, \ldots, |Z|, \; j = 1, \ldots, m. \tag{8}$$

En ayant les valeurs admissibles y_{ij}, à l'égard de (6)-(8), considérons une collection $d(y)$ de mf $|Z_t|$-tuples

$$d(y) = \{(y_{ij} \mid i \in Z_t) \mid t = 1, \ldots, f, \; j = 1, \ldots, m\}.$$

Soit D l'ensemble des collections $d(y)$ avec divers $|Z_t|$-tuples spécifiés $(0, \ldots, 0)$. Il y en a $|D| \leq 2^{mf}$.

Le problème se réduit donc à trouver une solution arbitraire du système (6)-(8) pour chaque $d(y) \in D$ et choisir $d(y)$ avec les valeurs correspondantes de y_{ij} qui minimise la fonction objectif (5). Cela peut être accompli en temps $O(2^{mf}E)$, où E est le temps pour trouver une solution basique admissible de (6)-(8).

Le temps de résolution de l'algorithme RE est une constante si f est une constante parce que m et E sont bornés par des fonctions qui dépendent exclusivement de f.

4 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le problème d'optimisation, qui consiste à trouver une configuration optimale d'une ligne d'usinage multi-produit a été étudié. Il a été modelisé comme le problème P, pour lequel la minimisation du nombre de station est un critère principal et la minimisation du coût total de mises en service est un critère secondaire. Les propriétés d'une solution optimale ont été établies, et des algorithmes de résolution en temps constant ont été développés pour les cas $f = 2$, $f = 3$ et un f arbitraire.

Le problème P peut être généralisé pour inclure des relations de précédence, inclusion et exclusion sur l'ensemble d'opérations. En ce moment, nous travaillons sur ces généralisations.

Nous pensons que le critère considéré de minimisation du coût total de mises en service est important et qu'il mérite d'être étudié dans le contexte d'autres problèmes d'équilibrage de lignes de production.

5 RÉFÉRENCES

Boysen, N., M. Fliedner, et A. Scholl, 2007. A classification of assembly line balancing problems. *European Journal of Operational Research*, 183, p. 674-693.

Dolgui, A., N. Guschinsky, G. Levin, et J.M. Proth, 2008. Optimisation of multi-position machines and transfer lines. *European Journal of Operational Research*, 185, p. 1375-1389.

Erel, E., et S.C. Sarin, 1998. A survey of the assembly line balancing procedures. *Production Planning and Control*, 9, p. 34-45.

Guschinskaya, O., et A. Dolgui, 2009. Comparison of exact and heuristic methods for a transfer line balancing problem. *International Journal of Production Economics*, 120, p. 276-286.

Rekiek, B., A. Dolgui, A. Delchambre, et A. Bratcu, 2002. State of art of assembly lines design optimization. *Annual Reviews in Control*, 26, p. 163-174.